Zykloide

Lars Ehrenborg

15. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Definition/Erzeugungsweise 2

2 Herleitung der Parameterdarstellung 2

3 hübsche Eigenschaft 3

4 Fläche eines Zykloidenbogens 4

5 Normale und Tangente 5

6 Evolute und Evolvente der Zykloide 6
6.1 Länge eines Zykloidenbogens 7

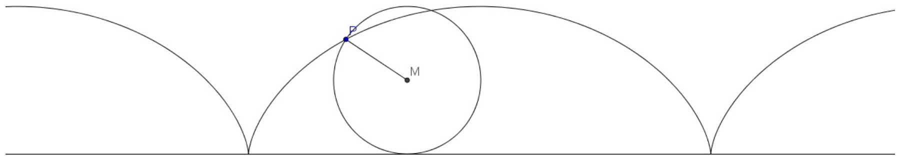
7 Tautochronie der Zykloide 8
7.1 Zykloidenpendel von Huygens 9

8 Zykloide als Brachistrone 10

9 verkürzte und verlängerte Zykloide 11

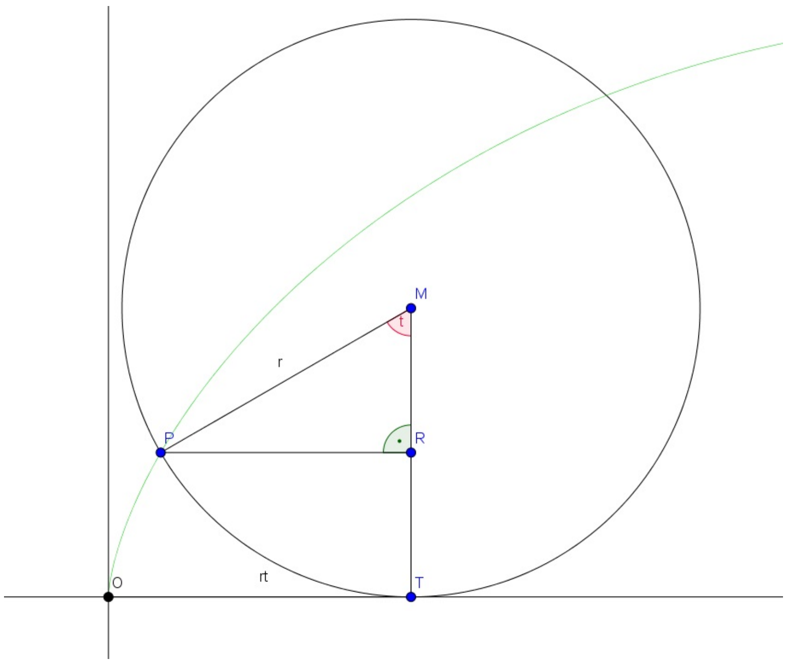
1 Definition/Erzeugungsweise

Im 16. Jahrhundert taucht die Zykloide das erste mal auf und den Namen bekam sie schließlich von Galileo Galilei als er sich 1598 mit ihr beschäftigte. Im 17.Jahrhundert beschäftigten sich noch viele Mathematiker mit der Zykloide, wie in folgenden Abschnitten noch erwähnt wird. Kommen wir nun zur Definition/Erzeugungsweise:
Die Kurve entsteht, indem ein Kreis über eine Gerade rollt. Ein fester Punkt auf dem Umfang des Kreises beschreibt dann die Kurve der Zykloide.



Die Zyklide ist periodisch und zwischen zwei Zykloidenbogen befindet sich immer eine Spitze. Im folgenden beschäftigen wir uns immer nur um einen einzelnen Zykloidenbogen.

2 Herleitung der Parameterdarstellung



Die x und y Koordinaten des Punktes P können wie folgt dargestellt werden:

