Satz 2342. (Eine allgemeinere Variante von Satz 2.3.4.2.)
Sei $\mathcal{K}$ eine Varietät (siehe Definition 2.1.8.6) von Algebren, oder die Klasse aller Körper. Sei $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Algebren in $\mathcal{K}$, und $(f_n : n \in \mathbb{N})$ eine Familie, sodass jedes $f_n : \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_{n+1}$ ein Homomorphismus ist.[4] Dann gilt:

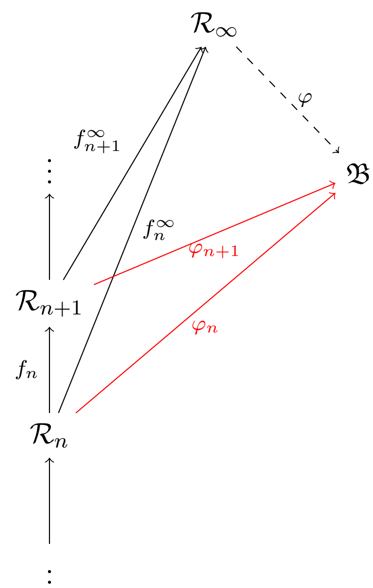
(∗) Es gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Algebra $\mathcal{R}_\infty \in \mathcal{K}$ sowie (eindeutig bestimmte) Homomorphismen $f_n^\infty : \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_\infty$ mit folgender Eigenschaft:
Erstens: für alle n gilt $f_{n+1}^\infty \circ f_n = f_n^\infty$, und zweitens:
Für jede Algebra $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ und jede Familie $(\varphi_n : n \in \mathbb{N})$ von Homomorphismen $\varphi_n \colon \mathcal{R}_n \to \mathfrak{B}$, die $\forall n : \varphi_n = \varphi_{n+1} \circ f_n$ erfüllen,
gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi \colon \mathcal{R}_\infty \to \mathfrak{B}$, der $\forall n : \varphi \circ f_n^\infty = \varphi_n$ erfüllt.

(Überdies gilt: R_∞, die Trägermenge von $\mathcal{R}_\infty$ ist die Vereinigung $R_\infty = \bigcup_n f_n^\infty(R_n)$.)

2008. Seien $\mathcal{K}$ und $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Satz 2342. Finden Sie eine Kategorie $\mathcal{C}$, sodass die Aussage „In $\mathcal{C}$ gibt es ein initiales Element“ eine Umformulierung von Folgerung (∗) in Satz 2342 ist.

(Wenn Ihnen das zu einfach ist: Finden Sie weiters eine Kategorie $\mathcal{D}$, sodass die betrachtete Aussage auch äquivalent zu „In $\mathcal{D}$ gibt es ein terminales Element“ ist.)

(Noch immer zu einfach? Dann modifizieren Sie die Konstruktion in UE 125 so, dass sie zu einem Beweis von Satz 2342 wird.)



2009. Sei (C, ι_1, ι_2) ein Koprodukt von C_2 mit C_2 in der Varietät der Gruppen. (C_2 ist die/eine zweielementige zyklische Gruppe)
Zeigen Sie, dass C unendlich groß ist, und dass C nicht kommutativ ist.
Hinweis: Finden Sie verschiedene Homomorphismen von C_2 in die Gruppe G aller Permutationen von $\mathbb{Z}$, die benachbarte Elemente immer auf benachbarte Elemente abbilden. Anders gesagt: Sei $A := \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : |x-y| = 1\}$; die Gruppe G ist dann die Menge aller Automorphismen der relationalen Struktur $(\mathbb{Z}, A)$.

[4] Automatisch werden dadurch für alle $n \le k$ Homomorphismen $f_n^k : \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_k$ definiert ($f_n^n = \mathrm{id}$, $f_n^{n+1} = f_n$, etc – was heißt „etc“ hier?), die offensichtlich „kommutieren“: Für $n \le n' \le n''$ gilt immer $f_n^{n''} = f_{n'}^{n''} \circ f_n^{n'}$.

2010. Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $\mathcal{V}$ eine Varietät. Für $i = 1, 2$ sei $\mathfrak{F}_i \in \mathcal{V}$ frei über (B_i, ι_i), wobei der Einfachheit halber $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ sei. Weiters sei $(\mathfrak{F}, j_1, j_2)$ ein Koprodukt von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$. Dann gilt

(a) $(j_1 \circ \iota_1)(B_1) \cap (j_2 \circ \iota_2)(B_2) = \emptyset$

(b) Setzt man $B = B_1 \dot\cup B_2$ und $\iota := (j_1 \circ \iota_1) \dot\cup (j_2 \circ \iota_2)$ (also $\iota(b_i) = j_i(\iota_i(b_i))$ für $b_i \in B_i$ und $i = 1, 2$), dann ist $\mathfrak{F}$ frei über (B, ι).

2011. Sei R ein Integritätsbereich, $q, r, s \in R^\times$ mit $q = rs$. Zeigen Sie: Bei r handelt es sich genau dann um eine Einheit, wenn $q \sim s$. Schließen Sie daraus, dass für jedes $p \in R^\times$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Für alle $a, b \in R : (p = ab \;\Rightarrow\; a \sim 1 \;\vee\; b \sim 1)$.

1'. Für alle $a, b \in R : (p = ab \;\Rightarrow\; a|1 \;\vee\; b|1)$.

2. Für alle $a, b \in R : (p = ab \;\Rightarrow\; a \sim p \;\vee\; b \sim p)$.

2'. Für alle $a, b \in R : (p = ab \;\Rightarrow\; p|a \;\vee\; p|b)$.

3 Für alle $a, b \in R : (p = ab \;\Rightarrow\; a$ trivialer Teiler $\vee\; b$ trivialer Teiler$)$.