Konstruktion von Automorphismengruppen schlichter Graphen

Dominik Bernhardt
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Gießen
15. März 2019

Allgemeines

- Gemeinsame Arbeit mit Prof. Wilhelm Plesken (Aachen) und Prof. Alice Niemeyer (Aachen)

Allgemeines

- Gemeinsame Arbeit mit Prof. Wilhelm Plesken (Aachen) und Prof. Alice Niemeyer (Aachen)
- Analyse der gruppentheoretischen Struktur von Automorphismengruppen schlichter Graphen
  $\rightarrow$ Konstruktionsalgorithmen für Automorphismengruppen herleiten.

Table of contents

Einführung

Schlichte Graphen

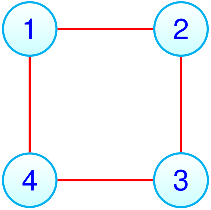
Definition

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Ein *schlichter Graph mit n Punkten und k Kanten* ist ein Tupel $\Gamma = (V, E)$, wobei $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E \subseteq \mathrm{Pot}_2(\{1, \ldots, n\})$ mit $|E| = k$ ist.

Schlichte Graphen

Definition

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Ein *schlichter Graph mit n Punkten und k Kanten* ist ein Tupel $\Gamma = (V, E)$, wobei $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E \subseteq \mathrm{Pot}_2(\{1, \ldots, n\})$ mit $|E| = k$ ist.

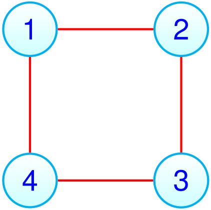


$n = 4 = k$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und
$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$

Schlichte Graphen

Definition

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Ein *schlichter Graph mit n Punkten und k Kanten* ist ein Tupel $\Gamma = (V, E)$, wobei $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E \subseteq \mathrm{Pot}_2(\{1, \ldots, n\})$ mit $|E| = k$ ist.



$n = 4 = k$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$ und
$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$

Konvention

Ab jetzt: Graph = Schlichter Graph.

Automorphismengruppen schlichter Graphen

Alle Gruppenoperationen sind Rechtsoperationen.

Definition (Graphenisomorphismus)

Seien $\Gamma = (V, E)$ und $\Gamma' = (V', E')$ zwei Graphen. Ein *Isomorphismus* zwischen Γ und Γ' ist eine Bijektion $\pi : V \to V'$ mit $(V)\pi = V'$ und $\{v_1, v_2\} \in E \Leftrightarrow \{(v_1)\pi, (v_2)\pi\} \in E'$.

Automorphismengruppen schlichter Graphen

Alle Gruppenoperationen sind Rechtsoperationen.

Definition (Graphenisomorphismus)

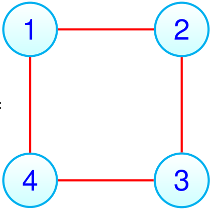
Seien $\Gamma = (V, E)$ und $\Gamma' = (V', E')$ zwei Graphen. Ein *Isomorphismus* zwischen Γ und Γ' ist eine Bijektion $\pi : V \to V'$ mit $(V)\pi = V'$ und $\{v_1, v_2\} \in E \Leftrightarrow \{(v_1)\pi, (v_2)\pi\} \in E'$.

Definition

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph. Eine Abbildung $\pi \in \mathrm{Sym}(V)$ mit $\{v_1, v_2\} \in E \Leftrightarrow \{(v_1)\pi, (v_2)\pi\} \in E$ heißt *Automorphismus* von Γ. Die Menge der Automorphismen eines Graphen Γ bildet eine Gruppe, die wir mit $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ bezeichnen.