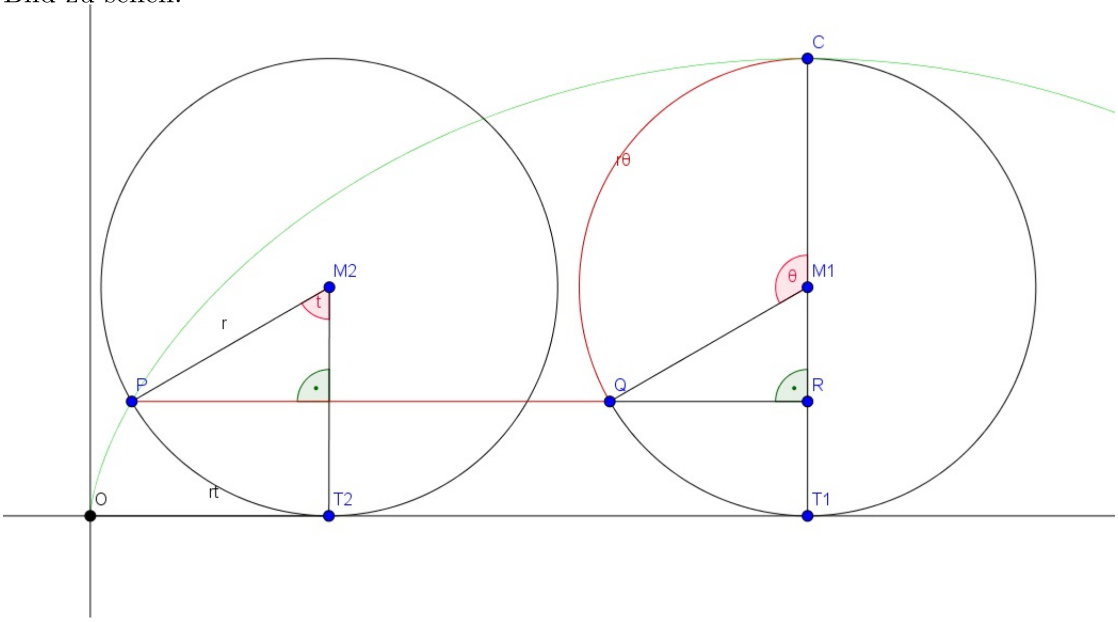
$$P_x = \overline{OT} - \overline{PR}$$
$$P_y = \overline{MT} - \overline{MR}$$

Unter Beachtung, dass sich der Kreis über das Bogenstück $\overline{PT}$ von Punkt O bis T abgerollt hat, erhält man, dass die Strecke $\overline{OT}$ gleich dem Bogenstück $\overline{PT}$ entspricht. Mit der Verwendung von Sinus und Cosinus sowie dem Winkel t und dem Radius r des Erzeugungskreises erhält man schließlich:

$$P_x = x(t) = \overline{PT} - \overline{PR} = rt - r\sin(t) = r(t - \sin(t))$$
$$P_y = y(t) = \overline{MT} - \overline{MR} = r - r\cos(t) = r(1 - \cos(t))$$

3 hübsche Eigenschaft

Kommen wir zur ersten und zur Berechnung des Flächeninhalts eines Zykloidenbogens sehr nützlichen Eigenschaft. Für die Eigenschaft benötigt man einen Zykloidenbogen und den Erzeugungskreis genau in der Mitte des Bogens, sowie einen beliebigen Punkt P auf dem Zykloidenbogen. Als nächstes zeichnet man eine Gerade durch den Punkt P parallel zur x-Achse. Der näher an P liegende entstehende Schnittpunkt mit dem Erzeugungskreis bennenen wir mit Q. Außerdem noch weitere Hilfspunkte, wie im folgenden Bild zu sehen:



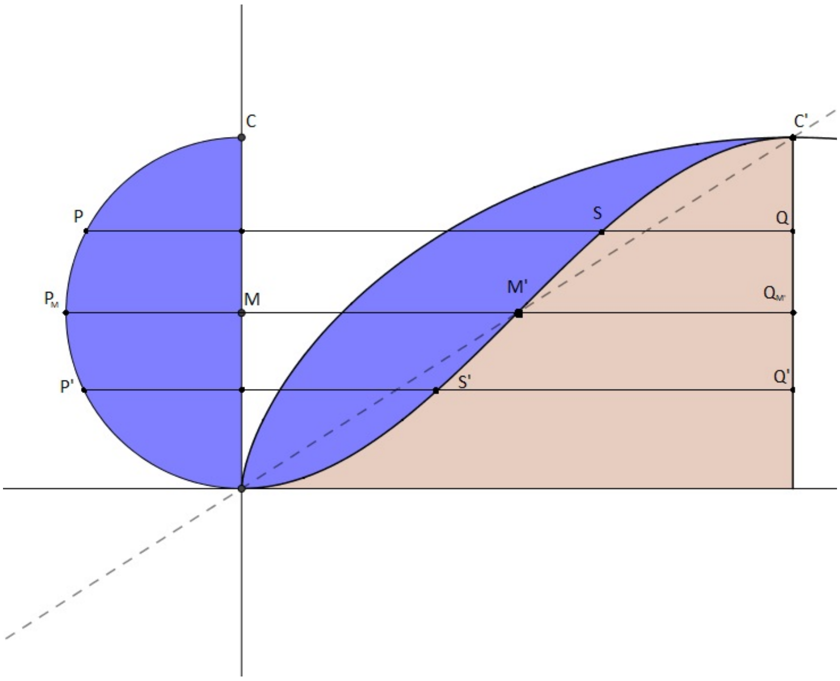
Wir wollen nun zeigen, dass die Strecke $\overline{PQ}$ gleich dem Kreisbogen $\overline{QC}$ ist. Nach Konstruktion ist die Strecke $\overline{PQ}$ parallel zur X-Achse, somit gilt:

$$\overline{PQ} = \overline{OT_1} - P_x - \overline{QR} = r\pi - r(t - sin(t)) - rsin(t) = r(\pi - t) = r\theta = \overline{QC}$$

Damit ist gezeigt, dass die Strecke $\overline{PQ}$ gleich dem Kreisbogen $\overline{QC}$ ist.

4 Fläche eines Zykloidenbogens

Gilles Personne de Roberval, ein Französischer Mathematiker, gelang als Erster im Jahr 1634 die bestimmung des Flächeninhalts eines Zykloidenbogens als er sich mit ihr beschäftigte. Er ist wie folgt vorgegangen:



Da ein Zykloidenbogen symmetrisch ist hat Roberval nur eine Hälfte des Zykloidenbogens betrachtet, hier im Bild die Linke. Roberval hat sich dann einen Halbkreis mit dem Radius des Erzeugungskreises daneben gezeichnet. Mit Hilfe der Indivisibilien Methode hat er eine Hilfskurve konstruiert, sodass die Blauefläche zwischen Hilfskurve und Zykloidenbogen mit der Halbkreisfläche übereinstimmt.
Nun musste er nur noch zeigen dass die Hilfskurve punktsymmetrisch um M' ist. Damit die Kurve Punktsymmetrisch ist muss für beliebige Punkte S und S', die in x- Richtung den selben Abstand zu M 'haben, gelten, dass S, S' und M' auf einer Geraden liegen(also der Abstand in y-Richtung zu M' für S und S' ebenfalls gleich ist). Aus der hübschen Eienschaft weiß man, dass folgendes gilt:

$$\overline{SQ} = \overline{PC} \text{ , } \overline{S'Q'} = \overline{P'C} \text{ und } \overline{M'Q_{M'}} = \overline{P_M C}$$

Außerdem gilt mit x als Abstand von S bzw S' zu M in x-Richtung:

$$\overline{M'Q_{M'}} = \overline{S'Q'} - x = \overline{SQ} + x$$
$$\Rightarrow \overline{P_M C} = \overline{P'C} - x = \overline{PC} + x$$

$$\Rightarrow x = \overline{P_M P'} = \overline{P_M P}$$

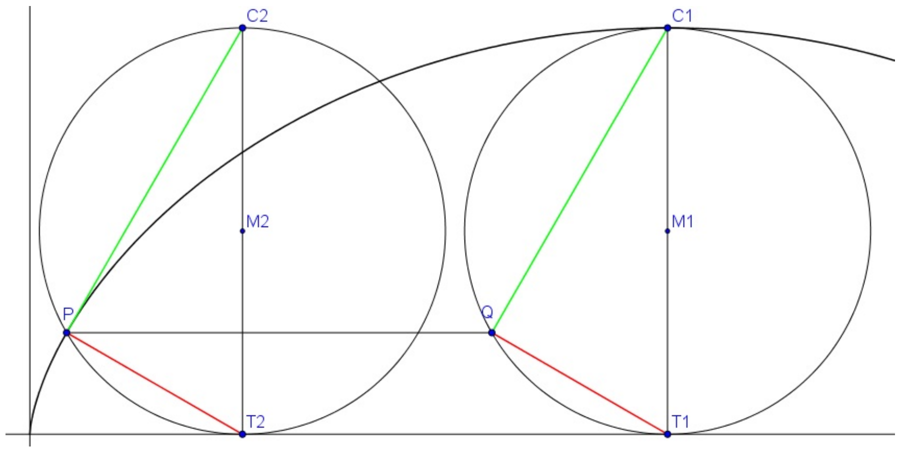
$\Rightarrow$ Der Abstand der Geraden durch P und S hat den selben Abstand zu M' wie die Gerade durch P' und S' zu M'

$\Rightarrow$ Somit ist der Abstand von S und S' zu M' in y-Richtung gleich und somit ist die Hilfskurve Punktsymmetrisch

Damit ist die Fläche unter der Hilfslinie gleich der Fläche des Dreiecks $\triangle OTC'$ und somit gleich πr^2. Damit ist die gesamtfläche unter dem Halben zykloidenbogen $\frac{3}{2}\pi r^2$ und des ganzen Zykloidenbogens $3\pi r^2$.

