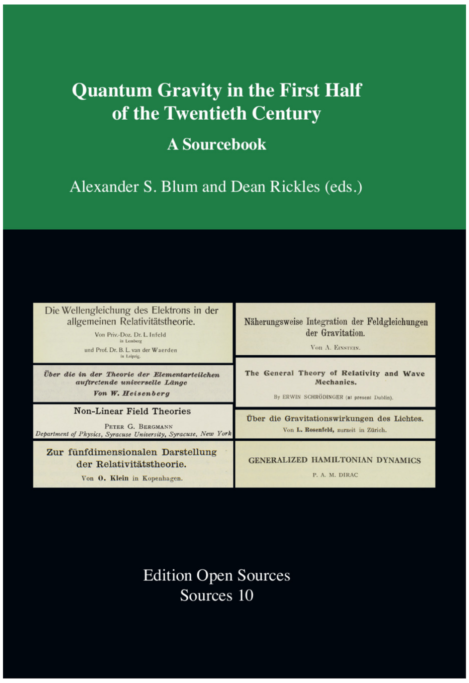
Edition Open Sources
Sources 10

Alexander S. Blum and Dean Rickles:

Erwin Schrödinger (1932): Diracsches Elektron im Schwerefeld I

DOI: 10.34663/9783945561317-15



In: Alexander S. Blum and Dean Rickles (eds.): *Quantum Gravity in the First Half of the Twentieth Century : A Sourcebook*
Online version at https://edition-open-sources.org/sources/10/

ISBN 978-3-945561-31-7, DOI 10.34663/9783945561317-00
First published 2018 by Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Edition Open Sources

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de

Chapter 13
Erwin Schrödinger (1932): Diracsches Elektron im Schwerefeld I

Erwin Schrödinger (1932). Diracsches Elektron im Schwerefeld I. *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse*, 1932, 105–128.

Diracsches Elektron im Schwerefeld I.

Von E. Schrödinger.

(Vorgelegt am 25. Februar 1932 [s. oben S. 46].)

§ 1. Einleitung.

Die Vereinigung der Diracschen Theorie des Elektrons mit der allgemeinen Relativitätstheorie ist schon wiederholt in Angriff genommen worden, so von Wigner[1], Tetrode[2], Fock[3], Weyl[4], Zaycoff[5], Podolsky[6]. Die meisten Autoren führen in jedem Weltpunkt ein orthogonales Achsenkreuz und in bezug auf dieses numerisch spezialisierte Diracsche Matrizen ein. Bei diesem Verfahren ist es ein bißchen schwer, zu erkennen, ob die Einsteinsche Idee des Fernparallelismus, auf die teilweise direkt Bezug genommen wird, wirklich hereinspielt oder ob man davon unabhängig ist. Ferner wird es dabei nötig, die Riemanngeometrischen Begriffe in die weniger vertraute und entschieden umständlichere Form der »Beinkomponenten« umzugießen. Es schien mir wünschenswert, all dies zu vermeiden, indem man, wie Tetrode[7], nur auf die verallgemeinerten Vertauschungsrelationen [s. u. Gleichung (2)] sich stützt. Es zeigt sich, daß man so außerordentlich einfach und geradlinig zu den wichtigen Operatoren Γ_k geführt wird, deren Spur das Viererpotential ist und die Fock als »Komponenten der Parallelverschiebung eines Spinors« einführt; und ebenso geradlinig zu dem wichtigen Gleichungssystem [s. u. (8)], das Fock auf dem Umweg über die Beinkomponenten gewinnt. Durch eine Beschränkung der zulässigen Bezugsysteme (s. u. § 4), welche der in der speziellen Relativitätstheorie üblichen völlig analog ist, führt man sodann die für die Interpretation wünschenswerten Hermitizitäten herbei, sowie eine Zuordnung zwischen Tensoroperatoren und lokalen c-Tensoren, welche ebenfalls völlig analog ist der in der speziellen Theorie von v. Neumann[8] aufgestellten [s. Gleichung (57) unten]. Ein grundsätzlicher Vorzug scheint es mir, daß sich der ganze Apparat fast vollständig durch reinen Operatorkalkül aufbauen läßt, ohne auf die ψ-Funktion Bezug zu nehmen. Hoffentlich

---

[1] E. Wigner, ZS. f. Phys. **53**, 592, 1928.
[2] H. Tetrode, ZS. f. Phys. **50**, 336, 1928.
[3] V. Fock, ZS. f. Phys. **57**, 261, 1929.
[4] H. Weyl, Proc. Nat. Acad. Amer. **15**, 323, 1929; ZS. f. Phys. **56**, 330, 1929.
[5] R. Zaycoff, Ann. d. Phys. **7**, 650, 1930.
[6] B. Podolsky, Phys. Rev. **37**, 1398, 1931.
[7] So auch B. Hoffmann in einem Brief an Phys. Rev. **37**, 88, 1931.
[8] J. v. Neumann, ZS. f. Phys. **48**, 868, 1928.

erschreckt die exakte Begründung dieses Apparats nicht allzusehr durch ihren Umfang, an dem die breite Schreibweise des Autors mitschuldig ist. Nach dieser einmal geleisteten Vorarbeit dürfte sich die Handhabung und das Denken damit als einfach erweisen. — Meine ausgiebige Verschuldung an die Arbeiten der Vorgänger möchte ich hier ein für allemal erklären, bitte aber aus methodischen Gründen, alles neu herleiten zu dürfen, so als wäre es noch von niemandem gefunden.

§ 2. Aufbau der Metrik aus Matrizenfeldern.

Wir nennen die Weltvariablen

$$x_0 = ict\,, \quad x_1 = x\,, \quad x_2 = y\,, \quad x_3 = z\,.$$

Die erste ist stets reinimaginär, die anderen drei reell. Diracs Grundgedanke war, den euklidischen Wellenoperator

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

als das Quadrat eines linearen Operators aufzufassen

$$\left(\mathring{\gamma}_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \mathring{\gamma}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathring{\gamma}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathring{\gamma}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2,$$

wobei die $\mathring{\gamma}_k$ 4×4reihige Matrizen[1] sind, die der Forderung genügen müssen

$$\mathring{\gamma}_i \mathring{\gamma}_k + \mathring{\gamma}_k \mathring{\gamma}_i = 2\delta_{ik}\,, \tag{1}$$

d. h. gleich der Nullmatrix oder gleich dem doppelten der Einheitsmatrix, je nachdem $i \neq k$ oder $i = k$. Man weiß, daß die $\mathring{\gamma}_k$ durch die Forderung (1) gerade bis auf eine sogenannte Ähnlichkeitstransformation

$$\mathring{\gamma}_k' = S^{-1} \mathring{\gamma}_k S$$

mit einer beliebigen, nichtsingulären 4×4reihigen Transformationsmatrix S bestimmt sind. Diese Freiheit in der Wahl der $\mathring{\gamma}_k$ besteht offenkundig, und man weiß, wie gesagt, daß die Freiheit damit erschöpft ist.

Da man statt vom Wellenoperator auch vom Linienelementquadrat:

$$dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

hätte ausgehen können, liegt es nahe, die Forderungen (1) so aufzufassen, daß die Matrizen $\mathring{\gamma}_k$ neben den anderen Aufgaben, die ihnen nachher bei der Beschreibung des Elektrons zufallen, auch noch die Aufgabe haben, die Weltmetrik zu beschreiben, die vorläufig euklidisch vorausgesetzt war. Soll sie es nicht sein, sondern

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu,$$

[1] Es kommt übrigens für alles Folgende auf die Reihenzahl gar nicht an.

so wird man (1) durch

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2 g_{ik} \tag{2}$$

zu ersetzen haben (Tetrode). Die γ_k sind Funktionen von Raum und Zeit, d. h. es sind 4×4reihige Matrizen, deren Elemente Funktionen der x_i sind.

Die Gleichungen (2) haben in jedem Punkte P sicherlich Lösungen für die γ_k, wenn man die g_{ik} irgendwie vorgegeben denkt (natürlich so, daß sie einer nichtsingulären Metrik entsprechen). Die Freiheit, welche bei vorgegebenen g_{ik} für die γ_k noch besteht, ist genau dieselbe wie oben für die $\mathring{\gamma}_k$, nämlich: Transformation mit einer beliebigen nichtsingulären Matrix S. Man erkennt die Richtigkeit dieser Behauptungen, indem man sich der Reihe nach folgendes überlegt:

1. Überhaupt lösen lassen sich die Gleichungen (2) immer durch 4 passend gewählte lineare Aggregate eines beliebigen Diracschen Basissystems $\mathring{\gamma}_k$ — der Ansatz führt auf erfüllbare Forderungen für die Koeffizienten.

2. Umgekehrt: Hat man ein System von γ_k, von dem man nur weiß, daß es (2) erfüllt, so kann man 4 Linearaggregate dieser γ_k angeben, die (1) erfüllen, also eine Diracsche Basis bilden. Hat man also etwa zwei Lösungssysteme γ_k und γ'_k von (2), so lassen sie sich durch dieselbe lineare Transformation in je eine Diracsche Basis verwandeln. Diese zwei Diracschen Basen aber gehen sicher durch eine S-Transformation auseinander hervor. Ebendiese verwandelt dann auch γ_k und γ'_k ineinander.