Automorphismengruppe des Quadrats

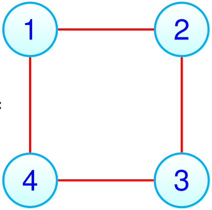
$\Gamma =$



$$\mathrm{Aut}(\Gamma) = \{(), (1\,2)(3\,4)$$

Automorphismengruppe des Quadrats

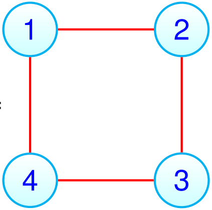
Γ=



$$\mathrm{Aut}(\Gamma) = \{(), (1\,2)(3\,4), (2\,4),$$

Automorphismengruppe des Quadrats

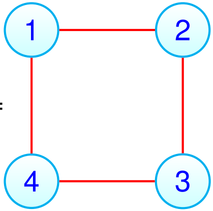
$\Gamma =$



$$\mathrm{Aut}(\Gamma) = \{(), (1\,2)(3\,4), (2\,4), (1\,2\,3\,4), (1\,3), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3\,2), (1\,4)(2\,3)\}$$
$$= \langle (1\,2\,3\,4), (1\,4)(2\,3) \rangle \simeq D_8$$

Automorphismengruppe des Quadrats

$\Gamma =$



$\mathrm{Aut}(\Gamma) = \{(), (1\,2)(3\,4), (2\,4), (1\,2\,3\,4), (1\,3),$
$(1\,3)(2\,4), (1\,4\,3\,2), (1\,4)(2\,3)\}$
$= \langle (1\,2\,3\,4), (1\,4)(2\,3) \rangle \simeq D_8$

$\rightarrow$ D_8 operiert auf Γ.

Gruppenoperation

Lemma

Sei $\Gamma = (V, E)$ *ein Graph und* $G := \mathrm{Aut}(\Gamma)$*. Dann operiert jede Untergruppe* $U \leq G$ *auf* Γ *vermöge*

$$E \times U \to E, (\{v_1, v_2\}, g) \mapsto \{v_1, v_2\}^g := \{v_1^g, v_2^g\}.$$

Adjazenzmatrix

Definition (Adjazenzmatrix)

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, \ldots, n\}$. Definiere $A_\Gamma \in \{0, 1\}^{n \times n}$ via

$$(A_\Gamma)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{i, j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann heisst A_Γ die *Adjazenzmatrix* des Graphen Γ.

Adjazenzmatrix

Definition (Adjazenzmatrix)

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{1, \dots, n\}$. Definiere $A_\Gamma \in \{0, 1\}^{n \times n}$ via

$$(A_\Gamma)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{i, j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann heisst A_Γ die *Adjazenzmatrix* des Graphen Γ.

Sei $G \leq S_n$. Mit $\widetilde{G}$ bezeichnen wir die Darstellung von G als Permutationsmatrizen, also das Bild der Abbildung

$$G \hookrightarrow S_n \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}), \pi \mapsto (e_{(1)\pi}, \dots, e_{(n)\pi}).$$

Lemma

Sei Γ ein Graph auf n Punkten und $U \leq \widetilde{S_n}$. Dann gilt $U \leq \widetilde{\mathrm{Aut}(\Gamma)}$ genau dann, wenn

$$u^t A_\Gamma u = A_\Gamma \text{ für alle } u \in U.$$

Formenräume und Graphen

$\#$ Automorphismengruppen vs $\#$ Nicht isomorphe Graphen

Punkte	$\#$Automorphismengruppen	$\#$ Iso.Klassen Graphen
1	1	1
2	1	2
3	2	4
4	6	11
5	9	34
6	23	156
7	31	1044
8	71	12346
9	103	274668
10	213	12005168
11	299	1018997864
12	691	165091172592
13	951	50502031367952
n	$\overset{?}{\sim} \sqrt{3^n}$	$(1 + o(1))2^{\binom{n}{2}}/n!$

- Analysiere Automorphismengruppen anhand ihrer Bahnenstruktur und transitiven Konstituenten. Es ergeben sich 2 Fälle

