Mathematics. — *Beiträge zur Topologie der Deformationen (II. Homotopie- und Homologiegruppen).* By Dr. W. HUREWICZ (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of April 27, 1935).

In der ersten Mitteilung [1]) über diesen Gegenstand wurden jedem zusammenhängenden lokal zusammenziehbaren Raum R „*Homotopiegruppen*" [2]) $\pi_n(R)$ $(n = 1, 2 \ldots)$ zugeordnet, die sich als eine naturgemässe Verallgemeinerung der POINCARÉschen Fundamentalgruppe $\pi_1(R)$ ergeben. Es fragt sich, ob diese Gruppen in irgendwelcher Beziehung stehen zu den klassischen *Homologiegruppen* (Bettischen Gruppen) der kombinatorischen Topologie; es sei daran erinnert, dass sich die Homologiegruppen nicht nur für Polyeder sondern nach VIETORIS [2a]) allgemeiner für beliebige kompakte Räume in topologisch invarianter Weise mit Hilfe der sogen. „Fundamentalfolgen" von Zykeln [2b]) definieren lassen. Im Folgenden werden wir auch in Fall eines nicht kompakten Raumes R von den Homologiegruppen sprechen; wir definieren sie dann mit Hilfe *der* VIETORISschen Fundamentalfolgen, die *kompakte* Teilmengen von R zu Trägern haben und erklären einen solchen „Limeszykel" als homolog O, wenn er auf einer (hinreichend grossen) kompakten Menge homolog O in VIETORISschen Sinne ist. [3])

Was die erste Homotopiegruppe $\pi_1(R)$ (d. h. die Fundamentalgruppe) angeht, so ist bekannt, dass im Falle eines Polyeders ihre Faktorgruppe nach der Kommutatorgruppe mit der ersten Homologiegruppe übereinstimmt. Es bietet nicht die geringste Schwierigkeit, diesen Satz auf beliebige lokal zusammenziehbaren Räume zu übertragen. Für höhere Homo-

---

[1]) Vgl. diese Proceedings **38** (1935), S. 112—119, im Folgenden als DI zitiert.

[2]) Nach dem Erscheinen der eben zitierten Note habe ich erfahren, dass eine der meinigen äquivalente Definition der Homotopiegruppen (wenn auch im ganz anderer Form) von ČECH in einem Vortrag auf dem internationalen Mathematikerkongres in Zürich (1932) gegeben wurde (vgl. Verhandlungen des Internationalen Mathematikerkongresses Zürich 1932, Band II, S. 194). Wie ich einer freundlichen brieflichen Mitteilung des Herrn ČECH entnehme, waren die Homotopiegruppen noch früher Dehn bekannt, (aber in keiner Publikation dieses Autors erwähnt).

[2a]) Vgl. VIETORIS, Math. Ann. **97**, S. 457—472, Die VIETORISsche Begriffsbildung knüpft an die Brouwersche Zyklose an. Im Folgenden werden ausschliesslich Homologiegruppen mit ganzzahligem Koeffizientenbereich betrachtet.

[2b]) Man beachte, dass die VIETORISschen Fundamentalfolgen nicht übereinstimmen mit den „konvergenten Zykeln" von ALEXANDROFF (vgl. Math. Ann. **106**, S. 180). denn bei VIETORIS wird der Ausdruck „homolog" im Sinne „berandend" gebraucht, während bei ALEXANDROFF ein Zykel homolog O heisst, wenn ein *Vielfaches* von ihm berandet, so dass also die Torsion unberücksichtigt bleibt.