3. Daß jede S-Transformation (2) unangetastet läßt, liegt auf der Hand. — Damit sind die Behauptungen bewiesen.

Ein sehr wesentlicher Unterschied zwischen den $\mathring{\gamma}_k$ und den γ_k ist dieser. Es gibt bekanntlich hermitesche $\mathring{\gamma}_k$-Systeme, hingegen gibt es im allgemeinen keine hermiteschen γ_k-Systeme, auch nicht etwa solche, wo einige γ_k hermitesch, andere schiefhermitesch sind. Das hängt mit den wohlbekannten Reellitätsverhältnissen zusammen, die für die g_{ik} zu fordern sind, nämlich reinimaginär, wenn ein und nur ein Index 0 vorkommt, sonst reell. (Man muß sich erinnern, daß das symmetrische Produkt, der Antikommutator, zweier hermitescher Matrizen stets hermitesch ist.) Wir gehen später auf die Hermitizitätsfragen ausführlich ein und haben dies hier nur erwähnt, um zu zeigen, daß vorläufig nicht der mindeste Grund vorliegt, die in jedem Punkt willkürliche Transformation S etwa auf eine unitäre zu beschränken. Denn da die γ_k ohnedies nicht hermitesch sind, hat man zunächst keinen Anlaß, sich die »Erhaltung der Hermitizität« angelegen sein zu lassen.

Wir leiten jetzt aus (2) ein wichtiges System von Differentialgleichungen für die γ_k ab. Wir denken die g_{ik} vorgegeben und die Gleichungen (2) in jedem Punkt P gelöst, und zwar so, daß diese Lösungen sich zu vier stetigen, differenzierbaren Matrizenfeldern zusammenfügen, was offenbar möglich sein wird.

Gehen wir nun von einem Punkt P zu einem Nachbarpunkt P' über und bilden in diesem Sinne das vollständige Differential der Gleichung (2)

$$\delta\gamma_i \cdot \gamma_k + \gamma_i \cdot \delta\gamma_k + \delta\gamma_k \cdot \gamma_i + \gamma_k \cdot \delta\gamma_i = 2\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}\delta x^l. \tag{3}$$

Beachten wir nun den Satz von Ricci, nach welchem die kovariante Ableitung des Fundamentaltensors g_{ik} identisch verschwindet:

$$g_{ik;l} \equiv \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} - \Gamma^\mu_{kl} g_{i\mu} - \Gamma^\mu_{il} g_{\mu k} \equiv 0, \tag{4}$$

so wird die rechte Seite von (3) Folgendem gleich:

$$2(\Gamma^\mu_{kl} g_{i\mu} + \Gamma^\mu_{il} g_{\mu k})\delta x^l.$$

Diesen Wert kann man der linken Seite von (3) erteilen, wenn man ansetzt:

$$\delta\gamma_i = \Gamma^\mu_{il}\gamma_\mu \delta x^l \tag{5}$$

und (2) beachtet. D. h. die Matrizen

$$\gamma_i + \delta\gamma_i = \gamma_i + \Gamma^\mu_{il}\gamma_\mu\delta x^l \tag{6}$$

genügen der Gleichung (2) im Punkte P', wenn die γ_i ihr im Punkte P genügen.

Der Ansatz (5) wäre im allgemeinen widerspruchsvoll, wenn man ihn auf alle Punkte P' in der Umgebung von P anwenden wollte. Denn durch einfache Rechnung kann man sich überzeugen, daß der Ausdruck (5) dann und nur dann ein vollständiges Differential ist, wenn die Krümmung in P verschwindet. Aber nach dem oben Gesagten können und werden sich die γ_i-Werte in P' — wir wollen sie $\gamma_i + \delta'\gamma_i$ nennen — von unserem irgendwie erratenen Lösungsansatz (5) bzw. (6) noch durch eine Ähnlichkeitstransformation unterscheiden, und zwar natürlich durch eine unendlich kleine, wenn die Stetigkeit gewahrt werden soll. Das heißt, es muß eine unendlich kleine Matrix ε geben, derart, daß

$$\gamma_i + \delta'\gamma_i = (1-\varepsilon)(\gamma_i + \delta\gamma_i)(1+\varepsilon) = \gamma_i + \delta\gamma_i + \gamma_i\varepsilon - \varepsilon\gamma_i$$

oder

$$\delta'\gamma_i = \Gamma^\mu_{il}\gamma_\mu\delta x^l + \gamma_i\varepsilon - \varepsilon\gamma_i. \tag{7}$$

An sich könnte ε für jeden Nachbarpunkt einen anderen, ganz beliebigen Wert haben. Soll aber γ_i einen richtigen Differentialquotienten nach x_l haben, so muß ε für ein Fortschreiten in der Richtung x_l (d. h. für $\delta x_l \neq 0$, alle anderen $= 0$) mit δx_l proportional sein. So für jedes l. Soll dann die Änderung von γ_i beim Fortschreiten in beliebiger Richtung sich richtig aus seinen Differentialquotienten berechnen lassen, so muß ε die Summe dieser vier Glieder sein. So kommt man zu dem Ansatz

$$\varepsilon = -\Gamma_l\delta x^l,$$

in welchem die Γ_l vier von Ort und Zeit abhängige Matrizen sind (das Minuszeichen ist natürlich freie Willkür). In (7) eingesetzt, ergibt sich das wichtige System von Differentialgleichungen, das wir oben ankündigten[1]:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_l} = \Gamma_{il}^{\mu} \gamma_{\mu} + \Gamma_l \gamma_i - \gamma_i \Gamma_l. \tag{8}$$

Wir werden es später so aussprechen: Die kovariante Ableitung des Fundamentalvektors γ_k verschwindet, in voller Analogie zum Satz von Ricci, Gleichung (4). Anderseits hängt die Quellenfreiheit des Viererstroms eng mit diesem Gleichungssystem zusammen. Besonderen Nachdruck möchte ich darauf legen, daß wir es hier rein aus den Anforderungen der Metrik abgeleitet haben, ohne Bezugnahme auf die ψ-Funktion, wobei wir die Transformationsfreiheit der Diracschen Matrizen in Anspruch nehmen mußten. Dadurch traten — und zwar unvermeidlich — die neuen Operatoren Γ_l auf, von denen wir sehen werden, daß sie aufs engste mit dem Viererpotential verknüpft sind (sie bilden aber keinen Vektor!).

Wir untersuchen noch die notwendigen Bedingungen für die Verträglichkeit der Gleichungen (8), nämlich daß die gemischten zweiten Differentialquotienten, auf zwei Arten berechnet, übereinstimmen müssen. Indem man die beim Differenzieren auftretenden ersten Derivierten wieder durch (8) ausdrückt, findet man:

$$\Phi_{kl} \gamma_i - \gamma_i \Phi_{kl} = R_{kli}^{\ \ \ \ \mu} \gamma_{\mu}. \tag{9}$$

Hier ist $R_{kli}^{\ \ \ \ \mu}$ der gemischte Riemannsche Krümmungstensor in der üblichen Bezeichnungsweise (vgl. z. B. Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül, S. 91; Berlin, bei Springer 1928). Φ_{kl} ist eine Abkürzung, die wir einführen für folgende sechs, in den Indizes k, l antisymmetrische Matrizen:

$$\Phi_{kl} = \frac{\partial \Gamma_l}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x_l} + \Gamma_l \Gamma_k - \Gamma_k \Gamma_l, \tag{10}$$

die, wie sich zeigen wird, in enger Beziehung zum elektromagnetischen Feld stehen. Bei gegebenem γ_i-Feld ist durch (8) jedes Γ_l, durch (9) jedes Φ_{kl} festgelegt bis auf je einen Addenden, der mit allen γ_i vertauschbar, mithin Multiplum der Einheitsmatrix sein muß. Die Φ_{kl} sind aus (9) leicht berechenbar. Man führe neben den γ_i die kontravarianten

$$\gamma^i = g^{ik} \gamma_k \tag{11}$$

ein. Ferner erkläre man

$$s^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}). \tag{12}$$

[1] Inhaltlich übereinstimmend mit Fock l. c. Gleichung (24). Die Bedeutung der Zeichen hier und dort ist aber eine etwas andere. Wünscht man zur Deckung zu bringen, so lese man zuerst unseren Abschnitt 5 über Hermitizität!

(Die $s^{\mu\nu}$ entsprechen für $\mu, \nu = 1, 2, 3$ in gewisser Weise dem Spin, für $\mu = 0, \nu = 1, 2, 3$ in gewisser Weise der Geschwindigkeit. Siehe später.) Wir merken noch an, daß nach (2) und (11)

$$\gamma_i \gamma^k + \gamma^k \gamma_i = 2\,\delta_i^k. \tag{13}$$

Nun findet man leicht

$$\gamma_i s^{\mu\nu} - s^{\mu\nu} \gamma_i = 2(\delta_i^\mu \gamma^\nu - \delta_i^\nu \gamma^\mu). \tag{14}$$

Die $s^{\mu\nu}$ produzieren also beim Vertauschen mit einem γ wieder γ. Das ist gerade, was man zur Auflösung von (9) nach Φ_{kl} braucht. Die rechte Seite von (9) läßt sich ja auch $R_{kl,i\mu}\gamma^\mu$ schreiben, wo $R_{kl,i\mu}$ der symmetrische Riemann-Tensor. Dann bestätigt man mit der V. R. (14), daß

$$\Phi_{kl} = -\tfrac{1}{4} R_{kl,\mu\nu} s^{\mu\nu} + f_{kl} \cdot 1 \tag{15}$$

die allgemeine Lösung von (9) ist[1]. f_{kl} ist das freibleibende Multiplum der Einheit. Die f_{kl} werden (mit i multipliziert) die Rolle des elektromagnetischen Feldes übernehmen. Man erkennt, daß das Auftreten dieser Größen durch den Aufbau der Metrik aus Matrizen zwar sehr nahegelegt wird, daß aber gerade die f_{kl} durch das γ-Feld vorläufig nicht bestimmt sind, sondern von ihm völlig freigelassen werden.