5 Normale und Tangente

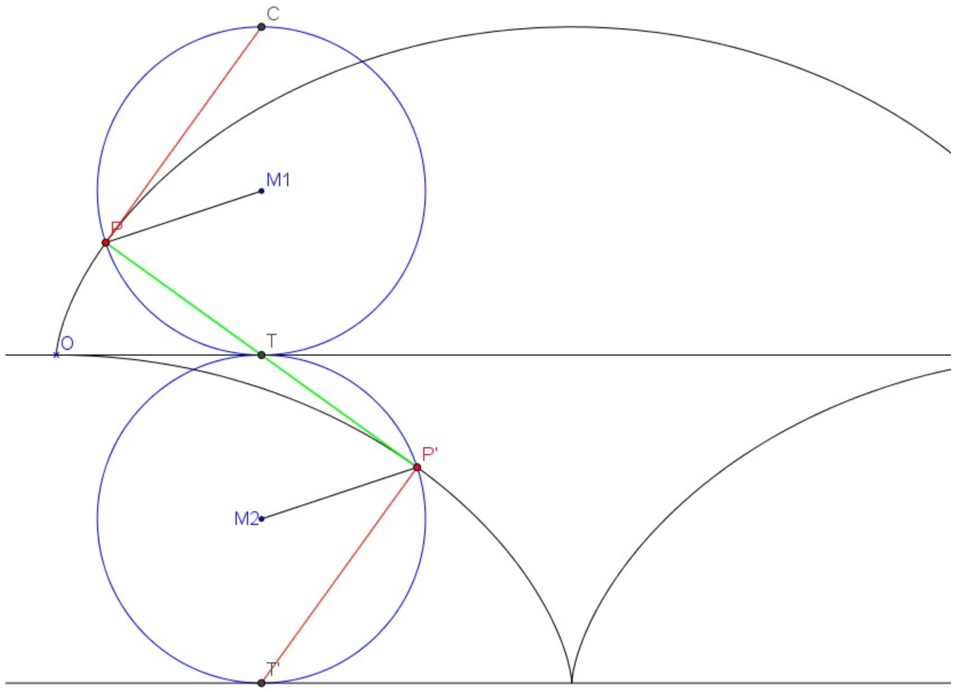
Die Normale des Zakloidenbogens an einem beliebigen Punkt P erhält man indem man sich den aktuellen Drehpunkt des Punktes P anschaut. Da der Kreis auf der Geraden(x-Achse) rollt ist der aktuelle Drehpunkt der Berühungspunkt T_2. Somit ist die Normale die Gerade durch die Punkte P und T_2. Damit ist die Tangente des Zykloidenbogens am Punkt P die Gerade senkrecht zu der Normalen, also, aufgrund vom Satz des Thales, die Gerade durch die Punkte P und C_2.



Die Normale sowie die Tangente kann man mit Hilfe des Erzeugungskreises konstruieren. Dazu muss der Erzeugungskreis genau in der Mitte des Zykloidenbogens befinden. Man geht folgender Maßen vor:
1) Man zeichnet die Gerade durch den Punkt P Parallel zur Rollgeraden
2) Makiert Schnittpunkt mit dem Erzeugungskreis der näher zum Punkt P ist (In der Abbildung Q)
3) Zeichne Strecke vom Punkt Q zum Berührpunkt des ErzeugungsKreises mit dem Zykloidenbogen(Hochpunkt C_1)
4) Zeichne die Gerade durch Punkt P und Parallel zur Strecke Q nach C, dies ist die Tangente(Strecke P nach C_2)
5) Zeichne die Senkrechte zur Tangente und man erhält die Normale(Strecke P nach T_2)

6 Evolute und Evolvente der Zykloide

Die Evolute einer Kurve ist die Hüllkurve der Normelen der Kurve. Die Hüllkurve einer Geradenschar ist die Kurve die jede Gerade genau in einem Punkt berüht. Somit sind die Geraden der Geradenschar alles Tangenten der Hüllkurve. Somit ist die Evolute der Zykloide genau die Kurve die alle Normalen der Zykloide als Tangenten besitzt. Dies ist erstaunlicherweise wieder eine Zykloide, die mit dem selben Erzeugungskreis erzeugt wird. Dies lässt sich am folgenden Bild zsehr gut erläutern.