[3]) Durch diese Definition wird erreicht, dass die Homologiegruppen auch im Falle nicht kompakter Räume topologische Invarianten sind. Bei der Definition von VIETORIS (vgl. a.a. O.,) ist dies nicht der Fall.

topiegruppen (die abelsch sind [4]) und mit den gleichdimensionalen Homologiegruppen im allgemeinen nicht übereinstimmen [5])) gilt:

I. *Wenn die ersten* $n-1$ ($n \geqq 2$) *Homotopiegruppen eines zusammenhängenden lokal zusammenziehbaren Raumes verschwinden* (d. h. sich auf Einheitselemente reduzieren), *ist die n-te Homotopiegruppe der n-ten Homologiegruppe isomorph.* [5])

Aus I ergeben sich zahlreiche Folgerungen. Zunächst bekommt man durch vollständige Induktion:

II. *In einem zusammenhängenden lokal zusammenziehbaren Raum verschwinden die ersten n Homotopiegruppen dann und nur dann, wenn die Fundamentalgruppe und ersten n Homologiegruppen verschwinden.*

Einen Raum, dessen Fundamentalgruppe verschwindet, nennt man *einfach zusammenhängend*; einen Raum, dessen n-ten Homologiegruppe verschwindet, nennt man *azyklich in der n-ten Dimension.* Aus II. und aus den in der ersten Mitteilung aufgestellten Sätzen [6]) folgt:

III. *Für einen lokal zusammenziehbaren Raum R sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *R ist azyklisch in den ersten n Dimensionen und einfach zusammenhängend.*

b) *Für jeden höchstens n-dimensionalen kompakten Raum X ist der „Potenzraum"* R^X (dessen Elemente die stetigen Abbildungen von X in R sind) *zusammenhängend, d.h. jede stetige Abbildung von X in R lässt sich stetig in eine Abbildung überführen, bei der die Bildmenge aus einem einzelnen Punkt besteht.*

c) Ist X ein kompakter Raum, $Y \subset X$ eine abgeschlossene Menge, und gilt wenigstens eine der Ungleichungen $\dim X \leqq n+1$, $\dim Y \leqq n$, so lässt sich jede Abbildung $f \varepsilon R^Y$ zu einer Abbildung $F \varepsilon R^X$ erweitern.[7])

Für den Spezialfall der (endlichen oder unendlichen) Polyeder gilt:

III'. Ein Polyeder P ist dann und nur dann einfach zusammenhängend und azyklisch in den ersten n-Dimensionen, wenn jede höchstens n-dimensionale abgeschlossene kompakte Teilmenge von P sich in P auf einen Punkt zusammenziehen lässt [7a]).

Wenden wir die Äquivalenz von a) und b) auf einen kompakten n-dimensionalen Raum [7b]) R an und setzen wir in b) $X=R$, so sehen wir:

IV. *Ein endlichdimensionaler kompakter lokal zusammenziehbarer Raum*

---

[4]) Vlg. D I, S. 114, Satz II.

[5]) Beispiele: Die geschlossenen Flächen vom Geschlecht ≥ 1 (deren zweite Homotopiegruppen verschwinden). Die Sphäre S_2, mit nicht verschwindender dritter Homotopiegruppe.

[6]) Vgl. DI, § 3. S. 114—115.

[7]) Die Räume mit der Eigenschaft c) wurden eingehend von KURATOWSKI untersucht der auch die Äquivalenz von b) und c) bewiesen hat (vgl. Fund. Math. 24, S. 269—288).

[7a]) Dass dies für beliebige lokal zusammenzichbare Räume nicht immer gilt, folgt aus einem Beispiel von K. BORSUK (Fund. Math. 24, S. 257).

[7b]) Man beachte, dass für einen n-dimensionalen Raum R „azyklisch in den ersten n Dimensionen" und „azyklisch in allen Dimensionen" dasselbe bedeutet, denn R ist sowieso für $m > n$ azyklisch in der m-ten Dimension (vgl. VIETORIS, Math. Ann. **101**, S. 119).

(beispielsweise ein Polyeder) *ist dann und nur dann* (im grossen) *zusammenziehbar, wenn er einfach zusammenhängend und azyklisch in allen Dimensionen ist.*

Bemerkung. Der Satz bleibt auch für unendlichdimensionale Räume richtig, wofern man sich auf Räume beschrankt, die „absolute Umgebungsretrakte" im Sinne von BORSUK sind.

Es ist wohl eine bemerkenswerte Tatsache, dass die höherdimensionalen Homotopieeigenschaften der topologischen Gebilde in so hohem Grade von den klassischen topologischen Invarianten (Fundamentalgruppe, Homologiegruppen) beherrscht werden.