Die $s^{\mu\nu}$ haben als Kommutatoren die Spur Null. Daher ist

$$\text{Spur } \Phi_{kl} = f_{kl} \cdot \text{Spur } 1 = 4 f_{kl}.$$

Anderseits ist nach (10)

$$\text{Spur } \Phi_{kl} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\text{Spur } \Gamma_l) - \frac{\partial}{\partial x_l}(\text{Spur } \Gamma_k),$$

weil Differentiation und Spurbildung vertauschbar sind und der Kommutator keinen Beitrag zur Spur liefert. Setzt man etwa

$$\tfrac{1}{4} \text{ Spur } \Gamma_l = \varphi_l,$$

so wird

$$f_{kl} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}. \tag{16}$$

Die Spuren der Γ_l sind das Viererpotential (von einem Faktor i abgesehen).

§ 3. Transformationstheorie, erster Teil.

Nach dem Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie soll eine Umbenennung aller Punkte

$$x_k' = x_k'(x_0, x_1, x_2, x_3); \quad k = 0, 1, 2, 3 \tag{17}$$

[1] Inhaltlich wesentlich übereinstimmend mit den indexreichen Beinchengleichungen (46), (48) bei Fock l. c.

die Form der Beschreibung nicht ändern. Dabei soll die Funktion x_0' nur reinimaginäre, x_1', x_2', x_3' nur reelle Werte annehmen, die Funktionaldeterminante soll positiv bleiben. Wir nennen das eine Punktsubstitution. Die g_{ik} transformieren dabei als kovarianter Tensor 2. Stufe.

Solange wir an die γ_i keine andere Anforderung stellen, als daß sie den Gleichungen (2) genügen sollen, läßt sich die Frage, wie sie bei einer Punktsubstitution zu transformieren sind, gar nicht eindeutig beantworten. Denn nach wie vor der Punktsubstitution bleibt eine Ähnlichkeitstransformation mit von Punkt zu Punkt variierender Transformationsmatrix S völlig frei. Wir können allerdings bestimmen, daß bei einer reinen Punktsubstitution die γ_i als kovarianter Vektor zu transformieren sind, wodurch (2) jedenfalls erhalten bleibt. Dasselbe ist dann für die Γ_l zu fordern, damit (8) erhalten bleibe. Denn der Kommutator $\Gamma_l\gamma_i - \gamma_i\Gamma_l$ transformiert dann als kovarianter Tensor, welches der restliche Teil der Gleichung, nämlich

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_k} - \Gamma_{il}^{\mu}\gamma_{\mu}, \tag{18}$$

ebenfalls tut, wenn γ_i als Vektor substituiert wird; denn (18) ist ja formal die kovariante Ableitung von γ_i. Die Ähnlichkeitstransformationen

$$\gamma_k' = S^{-1}\gamma_k S \tag{19}$$

wären dann als eine Sache für sich zu betrachten, wobei, wie man sich leicht überzeugt, die Γ_l zur Erhaltung von (8) folgendermaßen zu transformieren wären:

$$\Gamma_l' = S^{-1}\,\Gamma_l S - S^{-1}\frac{\partial S}{\partial x_l}, \tag{20}$$

also anders als die γ_k. Hingegen würde man finden, daß nach diesen Festsetzungen die folgenden Aggregate, für die wir das Zeichen ∇_k einführen wollen,

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - \Gamma_k, \tag{21}$$

erstens — selbstverständlich — bei einer reinen Punktsubstitution als kovarianter Vektor substituieren (weil dies ja für die $\frac{\partial}{\partial x_k}$ allein gilt und für die Γ_k festgesetzt wurde) und daß die ∇_k zweitens bei einer S-Transformation wegen (20) genau wie die γ_k nach (19) transformieren

$$\nabla_k' = S^{-1}\,\nabla_k\,S. \tag{22}$$

Denn die Bedeutung von ∇_k' ist doch

$$\nabla_k' = \frac{\partial}{\partial x_k} - \Gamma_k' = \frac{\partial}{\partial x_k} - S^{-1}\,\Gamma_k S - S^{-1}\frac{\partial S}{\partial x_k}, \tag{23}$$

und es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot S^{-1} S = S^{-1} \frac{\partial}{\partial x_k} S - \frac{\partial S^{-1}}{\partial x_k} S = S^{-1} \frac{\partial}{\partial x_k} S + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x_k}, \quad (24)$$

letzteres wegen der Identität:

$$S^{-1} S \equiv 1\,; \quad \frac{\partial S^{-1}}{\partial x_k} S + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x_k} \equiv 0.$$

Durch Eintragen von (24) in (23) bestätigt man (22).

Die durch (10) eingeführten Φ_{kl} würden sich erstens — selbstverständlich — bei einer Punktsubstitution als kovarianter Tensor benehmen, zweitens bei einer S-Transformation analog zu (19)

$$\Phi'_{kl} = S^{-1} \Phi_{kl} S, \quad (25)$$

letzteres wegen (22) und weil sie nach den Definitionen (10) und (21) die Kommutatoren der ∇_k sind:

$$\Phi_{kl} = \nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l\,. \quad (26)$$

Hinzuzufügen wäre noch, daß die Spuren der Φ_{kl}, die f_{kl}, bei der Ähnlichkeitstransformation wegen (25) nicht verändern, diejenigen der Γ_l, die wir φ_l nannten aber wohl, weil für die Γ_l kein mit (19) bzw. (25) analoges Transformationsgesetz gilt, sondern (20).

Wir haben alles dies in der »würde«-Form vorgetragen, weil der getroffenen Festsetzung die eingangs erwähnte Willkür anhaftet: da eine Punktsubstitution im allgemeinen jedenfalls zu einer Abänderung der γ_i zwingt (die alten γ_i werden ja im allgemeinen den Gleichungen (2) nicht mehr genügen!), so steht für die Neuwahl wieder eine ganze Mannigfaltigkeit von γ_i-Feldern zur Verfügung, deren Mitglieder aus einem beliebigen von ihnen durch beliebige, koordinatenabhängige S-Transformationen hervorgehen. Und zunächst ist keines dieser Mitglieder innerlich irgendwie ausgezeichnet, auch nicht das oben ausgewählte.

Es empfiehlt sich nun, mindestens für manche Zwecke, diese Wahlfreiheit weitgehend einzuschränken, indem man sie dazu benutzt, um gewisse, zwar nicht unabweisliche, aber naheliegende Hermitizitätswünsche zu befriedigen, wie man das ja in der speziellrelativistischen Dirac-Theorie ebenfalls zu tun pflegt. Um zu sehen, was sich in dieser Hinsicht erreichen läßt, müssen wir die Eigenwerte der γ_k und ihrer Zweierprodukte näher ins Auge fassen.

§ 4. Eigenwerte und Hermitisierung.

Da nach (2)

$$\gamma_k \gamma_k = g_{kk}\,, \qquad \text{(nicht summieren!)}$$

hat γ_k die Eigenwerte $\pm \sqrt{g_{kk}}$, und zwar jeden zweimal, weil es die Spur Null hat. Man erkennt letzteres, wenn man analog zu (12)

$$s_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad (26)$$

setzt. Dann gilt analog zu (14)

$$\gamma^i s_{\mu\nu} - s_{\mu\nu}\gamma^i = 2(\delta^i_\mu \gamma_\nu - \delta^i_\nu \gamma_\mu). \tag{27}$$

Jedes γ ist also auf mannigfache Art als Kommutator darstellbar, und ein Kommutator hat immer die Spur Null.

Trotzdem die γ lauter reelle Eigenwerte haben und folglich jedes einzelne von ihnen durch eine S-Transformation hermitesch gemacht werden kann, geht das beispielsweise schon für γ_0 und γ_1 im allgemeinen nicht gleichzeitig, weil ihr symmetrisches Produkt nach (2) gleich $2g_{01}\cdot 1$, also (da g_{01} reinimaginär) schiefhermitesch ist.

Betrachten wir nun weiter die Produkte $\gamma_i\gamma^k$, zunächst für $i \neq k$. Das Quadrat ist [vgl. (13)]:

$$(\gamma_i\gamma^k)^2 = \gamma_i\gamma^k\cdot\gamma_i\gamma^k = -\gamma_i\gamma_i\gamma^k\gamma^k = -g_{ii}g^{kk} \quad \text{(nicht summieren!)}.$$

Die Eigenwerte sind also $\pm i\sqrt{g_{ii}g^{kk}}$, und zwar jeder doppelt, da doch

$$\gamma_i\gamma^k = \tfrac{1}{2}(\gamma_i\gamma^k - \gamma^k\gamma_i)$$

als Kommutator die Spur Null haben muß. — Die Eigenwerte von $\gamma^k\gamma_i$ sind entgegengesetzt gleich, also die nämlichen. — Für $i = k$ dagegen hat man:

$$(\gamma_k\gamma^k)^2 = \gamma_k\gamma^k\gamma_k\gamma^k = \gamma_k(2-\gamma_k\gamma^k)\gamma^k = 2\gamma_k\gamma^k - g_{kk}g^{kk} \quad \text{(nicht s.)}$$

$$(\gamma_k\gamma^k - 1)^2 = 1 - g_{kk}g^{kk}. \quad \text{(nicht s.)}$$

$\gamma_k\gamma^k - 1$ hat also die Eigenwerte $\pm\sqrt{1-g_{kk}g^{kk}}$, und da es als Kommutator geschrieben werden kann:

$$\gamma_k\gamma^k - 1 = \tfrac{1}{2}(\gamma_k\gamma^k - \gamma^k\gamma_k), \quad \text{(nicht s.)}$$

hat es jeden davon doppelt. $\gamma_k\gamma^k$ hat also die Eigenwerte

$$1 \pm \sqrt{1 - g_{kk}g^{kk}}.$$

und zwar jeden davon doppelt. Für $k = 0$ sind diese Werte reell, da $g_{00}g^{00} \leqq 1$.