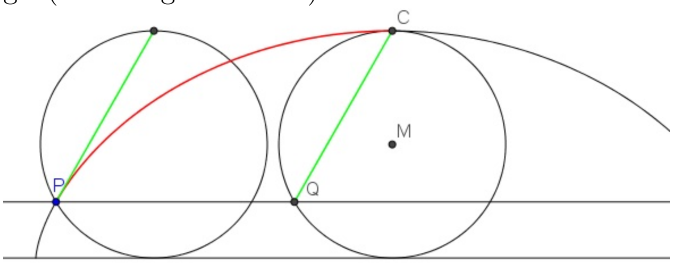


Das Bild zeigt unter dem eigentlichen Erzeugungskreis einen weiteren mit identischen Radius, sodass die Kreise sich berühren, somit erzeugt der obere Kreis die obere Zykloide und der untere die untere Zykloide. Man sieht dass die Normale der oberen Zykloide(Grün) genau die Tangente der unteren Zykloide ist und somit ist die untere Zykloide die Evolute der oberen Zykloide.

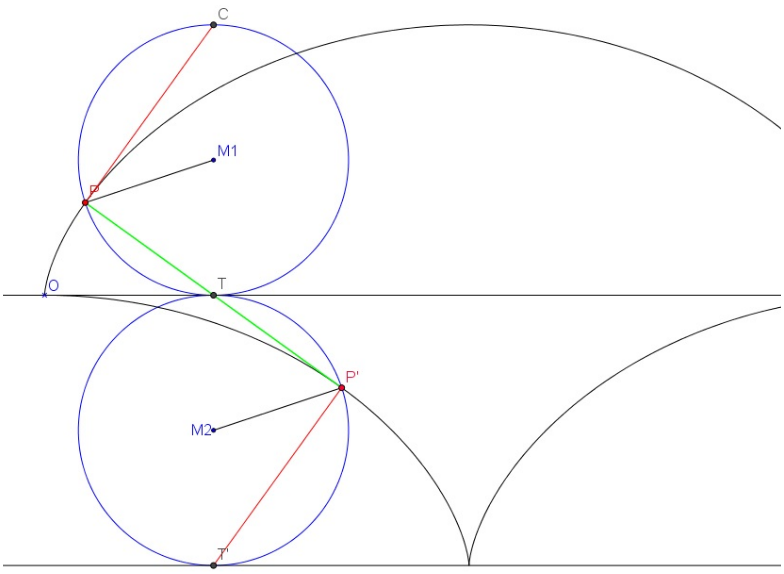
Kommen wir nun zur Evolventen einer Kurve. Die Evolvente einer Kurve entsteht indem man die Kurve über ihre Tangente abwickelt. Die Beziehung zwischen Evolvente und Evolute ist dadurch gegeben, dass eine Kurve die Evolvente von ihrer Evolute ist und eine Kurve die Evolute von ihrer Evolvente ist. Beim Bild oben ist also zum Beispiel die obere Zykloide die Evolvente der unteren Zykloide.

6.1 Länge eines Zykloidenbogens

Um die Länge eines Zykloidenbogens zu bestimmen, benutzen wir eine Eigenschaft der Zykloide die im folgenden gezeigt wird.Es liegt folgende Situation vor:
Man hat einen Zykloidenbogen und genau in der Mitte dessen den Erzeugungskreis, sodass der Erzeugungskreis den Zykloidenbogen und die Gerade berührt. Außerdem hat man einen Beliebigen Punkt P auf dem Zykloidenbogen und die Gerade durch den Punkt P die Parallel zur Rollgeraden liegt. Die Eigenschaft sagt nun folgendes:
Das Zykloidenbogenstück zwischen P und C ist immer genau das Doppelte der Strecke $\overline{QC}$, wobei Q der schnittpunkt der parallelen Gerade durch Punkt P mit dem Erzeugungskreis ist und C der Berühpunkt des Erzeugungskreises mit dem Zykloidenbogen(siehe folgendes Bild):