Es sei noch auf die Beziehungen zu der POINCARÉ*schen Vermutung* hingewiesen, nach der unter den n-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten M_n die Sphäre S_n charakterisiert sei durch das Verschwinden der Fundamentalgruppe und der Homologiegruppen bis auf die n-te. Mit Hilfe der vorstehenden Ergebnisse kann man beweisen, dass die POINCARÉsche Vermutung jedem der folgenden Sätze äquivalent ist:

1) Eine M_n, in der jede echte abgeschlossene Menge zusammenziehbar ist, ist mit S_n homöomorph.

2) Lässt sich S_n auf M_n stetig mit dem Grad 1 abbilden, so ist M_n mit der S_n homöomorph.

Auf die Beziehungen zu den wichtigen Untersuchungen von H. HOPF [8]) über die Klassifizierung der Abbildungen eines Polyeders in die gleichdimensionale Sphäre wird in der nächsten Mitteilung eingegangen. Es wird sich eine weitgehende Verallgemeinerung der HOPFschen Sätze ergeben.

Wir wollen nun den Beweis von I in seinen Grundzügen skizzieren (wegen der Einzelheiten sei auf eine spätere ausführliche Abhandlung verwiesen).

1. Der Raum R sei vorläufig nur als zusammenhängend und lokal zusammenziehbar vorausgesetzt. Wir legen in R ein für allemal einen Punkt y_0 fest.

Sei $n \geqq 2$, und sei W_{n-1} der $(n-1)$-dimensionale Würfel ($O \leqq x_i \leqq 1$, $i = 1, 2 \dots n-1$). Wir betrachten im Potenzraum $R^{W_{n-1}}$ die Teilmenge $\mathfrak{F}_{n-1}$, bestehend aus jenen Abbildungen, bei denen der ganze Rand von W_{n-1} in den Punkt y_0 abgebildet wird. Die Gruppe $\pi_n(R)$ ist definitionsgemäss die *Fundamentalgruppe von* $\mathfrak{F}_{n-1}$. [9]) Wir denken uns die Elemente $\pi_1(\mathfrak{F}_{n-1}) = \pi_n(R)$ durch geschlossene Wege in $\mathfrak{F}_{n-1}$ gegeben *mit der konstanten Abbildung* $F(R) = y_0$ *als Ausganspunkt.* Es ist klar, dass ein stetiger Weg in $R^{W_{n-1}}$ als eine Abbildung aus R^{W_n} gedeutet werden kann; den in $\mathfrak{F}_{n-1}$ verlaufenden, mit der konstanten Abbildung

8) Vgl. Comm. Math. Helv., 5, S. 39—54.

9) Vgl. D I, S. 114. Dass dort statt der Abbildungen des Wüfes W_{n-1} die Abbildungen der Sphäre S_{n-1} (die man ja aus W_{n-1} durch Identifizierung der Randpunkte erhalten kann) benützt werden, macht offenbar keinen wesentlichen Unterschied aus.

beginnenden und endenden Wegen entsprechen dabei Abbildungen aus R^{W_n}, bei denen alle Randpunkte von W_n in y_0 übergeführt werden, d. h. Abbildungen aus $\mathfrak{F}_n$. Abbildungen aus derselben Komponente von $\mathfrak{F}_n$ liefern dabei homotope Wege in $\mathfrak{F}_{n-1}$, so dass also *die Elemente von $\pi_n(R)$ eineindeutig den Komponenten von $\mathfrak{F}_n$ zugeordnet sind.*

2. Sei im Einheitswürfel W_n eine feste Orientierung gewählt. Sei E_n ein ebenfalls orientiertes *n-dimensionales Element* (d. h. topologisches Bild des W_n), und sei τ eine topologische orientierungserhaltende Abbildung von W_n auf E_n. Jeder stetigen Abbildung φ von E_n in R, *bei der alle Randpunkte von E_n in y_0 übergehen*, ordnen wir das nach 1. durch die Abbildung $\tau(\varphi)$ bestimmte Element von π_n zu; dieses Element ist, wie leicht zu zeigen, von der speziellen Wahl der Abbildung τ unabhängig [10]) also durch φ eindeutig bestimmt, wir wollen es mit

$$(\varphi, E_n)$$

bezeichnen. Es gilt $(\varphi_1, E) = (\varphi_2, E)$ dann und nur dann, wenn sich φ_1 stetig in φ_2 überführen lässt, so dass im Verlauf der Abänderung y_0 immer das Bild des Randes von E bleibt.

In der gleichen Weise sehen wir: Ist S_n eine orientierte topologische Sphäre, auf der ein bestimmter „Ursprungspunkt" x_0 ausgezeichnet ist, so lässt sich jeder stetigen Abbildung φ von S_n in R mit $\varphi(x_0) = y_0$ eindeutig ein Element von $\pi_n(R)$ zuordnen (man bilde W_n unter Erhaltung der Orientierung auf die S_n ab, so dass der Rand von W_n in den Punkt x_0 übergeht, während das Innere von W_n topologisch auf $S_n - x_0$ abgebildet wird). Dieses Element wollen wir mit

$$(\varphi, S_n, x_0) \text{ [11])}$$

bezeichnen. [12]) [12a])

3. Die Sphäre S_n sei irgendwie simplizial zerlegt. Die einzelnen (orientierten) Simplizes seien $T_1, T_2 \ldots T_r$. Es liege eine Abbildung φ von S_n in R vor, bei der die Ränder aller Simplizes T_i in y_0 übergehen. Sei x_0 irgend ein Randpunkt eines der Simplizes T_i. Nach 2. sind die Elemente (φ, S, x_0) und (φ, T_i) $(i = 1, 2 \ldots r)$ eindeutig definiert. Es lässt sich nun zeigen:

$$(\varphi, S, x_0) = (\varphi, T_1) + (\varphi, T_2) + \ldots + (\varphi, T_r)$$

(das Additionszeichen verwenden wir als das Operationszeichen der Abelschen Gruppe π_n).

---

10) Die folgt daraus, dass je zwei Abbildungen τ ineinander stetig deformierbar sind

11) Bei $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = y_0$ gilt im allgemeinen *nicht*: $(\varphi, S, x_0) = (\varphi, S, x_1)$. wohl ist dies der Fall, wenn die Fundamentalgruppe $\pi_1(R)$ verschwindet, (wie sich aus dem Beweis von I. als Nebenresultat ergeben wird). In diesem Fall könnte man also den Punkt x_0 in der Bezeichnung weglassen.

12) Bei ČECH (vgl. oben Anmerkung [2])) werden die Elemente der Homotopiegruppen durch die Abbildungen φ *definiert*.

12a) In den Überlegungen des § 2. ist die Behauptung enthalten, dass $\pi_n(R)$ dann und nur dann verschwindet, wenn R^{S_n} zusammenhängend ist (vgl. D I, Satz III).

4. Nach diesen Vorbemerkungen über Homotopiegruppen wenden wir uns den *Homologiegruppen* β_n [12b]) zu. Bei einer stetigen Abbildung eines kompakten Rames X in einen Raum R entsteht bekanntlich ein Homomorphismus der Homologiegruppen $\beta_n(X)$ in die Gruppen $\beta_n(R)$. Von den Elementen von $\beta_n(R)$, die bei diesem Homomorphismus als Bilder auftreten, sagen wir, sie seien *durch die Abbildung* φ *induziert*. Für einen *lokal zusammenziehbaren* Raum R gelten nun die folgenden Sätze:

a) *Jedes* Element von $\beta_n(R)$ wird durch eine Abbildung eines (n-dimensionalen) Polyeders in R induziert.

b) Wird bei einer stetigen Abbildung φ eines Polyeders P dem n-dimensionalen Zykel C [13]) in P die Null in $\beta_n(R)$ zugeordnet, so lässt sich P in ein (höherdimensionales) Polyeder P' einbetten, so dass C in P' nullhomolog ist (berandet), und dass φ zu einer stetigen Abbildung von P' in R erweitert werden kann.[14])

5. Die weiteren Betrachtungen beruhen auf dem folgenden *Hilfssatz*: Sei R ein beliebiger topologischer Raum, P ein (endlichdimensionales) Polyeder, Q ein aus Simplizes von P aufgebautes Teilpolyeder. Im Abbildungsraum R^Q sei ein stetiger Weg φ_t $(O \leqq t \leqq 1)$ gegeben und ferner eine Abbildung $\Phi \varepsilon R^P$, welche in Q mit φ_0 übereinstimmt. Behauptung: Jede der Abbildungen φ_t lässt sich zu einer Abbildung $\Phi_t \varepsilon R^P$ fortsetzen, derart, dass die Abbildungen Φ_t einen stetigen Weg in R^P ergeben, wobei $\Phi_0 = \Phi$.

Man beweist den Satz zuerst für den Spezialfall, dass P ein n-dimensionales Simplex und Q sein Rand ist (in diesem Fall erfordert der Beweis nur eine ganz einfache Überlegung) und schliesst daraus auf den allgemeinen Fall: Man definiert zunächst für alle ausserhalb von Q liegenden Eckpunkte von P: $\Phi_t(x) = \Phi_0(x)$ $(O \leqq t \leqq 1)$. Angenommen, die Abbildungen Φ_t seien bereits in allen höchstens $(m-1)$-dimensionalen Simplizes von P erklärt. Ist dam T ein m-dimensionales Simplex, so ist auf seinem Rande die Funktionenschar Φ_t bereits definiert und, wie der erwähnte Spezialfall des Satzes besagt, lässt sich in gewünschter Weise ins Innere von T fortsetzen, so dass schliesslich alle Punkte von P erreicht werden.

6. Sei jetzt R ein stetig zusammenhängender [15]) Raum, in dem die ersten n Homotopiegruppen verschwinden; jede stetige Abbildung einer m-dimensionalen Sphäre in R $(m = 1, 2 \ldots n)$ ist also unwesentlich, d.h.

[12b]) Mit $\beta_n(R)$ bezeichnen wir die (nicht reduzierte) n-te Homologiegruppe von R.

[13]) C ist hier als simplizialer Komplex gemeint (nicht als Limeszykel!).

[14]) Die Behauptungen *a*) und *b*) besagen, dass im Falle eines lokal zusammenziehbaren Raumes man die Homologiegruppen statt durch die konvergenten Zykeln von VIETORIS auch durch die stetigen Bilder der Polyedralen Zykeln (sogen. „singuläre Zykeln") definieren kann.

[15]) Ein Raum heisst stetig zusammenhängend, wenn man in ihm je zwei Punkte durch einen stetigen Weg verbinden kann. Jeder zusammenhängende, lokal zusammenhängende (also erst recht jeder zusammenhängende, lokal zusammenziehbare) Raum ist stetig zusammenhängend.

in die konstante Abbildung deformierbar.[12a]) Sei P ein Polyeder, φ- eine stetige Abbildung von P in R. Unter P_m verstehen wir das „m-dimensionale Gerüst" von P, d.h. das Polyeder, gebildet von den m-dimensionalen Simplizes von P. Aus 5. folgt leicht:

φ lässt sich stetig in eine Abbildung φ_1 deformieren bei der $\varphi_1(P_n) = y_0$, unter y_0 einen willkürlich gewählten Punkt von R verstanden.

Lässt man nämlich die (endlich vielen) Punkte der Menge $\varphi(P_0)$ auf stetigen Wegen nach dem Punkt y_0 laufen, so wird die Abbildung $\varphi \mid P_0$ (d.h. die Abbildung φ nur auf der Menge P_0 betrachtet) in die konstante Abbildung mit y_0 als Bild übergeführt, folglich lässt sich nach 5. die Abbildung φ auf dem ganzen P in eine Abbildung φ' deformieren mit $\varphi'(P_0) = y_0$. Angenommen, man habe bereits aus φ durch stetige Deformation eine Abbildung φ^m gewonnen, so dass $\varphi^m(P_{m-1}) = y_0$ ($m \leqq n$). Ist dann T ein *m-dimensionales* Simplex von P, S — sein Rand, so ist $\varphi^m(S) = y_0$, und aus dem Verschwinden der m-ten Homotopiegruppe folgt, dass man die partielle Abbildung $\varphi^m \mid T$ ohne $\varphi^m \mid S$ zu andern, in die konstante Abbildung stetig deformieren kann; also kann man die Abbildung $\varphi^m \mid P_m$ stetig in die konstante Abbildung (mit y_0 als Bild) überführen, und nach 5. lässt sich diese Deformation auf das ganze Polyeder P ausdehnen, so dass man eine Abbildung $\varphi^{m+1} \varepsilon R^P$ gewinnt mit $\varphi^{m+1}(P_m) = y_0$ und schliesslich eine Abbildung $\varphi_1 = \varphi^{n+1}$ mit $\varphi_1(P_n) = y_0$.[15b]).

Bemerkung. Ist x_0 ein Punkt von P mit $\varphi(x_0) = y_0$, so kann man, wie aus dem eben gegebenen Beweis hervorgeht, die stetige Abänderung von φ in φ_1 derart vornehmen, dass in ihrem Verlauf y_0 immer das Bild von x_0 bleibt (man betrachte, was offenbar gestattet ist, x_0 als einen Eckpunkt von P!).

7. Wir gehen nun an den eigentlichen Beweis von I. R sei zusammenhängend und lokal zusammenziehbar, y_0 — ein fester Punkt von R. Nehmen wir eine orientierte n-dimensionale Sphäre S ($n \geqq 2$), einen festen Punkt x_0 von S und betrachten die stetigen Abbildungen φ von S in R mit $\varphi(x_0) = y_0$! Jeder solchen Abbildung ist nach 2. eindeutig ein Element von $\pi_n(R)$ zugeordnet, nämlich das Element (φ, S, x_0). Andererseits induziert nach 4. die Abbildung φ ein bestimmtes Element der Homologiegruppe $\beta_n(R)$ als Bild des n-dimensionalen Grundzykels der Sphäre. Dieses Element von β_n ändert sich nicht bei stetiger Abänderung von φ, kann also eindeutig dem Element (φ, S, x_0) von π_n zugeordnet werden. Es liegt somit eine eindeutige Abbildung f der Gruppe π_n in die Gruppe β_n vor, und man bestätigt leicht, dass f ein *Homomorphismus* ist. Um Satz I zu beweisen, brauchen wir bloss zu zeigen, dass, *falls die Gruppen $\pi_1 . \pi_2 \ldots \pi_{n-1}$ verschwinden*, 1) f sogar ist ein *Isomorphismus* ist und 2) $f(\pi_n) = \beta_n$ (Isomorphismus *auf* β_n!).

[15b]) Im Bewiesenen ist insbesondre die Behautung enthalten, dass im Falle des Verschwindens der ersten n Homotopiegruppen von R jede Abbildung eines (höchstens) n-dimensionalen Polyeders in R unwesentlich ist. Dies ist ein Teil des Satzes V von *DI*.

Beweis von 1): Wir haben zu zeigen: Aus $f(c) = 0$ $(c \varepsilon \pi_n)$ folgt $c = 0$. Sei

$$c = (\varphi, S, x_0).$$

Da bei der Abbildung φ die Homologiegruppe von S auf die Null abgebildet wird, kann man nach 4. (Behauptung *b*)) die Abbildung φ auf ein Polyeder P ausdehnen, in dem S nullhomolog ist[16]). Wegen 6. dürfen wir (unter Beibehaltung der Bezeichnungen von 6.) annehmen:

$$\varphi(P_{n-1}) = y_0.$$

Seien $T_1, T_2 \ldots T_r$ die n-dimensionalen Simplizes von P, jedes in einer bestimmten Orientierung. Die Ränder der T_i sind durch φ auf y_0 abgebildet, also haben die Ausdrücke (φ, T_i) von 2. einen Sinn. Ordnen wir dem *n-dimensionalen Komplex*

$$K = \sum_{i=1}^{r} e_i T_i,$$

wo e_i beliebige ganze Zahlen sind, das Element

$$p(K) = \sum_{i=1}^{r} e_i (\varphi, T_i)$$

der Gruppe π_n zu, so entsteht ein *Homomorphismus der Gruppe aller* (reinen) *n-dimensionalen Komplexe von P in die Gruppe* π_n. Nimmt man insbesondere für K den Rand eines $(n+1)$-dimensionalen Simplexes U von R, und wählt einen Punkt $\bar{x}$ in einem $(n-1)$-dimensionalen Simplex von K, so ist der Ausdruck $(\varphi, K, \bar{x})$ definiert, und man hat nach 3.

$$p(K) = (\varphi, K, \bar{x}),$$

Nun ist aber

$$(\varphi, K, \bar{x}) = 0,$$

wie man sofort erkennt, wenn man K in U auf $\bar{x}$ zusammenzieht. Also ist $p(K) = 0$, und daraus folgt, dass allgemeiner *für jeden Komplex K, der in P berandet,*

$$p(K) = 0$$

gilt (denn jeder berandende Komplex ist Summe von Simplizesrändern). Insbesondere gilt dies für $K = S$. Nach 3. ist

$$p(S) = (\varphi, S, x_0) = c,$$

also $c = 0$, was zu beweisen war.

Beweis von 2): Sei z ein Element von β_n. Nach 4. (Behauptung *a*)) wird z durch eine stetige Abbildung φ eines Polyeders P induziert. Wie oben dürfen wir annehmen

$$\varphi(P_{n-1}) = y_0.$$

16) Wir gebrauchen dasselbe Zeichen S für die Sphäre aufgefasst als Punktmenge, wie für die Sphäre aufgefasst als algebraïscher Komplex. Bei der letzten Auffassung müssen wir uns S in einer bestimmten simplizialen Zerlegung denken (etwa als Rand eines $(n+1)$ dimensionalen Simplexes).

Seien $T_1, T_2 \ldots T_2$ die n-dimensionalen Simplizes von P (jedes in bestimmter Orientierung), und sei

$$\sum_{i=1}^{r} e_i T_i$$

ein n-dimensionaler Zykel, dessen Bild bei dem durch φ verursachten Homomorphismus z ist. Da die Ränder der T_i auf y_0 abgebildet werden, kann man die Abbildungen $\varphi \mid T_i$ als Abbildungen von orientierten n-dimensionalen Sphären auffassen. Die Abbildung $\varphi \mid T_i$ bestimmt also in R ein Element z_i von β_n, und man sieht leicht, dass

$$z = \sum_{i=1}^{r} e_i z_i .$$

Nach der Definition von z_i ist

$$z_i = f[(\varphi, T_i)]$$

und daher (weil f ein Homomorphismus ist)

$$z = f\left[\sum_{i=1}^{r} e_i (\varphi, T_i)\right].$$

Damit ist bewiesen, dass unter den $f(c)$ $(c \, \varepsilon \, \pi_n)$ alle Elemente von β_n vorkommen.

Mathematics. — *Noch einige Integraldarstellungen für die* WHITTAKER*sche Funktion.* Von C. S. MEIJER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of April 27, 1935).

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit werde ich beweisen, dasz die Funktion $W_{k,m}(z^2)$ die folgenden Integraldarstellungen besitzt [1]):

$$\left.\begin{aligned} W_{k,m}(z^2) = -2ze^{\frac{1}{2}z^2}\int_0^\infty e^{-u^2}\,\{J_{2m}(2zu)\sin(m-k)\pi \\ + Y_{2m}(2zu)\cos(m-k)\pi\}\,u^{2k}\,du, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

[1]) Für die Definition von $W_{k,m}(z)$ vergl. man: E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, Modern Analysis, Chapter XVI; C. S. MEIJER, Über die Integraldarstellungen der WHITTAKERschen Funktion $W_{k,m}(z)$ und der HANKELschen und BESSELschen Funktionen, Nieuw Archief voor Wiskunde (2e reeks), 18 (1934), S. 35—57; C. S. MEIJER, Einige Integraldarstellungen für WHITTAKERsche und BESSELsche Funktionen, Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 37 (1934), S. 805—812. Diese drei Arbeiten werden in der Folge mit **M.A.**, **I** und **II** zitiert.