Von den 4 Matrizen

$$\gamma_0\gamma^0, \quad \gamma_0\gamma^1, \quad \gamma_0\gamma^2, \quad \gamma_0\gamma^3 \tag{28}$$

hat also die erste nur reelle, die drei anderen reinimaginäre Eigenwerte. Sie besitzen also (von einem Faktor i abgesehen) gerade die Reellitätsverhältnisse eines physikalisch sinnvollen Vierervektors [1]. Es liegt darum nahe zu versuchen,

[1] Im euklidischen Fall gehen sie tatsächlich in den Diracschen Stromvektor über (von einem Faktor i abgesehen). Auch die Schwierigkeit, die uns hinderte, die γ_k oder die γ^k selbst zu hermitisieren, nämlich, daß ihre symmetrischen Produkte nicht die erforderlichen Reellitätseigenschaften zeigen, besteht für die Matrizen (28) nicht mehr. Für $i \neq k$ hat man

$$\gamma_0\gamma^i\gamma_0\gamma^k + \gamma_0\gamma^k\gamma_0\gamma^i = \gamma_0(2\delta^i_0 - \gamma_0\gamma^i)\gamma^k + \gamma_0(2\delta^k_0 - \gamma_0\gamma^k)\gamma^i = 2(\delta^i_0\gamma_0\gamma^k + \delta^k_0\gamma_0\gamma^i) - 2g_{00}g^{ik}.$$

Das ist tatsächlich reell, wenn keiner der Indizes i, k gleich Null ist, hingegen wird es für $i = 0$, $k \neq 0$:

$$2\gamma_0\gamma^k - 2g_{00}g^{0k}.$$

Dies hat tatsächlich reinimaginäre Eigenwerte, weil wir es von $\gamma_0\gamma^k$ wissen und g^{0k} reinimaginär ist.

ob diese vier Matrizen gleichzeitig hermitisiert (bzw. schiefhermitisiert) werden können. Es zeigt sich, daß das geht, wobei noch eine Anzahl anderer Matrizen zugleich hermitesch werden. Folgendermaßen.

Wenn der Maßtensor g_{ik} reell und positiv definit ist, so läßt sich den Gleichungen (2) durch hermitesche γ_k genügen, ganz ebenso wie den Gleichungen (1) durch hermitesche $\mathring{\gamma}_k$. Das darf ich wohl ohne Beweis als bekannt ansehen, es handelt sich dabei ja nur um die Projektion eines hermitesch anzusetzenden $\mathring{\gamma}_k$-Systems von einem rechtwinkeligen auf ein schiefes Achsenkreuz, wobei ausschließlich reelle Koeffizienten als Richtungskosinus auftreten. Und da die g_{ik} in diesem Falle reell sind, so fallen dann auch die kontravarianten γ^k hermitesch aus; das heißt, man kann auch den zu (2) analogen kontravarianten Gleichungen

$$\gamma^i \gamma^k + \gamma^k \gamma^i = 2 g^{ik} \tag{29}$$

durch hermitesche γ^k genügen, wenn der Tensor g^{ik} reell und positiv definit ist. Das ist unser Tensor g^{ik} nun allerdings nicht, aber man kann ihn dazu machen, indem man ihn verstümmelt und die »gemischten« raumzeitlichen g^{0k} ($k = 1, 2, 3$) zunächst einmal einfach fortläßt, gleich Null setzt. Sei

$$\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \tag{30}$$

ein hermitesches Matrizenquadrupel, welches den Gleichungen (29) mit dem so verstümmelten Maßtensor genügt. Das heißt, es soll

$$\alpha^i \alpha^k + \alpha^k \alpha^i = 2 g^{ik}, \tag{31}$$

wenn keiner oder wenn beide Indizes i, k gleich Null sind, und es soll für $k \neq 0$

$$\alpha^0 \alpha^k + \alpha^k \alpha^0 = 0. \tag{32}$$

Nun setze man

$$\gamma^k = \frac{i}{g^{00}} \alpha^0 \alpha^k \qquad \text{für } k \neq 0 \tag{33}$$

und

$$\gamma^0 = \frac{\alpha^0}{\sqrt{g_{00} g^{00}}} - \frac{1}{g_{00}} (g_{01} \gamma^1 + g_{02} \gamma^2 + g_{03} \gamma^3). \tag{34}$$

Man kann sich durch Ausrechnen überzeugen, daß diese γ^k den unverstümmelten Gleichungen (29) Genüge leisten.

Da nach (32) α^0 mit α^k ($k \neq 0$) schief vertauscht, ist $\alpha^0 \alpha^k$ für $k \neq 0$ schief, daher ist nach (33) γ^1, γ^2, γ^3 hermitesch. Ferner berechnet man aus (34)

$$\gamma_0 = g_{0k} \gamma^k = \alpha^0 \sqrt{\frac{g_{00}}{g^{00}}} = \text{hermitesch}. \tag{35}$$

Wir haben also durch unsere Konstruktion mit den kontravarianten γ^1, γ^2, γ^3 zugleich das kovariante γ_0 hermitesch gemacht. — An weiteren Hermitizitäten stellen wir fest: Die kontravarianten reinräumlichen

$$s^{kl} = \tfrac{1}{2}(\gamma^k\gamma^l - \gamma^l\gamma^k) \qquad \text{für } k, l = 1, 2, 3 \tag{36}$$

sind, als Kommutatoren hermitescher Matrizen, schiefhermitesch. Ferner sind für $k \neq 0$ die $\gamma_0\gamma^k$ und ebenso die $\gamma^k\gamma_0$ schief, weil, schon nach (13), γ_0 mit γ^k $(k \neq 0)$ schief vertauscht. Sodann findet man nach (34) und (35), daß $\gamma_0\gamma^0$ und $\gamma^0\gamma_0$ hermitesch sind. Daraus folgt dann weiter sehr leicht durch Herunterziehen des Index, daß für $k \neq 0$ auch $\gamma_0\gamma_k$ und $\gamma_k\gamma_0$ mithin auch

$$s_{0k} = \tfrac{1}{2}(\gamma_0\gamma_k - \gamma_k\gamma_0)$$

schief ausfällt. Man beachte aber ausdrücklich, daß sich über die kovarianten s_{kl} für $k, l \neq 0$, und ebenso über die kontravarianten s^{0k} nichts aussagen läßt! Ebensowenig über γ^0, γ_1, γ_2, γ_3. Wir fassen alle Feststellungen noch einmal zusammen. Nach unserer Konstruktion sind

$$\gamma_0,\ \gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3,\ \gamma_0\gamma^0,\ \gamma^0\gamma_0 \ \text{hermitesch}; \tag{37}$$

$$\gamma_0\gamma_k,\ \gamma_k\gamma_0,\ \gamma_0\gamma^k,\ \gamma^k\gamma_0,\ s_{0k},\ s^{kl} \ \text{schief} \qquad (k, l \neq 0).$$

Nun wollen wir uns noch von der Bezugnahme auf die spezielle Matrizenkonstruktion befreien, die nur als Existenzbeweis gedient hat. Es läßt sich leicht einsehen: schon die Forderung, daß vier geeignet ausgewählte von den in (37) angeführten Matrizen die dort festgestellte Eigenschaft haben — beispielsweise die Forderung, daß γ_0, γ^1, γ^2, γ^3 hermitesch ausfallen sollen —, genügt, um bei gegebenen g_{ik} das γ-Feld eindeutig bis auf eine unitäre Transformation festzulegen. Denn mehr Freiheit besteht ja, bei gegebenen g_{ik}, für das γ-Feld überhaupt nicht als: Transformation mit einer beliebigen Matrix. Soll diese Transformation die Matrizen γ_0, γ^1, γ^2, γ^3 hermitesch lassen, aus denen sich jede Matrix, also auch jede hermitesche Matrix, durch Addition und Multiplikation herstellen läßt[1], so muß die Transformation jede hermitesche Matrix hermitesch lassen, d. h. sie muß unitär sein. W. z. b. w.

Wir wollen in Zukunft nur solche γ-Felder — man könnte auch sagen, nur solche Bezugsysteme — zulassen, bei denen die Matrizen γ_0, γ^1, γ^2, γ^3 hermitesch ausfallen. Alles in (37) Festgestellte

[1] Zunächst ist es für die Diracschen $\overset{\circ}{\gamma}_k$ bekannt, daß sich aus ihnen jede Matrix rational herstellen läßt. Danach erschließt man es für die γ_k allein oder für die γ^k allein. Daß in obigem Quadrupel γ^0 fehlt und dafür γ_0 eintritt, schadet nichts, weil doch

$$\gamma_0 = g_{00}\gamma^0 + g_{01}\gamma^1 + g_{02}\gamma^2 + g_{03}\gamma^3,$$

woraus γ^0 berechenbar ist, weil sicher $g_{00} \neq 0$.

gilt dann automatisch. Das »zulässige« Bezugsystem ist durch die Metrik bis auf eine unitäre Transformation bestimmt.