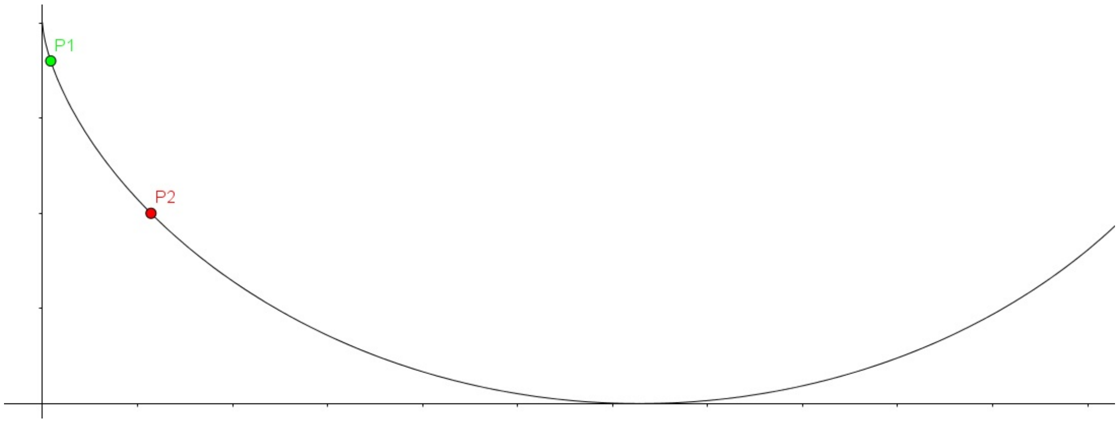


Die Eigenschaft ist damit gezeigt, dass man sich wieder das Bild von der Evolute/Evolvente anschaut und dabei die Eigenschaft der Evolvente benutzt. Nach Definition entsteht die Evolvente durch Abwickeln der Kurve über ihre Tangente. Das heißt im unteren Bild ist die Stracke $\overline{PP'}$ gleich dem Zykloidenbogenstück $\overline{OP'}$ von dem sie abgewickelt wurde. Die Strecke $\overline{PP'}$ ist genau das doppelte der Strecke $\overline{TP'}$, die im oberen Bild der Strecke $\overline{QC}$ entspricht und das Zykloidenbogenstück $\overline{OP'}$ entspricht derm Zykloidenbogenstück $\overline{PC}$ vom oberen Bild. Somit ist die Eigenschaft gezeigt.



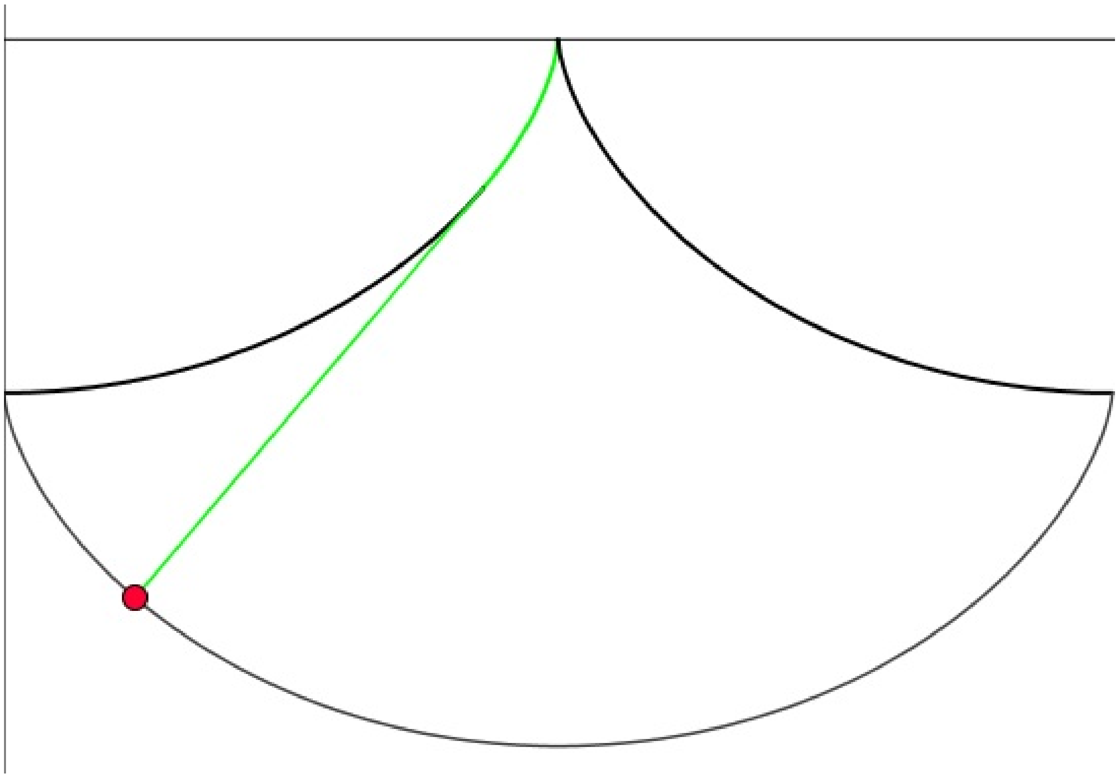
Kommen wir nun zur Länge des Zykloidenbogens. Wenn wir als Punkt P den anfangspunkt des Zykloidenbogens wählen, so ist das Zykloidenbogenstück $\overline{PC}$ genau die Hälfte des gesamten Zykloidenbogen und entspricht nach der Eigenschaft der Strecke $\overline{QC}$, wobei Q nun genau der Berührpunkt des Kreises mit der Rollgeraden ist. Somit ist die Strecke $\overline{QC}$ genau der Durchmesser von dem Erzeugungskreis und nach der Eigenschaft halb so lang wie der halbe Zykloidenbogen. Damit ist die Gesamtlänge des Zykloidenbogens genau $2 * 2 * 2r = 8r$

