Vojtěch Jarník

Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven

Math. Zeitschr. 24 (1926), pp. 500--518

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500690

Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven.

Von

Vojtěch Jarník in Göttingen.

---

§ 1.

Formulierung der Hauptsätze.

Es seien in der Ebene zwei rechtwinklige Koordinatenachsen u, v gegeben. Es sei $x > 3$. Dann bezeichne ich als eine „Kurve der Klasse $L(x)$“ oder kürzer als „eine $L(x)$“ jede Kurve C der u-v-Ebene, die folgenden Voraussetzungen genügt:

1. C ist eine stetige rektifizierbare Kurve, deren Länge höchstens gleich x ist.

2. C hat eine stetig veränderliche Tangente.

3. Es soll möglich sein, auf C einen Durchlaufungssinn so zu wählen, daß, wenn τ den (im positiven Sinn gemessenen) Winkel der gerichteten Tangente mit der positiven u-Achse bezeichnet, stets $0 \leqq \tau \leqq \frac{\pi}{4}$ ist.

4. Der Winkel τ soll beständig wachsen, wenn der zugehörige Punkt die Kurve C in dem unter 3. festgelegten Sinn durchläuft.

Analytisch läßt sich das Gesagte so formulieren: Eine Kurve C ist eine $L(x)$, wenn sie durch eine Gleichung

$$v = F(u) \qquad (u_1 \leqq u \leqq u_2)$$

gegeben ist, wo $F(u)$ folgenden Voraussetzungen genügt:

1. $F(u)$ ist für $u_1 \leqq u \leqq u_2$ definiert und hat daselbst eine stetige Ableitung[1]) $F'(u)$.

---

[1]) Wenn ich von einer ersten oder zweiten Ableitung in einem Endpunkte des Definitionsintervalls einer Funktion spreche, verstehe ich darunter stets die zugehörige *einseitige* Ableitung.

2. Falls $u_1 \leqq u' < u'' \leqq u_2$ ist, so ist

$$0 \leqq F'(u') < F'(u'') \leqq 1.$$

3. $\int\limits_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + F'^2(u)}\, du \leqq x.$

Auf jeder Kurve C der Klasse $L(x)$ liegt eine gewisse Anzahl g_C von Gitterpunkten; offenbar ist g_C ganz und $0 \leqq g_C \leqq [x] + 1$. Die Menge der Zahlen g_C für alle C der Klasse $L(x)$ enthält daher nur endlich viele verschiedene Zahlen; ihre obere Grenze sei $f(x)$. Offenbar gibt es wenigstens eine Kurve der Klasse $L(x)$, auf welcher genau $f(x)$ Gitterpunkte liegen. Dann lautet der

Satz 1.

$$f(x) = \frac{3}{2\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

Der Satz 2 beschäftigt sich mit einer verwandten Frage; nur werden andere Kurven zur Konkurrenz zugelassen. Der wichtigste Unterschied zwischen Satz 1 und Satz 2 besteht in einer Einschränkung der Größe des Krümmungsradius für die zugelassenen Kurven. Der genaue Wortlaut des Satzes 2 ist der folgende:

Es sei $x > 0$. Ich bezeichne als eine Kurve der Klasse $M(x)$ jede Kurve C der u-v-Ebene, die folgenden Voraussetzungen genügt:

1. C ist eine einfache, geschlossene, konvexe Kurve, die eine stetig veränderliche Tangente und einen stetig veränderlichen, immer von 0 verschiedenen Krümmungsradius besitzt.
2. Die Länge der Kurve C ist höchstens gleich x.
3. Der Krümmungsradius von C ist in jedem Punkte dem absoluten Betrage nach kleiner als $7x$.

Auf jeder Kurve C der Klasse $M(x)$ liegt eine gewisse Anzahl g_C von Gitterpunkten; die obere Grenze von g_C für alle C der Klasse $M(x)$ sei $\varphi(x)$; es gibt auch hier offenbar mindestens eine Kurve der Klasse $M(x)$, auf welcher genau $\varphi(x)$ Gitterpunkte liegen. Dann lautet der

Satz 2.

$$\varphi(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

§ 2.

Beweis des Satzes 1.

Um den Satz 1 zu beweisen, führe ich zunächst folgende Definition ein: Es sei $x > 3$; ein System von n verschiedenen Punkten $(n \geqq 2)$ der u-v-Ebene $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nenne ich ein $\mathfrak{P}(x)$-System, wenn folgendes gilt:

1. $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sind Gitterpunkte;

2. die Länge des geradlinigen Streckenzuges $P_1 P_2 \ldots P_n$, der dadurch entsteht, daß man jeden Punkt P_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ mit dem Punkte P_{i+1} durch eine Strecke verbindet, ist kleiner als x;

3. wenn α_i den Winkel bedeutet, den die gerichtete Strecke $\overline{P_i P_{i+1}}$ mit der positiven u-Achse bildet, so ist $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{4}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ und im Falle $n > 2$ noch $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$.

Zu jedem $x > 3$ gibt es mindestens ein $\mathfrak{P}(x)$-System; denn z. B. die Punkte $(0, 0)$, $(2, 1)$ bilden ein solches. Jedes $\mathfrak{P}(x)$-System setzt sich also aus einer gewissen Anzahl n von Punkten zusammen. Die obere Grenze von n für alle $\mathfrak{P}(x)$-Systeme sei $g(x)$. Offenbar gibt es auch hier ein $\mathfrak{P}(x)$-System von genau $g(x)$ Punkten. Ich behaupte: $g(x) = f(x)$. Denn erstens, wenn ich ein $\mathfrak{P}(x)$-System von $g(x)$ Punkten habe, so läßt sich offenbar durch sie ein konvexer Kurvenzug führen, der zur Klasse $L(x)$ gehört; also ist $f(x) \geqq g(x)$. Zweitens, wenn auf einer $L(x)$ genau $f(x)$ Gitterpunkte liegen, so bilden sie (es ist $f(x) \geqq g(x) \geqq 2$) offenbar ein $\mathfrak{P}(x)$-System; also ist $g(x) \geqq f(x)$.

Es seien nun u_i, v_i die Koordinaten von P_i; ich setze

$$k_i = u_{i+1} - u_i, \qquad l_i = v_{i+1} - v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1}$$

Dann ist für ein $\mathfrak{P}(x)$-System:

$$\left\{\begin{array}{l} k_i > 0,\ l_i > 0;\ k_i,\ l_i \text{ ganz} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1;\ n \geqq 2); \\ 0 < \frac{l_1}{k_1} < \frac{l_2}{k_2} < \ldots < \frac{l_{n-1}}{k_{n-1}} < 1; \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sqrt{k_i^2 + l_i^2} < x. \end{array}\right. \tag{2}$$

Umgekehrt, wenn ein System von Zahlen $k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{n-1}, l_{n-1}$ (2) erfüllt, so kann ich z. B. $u_1 = v_1 = 0$ setzen und $u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$ aus (1) bestimmen; dann bilden die n Punkte mit den Koordinaten u_i, v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ offenbar ein $\mathfrak{P}(x)$-System. Also ist $f(x) = g(x) = h(x)$, wenn $h(x)$ die größtmögliche Zahl n bedeutet, für welche noch (2) durch ein gewisses System von Zahlen $k_1, l_1, \ldots, k_{n-1}, l_{n-1}$ erfüllbar ist.

Für $h(x) = f(x)$ will ich nun eine explizite Darstellung geben.

Hilfssatz 1. *Es sei $x > 3$, $m \geqq 3$ und ganz; es bedeute $U(m)$ die Anzahl der Lösungen von*

$$m = k^2 + l^2, \quad k > l > 0, \quad k, l \text{ ganz}, \quad (k, l) = 1;$$

es sei die ganze Zahl $r \geqq 3$ so gewählt, daß

$$\sum_{m=3}^{r} U(m) \sqrt{m} < x \leqq \sum_{m=3}^{r+1} U(m) \sqrt{m}$$

und die ganze Zahl $k \geqq 0$ so, daß

$$\sum_{m=3}^{r} U(m)\sqrt{m} + k\sqrt{r+1} < x \leqq \sum_{m=3}^{r} U(m)\sqrt{m} + (k+1)\sqrt{r+1}.$$

Behauptung. $h(x) = \sum\limits_{m=3}^{r} U(m) + k + 1$.

Vorbemerkung. Daß die Wahl der Zahl r immer möglich ist, folgt daraus, daß $x > 3$, aber $U(3) = 0$ ist.

Beweis. Ein System von $h(x)-1$ Zahlenpaaren $k_1, l_1, \ldots, k_{h(x)-1}, l_{h(x)-1}$, die (2) mit $n = h(x)$ erfüllen, nenne ich ein Maximalsystem; wenn überdies $(k_i, l_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, h(x)-1$ ist, ein primitives Maximalsystem. Daß es Maximalsysteme gibt, wissen wir schon. Es liege also ein Maximalsystem k_i, l_i $(i = 1, \ldots, h(x)-1)$ vor; es sei $\delta_i = (k_i, l_i)$. Dann bilden die Zahlen $k_i' = \frac{k_i}{\delta_i}$, $l_i' = \frac{l_i}{\delta_i}$ $(i = 1, \ldots, h(x)-1)$ offenbar auch ein Maximalsystem, und zwar ein primitives Maximalsystem, da $(k_i', l_i') = 1$.

Ich behaupte nun: wenn ein primitives Maximalsystem vorliegt, so ist $k_i^2 + l_i^2 \geqq 3$ und bei gegebenem m ist die Gleichung $k_i^2 + l_i^2 = m$ höchstens für $U(m)$ Werte von i erfüllt. Denn erstens, wäre $k_i^2 + l_i^2 = 1$ bzw. $= 2$, so müßte $k_i = 1$, $l_i = 0$ bzw. $k_i = 1$, $l_i = 1$ sein, was (2) widerspricht. Wäre zweitens für ein gewisses $m \geqq 3$ die Gleichung $k_i^2 + l_i^2 = m$ für mehr als $U(m)$ Werte von i erfüllt, so wäre für gewisse zwei verschiedene Indizes s, t: $k_s = k_t$, $l_s = l_t$, also $\frac{l_s}{k_s} = \frac{l_t}{k_t}$, was wieder mit (2) im Widerspruch steht.

Es liege nun ein primitives Maximalsystem vor, in welchem folgendes gilt: .

Es ist $k_i^2 + l_i^2 = m$ genau für $U(m)$ Werte von i, wenn $m = 3, 4, \ldots, M-1$ ist (für $m = 3$ ist dies wegen $U(3) = 0$ immer der Fall); weiter ist $k_i^2 + l_i^2 = M$ für s Werte von i, wo $0 \leqq s < U(M)$; und endlich ist für ein gewisses h: $k_h^2 + l_h^2 > M$. Ich konstruiere nun ein neues primitives Maximalsystem folgendermaßen: ich lasse aus unserem System k_h, l_h weg und ersetze sie durch ein Zahlenpaar k, l, für welches $k^2 + l^2 = M$, $0 < l < k$, k, l ganz, $(k, l) = 1$ ist und welches im ursprünglichen System nicht vorkam (das ist wegen $s < U(M)$ möglich). Wenn ich noch die Indizes geeignet verändere, bildet dieses neue System wieder ein primitives Maximalsystem, in welchem wieder $k_i^2 + l_i^2 = m$ für genau $U(m)$ Werte von i ist, wenn $m = 3, 4, \ldots, M-1$, aber $k_i^2 + l_i^2 = M$ für $s+1$ Werte von i.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens bekomme ich endlich ein primitives Maximalsystem $k_1, l_1, \ldots, k_{h(x)-1}, l_{h(x)-1}$, in welchem folgendes gilt: Es gibt zwei ganze Zahlen R und K, wo $R \geqq 3$, $0 \leqq K < U(R+1)$ ist, so daß die Gleichung $k_i^2+l_i^2=m$ für genau $U(m)$ Werte von i erfüllt ist, falls $m=3,4,\ldots,R$; die Gleichung $k_i^2+l_i^2=R+1$ genau für K Werte von i, und die Ungleichung $k_i^2+l_i^2>R+1$ für kein i erfüllt ist. Also ist

$$h(x)=\sum_{m=3}^{R}U(m)+K+1. \tag{3}$$

Weiter ist für unser System

$$\sum_{i=1}^{h(x)-1}\sqrt{k_i^2+l_i^2}=\sum_{m=3}^{R}U(m)\sqrt{m}+K\sqrt{R+1}.$$

Daher ist

$$\sum_{m=3}^{R}U(m)\sqrt{m}+K\sqrt{R+1}<x. \tag{4}$$

Andererseits ist aber

$$\sum_{m=3}^{R}U(m)\sqrt{m}+(K+1)\sqrt{R+1}\geqq x; \tag{5}$$

denn, wäre dieser Ausdruck $<x$, so könnten wir zu unserem System noch ein in ihm nicht enthaltenes Zahlenpaar k,l hinzufügen, für welches k,l ganz, $0<l<k$, $(k,l)=1$, $k^2+l^2=R+1$ ist (ein solches Zahlenpaar ist wegen $K<U(R+1)$ vorhanden), so daß auch das erweiterte System die Bedingungen (2) erfüllen würde; das ist aber bei einem Maximalsystem unmöglich. Aus (4) und (5) folgt aber $R=r$, $K=k$, womit wegen (3) der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Ei sei $y>0$; dann ist*

$$\sum_{m=3}^{[y]}U(m)=\frac{3}{4\pi}y+O(y^{\frac{1}{2}}), \tag{6}$$

$$\sum_{m=3}^{[y]}U(m)\sqrt{m}=\frac{1}{2\pi}y^{\frac{3}{2}}+O(y). \tag{7}$$

(*Für $\alpha<3$ verstehe ich unter $\sum_{m=3}^{\alpha}$ Null.*)

Beweis. Es sei (für $y>0$) $F(y)$ die Anzahl der Lösungen von

$$k^2+l^2\leqq y,\qquad k,l\gtreqless 0 \text{ ganz},\qquad (k,l)=1. \tag{8}$$

Dann ist für $y>3$

$$F(y)=8\sum_{m=3}^{[y]}U(m)+8; \tag{9}$$

denn zu jeder Lösung von $3\leqq\varkappa^2+\lambda^2\leqq y$, $0<\lambda<\varkappa$, $\varkappa,\lambda$ ganz, $(\varkappa,\lambda)=1$ gehören acht Lösungen von (8), nämlich $k=\pm\varkappa$, $l=\pm\lambda$ und $k=\pm\lambda$, $l=\pm\varkappa$, wo die Vorzeichen unabhängig voneinander zu nehmen sind, und dazu treten noch die acht Lösungen $k=0,\ l=\pm 1$; $k=\pm 1,\ l=0$; $k=\pm 1,\ l=\pm 1$ von (8) hinzu. Es sei (für $y>0$) $A(y)$ die Anzahl der Lösungen von $0<k^2+l^2\leqq y$, k, l ganz; d. h. $A(y)$ ist die Anzahl der vom Nullpunkt verschiedenen Gitterpunkte im Kreise $u^2+v^2=y$. Dann ist $A(y)$ offenbar auch gleich der Anzahl von Lösungen von $k^2+l^2\leqq \frac{y}{d^2}$, k, l, d ganz, $d>0$, $(k,l)=1$; d. h. es ist

$$A(y)=F(y)+F\left(\frac{y}{2^2}\right)+F\left(\frac{y}{3^2}\right)+\dots;$$

für $z<1$ ist $A(z)=F(z)=0$.

Diese Gleichung will ich nach $F(y)$ auflösen[2]).

Es ist

$$A\left(\frac{y}{n^2}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}F\left(\frac{y}{n^2 m^2}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)A\left(\frac{y}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\sum_{m=1}^{\infty}F\left(\frac{y}{n^2m^2}\right)=\sum_{l=1}^{\infty}F\left(\frac{y}{l^2}\right)\sum_{n\mid l}\mu(n)=F(y).\,^{3)}$$

Also ist

$$(10)\qquad F(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)A\left(\frac{y}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{[\sqrt{y}]}\mu(n)A\left(\frac{y}{n^2}\right).$$

Ich setze nun $A(y)=\pi y+R(y)$; nach dem Satz von Sierpiński ist für $y\geqq 1$: $|R(y)|\leqq c y^{\frac{1}{3}}$, wo c eine absolute Konstante ist. Daher ist nach (10)

$$F(y)=\sum_{n=1}^{[\sqrt{y}]}\mu(n)\cdot\pi\frac{y}{n^2}+O\left(y^{\frac{1}{3}}\sum_{n=1}^{[\sqrt{y}]}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right).$$

Weiter ist

$$\sum_{n=1}^{[\sqrt{y}]}\frac{\mu(n)}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}-\sum_{n=[\sqrt{y}]+1}^{\infty}=\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

da bekanntlich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}=\frac{6}{\pi^2},$$

$$\sum_{n=[\sqrt{y}]+1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=O\left(\sum_{n>\sqrt{y}}\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

---

[2]) Alle folgenden Operationen mit unendlichen Reihen sind legitim, da alle vorkommenden Reihen von selbst im Endlichen abbrechen.

[3]) Wegen der Definition der Funktion $\mu(n)$ und ihrer einfachsten Eigenschaften vgl. z. B. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung von Primzahlen, Bd. 2, S. 567 und 575.

ist. Endlich ist

$$\sum_{n=1}^{[\sqrt{y}]} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = O(y^{\frac{1}{6}}),$$

so daß

$$F(y) = \frac{6}{\pi} y + O(y^{\frac{1}{2}});$$

daraus folgt aber wegen (9) die Behauptung (6). Aus (6) folgt aber (7) durch partielle Summation:

$$\sum_{m=3}^{[y]} U(m)\sqrt{m} = \sum_{m=3}^{[y]} \left(\sum_{n=3}^{m} U(n) - \sum_{n=3}^{m-1} U(n) \right) \sqrt{m}$$

$$= \sum_{m=3}^{[y]} \left(\sum_{n=3}^{m} U(n) \right) (\sqrt{m} - \sqrt{m+1}) + \sum_{n=3}^{[y]} U(n) \cdot \sqrt{[y]+1}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{m=3}^{[y]} \left(\sum_{n=3}^{m} U(n) \right) \int_{m}^{m+1} \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{3}{4\pi} y^{\frac{3}{2}} + O(y) \qquad \text{(nach 6)}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{m=3}^{[y]} \int_{m}^{m+1} \left(\sum_{n=3}^{[u]} U(n) \right) \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{3}{4\pi} y^{\frac{3}{2}} + O(y)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{3}^{[y]+1} \left(\frac{3}{4\pi} u + O(u^{\frac{1}{2}}) \right) \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{3}{4\pi} y^{\frac{3}{2}} + O(y)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} y^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4\pi} y^{\frac{3}{2}} + O(y) = \frac{1}{2\pi} y^{\frac{3}{2}} + O(y),$$

w. z. b. w.

Schluß des Beweises des Satzes 1. Nach Hilfssatz 1 ist

$$h(x) = \sum_{m=3}^{r} U(m) + k + 1,$$

wo $0 \leqq k < U(r+1)$ ist; also

$$\sum_{m=3}^{r} U(m) < h(x) \leqq \sum_{m=3}^{r+1} U(m), \tag{11}$$

wo

$$\sum_{m=3}^{r} U(m)\sqrt{m} < x \leqq \sum_{m=3}^{r+1} U(m)\sqrt{m}.$$

Also ist nach (7)

$$\frac{1}{2\pi} r^{\frac{3}{2}} + O(r) < x \leqq \frac{1}{2\pi}(r+1)^{\frac{3}{2}} + O(r+1),$$

d. h.

$$x = \frac{1}{2\pi} r^{\frac{3}{2}} + O(r);$$

daraus $r = O(x^{\frac{2}{3}})$; also

$$r^{\frac{3}{2}} = 2\pi x + O(x^{\frac{2}{3}}),$$
$$r = (2\pi x)^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

Also ist, wegen (11) und (6):

$$\frac{3}{4\pi} r + O(r^{\frac{1}{2}}) < h(x) \leqq \frac{3}{4\pi}(r+1) + O((r+1)^{\frac{1}{2}}),$$

d. h.

$$h(x) = \frac{3}{4\pi} r + O(r^{\frac{1}{2}}) = \frac{3}{4\pi}(2\pi x)^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{3}{2\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

Damit ist aber Satz 1 bewiesen.

§ 3.

Eine Anwendung des Satzes 1.

Cauer[4]) hat folgenden Satz bewiesen:

Es sei im ersten Quadranten einer u-v-Ebene eine Kurve γ gegeben, die von einem Punkt der v-Achse, auf dieser senkrecht stehend, ausgeht und, ohne mit einer Horizontalen oder Vertikalen mehr als einen Punkt gemeinsam zu haben, in einem Punkt der u-Achse, auch auf dieser senkrecht stehend, endet. γ habe stetige, nicht verschwindende Krümmung, auch in den Endpunkten, und werde dargestellt durch eine Gleichung

$$f(u, v) = a_0 u^n + a_1 u^{n-1} v + \ldots + a_n v^n = 1 \qquad (n \geqq 2),$$

wo die Koeffizienten, soweit es die anderen Voraussetzungen zulassen, beliebige reelle Zahlen sind.

Es sei $A(x)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$f(|u|, |v|) \leqq x;$$

es sei $B(x)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$f(u, v) = x, \quad u \geqq 0, \quad v \geqq 0.$$

Es sei β eine nur von der Funktion $f(u, v)$ abhängende Zahl, für die $B(x) = O(x^\beta)$ ist. Dann ist

$$(12) \qquad A(x) = J x^{\frac{2}{n}} + O(x^\beta) + O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right),$$

wo

$$J = \iint\limits_{f(|u|, |v|) \leqq 1} du\, dv$$

ist.

---

[4]) D. Cauer, Über die Pfeiffersche Methode (Abhandlungen, H. A. Schwar: zum 50-jährigen Doktorjubiläum gewidmet; Berlin, Jul. Springer, 1914; S. 432—447

Ich will zeigen, daß

$$B(x) = O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right) \tag{13}$$

ist; damit wird (12) zu

$$A(x) = Jx^{\frac{2}{n}} + O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right) \tag{14}$$

verbessert.

Wenn l die Länge der Kurve $f(u, v) = 1$, $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ bezeichnet, so ist die Länge der Kurve $f(u, v) = x$, $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ offenbar gleich $l \cdot x^{\frac{1}{n}}$. Diese Kurve genügt also, wie man aus den Voraussetzungen über die Kurve $f(u, v) = 1$ sieht, allen Bedingungen für eine Kurve der Klasse $L\left(lx^{\frac{1}{n}}\right)$, bis auf die Bedingung 3 (vgl. § 1); wenn wir nämlich die Kurve von ihrem Schnittpunkt mit der u-Achse zu ihrem Schnittpunkt mit der v-Achse durchlaufen, so wächst der Winkel τ von $\frac{\pi}{2}$ bis zu π. Ich teile nun unsere Kurve in zwei Teile K_1, K_2, so daß auf K_1 bzw. K_2 gilt:

$$\frac{\pi}{2} \leqq \tau \leqq \frac{3\pi}{4} \text{ bzw. } \frac{3\pi}{4} \leqq \tau \leqq \pi.$$

K_1 und K_2 kann man dann durch Spiegelungen an den Koordinatenachsen und ihren Symmetralen — wodurch Gitterpunkte in Gitterpunkte übergehen — in zwei Kurven K_1', K_2' überführen, auf welchen $0 \leqq \tau \leqq \frac{\pi}{4}$. Die Kurven K_1', K_2' gehören nun offenbar zur Klasse $L\left(lx^{\frac{1}{n}}\right)$; also ist die Anzahl der Gitterpunkte auf K_1' und K_2' nach Satz 1 höchstens $2f\left(lx^{\frac{1}{n}}\right) = O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right)$; daher ist auch $B(x) = O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right)$, womit (13) und (14) bewiesen ist.

Man kann allerdings heute (14) noch auf eine andere Weise beweisen, nämlich als eine unmittelbare Folge eines allgemeinen Satzes des Herrn van der Corput[5]).

§ 4.

Beweis des Satzes 2.

Den Beweis dieses Satzes zerlege ich in zwei Teile.

I. Teil. Ich will zuerst zeigen, daß

$$\varphi(x) \leqq \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}}\, x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}) \tag{15}$$

---

[5]) Siehe z. B. J. G. van der Corput, Über Gitterpunkte in der Ebene, Math. Annalen **81**, S. 1—20; vgl. namentlich das Korollar auf S. 5.

ist. Das ergibt sich sehr leicht aus dem Satz 1. Es sei C eine Kurve der Klasse $M(x)$. Ich teile die Kurve C in acht Bogen C_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, so daß auf C_i der Winkel τ das Intervall $\left((i-1)\frac{\pi}{4},\ i\frac{\pi}{4}\right)$ durchläuft. Die Länge von C_i sei x_i. Ich kann nun C_i durch Spiegelungen an den Geraden $u = 0$, $v = 0$, $v = \pm u$ (wodurch Gitterpunkte in Gitterpunkte übergehen) in eine Kurve C_i' überführen, auf welcher $0 \leqq \tau \leqq \frac{\pi}{4}$ ist. Es ist dann entweder $x_i > 3$; dann gehört C_i' offenbar zur Klasse $L(x_i)$, also ist nach Satz 1 [6])

$$g_{C_i'} \leqq \frac{3}{2\sqrt[3]{2\pi}} x_i^{\frac{2}{3}} + O(x_i^{\frac{1}{3}});$$

oder ist $x_i \leqq 3$, und dann ist $g_{C_i'} \leqq 4$.

Also ist jedenfalls

$$g_C \leqq \frac{3}{2\sqrt[3]{2\pi}} \sum_{i=1}^{8} x_i^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

Nun ist $\sum\limits_{i=1}^{8} x_i \leqq x$, $x_i > 0$; also ist bekanntlich

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^{\frac{2}{3}} \leqq 8\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = 2x^{\frac{2}{3}};$$

daher ist

$$g_C \leqq \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}),$$

womit (15) bewiesen ist.

II. Teil. Es bleibt uns nur übrig zu zeigen, daß

$$\varphi(x) \geqq \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}) \tag{16}$$

ist. Um (16) zu beweisen, genügt es, folgendes zu zeigen:

(A) *Jedem $x > c$ kann man eine Kurve C_x der Klasse $M(x)$ zuordnen, so daß*

$$g_{C_x} \geqq \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}})$$

ist [7]).

Der Beweis von (A) ist ein wenig umständlich; ich zerlege ihn in drei Schritte.

---

[6]) Mit g_C bezeichne ich immer die Anzahl der Gitterpunkte auf der Kurve C.

[7]) Mit c bezeichne ich von nun ab positive absolute Konstanten, die ich nicht durch Indizes voneinander unterscheide.

1. Schritt. Ich will jedem $x > c$ ein ganz bestimmtes konvexes Polygon $Q(x)$ der u-v-Ebene zuordnen, dessen Länge $< x$ ist, dessen Ecken Gitterpunkte sind und welches $\frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}})$ Ecken besitzt.

Ich konstruiere $Q(x)$ folgendermaßen: Es sei $x > c$; dann wähle ich die ganze Zahl $r \geqq 3$ so, daß

$$\sum_{m=3}^{r} U(m)\sqrt{m} < \frac{x}{8} \leqq \sum_{m=3}^{r+1} U(m)\sqrt{m}. \tag{17}$$

Dann nehme ich alle untereinander verschiedenen Zahlenpaare k, l, die folgenden Voraussetzungen genügen: $k^2 + l^2 \leqq r$, k, l ganz, $0 < l < k$, $(k, l) = 1$. Ihre Anzahl sei n; dann ist nach (6)

$$n = \sum_{m=3}^{r} U(m) = \frac{3}{4\pi} r + O(r^{\frac{1}{2}}). \tag{18}$$

Ich versehe diese Zahlenpaare mit Indizes $1, 2, \ldots, n$, und zwar so, daß

$$0 < \frac{l_1}{k_1} < \frac{l_2}{k_2} < \ldots < \frac{l_n}{k_n} < 1 \tag{19}$$

ist. Aus (17) folgt weiter wegen (7)

$$\frac{x}{8} = \frac{1}{2\pi} r^{\frac{3}{2}} + O(r),$$

also

$$r^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{4} x + O(x^{\frac{2}{3}})$$

oder

$$r = \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}). \tag{20}$$

Also ist nach (18):

$$n = \frac{3}{8\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}). \tag{21}$$

Ich setze nun $u_0 = 0$, $v_0 = 0$; $u_i = \sum_{j=1}^{i} k_j$, $v_i = \sum_{j=1}^{i} l_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und konstruiere die Punkte P_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ mit den Koordinaten u_i, v_i. Dann konstruiere ich den Streckenzug, dessen Anfangs- bzw. Endpunkt der Punkt P_0 bzw. P_n ist und dessen Ecken der Reihe nach die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ sind. Durch den Punkt P_n führe ich die Gerade mit dem Richtungskoeffizienten -1. Diese Gerade schneidet die v-Achse in einem Punkt R, der notwendig ein Gitterpunkt ist. Ich verschiebe nun die Koordinatenachsen u, v parallel zu sich selbst so, daß der Anfangspunkt mit dem Punkt R zusammenfällt. Dabei behalten die Punkte $P_0, P_1, \ldots, P_n$ ihre Eigenschaft, Gitterpunkte zu sein, offenbar bei. Nun spiegele ich den Streckenzug $P_0 P_1 \ldots P_n$ an der Geraden $v = -u$; [8]) den so entstandenen Streckenzug mit $2n$ Seiten spiegele ich an der u-Achse und den so entstandenen Streckenzug mit $4n$ Seiten an der v-Achse. So entsteht ein Polygon $Q(x)$, das wirklich die verlangten Eigenschaften besitzt:

1. Die Länge von $Q(x)$ ist gleich

$$8 \sum_{i=1}^{n} \sqrt{k_i^2 + l_i^2} = 8 \sum_{m=3}^{r} U(m)\sqrt{m} < x \quad \text{(nach (17))}.$$

2. Die Ecken von $Q(x)$ sind Gitterpunkte.

3. Die Anzahl der Ecken von $Q(x)$ ist

$$(22) \qquad 8n = \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}) \quad \text{(nach (21))}.$$

4. $Q(x)$ ist konvex, wie man aus (19) und aus dem benutzten Spiegelungsverfahren sogleich sieht.

Dazu besitzt $Q(x)$ noch folgende Eigenschaften, die ich im folgenden brauchen werde:

5. Die Geraden $u = 0$, $v = 0$, $v = \pm u$ sind Symmetrieachsen von $Q(x)$.

6. Der Anfangspunkt liegt im Innern von $Q(x)$.

Die $8n$ Ecken von $Q(x)$ bezeichne ich der Reihe nach mit $P_0, P_1, \ldots$ (dabei sind die Punkte $P_0, P_1, \ldots, P_n$ bereits bezeichnet worden). Dabei setze ich fest, daß $P_m = P_{m'}$, sobald $m \equiv m' \pmod{8n}$ ist.

2. Schritt. Nun will ich für jedes $x > c$ durch die Ecken von $Q(x)$ eine konvexe geschlossene Kurve C_x' konstruieren, die eine stetig veränderliche Tangente und einen stetig veränderlichen Krümmungsradius, der stets dem absoluten Betrage nach $< 7x$ ist, besitzt; endlich soll die Länge von C_x' kleiner als $x + 25x^{\frac{1}{3}}$ sein. Um die Existenz einer solchen Kurve nachzuweisen, muß ich zunächst untersuchen, wie unser Polygon $Q(x)$ „gekrümmt" ist, d. h. ich muß für die Länge seiner Seiten und die Größe seiner Winkel einige Abschätzungen geben, die den Inhalt der beiden folgenden Hilfssätze bilden.

Hilfssatz 3. *Für $x > c$ sind alle Seiten $\overline{P_i P_{i+1}}$ von $Q(x)$ kleiner als $x^{\frac{1}{3}}$.*

[8]) Von nun ab meine ich unter u, v die neu eingeführten verschobenen Koordinatenachsen.

Beweis. Aus Symmetriegründen (Eigenschaft 5 von $Q(x)$) darf ich $0 \leqq i \leqq n-1$ voraussetzen. Dann ist die Länge von $\overline{P_i P_{i+1}} = \sqrt{k_{i+1}^2 + l_{i+1}^2}$ $\leqq \sqrt{r} = \left(\frac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + O(1)$ (nach (20))

$$< x^{\frac{1}{3}} \quad \text{für} \quad x > c.$$

Hilfssatz 4. *Es sei β_i der Außenwinkel von $Q(x)$ im Punkte P_i; dann ist für $x > c$ und für alle i:*

$$\frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}} < \operatorname{tg} \beta_i < \frac{10}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Beweis. Aus Symmetriegründen darf ich $0 \leqq i \leqq n$ voraussetzen. Ich bemerke, daß der Richtungskoeffizient der Strecke $\overline{P_i P_{i+1}}$ (für $i = 0, 1, \ldots, n-1$) gleich $\frac{l_{i+1}}{k_{i+1}}$ ist.