Es ist sehr bequem, durch die neue Forderung die erlaubten S-Transformationen auf unitäre reduziert zu haben, denn diese sind sehr gutmütig und belanglos. Wir brauchen an sie im allgemeinen gar nicht zu denken, können so tun, als wäre das γ-Feld eindeutig durch die Metrik bestimmt. Natürlich erwächst aber jetzt die Aufgabe, wenn man von einem zulässigen γ-Feld ausgeht und eine Punktsubstitution (17) vornimmt, das Transformationsgesetz der γ feiner, nämlich so zu bestimmen, daß man wieder auf ein zulässiges γ-Feld geführt wird. Die im Anfang des Abschnittes 3 gegebene vorläufige Vorschrift: die γ_k sind als kovarianter Vektor zu substituieren — genügt dieser Forderung keineswegs, entspricht ja auch gar nicht dem, wie man in der speziellen Relativitätstheorie vorgeht, wo man die $\mathring{\gamma}_k$ überhaupt nicht substituiert. In der Auffassung des Abschnittes 3 gesprochen könnte man sagen: mit jeder Punktsubstitution muß eine ganz bestimmte (eigentlich: eine bis auf einen unitären Faktor bestimmte!) S-Transformation, die selbst natürlich nicht unitär sein wird, gekoppelt werden, und diese gilt es zu bestimmen. Man kann deshalb füglich von einer ergänzten Punktsubstitution sprechen. Wir werden die Aufgabe im nächsten Abschnitt für unendlich kleine Punktsubstitutionen erledigen.

§ 5. Transformationstheorie, zweiter Teil.

Wir gehen von einem zulässigen γ-Feld aus und gehen zu gestrichenen Variablen über durch die unendlichkleine Punktsubstitution

$$x'_k = x_k + \delta x_k \quad \text{oder} \quad x_k = x'_k - \delta x_k, \tag{38}$$

die wir im dargelegten Sinne durch eine unendlichkleine S-Transformation mit

$$S = 1 + \Theta; \quad S^{-1} = 1 - \Theta \tag{39}$$

ergänzen. Wir werden, wie üblich, die Ersetzung der Variablen im Argument nicht zum Ausdruck bringen. Die Gleichungen zwischen gestrichenen und ungestrichenen Operatoren beziehen sich also nicht auf die gleichen, sondern auf entsprechende Argumentwerte, d. h. auf denselben Punkt. — Sei nun zur Abkürzung

$$\frac{\partial \delta x_k}{\partial x_l} = a_l^k. \tag{40}$$

Diese Größen sind reinimaginär, wenn ein und nur ein Index gleich Null, sonst reell. Dann wird

$$\begin{aligned} \gamma'_i &= \gamma_i - a_i^l \gamma_l + \gamma_i \Theta - \Theta \gamma_i \\ \gamma'^k &= \gamma^k + a_l^k \gamma^l + \gamma^k \Theta - \Theta \gamma^k. \end{aligned} \tag{41}$$

Nimmt man die erste Gleichung für $i = 0$ und multipliziert sie von links in die zweite, so kommt (immer nur in Größen erster Ordnung genau):

$$\gamma_0' \gamma'^k = \gamma_0 \gamma^k - a_0^l \gamma_l \gamma^k + a_l^k \gamma_0 \gamma^l + \gamma_0 \gamma^k \Theta - \Theta \gamma_0 \gamma^k. \tag{42}$$

Wir benutzen das Verfügungsrecht über Θ, um in dieser Gleichung das zweite Glied rechter Hand, das Hermitizitätsschlüsse vereitelt, fortzuschaffen bzw. durch ein anderes zu ersetzen. Das gelingt mit

$$\Theta = -\frac{1}{2 g_{00}} a_0^l \gamma_l \gamma_0. \tag{43}$$

Dann wird nämlich

$$-2\Theta \gamma_0 \gamma^k = a_0^l \gamma_l \gamma^k, \tag{44}$$

und man hat

$$\gamma_0' \gamma'^k = \gamma_0 \gamma^k + a_l^k \gamma_0 \gamma^l + \gamma_0 \gamma^k \Theta + \Theta \gamma_0 \gamma^k.$$

Nun überlege man auf Grund unserer Feststellungen (37), daß nach (43) Θ hermitesch ist. Sein symmetrisches Produkt mit $\gamma_0 \gamma^k$ ist also hermitesch oder schief, je nachdem $\gamma_0 \gamma^k$ es ist. Dasselbe gilt vom zweiten Gliede rechter Hand, es ist schief für $k \neq 0$, hermitesch für $k = 0$. Mithin behalten die $\gamma_0' \gamma'^k$ wirklich dieselbe Hermitizität wie die $\gamma_0 \gamma^k$. Man zeigt ganz ebenso, daß auch γ_0' hermitesch bleibt. Damit ist das γ'-Feld als »zulässig« legitimiert.

Θ ist natürlich nicht eindeutig, aber der in (43) mitgeteilte Wert hat doch die Bedeutung: es ist eindeutig der hermitesche Bestandteil der anzuwendenden unendlichkleinen Matrix. Es könnte ein beliebiger unendlichkleiner schiefer Bestandteil hinzutreten. Man erkennt bei einiger Überlegung, daß er alle Schlüsse ungeändert lassen würde — selbstverständlich, er entspricht ja auch nur einer zusätzlichen unitären Transformation! —

Wir schließen jetzt die scharfe Definition eines Tensoroperators an. *Wenn von einem Operatorensystem*

$$T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$$

bekannt ist oder festgesetzt wird, daß es bei jeder unendlichkleinen ergänzten Punktsubstitution wie ein Tensor von dem durch die Indizes und ihre Stellung angedeuteten Rang transformiert, jedoch unter Hinzutritt des Kommutators

$$T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}\Theta - \Theta T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot},$$

dann wollen wir das Operatorensystem als Tensoroperator von dem betreffenden Range bezeichnen.

Es gilt dann folgender wichtige Satz[1], der durch sehr leichte Verallgemeinerung der obigen Schlüsse gewonnen wird:

[1] Die Hermitizitätsbehauptungen haben unmittelbaren Sinn nur dann, wenn $T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ den Differentiator $\frac{\partial}{\partial x_k}$ nicht enthält, sondern einfach eine 4×4reihige Matrix mit koordinatenabhängigen Elementen ist.

Sei $T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}$ ein Tensoroperator und sei bekannt, daß in einem Bezugsystem die Operatoren

$$\gamma_0 T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots} \tag{46}$$

hermitesch oder schief sind, je nachdem die Null unter den Indizes $\alpha\beta\cdots\rho\sigma\cdots$ in gerader oder ungerader Vielfachheit auftritt; dann bleibt dieser Sachverhalt in jedem Bezugsystem erhalten. — In diesem Satz darf man selbstverständlich die Worte gerad und ungerad auch vertauschen, d. h. man darf die Null in γ_0 mitzählen oder nicht mitzählen. Was man aber nicht darf, ist, sich um die Hermitizität von $T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}$ selbst bekümmern, die ist ganz belanglos; auf diejenige von $\gamma_0 T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}$ kommt es an! —

Man bestätigt leicht, daß das in (21) eingeführte Symbol

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - \Gamma_k \tag{21}$$

ein Vektoroperator ist. Γ_k für sich allein nicht, es transformiert [mit Rücksicht auf (20)] bei einer ergänzten Punktsubstitution offenbar so:

$$\Gamma'_k = \Gamma_k - a^i_k \Gamma_i + \Gamma_k \Theta - \Theta \Gamma_k - \frac{\partial \Theta}{\partial x_k}. \tag{47}$$

Hier ist das letzte Glied überschüssig, widerstreitet der Vektoreigenschaft. Der reine Differentiator $\frac{\partial}{\partial x_k}$ hinwiederum transformiert kovariant im elementaren Sinn, es fehlt der Θ-Kommutator. Fügt man beide zusammen, so gleichen sich diese Übelstände aus, weil je $\frac{\partial \Theta}{\partial x_k}$ als Kommutator von $\frac{\partial}{\partial x_k}$ und Θ aufgefaßt werden kann. — Von »hermitesch« oder »schief« zu sprechen, hat natürlich bei solchen Operatoren wie ∇_k, die Differentiationen enthalten, keinen unmittelbaren Sinn. Wir haben dies ja auch nicht in die Definition eines Tensoroperators aufgenommen.

Hat man zwei Tensoroperatoren, so bestätigt man leicht durch Ausmultiplizieren ihrer Transformationsformeln [ähnlich wie oben beim Übergang von (41) zu (42) geschehen], daß man durch »Aneinanderschreiben«, d. h. durch Matrizenmultiplikation wieder einen Tensor erhält, wenn der links herangeschriebene Operator den Differentialoperator nicht enthält. Sonst nicht, weil er sonst mit den Substitutionskoeffizienten a^k_l nicht vertauschbar ist. (Das ist ja im gewöhnlichen Tensorkalkül auch nicht anders. Obwohl dort $\frac{\partial}{\partial x_k}$ ein Vektor ist, erhält man doch durch gewöhnliche Differentiation von Tensorkomponenten keinen Tensor, sondern durch kovariante Differentiation.) Der Tensorcharakter der Φ_{kl}, die durch (10) oder (26) definiert sind, muß also besonders überlegt werden. Da wir aber schon im § 3 gesehen haben, daß die Φ_{kl} bei reiner Punktsubstitution sich als Tensor im dortgemeinten elementaren Sinn benehmen, bei jeder S-Substitution aber nach (25) transformieren, so bilden sie offenbar auch in dem jetzigen feineren Sinn einen Tensoroperator bei ergänzter Punktsubstitution.

Wir wollen uns jetzt darum kümmern, was unter kovarianter Differentiation eines Tensoroperators zu verstehen sei. Wir beschränken uns dabei auf solche Operatoren, die nicht den Differentialoperator enthalten, also auf 4×4reihige Matrizen, deren Elemente Koordinatenfunktionen sind (das hindert nicht, daß sie die Form von Differentialquotienten haben können; beispielsweise Φ_{kl} ist zugelassen, ∇_k dagegen nicht). Es handelt sich darum, aus einem Tensoroperator $T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ durch Differentiation nach x_λ und Hinzufügung passender Ergänzungsglieder Gebilde abzuleiten, die bei einer ergänzten Punktsubstitution als ein in $\varrho\sigma\cdot\cdot$ kontravarianter, in $\alpha\beta\cdots\lambda$ kovarianter Tensoroperator transformieren.

Wir machen davon Gebrauch, daß eine ergänzte Punktsubstitution äußerlich in eine reine Punktsubstitution und in eine Θ-Transformation zerfällt, bei welch letzterer einfach der Kommutator mit Θ addiert wird; ferner benutzen wir, daß diese beiden unendlichkleinen Transformationen selbstverständlich vertauschbar sind. Betrachten wir nun den kovarianten Differentialquotienten im elementaren Sinn

$$\frac{\partial T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}}{\partial x_\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\mu\beta\cdot\cdot} - + \cdots, \tag{48}$$

so wird dieser bei einer reinen Punktsubstitution selbstverständlich als Tensor der Stufe ${}^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot\lambda}$ substituieren. Es würde nur noch nötig sein, zu zeigen, daß er bei Θ-Transformation einfach den Kommutator mit Θ addiert wie $T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ selber. Das tun nun in dem vorstehenden Ausdruck alle Glieder mit Ausnahme des ersten, in welchem durch die Θ-Transformation das Glied

$$\frac{\partial\left(T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}\Theta - \Theta T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}\right)}{\partial x_\lambda}$$

hinzugefügt wird an Stelle von

$$\frac{\partial T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}}{\partial x_\lambda}\,\Theta - \Theta\,\frac{\partial T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}}{\partial x_\lambda}.$$

Es entsteht also überschüssig das Glied

$$T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}\frac{\partial\Theta}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial\Theta}{\partial x_\lambda}T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}. \tag{49}$$

Wir beseitigen es, indem wir in (48) als Ergänzung noch den Kommutator

$$T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}\Gamma_\lambda - \Gamma_\lambda T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$$

hinzufügen und so zur endgültigen Definition der kovarianten Differentiation eines Tensoroperators gelangen:

$$T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot;\lambda} = \frac{\partial T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}}{\partial x_\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\mu\beta\cdot\cdot} - + \cdots + T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \Gamma_\lambda - \Gamma_\lambda T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}. \tag{50}$$

Beweis: Das hinzugefügte Glied verhält sich nach (47) so: bei einer reinen Punkttransformation als Tensor der gewünschten Stufe; bei einer Θ-Transformation addiert es erstens seinen Kommutator mit Θ, zweitens beseitigt es den Überschuß (49). Damit ist der Beweis, daß (50) ein Tensor ist, abgeschlossen. Man kann (50) auch in der Form schreiben:

$$T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot;\lambda} = \nabla_\lambda T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} - T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \nabla_\lambda - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\mu\beta\cdot\cdot} - + , \tag{51}$$

welche von der elementaren Formel sich nur dadurch unterscheidet, daß der Differentiator ∇_λ an die Stelle des einfachen $\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$ getreten ist.

Man erkennt jetzt, daß das wichtige System von Differentialgleichungen (8), auf das wir gleich zu Anfang unserer Überlegungen stießen, nichts weiter aussagt als das Verschwinden der kovarianten Ableitungen des Maßvektors γ_k. In voller Analogie zu dem Satz von Ricci, welcher dasselbe ausspricht für den Maßtensor g_{ik}. Ganz dasselbe gilt übrigens für jeden aus den γ_k durch Multiplikation und Addition mit konstanten Koeffizienten abgeleiteten Tensor, z. B. γ^k, $s_{\mu\nu}$, $s^{\mu\nu}$ usw. Alle diese haben die kovariante Ableitung Null. Das ist eine unmittelbare Konsequenz der Gleichungen (8).

§ 6. Interpretation durch den ψ-Spinor.

Die Beschränkung der γ-Felder auf das, was wir »zulässig« nannten, wird besonders bequem empfunden, wenn zur Interpretation der Operatoren eine vierkomponentige ψ-Funktion, ein sogenannter Spinor, worauf sie einwirken, zugrunde gelegt werden soll. Soll ein Gleichungssystem

$$T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot\cdot}\, \psi = 0 \tag{52}$$

in jedem Bezugsystem richtig bleiben, wenn es in einem gilt, so wird man bestimmen müssen, daß ψ bei einer reinen Punktsubstitution als Invariante, bei einer S-Transformation aber folgendermaßen transformiere:

$$\psi' = S^{-1} \psi. \tag{53}$$

Das erstere ist selbstverständlich. Und bei einer S-Transformation folgt wirklich aus (52) durch Linksmultiplikation mit S^{-1}

$$S^{-1} T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} S S^{-1} \psi = T'^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}\, \psi' = 0 .$$

Bei einer ergänzten unendlichkleinen Punktsubstitution wird man also zu setzen haben

$$\psi' = \psi - \Theta\psi\,, \tag{54}$$

wo Θ die hermitesche Matrix (43) ist. Da nun ∇_k ein Vektoroperator ist, so folgt unter anderem: wenn die vier Zahlen

$$\nabla_k \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \Gamma_k \psi \tag{55}$$

in einem Bezugsystem alle vier verschwinden, so tun sie es in jedem. Es ist angebracht, sie als kovariante Ableitungen des Spinors ψ zu bezeichnen.

Aus den Operatoren (q-Zahlen) erhält man die gewöhnlichen Zahlen (c-Zahlen), die physikalisch je nach Geschmack und Ausdrucksweise als Aufenthaltswahrscheinlichkeit, Dichte der Elektrizität, Stromdichte, Übertrittswahrscheinlichkeit u. dgl. interpretiert werden, auf folgende Weise: man übt den betreffenden Operator A auf einen Spinor ψ aus: $A\psi$, und bildet dann das sogenannte hermitesche innere Produkt der beiden Spinoren ψ und $A\psi$, d. h. man multipliziert die erste Komponente der konjugiert komplexen ψ^* mit der ersten von $A\psi$, die zweite von ψ^* mit der zweiten von $A\psi$ usw. und addiert diese 4 Produkte. Wir wollen dafür kurz

$$\psi^* A \psi \tag{56}$$

schreiben[1]. Enthält A den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial x_k}$ nicht, sondern ist einfach nur eine 4×4reihige Matrix mit koordinatenabhängigen Elementen, so kann man auch sagen: man trägt in die aus dieser Matrix gebildete Bilinearform die Komponenten von ψ^* und ψ als Argumente ein.

Nur wenn die Matrix hermitesch (bzw. schief) ist, fällt die c-Zahl (56) immer reell (bzw. reinimaginär) aus, wie es für die Komponenten von c-Tensoren nötig ist, die physikalisch interpretiert werden sollen. Nun haben wir in § 5 gesehen: wenn $T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ ein Tensoroperator ist, so wird bei einer zulässigen Transformation (d. h. bei einer ergänzten Punktsubstitution) keineswegs die Hermitizität seiner Komponenten konserviert, sondern diejenige der $\gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$. Es behalten also keineswegs etwa die c-Zahlen $\psi^* T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}\psi$, sondern die c-Zahlen

$$\mathrm{T}^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} = \psi^* \gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}\psi \tag{57}$$

die für einen physikalischen Tensor vom Range ${}^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ erforderlichen Reellitätsverhältnisse bei. Wir wollen jetzt zeigen, daß auch sie es sind, die wirklich wie ein c-Tensor vom Range ${}^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ transformieren und deshalb als physikalische Interpretation des Tensoroperators $T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}$ zu gelten haben. Man erhält nämlich,

[1] Es kommt in der hier gewählten Schreibweise nicht auf die Reihenfolge an. $A\varphi B\chi$ bedeutet dasselbe wie $B\chi A\varphi$, nämlich immer: erste Komponente von $A\varphi$ mal erster von $B\chi$ plus zweiter von $A\varphi$ mal zweiter von $B\chi$ plus usw.

wenn man die ergänzte Punktsubstitution (38), (40) durchführt, zunächst folgendes:

$$\begin{aligned}\mathsf{T}^{\rho\sigma\cdots\prime}_{\alpha\beta\cdots} &= (\psi^* - \Theta^*\psi^*)(\gamma_0 - a^l_0\gamma_l + \gamma_0\Theta - \Theta\gamma_0)(T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots} - a^l_\alpha T^{\rho\sigma\cdots}_{l\beta\cdots} - + \cdots)(\psi - \Theta\psi) \\ &= \mathsf{T}^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots} - \Theta^*\psi^*\gamma_0 T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}\psi - \psi^*\Theta\gamma_0 T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}\psi - a^l_0\psi^*\gamma_l T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}\psi - \\ &\quad - a^l_\alpha \mathsf{T}^{\rho\sigma\cdots}_{l\beta\cdots} - + \cdots \end{aligned} \tag{58}$$

(Es haben sich zwei Glieder mit Θ, nämlich das aus $-\Theta\psi$ und das aus $\gamma_0\Theta$ entstehende gegeneinander fortgehoben; Glieder zweiter Ordnung in Θ und a^l_k sind selbstverständlich unterdrückt.) Das zweite, dritte und vierte Glied rechter Hand heben sich fort, denn: das zweite und dritte sind einander gleich, weil Θ^* unter »Transposition« (Vertauschung von Zeilen und Kolonnen) auf den anderen Faktor gewälzt werden darf und dabei, da es hermitesch ist, zu Θ wird. Sodann wird nach (43)

$$-2\psi^*\Theta\gamma_0 T^{\sigma\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}\psi = \frac{1}{g_{00}} a^l_0\psi^*\gamma_l\gamma_0\gamma_0 T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}\psi = a^l_0\psi^*\gamma_l T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}\psi\,,$$

hebt sich also gegen das vierte Glied, wie behauptet. Man erhält also für den c-Tensor (57)

$$\mathsf{T}^{\rho\sigma\cdots\prime}_{\alpha\beta\cdots} = \mathsf{T}^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots} - a^l_\alpha \mathsf{T}^{\rho\sigma\cdots}_{l\beta\cdots} - + \cdots, \tag{59}$$

die gewöhnliche Substitutionsformel, w. z. b. w. — Man beachte ausdrücklich, daß bei diesem Beweis der Operator $T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}$ selbst weder gewälzt noch mit einem a^l_k vertauscht zu werden braucht. Der Beweis gilt also auch dann, d. h. $\mathsf{T}^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}$ transformiert auch dann als c-Tensor, wenn $T^{\rho\sigma\cdots}_{\alpha\beta\cdots}$ den Differentialoperator $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ enthält. Bloß die Hermitizitätsaussagen haben dann für die lokalen Tensorkomponenten keinen unmittelbaren Sinn.

Für das Folgende ist es bequem, die Formel (55) auszudehnen für den Fall, daß es sich nicht um einen Spinor, sondern um sein Konjugiert-Komplexes handelt. Das Konjugiert-Komplexe von (55) wäre

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial x^*_k} - \Gamma^*_k\psi^*,$$

dies würde aber für $k = 0$ ($x_0 = ict$!) im euklidischen Falle **nicht** in die gewöhnliche Ableitung übergehen, sondern in ihr Negatives, was sehr unbequem wäre. Wir sind darum leider genötigt, für $k = 0$ das Vorzeichen zu wechseln und als kovariante Ableitung von ψ^* zu definieren

$$\nabla_k\psi^* = \frac{\partial\psi^*}{\partial x_k} \mp \Gamma^*_k\psi^* \tag{60}$$

(oberes Zeichen für $k = 1, 2, 3$; unteres für $k = 0$).

Jetzt wollen wir noch die kovariante Ableitung des c-Tensors (57) untersuchen, die wohl irgendwie mit der in (50) definierten des Tensoroperators zusammenhängen muß. Man erhält zunächst:

$$\begin{aligned} \mathsf{T}^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot;\lambda} &= \frac{\partial \mathsf{T}^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}}{\partial x_\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} \mathsf{T}^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\mu\beta\cdot\cdot} - + \cdots = \\ &= \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\lambda} \gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \psi + \psi^* \frac{\partial \gamma_0}{\partial x_\lambda} T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \psi + \psi^* \gamma_0 \frac{\partial T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot}}{\partial x_\lambda} \psi + \psi^* \gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda} - \\ &\quad - \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} \psi^* \gamma_0 T^{\rho\sigma}_{\mu\beta} \psi - + \cdots\cdots. \end{aligned}$$

Die vier Ableitungen, die hier vorkommen, ergänze man nun zu kovarianten Ableitungen nach (60), (8), (50), (55), wobei diejenige von γ_0 verschwindet. So erhält man

$$\mathsf{T}^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot;\lambda} = \nabla_\lambda \psi^* \gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \psi + \psi^* \gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot;\lambda} \psi + \psi^* \gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \nabla_\lambda \psi \tag{61}$$

plus einem Rest, von welchem jetzt zu zeigen sein wird, daß er verschwindet. Dieser Rest ist

$$\begin{aligned} \text{Rest} = {} & \pm \Gamma^*_\lambda \psi^* \gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \psi + \\ & + \psi^* [\Gamma^{\mu}_{0\lambda} \gamma_\mu T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} + (\Gamma_\lambda \gamma_0 - \underline{\gamma_0 \Gamma_\lambda}) T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} - \underline{\gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \Gamma_\lambda + \gamma_0 \Gamma_\lambda T^{\rho\sigma}_{\alpha\beta}}] \psi + \\ & + \underline{\psi^* \gamma_0 T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \Gamma_\lambda \psi}. \end{aligned}$$

Die unterstrichenen Glieder tilgen einander. $\pm \Gamma^*_\lambda$ wird als $\pm \Gamma^\dagger_\lambda$ auf den anderen Faktor gewälzt[1]. Es verbleibt

$$\begin{aligned} \text{Rest} &= \psi^* A\, T^{\rho\sigma\cdot\cdot}_{\alpha\beta\cdot\cdot} \psi \text{ mit} \\ A &= \Gamma^{\mu}_{0\lambda} \gamma_\mu + (\Gamma_\lambda \pm \Gamma^\dagger_\lambda) \gamma_0 . \end{aligned}$$

Der Beweis wird abgeschlossen sein, wenn wir zeigen können, daß

$$\frac{1}{2 g_{00}} A \gamma_0 \equiv \tfrac{1}{2}(\Gamma_\lambda \pm \Gamma^\dagger_\lambda) + \frac{1}{2 g_{00}} \Gamma^{\mu}_{0\lambda} \gamma_\mu \gamma_0 \tag{62}$$

verschwindet. (Denn daraus folgt $A \equiv 0$, weil γ_0 die nichtverschwindenden Eigenwerte $\pm \sqrt{g_{00}}$ hat. Ist $A = 0$, so verschwindet der »Rest« und Gleichung (61) wird bewiesen sein.)

Der Operator (62) ist nun im Falle des oberen Vorzeichens, welches für $\lambda = 1, 2, 3$ gilt, der hermitesche, im Falle des unteren Vorzeichens der schiefhermitesche Bestandteil von

$$\Gamma_\lambda + \frac{1}{2 g_{00}} \Gamma^{\mu}_{0\lambda} \gamma_\mu \gamma_0 . \tag{63}$$

[1] Mit dem Kreuz † soll die transponierte und komplex konjugierte Matrix bezeichnet werden, wie fast (leider nur fast) allgemein üblich.

Von diesem Operator läßt sich ohne allzu große Mühe einsehen, daß er, wenn man ihn mit den nach (37) hermiteschen Matrizen γ_0, γ^1, γ^2, γ^3 kommutiert, im Falle $\lambda = 1, 2, 3$ ausnahmslos Hermitesches, im Falle $\lambda = 0$ ausnahmslos Schiefhermitesches liefert. Daher muß sein hermitescher (bzw. für $\lambda = 0$ sein schiefhermitescher) Bestandteil jedenfalls mit γ_0, γ^1, γ^2, γ^3 vertauschbar, mithin ein Multiplum der Einheit sein. Anders ausgedrückt, die Bestandteile, um deren Verschwinden es sich handelt, reduzieren sich auf

$$\text{Realteil Spur } \left(\Gamma_\lambda + \frac{1}{2g_{00}} \Gamma^\mu_{0\lambda}\gamma_\mu\gamma_0\right) \qquad \text{für } \lambda = 1, 2, 3$$

$$\text{Imaginärteil Spur } \left(\Gamma_0 + \frac{1}{2g_{00}} \Gamma^\mu_{00}\gamma_\mu\gamma_0\right).$$

Nun ist Spur $\gamma_\mu\gamma_0 = 4g_{\mu 0}$ und

$$g_{\mu 0}\Gamma^\mu_{0\lambda} = \Gamma_{0,0\lambda} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_\lambda}; \qquad \text{für } \lambda = 0, 1, 2, 3$$

die Frage dreht sich also darum, ob wirklich

$$\text{Realteil Spur } \Gamma_\lambda = -\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x_\lambda} \qquad \text{für } \lambda = 1, 2, 3; \qquad (64)$$

$$\text{Imaginärteil Spur } \Gamma_\lambda = -\frac{\partial \lg g_{00}}{\partial x_0}\,?$$

Und nun zeigt es sich, daß wir zuviel versprochen haben. Beweisen können wir nämlich die vorstehenden Gleichungen nicht, und zwar aus dem Grunde, weil doch die Γ_λ ursprünglich eingeführt und bisher ausschließlich verwendet wurden in der Weise, daß nur ihre Kommutatoren mit anderen Matrizen eine Rolle spielen, wobei gerade ihre Spuren vollkommen leerlaufen. Diese spielen zum ersten Male eine Rolle in der kovarianten Ableitung des Spinors, Gleichung (55) und (60), von welcher wir gerade in der zu beweisenden Gleichung (61) zum ersten Male Gebrauch machen. Was wir beweisen können, ist nur, daß es uns frei steht, die betreffenden Spurteile durch (64) zu definieren. Und das ist wirklich der Fall. Einmal sicher in einem Bezugsystem, weil die rechten Seiten von (64) die erforderliche Reellität besitzen. Sodann läßt sich an Hand von (47) und (43) zeigen, daß die einmal getroffene Verfügung gegen zulässige Transformationen invariant ist — ich unterdrücke den Beweis.

Durch diese Verfügung wird die kovariante Ableitung des Spinors in erwünschter Weise präzisiert. Die Verfügung ist aber noch in anderer Hinsicht wirklich erwünscht. Würden nämlich die in Rede stehenden Spurteile sich nicht als die Ableitungen ein und derselben Funktion ($-\lg g_{00}$) darstellen, so würden sie in den Spuren der Φ_{kl} reinimaginäre elektromagnetische Feldstärken erzeugen. Das wird so vermieden. — Der Realteil von Spur Γ_0 und die Imaginärteile von Spur Γ_λ ($\lambda = 1, 2, 3$), aus denen die reellen Feldstärken sich ableiten, bleiben nach wie vor frei.

Wir müssen jetzt noch einen Blick auf die reinen unitären Transformationen werfen, die für sich allein auch noch zulässig sind neben den ergänzten Punktsubstitutionen. Das einzige, was zu sagen übrigbleibt, ist, daß eine solche unitäre Transformation, die man vornehmen will, selbstverständlich nach der Vorschrift (53) auch an ψ auszuführen ist. Alsdann ist sie völlig belang- und harmlos. Insbesondere sind die Komponenten der c-Tensoren (57) gegen sie völlig unempfindlich; und die Spurteile, über die in (64) verfügt wurde, ebenfalls.

Die wesentlichen Ergebnisse dieses Abschnittes sind:

1. Die Bestimmung des Transformationsgesetzes (54) und der kovarianten Ableitung (55) für den Spinor.

2. Die Zuordnung der c-Tensorkomponenten zum Tensoroperator nach (57) und der Nachweis, daß sie wirklich als gewöhnliche Tensorkomponenten vom gleichen Range transformieren.

3. Die Aufstellung einer relativ einfachen Formel (61) zur Berechnung der kovarianten Ableitung eines c-Tensors; einer Formel, die hauptsächlich um deswillen von Interesse ist, weil sie zu ihrer Gültigkeit erfordert die an sich willkommene

4. Normierung desjenigen Spurbestandteils von Γ_λ, der ohne Normierung zum Auftreten reinimaginärer elektromagnetischer Feldstärken Anlaß geben würde.

§ 7. Die Diracsche Gleichung.

Der Operator $\gamma^k \nabla_k$ ist eine Invariante, die man passend als »Betrag des Gradienten« bezeichnen kann. Die verallgemeinerte Diracsche Gleichung fordert[1]

$$\gamma^k \nabla_k \psi = \mu \psi, \tag{65}$$

[1] Man könnte allerdings versucht sein, zu »symmetrisieren« und als linke Seite von (65) zu nehmen

$$\tfrac{1}{2}(\gamma^k \nabla_k + \nabla_k \gamma^k). \tag{66}$$

Dieser Ausdruck läßt sich aber umformen. Das Verschwinden der kovarianten Ableitung von γ^k sagt aus:

$$\nabla_l \gamma^k - \gamma^k \nabla_l = -\Gamma_{l\mu}^{\,k} \gamma^\mu.$$

Durch Verjüngen entsteht

wo μ eine universelle Konstante

$$\mu = \frac{2\pi m c}{h} \,.$$

Der nach der Zuordnung (57) zu γ^k gehörige c-Vektor heiße iS^k, also

$$iS^k = \psi^* \gamma_0 \gamma^k \psi. \tag{69}$$

Da die kovariante Ableitung des Operators γ^k verschwindet, reduziert sich diejenige von S^k nach (61) auf

$$iS^k{}_{;\lambda} = \nabla_\lambda \psi^* \gamma_0 \gamma^k \psi + \psi^* \gamma_0 \gamma^k \nabla_k \psi \,.$$

Bildet man durch Verjüngung die kovariante Divergenz:

$$iS^\lambda{}_{;\lambda} = \nabla_\lambda \psi^* \gamma_0 \gamma^\lambda \psi + \psi^* \gamma_0 \gamma^\lambda \nabla_\lambda \psi \,,$$

so ist der erste Summand das Negativgenommene, Konjugiert-Komplexe des zweiten[1], dieser aber ist nach (65)

$$\mu \psi^* \gamma_0 \psi \,,$$

also reell, weil γ_0 hermitesch. Also ist

$$S^\lambda{}_{;\lambda} = 0 \,. \tag{70}$$

So folgt die Quellenfreiheit des Viererstroms, der nach unserer Zuordnung (57) als c-Vektor zum kontravarianten Maßvektor gehört, aus der Dirac-Gleichung und den fundamentalen Gleichungen (8) (vgl. Fock l. c. S. 267).

Wir wollen jetzt die Dirac-Gleichung quadrieren, um das Ergebnis mit dem aus der speziellen Theorie vertrauten zu vergleichen (der Kürze halber werde ψ unterdrückt):

$$\gamma^k \nabla_k \gamma^l \nabla_l = \mu^2 \,. \tag{71}$$

$$\nabla_k \gamma^k - \gamma^k \nabla_k = -\Gamma_{k\mu}^{\,k} \gamma^\mu = -\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\mu} \gamma^\mu \,. \tag{67}$$

Folglich ist

$$\tfrac{1}{2}(\gamma^k \nabla_k + \nabla_k \gamma^k) = \gamma^k \nabla_k - \tfrac{1}{2} \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_k} \gamma^k = g^{\frac{1}{4}} g^k \nabla_k g^{-\frac{1}{4}} \,. \tag{68}$$

Dies ist kein invarianter Operator, was uns nicht zu wundern braucht. $\nabla_k \gamma^k$ ist nämlich keiner und hat auch keine Verpflichtung, es zu sein. Denn wir haben schon oben hervorgehoben, daß das Produkt zweier Tensoroperatoren nur dann sicher Tensoreigenschaft hat, wenn der linke Faktor den Differentiator nicht enthält. Im übrigen würde die Verwendung des Ansatzes (66) doch wieder auf dasselbe hinauslaufen, man müßte bloß $g^{-\frac{1}{4}}\psi$ an die Stelle von ψ treten lassen, das heißt, man müßte $g^{-\frac{1}{4}}\psi$ als Spinor transformieren. Wir bleiben deshalb beim Ansatz (65).

[1] Das hermitesche $\gamma_0 \gamma^0$ wälzt sich als $(\gamma_0 \gamma^0)^*$ auf den ersten Faktor, die schiefen $\gamma_0 \gamma^{\lambda \neq 0}$ als $-(\gamma_0 \gamma^\lambda)^*$. Dafür enthält aber ∇_0 einen Vorzeichenwechsel, $\nabla_{\lambda \neq 0}$ nicht. Vergleiche das oben zu Gleichung (60) im Text Bemerkte sowie auch die Anmerkung zu Gleichung (56).

Man vertausche die ersten beiden Faktoren mittels Gleichung (67) (in der Anmerkung) und verwende, daß nach (2) und (12)

$$\gamma^k \gamma^l = g^{kl} + s^{kl}. \tag{72}$$

So kommt

$$\nabla_k (g^{kl} + s^{kl}) \nabla_l + \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\mu} \gamma^\mu \gamma^l \nabla_l = \mu^2.$$

Aus dem Verschwinden der kovarianten Ableitung von s^{kl} folgt

$$\nabla_k s^{kl} - s^{kl} \nabla_k = -\frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\mu} s^{\mu l}.$$

So kommt [mit nochmaliger Verwendung von (72)]:

$$\nabla_k g^{kl} \nabla_l + s^{kl} \nabla_k \nabla_l + \frac{\partial \lg \sqrt{g}}{\partial x_\mu} g^{\mu l} \nabla_l = \mu^2.$$

Das zweite Glied ist nach (26) und wegen der Antisymmetrie der s^{kl} gleich $-\frac{1}{2} s^{kl} \Phi_{kl}$. Das erste und dritte (wo man μ durch k ersetze) vereinigen sich zur verallgemeinerten Laplaceschen Operation; man erhält also schließlich:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \nabla_k \sqrt{g}\, g^{kl} \nabla_l - \frac{1}{2} s^{kl} \Phi_{kl} = \mu^2. \tag{73}$$

Es ist interessant, hier für Φ_{kl} den viel früher gefundenen Ausdruck (15) einzusetzen. Dabei tritt die Invariante

$$\frac{1}{8} R_{kl,\mu\nu} s^{kl} s^{\mu\nu}$$

auf. Wegen der Symmetrie des kovarianten Riemannschen Krümmungstensors im ersten und zweiten Indexpaar ist das auch gleich

$$\frac{1}{16} R_{kl,\mu\nu} (s^{kl} s^{\mu\nu} + s^{\mu\nu} s^{kl}).$$

Wenn man nun — was ich hier nicht in extenso durchführen will — die symmetrischen Produkte der s^{kl} wirklich ausrechnet, sodann von der bekannten zyklischen Symmetrie

$$R_{kl,\mu\nu} + R_{l\mu,k\nu} + R_{\mu k,l\nu} = 0$$

Gebrauch macht, erhält man schließlich

$$\frac{1}{8} R_{kl,\mu\nu} s^{kl} s^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} g^{k\mu} g^{l\nu} R_{kl,\mu\nu} = -\frac{R}{4},$$

wo R die invariante Krümmung. Mithin ergibt das Einsetzen von Φ_k nach (15) in (73) folgendes:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \nabla_k \sqrt{g}\, g^{kl} \nabla_l - \frac{R}{4} - \frac{1}{2} f_{kl} s^{kl} = \mu^2. \tag{74}$$

In dem dritten Gliede linker Hand erkennt man die wohlvertraute Einwirkung der Feldstärke auf den Spintensor, und zwar ist in f_{kl} bereits der reine Spuranteil von Φ_{kl} abgelöst, der also wohl im eigentlichen Sinne als Feldstärke zu bezeichnen ist und, wie öfters erwähnt, durch die Metrik noch völlig freigelassen wird.

Das zweite Glied scheint mir von erheblichem theoretischen Interesse. Es ist freilich um viele, viele Zehnerpotenzen zu klein, um etwa das Glied rechter Hand ersetzen zu können. Denn μ ist die reziproke Compton-Wellenlänge, ungefähr $10^{11}\,\mathrm{cm}^{-1}$. Immerhin scheint es bedeutungsvoll, daß in der verallgemeinerten Theorie überhaupt ein mit dem rätselhaften Massenglied gleichartiges ganz von selber angetroffen wird[1].

[1] S. a. O. Veblen und B. Hoffmann, Phys. Rev. **36**, 821, 1930.

Ausgegeben am 30. April.