7 Tautochronie der Zykloide



Eine der wichtigsten Eigenschaften der Zykloide ist die Tautochronie einer umgedrehten Zykloide. Das heißt unter Vorraussetzung, dass Luftwiederstand und Reibung zu vernachlässigen sind, gelangt ein frei beweglicher Massepunkt von jedem Punkt der Zykloide immer in der selben Zeit zum tiefsten Punkt der umgedrehten Zykloide, wenn er sich auf der Zykloide bewegt. Das heißt nach obigen Bild obwohl der Rote Massepunkt weiter unten is, erreichen beide Massepunkte gleichzeitig den Tiefpunkt des umgedrehten Zykloidenbogens. Diese Eigenschaft entdeckte der Niederländische Mathematiker Christiaan Huygens im Jahr 1673.

7.1 Zykloidenpendel von Huygens

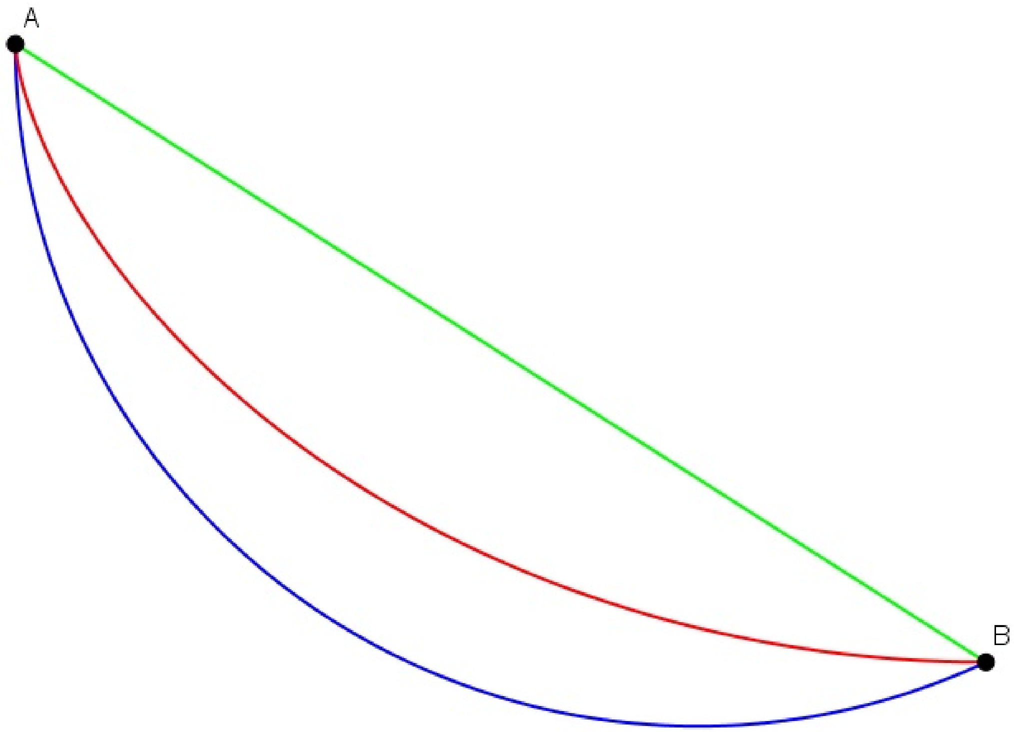


Huygens machte sich die Tautochronie und die Evolvente der Zykloide zu nutzen um damit das Zykloidenpendel zu erfinden. Dies ist ein Pendel, bei dem der Faden zwischen zwei Zykloidenbogen hängt und genau die Länger des halben Zykloidenbogen von den Zykloiden zwischen den der Faden hängt besitzt. Damit ist sichergestellt das die Bahn der Masse die am Ende des Fadens hängt wieder genau eine umgedrehte Zyklide beschreibt, denn der Faden wird wie bei der entstehung der Evolvente vom Zykloidenbogen abgerollt. Dass heißt aufgrund der Tautochronie hat das Pendel immer dieselbe schwingungsdauer unabhängig von seiner Auslenkung und die Schwingungsdauer beträgt $2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, wobei r der Radius des Erzeugungskreises der Zykloide ist und g die Erdbeschleunigung.