1. Es sei $1 \leqq i \leqq n-1$; dann ist

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{\frac{l_{i+1}}{k_{i+1}} - \frac{l_i}{k_i}}{1 + \frac{l_i}{k_i}\frac{l_{i+1}}{k_{i+1}}} \geqq \frac{1}{k_i k_{i+1} + l_i l_{i+1}} > \frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}},$$

weil $k_i, k_{i+1}, l_i, l_{i+1}$ nach Hilfssatz 3 sämtlich $< x^{\frac{1}{3}}$ sind.

2. Es sei $i = 0$; dann ist β_0 gleich dem Doppelten des Winkels, den die Strecke $\overline{P_0 P_1}$ mit der u-Achse bildet; also $\operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} = \frac{l_1}{k_1} > \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$; es ist aber $\frac{l_1}{k_1} < 1$, also $0 < \frac{\beta_0}{2} < \frac{\pi}{4}$; daher ist

$$\operatorname{tg} \beta_0 > \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} > \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} > \frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}}.$$

3. Es sei $i = n$; dann ist β_n das Doppelte des Winkels, den die Gerade mit dem Richtungskoeffizienten 1 mit der Strecke $\overline{P_{n-1} P_n}$ bildet, d. h.

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_n}{2} = \frac{1 - \frac{l_n}{k_n}}{1 + \frac{l_n}{k_n}} \geqq \frac{1}{k_n + l_n} > \frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}} > \frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}}.$$

Es ist wieder $0 < \operatorname{tg} \frac{\beta_n}{2} < 1$, also $0 < \frac{\beta_n}{2} < \frac{\pi}{4}$; daher ist

$$\operatorname{tg} \beta_n > \operatorname{tg} \frac{\beta_n}{2} > \frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}}.$$

Damit ist die untere Abschätzung für β_i für alle i bewiesen.

Nun setze ich $t = \left[\sqrt{\frac{r}{2}}\right]$.[9]) Dann treten unter den Zahlen $\frac{l_i}{k_i}$ sämt-

[9]) Es ist $t > 1$ für $x > c$.

liche Zahlen $\frac{s}{t}$ $(s = 1, 2, \ldots, t-1)$ auf; denn jede dieser Zahlen $\frac{s}{t}$ läßt sich in der Form $\frac{l}{k}$ schreiben, wo $0 < l < k \leqq t$, $(k, l) = 1$ ist, und also $k^2 + l^2 < 2t^2 \leqq r$. Daraus folgt:

1. $\frac{l_1}{k_1} \leqq \frac{1}{t}$; 2. $\frac{l_n}{k_n} \geqq \frac{t-1}{t}$; 3. falls ein i gegeben ist, wo $1 \leqq i \leqq n-1$, so läßt sich ein ganzes s_i $(0 \leqq s_i \leqq t-1)$ so finden, daß

$$\frac{s_i}{t} \leqq \frac{l_i}{k_i} < \frac{l_{i+1}}{k_{i+1}} \leqq \frac{s_i+1}{t}. \tag{a}$$

Daraus folgt aber weiter:

1. $\operatorname{tg}\frac{\beta_0}{2} = \frac{l_1}{k_1} \leqq \frac{1}{t}$, also $\operatorname{tg}\beta_0 < \frac{3}{t}$ (für $t > c$, also für $x > c$).

2. $\operatorname{tg}\frac{\beta_n}{2} = \dfrac{1 - \frac{l_n}{k_n}}{1 + \frac{l_n}{k_n}} \leqq \dfrac{1 - \frac{t-1}{t}}{1 + \frac{t-1}{t}} = \frac{1}{2t-1} < \frac{1}{t}$, also $\operatorname{tg}\beta_n < \frac{3}{t}$ (alles für $x > c$).

3. Es sei $1 \leqq i \leqq n-1$. Dann ist der Winkel β_i nach (a) nicht größer als der Winkel, den die Gerade mit dem Richtungskoeffizienten $\frac{s_i+1}{t}$ mit der Geraden mit dem Richtungskoeffizienten $\frac{s_i}{t}$ einschließt; also ist

$$\operatorname{tg}\beta_i \leqq \frac{\frac{s_i+1}{t} - \frac{s_i}{t}}{1 + \frac{s_i}{t}\,\frac{s_i+1}{t}} \leqq \frac{1}{t}.$$

Also gilt für $x > c$ und alle i:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\beta_i < \frac{3}{t} = \frac{3}{\left[\sqrt{\frac{r}{2}}\right]} < \frac{6}{\sqrt{r}} = 6\left(\frac{4}{\pi x}\right)^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{-\frac{2}{3}}\right) \quad (\text{nach } (20))\\ < \frac{10}{x^{\frac{1}{3}}},\end{aligned}$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

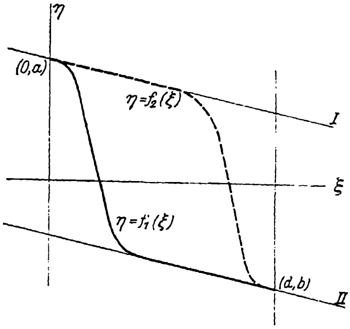
Ich brauche noch folgenden

Hilfssatz 5. *Es sei* $x > 1$, $a > \frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}}$, $b < -\frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}}$, $0 < d < x^{\frac{1}{3}}$.

Behauptung. *Es gibt eine Funktion* $f(\xi)$, *die für* $0 \leqq \xi \leqq d$ *definiert ist und folgende Eigenschaften hat:*

$$(\alpha)\quad \begin{cases} f(0) = a,\ f(d) = b;\ f'(\xi) \text{ existiert und ist stetig für } 0 \leqq \xi \leqq d; \\ f'(\xi) \leqq -\frac{1}{6x},\ f'(0) = -\frac{1}{6x},\ f'(d) = -\frac{1}{6x};\ \int\limits_0^d f(\xi)\,d\xi = 0. \end{cases}$$

Beweis. Weil $\frac{1}{6x}\cdot d < a$, $\frac{1}{6x}\cdot d < -b$, so liegt (s. die Figur!) die Gerade I bzw. II, die von dem Punkte $\xi = 0$, $\eta = a$ bzw. $\xi = d$, $\eta = b$ mit dem Richtungskoeffizienten $-\frac{1}{6x}$ ausgeht, im Intervall $0 \leqq \xi \leqq d$ oberhalb bzw. unterhalb der ξ-Achse. Daher kann man offenbar (s. die Figur!) zwei Kurven $\eta = f_1(\xi)$, $\eta = f_2(\xi)$ konstruieren, wo die Funktionen $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ für $0 \leqq \xi \leqq d$ definiert sind und stetige erste Ableitung besitzen, so daß



$$f_i(0) = a, \quad f_i(d) = b, \quad f_i'(0) = f_i'(d) = -\frac{1}{6x},$$

$$f_i'(\xi) \leqq -\frac{1}{6x} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq d \qquad (i = 1, 2);$$

$$\int_a^b f_1(\xi)\,d\xi < 0, \qquad \int_a^b f_2(\xi)\,d\xi > 0.\ ^{10})$$

Ich setze nun

$$\int_a^b f_1(\xi)\,d\xi = J_1, \qquad \int_a^b f_2(\xi)\,d\xi = J_2;$$

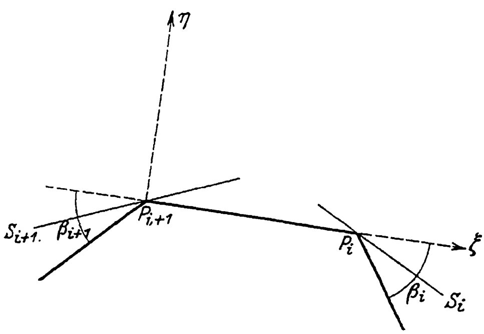
dann besitzt die Funktion

$$f(\xi) = \frac{J_2 f_1(\xi) - J_1 f_2(\xi)}{J_2 - J_1}$$

offenbar die Eigenschaften (α), w. z. b. w.

Nun können wir an die Konstruktion der Kurve C_x' herantreten.

Es sei $\overline{P_i P_{i+1}}$ eine Seite von $Q(x)$; ich zeichne in P_i bzw. P_{i+1} die Symmetrale S_i bzw. S_{i+1} des Außenwinkels β_i bzw. β_{i+1} von $Q(x)$. Nun führe ich neue Koordinatenachsen ξ, η ein; die ξ-Achse sei die Gerade $\overline{P_{i+1} P_i}$, wo der



[10]) Um z. B. $\eta = f_1(\xi)$ zu konstruieren, kann man so verfahren: Man nehme, vom Punkte $(0, a)$ ausgehend, ein kleines Stück der Geraden I, dann verbinde man I mit II durch eine genügend steile Strecke und nehme noch das übrigbleibende Stück der Geraden II bis zum Punkte (d, b). Die beiden Ecken dieses Streckenzuges runde man dann durch kleine Kreisbogen ab.

positive Sinn von P_{i+1} nach P_i hinweist; die η-Achse sei die in P_{i+1} auf ξ senkrecht stehende Gerade, positiv nach außen von $Q(x)$ gerechnet.

Nach Hilfssatz 3 und 4 ist für $x > c$:

$$\text{die Länge von } \overline{P_i P_{i+1}} = d_i < x^{\frac{1}{3}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_{i+1}}{2} > \frac{1}{3}\operatorname{tg}\beta_{i+1} > \frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_i}{2} > \frac{1}{3}\operatorname{tg}\beta_i > \frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}}.$$

Daher gibt es nach Hilfssatz 5 eine Funktion $f(\xi)$, die die Eigenschaften (α) mit $d = d_i$, $a = \operatorname{tg}\frac{\beta_{i+1}}{2}$, $b = -\operatorname{tg}\frac{\beta_i}{2}$ besitzt. Ich setze noch

$$F(\xi) = \int_0^\xi f(\xi)\,d\xi \qquad (0 \leqq \xi \leqq d_i).$$

Die Kurve C_i:

$$\eta = F(\xi), \qquad 0 \leqq \xi \leqq d_i$$

hat dann folgende Eigenschaften:

1. $F(0) = F(d_i) = 0$; d. h.: C_i geht durch P_{i+1} und P_i.

2. Es ist $F'(\xi) = f(\xi)$, $F''(\xi) = f'(\xi)$; also hat C_i eine stetig veränderliche Tangente und einen stetig veränderlichen Krümmungsradius, der, weil $F''(\xi)$ endlich, nirgends verschwindet.

3. $F'(0) = \operatorname{tg}\frac{\beta_{i+1}}{2}$, $F'(d_i) = -\operatorname{tg}\frac{\beta_i}{2}$; also berührt C_i in P_{i+1} bzw. P_i die Symmetrale S_{i+1} bzw. S_i.

4. $F'(\xi)$ nimmt monoton ab; es ist aber nach Hilfssatz 4

$$F'(0) = \operatorname{tg}\frac{\beta_{i+1}}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta_{i+1} < \frac{5}{x^{\frac{1}{3}}},$$

$$F'(d_i) = -\operatorname{tg}\frac{\beta_i}{2} > -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta_i > -\frac{5}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Daher ist für $0 \leqq \xi \leqq d_i$

$$|F'(\xi)| < \frac{5}{x^{\frac{1}{3}}}. \tag{23}$$

5. Der absolute Betrag des Krümmungsradius von C_i ist

$$\leqq (1 + F'^2(\xi))^{\frac{3}{2}}\, 6x < 7x \quad (\text{nach (23), für } x > c);$$

$$\text{in } P_{i+1} \text{ ist er gleich } \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\beta_{i+1}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} 6x,$$

$$\text{in } P_i \text{ ist er gleich } \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\beta_i}{2}\right)^{\frac{3}{2}} 6x.$$

6. Die Länge von C_i ist gleich

$$\int\limits_0^{d_i} \sqrt{1+F'^2(\xi)}\,d\xi \leqq \int\limits_0^{d_i} (1+F'^2(\xi))\,d\xi < d_i\left(1+\frac{25}{x^{\frac{2}{3}}}\right)$$

(nach (23)).

Die Kurven C_i $(i=0,1,\ldots,8n-1)$ bilden zusammen eine Kurve, die ich mit C_x' bezeichnen will und die wirklich alle verlangten Eigenschaften besitzt. Denn:

1. C_x' ist eine einfache, geschlossene, stetige Kurve, die durch alle Ecken von $Q(x)$ hindurchgeht.

2. C_x' hat eine stetig veränderliche Tangente; dies ist klar in jedem inneren Punkte eines Bogens C_i; aber auch im Punkte P_i ist es wahr, da hier C_{i-1} und C_i dieselbe Gerade S_i berühren.

3. C_x' hat einen stetig veränderlichen, nicht verschwindenden Krümmungsradius; das ist wieder klar in jedem inneren Punkte einer C_i; aber auch im Punkte P_i ist es wahr, da hier C_{i-1} und C_i denselben Krümmungsradius $\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta_i}{2}\right)^{\frac{3}{2}} 6x$ besitzen.

4. Der absolute Betrag des Krümmungsradius von C_x' ist stets $< 7x$. Aus 1., 3. und 4. folgt weiter, daß C_x' eine konvexe Kurve ist.

5. Die Länge von C_x' ist $< \sum\limits_{i=0}^{8n-1} d_i\left(1+\frac{25}{x^{\frac{2}{3}}}\right) < \left(1+\frac{25}{x^{\frac{2}{3}}}\right)x = x+25x^{\frac{1}{3}}$.

Damit ist der zweite Schritt durchgeführt[11]).

3. Schritt. Nun definiere ich die Kurve C_x folgendermaßen: Zu jedem $x>c$ gibt es ein $y>c$ so, daß $x=y+25y^{\frac{1}{3}}$ ist. Ich nehme für C_x die Kurve C_y'. Dann ist C_x eine einfache, geschlossene, konvexe Kurve, die eine stetig veränderliche Tangente und einen stetig veränderlichen, nicht verschwindenden Krümmungsradius besitzt, dessen absoluter Betrag in jedem Punkte $< 7y < 7x$ ist. Die Länge von C_x ist kleiner als $y+25y^{\frac{1}{3}}=x$; also gehört C_x zur Klasse $M(x)$. Weiter ist die Anzahl der Gitterpunkte auf C_x mindestens gleich der Anzahl der Ecken von $Q(y)$, d. h. es ist nach (22)

$$g_{C_x} \geqq \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}}\, y^{\frac{2}{3}} + O(y^{\frac{1}{3}}) = \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}}\, x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

Damit ist also die Aussage (A) bewiesen, also auch der Satz 2.

---

[11]) Freilich kann ich C_x' bei gegebenem x auf mehrere Weisen konstruieren, weil in der Wahl der Funktion $f(\xi)$, die im Hilfssatz 5 vorkommt, eine gewisse Willkür besteht.

Ich bemerke noch ausdrücklich — zwecks der folgenden Anwendung: Da $Q(y)$ den Anfangspunkt im Inneren enthält, so gilt dasselbe auch von C_y', d. h. von C_x.

§ 5.

Eine Anwendung des Satzes 2.

H. van der Corput hat[12]) einen allgemeinen Satz bewiesen, der sich auf die Abschätzung der Anzahl der Gitterpunkte in ebenen Bereichen bezieht. Auf S. 5 seiner Annalenarbeit findet sich ein Korollar jenes Satzes, auf welches sich meine Anwendung beziehen wird. Der Leser wird sich leicht überzeugen, daß in jenem Korollar folgender Satz als Spezialfall enthalten ist[13]):

Es sei jedem $x > c$ eine geschlossene, konvexe Kurve K_x der u-v-Ebene zugeordnet, die eine stetig veränderliche Tangente und einen stetig veränderlichen Krümmungsradius besitzt. Die obere Grenze des absoluten Betrages des Krümmungsradius auf K_x sei $O(\sqrt{x})$; es sei $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte innerhalb und auf K_x, $J(x)$ der Inhalt des von K_x eingeschlossenen Bereiches. Dann ist

$$A(x) = J(x) + O(x^{\frac{1}{3}}). \tag{24}$$

Ich will zeigen: Der Satz wird falsch, wenn in (24) o statt O geschrieben wird. (Daraus folgt dann sofort, daß auch das Korollar des H. van der Corput falsch wird, wenn in ihm $O(x^{\frac{1}{3}})$ durch $o(x^{\frac{1}{3}})$ ersetzt wird, d. h. sein Korollar läßt sich nicht verschärfen.)

Um dies zu zeigen, konstruiere ich die Kurven K_x folgendermaßen: Für jede ganze Zahl $g > c$ nehme ich für K_g die Kurve $C_{\sqrt{g}}$ aus § 4; für $g - \frac{1}{2} < x \leqq g + \frac{1}{2}$ nehme ich für K_x die Kurve $\sqrt{\frac{x}{g}}\, C_{\sqrt{g}}$, d. h. die Kurve, die aus $C_{\sqrt{g}}$ durch homothetische Transformation im Verhältnis $\sqrt{\frac{x}{g}}$ in bezug auf den Nullpunkt entsteht. Dann ist K_x eine konvexe, geschlossene Kurve mit stetig veränderlicher Tangente und stetig veränderlichem Krümmungsradius, dessen absoluter Betrag stets kleiner ist als $\sqrt{\frac{x}{g}}\, 7\sqrt{g} = 7\sqrt{x}$. Daher ist der letztgenannte Satz auf K_x anwendbar. Wenn nun x wachsend durch den Wert g hindurchgeht, so ändert sich der Inhalt $J(x)$ stetig; dagegen wächst $A(x)$ sprungweise genau um die

---

[12]) *Over roosterpunten in het platte vlak*, 128 S., Noordhoff, Groningen 1919; *Über Gitterpunkte in der Ebene*, Math. Annalen **81**, S. 1—20; ich zitiere nach der Annalenarbeit.

[13]) Man lese nur die S. 3—5 seiner Annalenarbeit nach!

Anzahl der Gitterpunkte, die auf K_g liegen (weil der Anfangspunkt im Inneren von K_x liegt); diese Anzahl ist aber gleich $\frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}} g^{\frac{1}{3}} + O(g^{\frac{1}{6}})$; daher kann eine Beziehung

$$A(x) = J(x) + o(x^{\frac{1}{3}})$$

nicht stattfinden, womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 6.

Schlußbemerkung.

Alle zum Beweise der Sätze 1 und 2 benutzten Hilfsmittel waren elementar, bis auf die Benutzung des Sierpińskischen Satzes

$$R(y) = O(y^{\frac{1}{3}}) \tag{25}$$

im Beweise des Hilfssatzes 2. Übrigens funktioniert der Beweis auch, wenn wir statt (25) die schwächere Abschätzung

$$R(y) = O(y^c)$$

mit einem beliebigen $c < \frac{1}{2}$ benutzen. Aber auch die triviale Abschätzung

$$R(y) = O(y^{\frac{1}{2}})$$

führt zum Ziel, nur daß dann im Satze 1 und 2 statt $O(x^{\frac{1}{3}})$ nur $O(x^{\frac{1}{3}} \log x)$ herauskommt.

Ich möchte diese Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne dem Herrn Prof. E. Landau in Göttingen und dem Herrn Prof. K. Petr in Prag für ihre mannigfache Anregung, ihre wertvollen Winke und ihr Interesse an meinen Arbeiten meinen Dank auszusprechen.

(Eingegangen am 18. Januar 1925).