- Analysiere Automorphismengruppen anhand ihrer Bahnenstruktur und transitiven Konstituenten. Es ergeben sich 2 Fälle
  - *Transitive* Gruppen auf den Ecken des Graphen
  - *Intransitive Gruppen* auf den Ecken des Graphen

- Analysiere Automorphismengruppen anhand ihrer Bahnenstruktur und transitiven Konstituenten. Es ergeben sich 2 Fälle
  - *Transitive* Gruppen auf den Ecken des Graphen
  - *Intransitive Gruppen* auf den Ecken des Graphen
- Benötigte Konzepte: *Formenräume* und *subdirekte Produkte*.

Formenraum

Definition

Sei $G \leq S_n$ eine Permutationsgruppe. Dann heisst

$$\mathcal{F}(G) := \left\{ A \in \mathbb{Z}_{\text{sym}}^{n \times n} \mid g^t A g = A \; \forall g \in \widetilde{G} \right\}$$

der *Formenraum* von G.

Formenraum

Definition

Sei $G \leq S_n$ eine Permutationsgruppe. Dann heisst

$$\mathcal{F}(G) := \left\{ A \in \mathbb{Z}^{n \times n}_{\text{sym}} \mid g^t A g = A \; \forall g \in \widetilde{G} \right\}$$

der *Formenraum* von G.

Beispiel

$G := \langle (1,2,3), (4,5,6) \rangle$. Dann liegen folgenden Matrizen in $\mathcal{F}(G)$:

$$\mathrm{Diag}(1,1,1,0,0,0), \mathrm{Diag}(0,0,0,1,1,1), I_6, J_6, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Formenraum

Lemma

Sei $G \leq S_n$ eine Permutationsgruppe mit Bahnen $\{B_1, \ldots, B_k\} = \{1, \ldots, n\}/G$, $\{P_1, \ldots, P_\ell\} = \mathrm{Pot}_2(\{1, \ldots, n\})/G$. Definiere

- $I_{B_i} \in \{0,1\}^{n \times n}$ *als die Diagonalmatrix mit* $$\left(I_{B_i}\right)_{a,a} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in B_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{(charakteristische Funktion).}$$
- $\widetilde{P}_i \in \{0,1\}^{n \times n}$ *mit* $\left(\widetilde{P}_i\right)_{a,b} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{a,b\} \in P_i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann ist $\mathcal{F}(G)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit $\mathbb{Z}$-Modulbasis

$$\left(I_{B_1}, \ldots, I_{B_k}, \widetilde{P_1}, \ldots, \widetilde{P_\ell}\right).$$

Beispiel Formenraum

$G := \langle (1,2,3),(4,5,6) \rangle$. Dann gilt

$$\widetilde{G} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Beispiel Formenraum

$G := \langle (1,2,3),(4,5,6) \rangle$. Dann gilt

$$\widetilde{G} = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Dann ist eine Basis von $\mathcal{F}(G)$ gegeben durch:

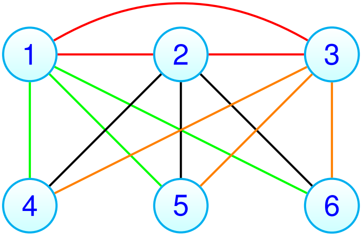
$$\mathrm{Diag}(1,1,1,0,0,0), \mathrm{Diag}(0,0,0,1,1,1),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel Formenraum

$G := \langle (1,2,3),(4,5,6) \rangle.$

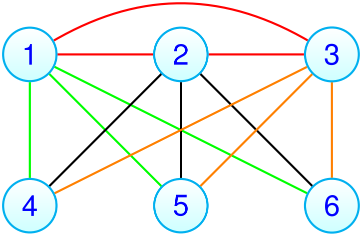
$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Beispiel Formenraum

$G := \langle (1,2,3),(4,5,6) \rangle$.

$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Lemma

Seien $G \leq S_n$ und Γ ein Graph auf n Punkten. Dann gilt: $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ genau dann, wenn $A_\Gamma \in \mathcal{F}(G)$.

Graphen und Formenräume

- Bestimmung einer Basis des Formenraums möglich mit
  - *Carat* oder
  - Bahnen von Permutationsgruppen.

Graphen und Formenräume

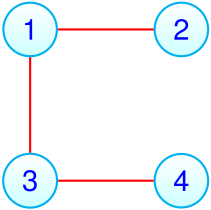
- Bestimmung einer Basis des Formenraums möglich mit
  - *Carat* oder
  - Bahnen von Permutationsgruppen.

$\rightarrow$ Für $G \leq S_n$ können alle Graphen Γ mit $G \leq \mathtt{Aut}(\Gamma)$ bestimmt werden.

Subdirekte Produkte und Automorphismengruppen

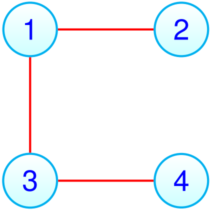
Automorphismengruppen mit 2 Bahnen

$G = \langle (1,3)(2,4) \rangle \simeq C_2$
ist Automorphismengruppe des Graphen



Automorphismengruppen mit 2 Bahnen

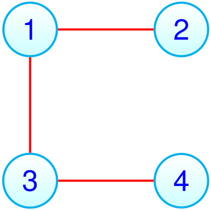
$G = \langle(1,3)(2,4)\rangle \simeq C_2$
ist Automorphismengruppe des Graphen



$$G\big|_{\{1,3\}} \simeq C_2 \simeq G\big|_{\{2,4\}} \text{und } G \twoheadrightarrow G\big|_{\{1,3\}},\ G \twoheadrightarrow G\big|_{\{2,4\}}.$$

Automorphismengruppen mit 2 Bahnen

$G = \langle (1,3)(2,4) \rangle \simeq C_2$
ist Automorphismengruppe des Graphen



$$G\big|_{\{1,3\}} \simeq C_2 \simeq G\big|_{\{2,4\}} \text{und } G \twoheadrightarrow G\big|_{\{1,3\}},\ G \twoheadrightarrow G\big|_{\{2,4\}}.$$

$\rightarrow$ G ist subdirektes Produkt von $G\big|_{\{2,4\}}$ und $G\big|_{\{1,3\}}$.

Subdirekte Produkte

Definition (Subdirektes Produkt)

Seien G_1, G_2 Gruppen. Eine Untergruppe $H \leq G_1 \times G_2$ des äußeren direkten Produkts von G_1 und G_2 heißt *subdirektes Produkt*, falls H surjektiv auf G_i projiziert.

Subdirekte Produkte

Definition (Subdirektes Produkt)

Seien G_1, G_2 Gruppen. Eine Untergruppe $H \leq G_1 \times G_2$ des äußeren direkten Produkts von G_1 und G_2 heißt *subdirektes Produkt*, falls H surjektiv auf G_i projiziert.

Satz (Lemma von Goursat)

Sei $G = G_1 \times G_2$ *mit Projektionen* $\pi_i : G \twoheadrightarrow G_i, (g_1, g_2) \mapsto g_i$ *und* $H \leq G$ *mit* $(H)\pi_i = G_i$ *für* $i = 1, 2$. *Dann existieren eine Gruppe* F *und Epimorphismen* $\alpha_i : G_i \twoheadrightarrow F$ *mit*

$$H = \{(g_1, g_2) \in G \mid (g_1)\alpha_1 = (g_2)\alpha_2\}.$$

Wir schreiben $H = G_1 \curlywedge^F G_2$.

$C_2 \curlywedge^F C_2$

Satz (Goursat)

Sei $G = G_1 \times G_2$ *mit Projektionen* $\pi_i : G \twoheadrightarrow G_i, (g_1, g_2) \mapsto g_i$ *und* $H \leq G$ *mit* $(H)\pi_i = G_i$. *Dann existieren eine Gruppe* F *und Epimorphismen* $\alpha_i : G_i \twoheadrightarrow F$ *für* $i = 1, 2$ *mit*

$$H = \{(g_1, g_2) \in G \mid (g_1)\alpha_1 = (g_2)\alpha_2\}.$$

Wir schreiben $H = G_1 \curlywedge^F G_2$.

$H = \langle (1\,3)(2\,4) \rangle \leq \langle (1\,3), (2\,4) \rangle \simeq C_2 \times C_2$.

$C_2 \curlywedge^F C_2$

Satz (Goursat)

Sei $G = G_1 \times G_2$ *mit Projektionen* $\pi_i : G \twoheadrightarrow G_i, (g_1, g_2) \mapsto g_i$ *und* $H \leq G$ *mit* $(H)\pi_i = G_i$. *Dann existieren eine Gruppe* F *und Epimorphismen* $\alpha_i : G_i \twoheadrightarrow F$ *für* $i = 1, 2$ *mit*

$$H = \{(g_1, g_2) \in G \mid (g_1)\alpha_1 = (g_2)\alpha_2\} .$$

Wir schreiben $H = G_1 \curlywedge^F G_2$.

$H = \langle (1\,3)(2\,4) \rangle \leq \langle (1\,3), (2\,4) \rangle \simeq C_2 \times C_2$.

$G_1 = \langle (1\,3) \rangle$, $G_2 = \langle (2\,4) \rangle$, $F = G_1$,

$C_2 \curlywedge^F C_2$

Satz (Goursat)

Sei $G = G_1 \times G_2$ *mit Projektionen* $\pi_i : G \twoheadrightarrow G_i, (g_1, g_2) \mapsto g_i$ *und* $H \leq G$ *mit* $(H)\pi_i = G_i$. *Dann existieren eine Gruppe* F *und Epimorphismen* $\alpha_i : G_i \twoheadrightarrow F$ *für* $i = 1, 2$ *mit*

$$H = \{(g_1, g_2) \in G \mid (g_1)\alpha_1 = (g_2)\alpha_2\} .$$

Wir schreiben $H = G_1 \curlywedge^F G_2$.

$H = \langle (1\,3)(2\,4) \rangle \leq \langle (1\,3), (2\,4) \rangle \simeq C_2 \times C_2$.

$G_1 = \langle (1\,3) \rangle$, $G_2 = \langle (2\,4) \rangle$, $F = G_1$,

$\alpha_1 : G_1 \twoheadrightarrow G, (1\,3) \mapsto (1\,3)$, $\alpha_2 : G_2 \twoheadrightarrow G, (2\,4) \mapsto (1\,3)$

$C_2 \curlywedge^F C_2$

Satz (Goursat)

Sei $G = G_1 \times G_2$ mit Projektionen $\pi_i : G \twoheadrightarrow G_i, (g_1, g_2) \mapsto g_i$ und $H \leq G$ mit $(H)\pi_i = G_i$. Dann existieren eine Gruppe F und Epimorphismen $\alpha_i : G_i \twoheadrightarrow F$ für $i = 1, 2$ mit

$$H = \{(g_1, g_2) \in G \mid (g_1)\alpha_1 = (g_2)\alpha_2\}.$$

Wir schreiben $H = G_1 \curlywedge^F G_2$.

$H = \langle(1\,3)(2\,4)\rangle \leq \langle(1\,3), (2\,4)\rangle \simeq C_2 \times C_2$.

$G_1 = \langle(1\,3)\rangle$, $G_2 = \langle(2\,4)\rangle$, $F = G_1$,

$\alpha_1 : G_1 \twoheadrightarrow G, (1\,3) \mapsto (1\,3)$, $\alpha_2 : G_2 \twoheadrightarrow G, (2\,4) \mapsto (1\,3)$

Dann ist $H \simeq \{\mathrm{id}, ((1\,3), (2\,4))\}$.

Automorphismengruppen mit 2 Bahnen

Automorphismengruppen mit 2 Bahnen

- Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph, sodass $G := \mathtt{Aut}(\Gamma)$ genau 2 Bahnen $B_1 = \{1, \dots, b_1\}$ und $B_2 = \{b_1 + 1, \dots, n\}$ auf V hat.

Automorphismengruppen mit 2 Bahnen

- Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph, sodass $G := \mathtt{Aut}(\Gamma)$ genau 2 Bahnen $B_1 = \{1, \ldots, b_1\}$ und $B_2 = \{b_1 + 1, \ldots, n\}$ auf V hat.

$$\Rightarrow A_\Gamma = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & X^t \\ \hline X & A_2 \end{array}\right)$$

Automorphismengruppen mit 2 Bahnen

- Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph, sodass $G := \mathrm{Aut}(\Gamma)$ genau 2 Bahnen $B_1 = \{1, \ldots, b_1\}$ und $B_2 = \{b_1 + 1, \ldots, n\}$ auf V hat.

$$\Rightarrow A_\Gamma = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & X^t \\ \hline X & A_2 \end{array}\right)$$

- $G\big|_{B_i}$ ist transitiv auf B_i und für $G_i := G\big|_{B_i}$ gilt: $G \simeq G_1 \curlywedge G_2$.

Automorphismengruppen mit 2 Bahnen

- Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph, sodass $G := \mathrm{Aut}(\Gamma)$ genau 2 Bahnen $B_1 = \{1, \ldots, b_1\}$ und $B_2 = \{b_1 + 1, \ldots, n\}$ auf V hat.

$$\Rightarrow A_\Gamma = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & X^t \\ \hline X & A_2 \end{array}\right)$$

- $G\big|_{B_i}$ ist transitiv auf B_i und für $G_i := G\big|_{B_i}$ gilt: $G \simeq G_1 \curlywedge G_2$.

Fragen

- Welche subdirekten Produkte treten auf?

Automorphismengruppen mit 2 Bahnen

- Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph, sodass $G := \mathrm{Aut}(\Gamma)$ genau 2 Bahnen $B_1 = \{1, \ldots, b_1\}$ und $B_2 = \{b_1 + 1, \ldots, n\}$ auf V hat.

$$\Rightarrow A_\Gamma = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & X^t \\ \hline X & A_2 \end{array}\right)$$

- $G\big|_{B_i}$ ist transitiv auf B_i und für $G_i := G\big|_{B_i}$ gilt: $G \simeq G_1 \curlywedge G_2$.

Fragen

- Welche subdirekten Produkte treten auf?
- Wie sieht die Matrix X aus?

Automorphismengruppen mit teilerfremden Bahnen

Satz

Sei $\mathrm{ggT}(|B_1|, |B_2|) = 1$. *Dann gilt* $G \simeq G_1 \times G_2$.

Automorphismengruppen mit teilerfremden Bahnen

Satz

Sei $\mathrm{ggT}(|B_1|, |B_2|) = 1$*. Dann gilt* $G \simeq G_1 \times G_2$*.*

Beweis.

1. Falls $X = 0$: $\checkmark$.

Automorphismengruppen mit teilerfremden Bahnen

Satz

Sei $\operatorname{ggT}(|B_1|, |B_2|) = 1$*. Dann gilt* $G \simeq G_1 \times G_2$.

Beweis.

1. Falls $X = 0$: $\checkmark$.
2. Angenommen $X \neq 0$. Für $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$ setze

$$\alpha_1(x_1) := \mid \{\{x_1, v_2\} \in E \mid v_2 \in B_2\} \mid,$$
$$\alpha_2(x_2) := \mid \{\{v_1, x_2\} \in E \mid v_1 \in B_1\} \mid$$

Automorphismengruppen mit teilerfremden Bahnen

Satz

Sei $\operatorname{ggT}(|B_1|, |B_2|) = 1$. *Dann gilt* $G \simeq G_1 \times G_2$.

Beweis.

1. Falls $X = 0$: $\checkmark$.
2. Angenommen $X \neq 0$. Für $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$ setze

$$\alpha_1 := | \{\{x_1, v_2\} \in E | v_2 \in B_2\} |,$$
$$\alpha_2 := | \{\{v_1, x_2\} \in E | v_1 \in B_1\} |$$

Automorphismengruppen mit teilerfremden Bahnen

Satz

Sei $\mathrm{ggT}(|B_1|, |B_2|) = 1$. *Dann gilt* $G \simeq G_1 \times G_2$.

Beweis.

1. Falls $X = 0 : \checkmark$.
2. Angenommen $X \neq 0$. Für $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$ setze

$$\alpha_1 := | \{\{x_1, v_2\} \in E | v_2 \in B_2\} |,$$
$$\alpha_2 := | \{\{v_1, x_2\} \in E | v_1 \in B_1\} |$$

$\Rightarrow b_1 \cdot \alpha_1 = b_2 \cdot \alpha_2 \leq b_1 \cdot b_2$.

Automorphismengruppen mit teilerfremden Bahnen

Satz

Sei $\operatorname{ggT}(|B_1|, |B_2|) = 1$. *Dann gilt* $G \simeq G_1 \times G_2$.

Beweis.

1. Falls $X = 0$: $\checkmark$.
2. Angenommen $X \neq 0$. Für $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$ setze

$$\alpha_1 := | \{\{x_1, v_2\} \in E | v_2 \in B_2\} |,$$
$$\alpha_2 := | \{\{v_1, x_2\} \in E | v_1 \in B_1\} |$$

$\Rightarrow b_1 \cdot \alpha_1 = b_2 \cdot \alpha_2 \leq b_1 \cdot b_2$.
Wegen $\operatorname{ggT}(b_1, b_2) = 1$ hat diese Gleichung nur die Lösung
$\alpha_1 = b_2$, $\alpha_2 = b_1$.
$\Rightarrow (X)_{i,j} = 1$.

$\square$

Automorphismengruppen mit 2 Bahnen

$$G = \langle (1,2)(3,4) \rangle = \mathrm{Aut}(\Gamma), \text{ wobei } A_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Automorphismengruppen mit 2 Bahnen

$$G = \langle (1,2)(3,4) \rangle = \mathrm{Aut}(\Gamma), \text{ wobei } A_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_1 := \mid \{\{a, v_2\} \in E | v_2 \in B_2\} \mid, \ \alpha_2 := \mid \{\{v_1, b\} \in E | v_1 \in B_1\} \mid$$

$$b_1 \cdot \alpha_1 = b_2 \cdot \alpha_2 \leq b_1 \cdot b_2.$$

Korollar

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph so, dass $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ genau zwei Bahnen auf V hat. Dann ist die Anzahl der Einsen und Nullen in jeder Zeile von X konstant.

Definition (Zulässige Matrix)

Sei $X \in \{0,1\}^{b_2 \times b_1}$. Wenn X in jeder Zeile z Einträge gleich Eins und in jeder Spalte s Einträge gleich Eins hat nennen wir X eine *(z,s)-zulässige Matrix*.

Sei $X \in \{0,1\}^{b_2 \times b_1}$ eine (z,s)-zulässige Matrix. Definiere

$$\mathcal{P}_s^{b_2} : \{(X)_{-,i} \mid i = 1, \dots, b_2\} \to \mathrm{Pot}_s(\{1, \dots, b_2\}) :$$
$$(X)_{-,i} \mapsto \{j \in \{1, \dots, b_2\} \mid (X)_{j,i} = 1\}$$

$$A_\Gamma = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & X^t \\ \hline X & A_2 \end{array} \right),$$

$G := Aut(\Gamma) \simeq G_1 \curlywedge G_2$ hat genau 2 Bahnen mit transitiven Konstitutenten G_i und $X \in \{0,1\}^{b_2 \times b_1}$ ist eine (z,s)-zulässige Matrix.

$$A_\Gamma = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & X^t \\ \hline X & A_2 \end{array}\right),$$

$G := Aut(\Gamma) \simeq G_1 \curlywedge G_2$ hat genau 2 Bahnen mit transitiven Konstitutenten G_i und $X \in \{0,1\}^{b_2 \times b_1}$ ist eine (z,s)-zulässige Matrix.

Satz

Die Menge

$$\left\{ \mathcal{P}_s^{b_2}\left((X)_{-,i}\right) \mid i \in \{1,\ldots,b_2\} \right\}$$

ist eine Bahn unter der Operation von G_2 auf $\mathrm{Pot}_s(\{1,\ldots,b_2\})$.

$$A_\Gamma = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & X^t \\ \hline X & A_2 \end{array}\right),$$

$G := Aut(\Gamma) \simeq G_1 \curlywedge G_2$ hat genau 2 Bahnen mit transitiven Konstitutenten G_i und $X \in \{0,1\}^{b_2 \times b_1}$ ist eine (z,s)-zulässige Matrix.

Satz

Die Menge

$$\left\{\mathcal{P}_s^{b_2}\left((X)_{-,i}\right) \mid i \in \{1,\ldots,b_2\}\right\}$$

ist eine Bahn unter der Operation von G_2 auf $\mathrm{Pot}_s(\{1,\ldots,b_2\})$.

Korollar

Unter den obigen Voraussetzungen ist X nach Konjugation eine Blockmatrix mit ℓ Blöcken der Länge k. Weiter: $G_1 \lesssim S_k \wr S_\ell$.

- $\Gamma = (V, E)$ Graph, $\mathtt{Aut}(\Gamma)$ hat genau 2 Bahnen auf V.
- X ist (z, s)-zulässige Blockmatrix mit k Blöcken der Länge ℓ.
- Bahn B von G_2 auf $\mathtt{Pot}_s(\{1, \ldots, b_2\})$ zu X gehörig.

- $\Gamma = (V, E)$ Graph, $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ hat genau 2 Bahnen auf V.
- X ist (z, s)-zulässige Blockmatrix mit k Blöcken der Länge ℓ.
- Bahn B von G_2 auf $\mathrm{Pot}_s(\{1, \dots, b_2\})$ zu X gehörig.

Satz

$Aut(\Gamma) \simeq H \curlywedge^F G_2$, wobei $H \lesssim S_k \wr S_\ell$ transitiv ist und F die Permutationsdarstellung von G_1 auf B ist.

Ein Beispiel

- $B_1 = \{1, \ldots, 8\}$, $B_2 = \{9, 10, 11, 12\}$.
- $G_2 = \langle (1,4)(2,3), (1,2)(3,4) \rangle \simeq V_4$.
- X soll $(6, 3)$ zulässig sein.

Ein Beispiel

- $B_1 = \{1, \ldots, 8\}$, $B_2 = \{9, 10, 11, 12\}$.
- $G_2 = \langle (1,4)(2,3), (1,2)(3,4) \rangle \simeq V_4$.
- X soll $(6, 3)$ zulässig sein.
- $\mathrm{Pot}_3(\{1,2,3,4\})/G_2 = \{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}\}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow F = \langle (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4) \rangle$.

35 Kandidaten für G_1.

Zukunft

- Strukturbeschreibung von Automorphismengruppen als Permutationsgruppen
- Bestimmung der reduzierten Markentafel von Automorphismengruppen
- Bibliothek von Automorphismengruppen und Graphen
- Klassifikation des Rangs von Formenräumen
- Verallgemeinerungen auf Switching Classes