Dieses Zykloiden Pendel hat die Uhren der damaligen Zeit erheblich verbessert, da man die Schwingungsdauer des Pendels nicht von der Auslenkung abhängt und somit ein Faktor der zur Ungenauigkeiten führte wegviel.

8 Zykloide als Brachistrone

Im 17. Jahrhundert beschäftigte sich Johann Bernoulli mit seinem Bruder mit dem Brachistochrone-Problem. Die Situation ist Folgendermaßen, ein Maßepunkt soll nur mit Hilfe der Gravitation von einem Punkt A zu einem tiefer und nach rechts verschobenen Punkt B schnellstmöglich gelangen. Im Jahr 1696 gelang Johann Bernoulli dieses Problem zu lösen und kam zum ergebnis, dass die schnellstmögliche Bahn die der Maßepunkt beschreibt unabhängig von der Wahl der Punkte A und B immer eine Bahn einer umgedrehten Zykloide ist. Wobei zu beachten ist, dass sich der Punkt A immer am linken oberen Rand der umgedrehten Zykloide befindet und der Punkt B sich irgedwo auf der Zykloide befinden kann. Für beliebige zwei solche Punkte A und B existiert genua eine Zykloide die die Eigenschaft erfüllt, dass A ganz links oben sich befindet und B irgendwo auf der Zykloidenbahn. Das heißt zum Beispiel, dass eine Kugel die sich am linken oberen ende eines umgedrehten Zykloidenbogens befindet und sich dann auf der Zykloidenbahn bewegt ist immer schneller am Tiefpunkt der Zykloide als wenn sie sich auf einer geraden Bahn oder Kreisbahn in richtung des Tiefpunktes bewegen würde. Auf das Bild bezogen würde also der Maßepunkt A am schnellsten auf der roten Bahn(Zykloidenbahn) zu Punkt B gelangen.



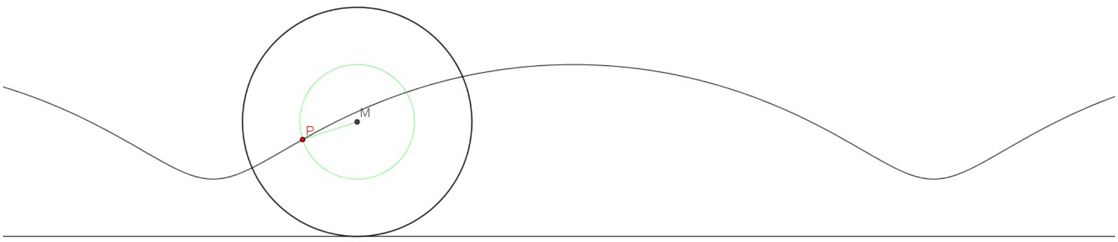
9 verkürzte und verlängerte Zykloide

Man kann den Begriff der Zykloide noch erweitern zu den verlängerten und verkürzten Zykloiden. Die Verkürzte bzw verlängerte Zykloide entsteht in dem der betrachtete Punkt P sich nicht auf dem Umfang des Erzeugungskreises befindet sondern innerhalb bzw außerhalb befindet. Allerdings haben die Verkürzte sowie die verlängerte Zykloide keine der Eigenschaften die oben beschrieben sind. Außerdem besitz die verkürzte bzw verlängerte Zykloide keine Spitzen mehr, allerdings sind sie immer noch periodisch. Die parameterdarstellung ist gegeben durch folgende Funktionen, wobei d der Abstand vom betrachteten Punkt zum Mittelpunkt des Kreises ist.

$$x(t) = rt - d\sin(t)$$
$$y(t) = r - d\cos(t)$$

Die Herleitung zur Herleitung der gewöhnlichen Zykloide unterscheidet sich nur durch den Abstand vom Mittelpunkt zum Punkt P der sich von r zu d ändert.

Verkürzte Zykloide:



Verlängerte Zykloide: