Hochschule Düsseldorf
University of Applied Sciences

Fachbereich Elektro- und Informationstechnik
Faculty of Electrical Engineering and Information Technology

Grundlagen der Elektrotechnik für WIE 2

1 Quasistationäre Vorgänge

1.1 Übersicht

Inhalt:

1.2 Vorwort

Dieses Kapitel basiert auf den Ausführungen der Unterlagen zur Vorlesung *Grundlagen der Elektrotechnik 1 und 2* von Prof. Dr. Gellißen aus dem Semester 2006/2007 sowie den daraus abgeleiteten Kurzskripten von Prof. Dr. Wrede aus dem Jahr 2018.

Für ein vertiefendes Selbststudium werden die Vorlesungsskripte empfohlen.

1.3 Allgemein

Bei den bisherigen Betrachtungen elektrischer Vorgänge wurde zunächst davon ausgegangen, dass die Ladung Q zeitlich konstant ist und sich immer am selben Ort befindet, das führte auf das elektrostatische Feld.
In einem nächsten Schritt wurde zugelassen, dass sich die Ladung mit konstanter Geschwindigkeit in einem Leiter bewegt. Das führte auf das stationäre Strömungsfeld, also auf Gleichströme und Gleichspannungen.
Im Folgenden sollen die Betrachtungen auf Ladungen ausgedehnt werden, deren Geschwindigkeit sich mit der Zeit sinusförmig ändert, wobei jedoch **Amplitude**, **Frequenz** und **Phasenlage** zeitlich konstant bleiben. Vorgänge dieser Art werden als quasistationär bezeichnet.

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$ mit

$\hat{\imath}$: Amplitude des Wechselstroms

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

ω, f: Kreis-, Frequenz des Wechselstroms

φ_0: (Null-)Phasenlage des Wechselstroms

1.4 Erläuterungen und Definitionen

1.4.1 Definitionen

Periodische Zeitfunktion

- Funktionswert $f(t)$ ist abhängig von der Zeit

- Jeder Funktionswert wiederholt sich in einem ganzzahligen Abstand für den gilt:

- $f(t \pm k \cdot T) = f(t)$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$

- Eine periodische Zeitfunktion beginnt im negativen Unendlichen, also bei $t \rightarrow -\infty$ und endet im positiven Unendlichen, also bei $t \rightarrow +\infty$

Periodendauer T

Zeitlicher Abstand zwischen zwei wiederkehrenden Funktionswerten

Frequenz f

Kehrwert der Periodendauer

$$f = \frac{1}{T} \qquad [f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz} \qquad \text{(Herz)}$$

Kreisfrequenz ω

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T} \qquad [\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}$$

Augenblickswert

Funktionswert $f(t_\mathrm{x})$ zu einer beliebigen Zeit t_x

Amplitude

Größter Funktionswert der periodischen Zeitfunktion

$$f(t)|_{\max} = \hat{f}$$ $\hat{f}$: Scheitelwert („*f-Dach*“)

1.4.2 Sinus- und Kosinusschwingung

In der Elektrotechnik stellen Sinus- und Kosinusfunktionen die häufigsten verwendeten Funktionen dar (Bild 1). Die Funktionsdarstellung der Spannung lautet beispielsweise:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin \varphi(t) \qquad \text{bzw.} \qquad u(t) = \hat{u} \cdot \cos \varphi(t)$$

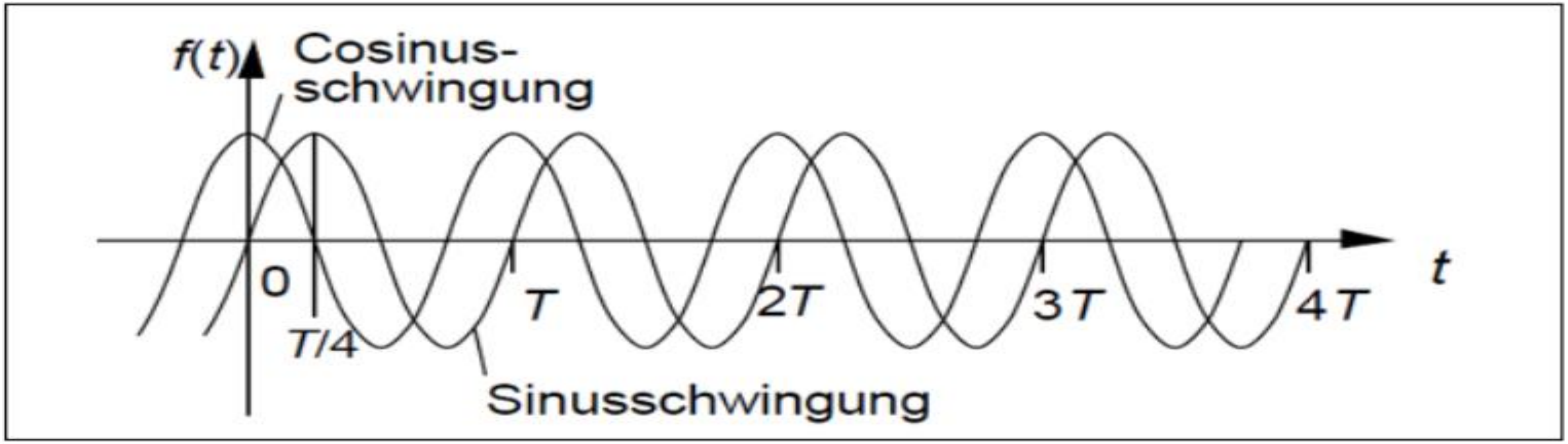


Bild 1: Zeitverläufe der Sinus- und Kosinusfunktionen

$\varphi(t)$ ist dabei das zeitabhängige Argument der Sinus- bzw. Kosinusfunktion und wie folgt bestimmt:

$$\varphi(t) = \frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t + \varphi_0 = 2\cdot\pi\cdot f\cdot t + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0$$ (φ_0: Nullphasenwinkel)

Das für $t = 0$ verbleibende Argument φ_0 wird als Nullphasenwinkel bezeichnet:

$$u(0) = \hat{u}\cdot\sin\varphi_0 \qquad \text{bzw.} \qquad u(0) = \hat{u}\cdot\cos\varphi_0$$

Die Sinusfunktion hat den Wert null, wenn ihr Argument null ist, also wenn $\varphi(t) = 0$ ist. Damit folgt

$$\varphi(t) = 0 = \omega t_0 + \varphi_0 \quad => \quad t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega}$$

Bei der negativen Zeit (der gegenüber $t = 0$ zurückliegenden Zeit) $t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega}$, geht die Sinusfunktion durch Null bzw. liegt der Funktionswert bei null. Ausgehend von diesem Zeitpunkt setzt sich die Sinusschwingung nach beiden Seiten periodisch fort. Das führt zu folgender Feststellung:

- Ist der Nullphasenwinkel φ_0 positiv, wird die Funktion nach links zu negativen Zeiten verschoben.
- Ist der Nullphasenwinkel φ_0 negativ, wird die Funktion nach rechts zu positiven Zeiten verschoben.

Wie in Bild 1 zu erkennen ist, ergibt eine Verschiebung der Sinusfunktion um $\frac{T}{4}$ nach links die Kosinusfunktion oder die Verschiebung der Kosinusfunktion um $\frac{T}{4}$ nach rechts die Sinusfunktion:

$$\sin(\varphi + 90°) = \cos(\varphi) \qquad \text{bzw.} \qquad \cos(\varphi - 90°) = \sin(\varphi)$$

1.4.3 Mischgrößen

Spannungen und Ströme sind im Allgemeinen zeitabhängig. Häufig liegen Spannungen und Ströme vor, die sich aus der Überlagerung einer Gleichspannung oder eines Gleichstroms mit einer Wechselspannung oder einem Wechselstrom ergeben. Solche Größen werden als Mischgrößen bezeichnet. Ein Beispiel für eine Mischgröße stellt die im Bild 2 dargestellte Spannung dar.

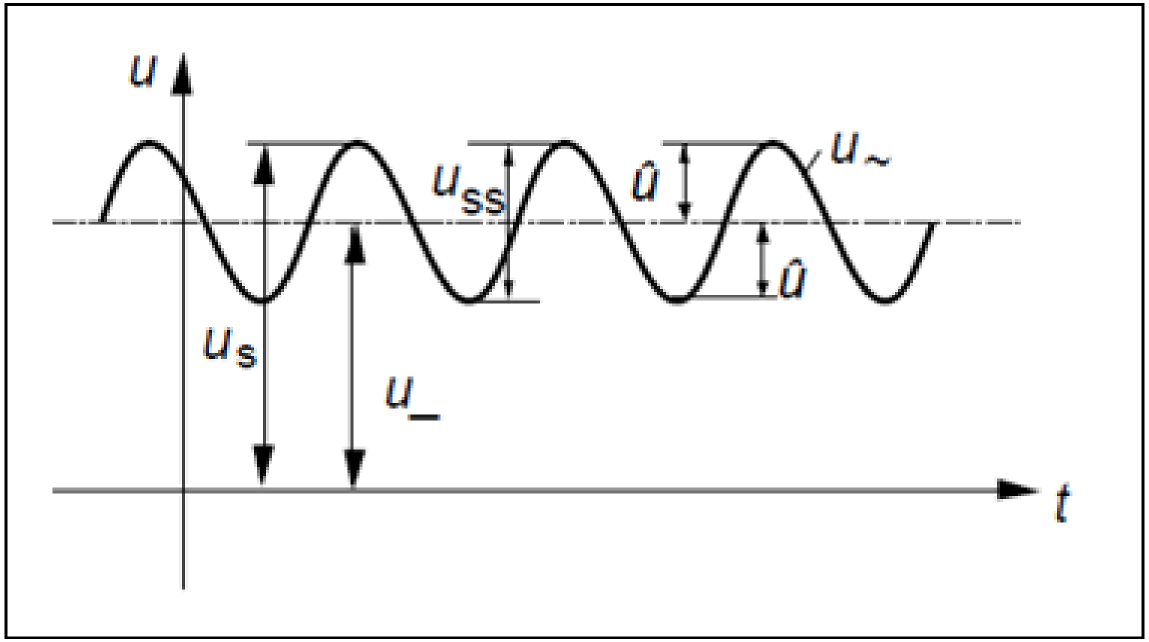


Bild 2: Zeitlicher Verlauf einer Mischspannung

Es gilt für die Mischspannung:

$u = u_{-} + u_{\sim}$ mit

u	Mischspannung (bzw. allgemein für die Spannung)
u_{-}	Gleichanteil der Spannung u
$u_{\sim}$	Wechselanteil der Spannung u
$\hat{u}$	Amplitude der Wechselspannung $u_{\sim}$
u_{SS}	Spitze-Spitze Wert der Wechselspannung $u_{\sim}$
u_{S}	Spitzenwert der Spannung u

Die Gleichgröße oder den Gleichanteil erhält man durch Mittelwertbildung der Mischgröße:

$$u_{-} = \overline{u(t)} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{Mittelwert}$$

Den Wechselanteil erhält man aus der Differenz der Mischspannung mit dem Gleichanteil:

$$u_{\sim} = u - u_{-}$$

Der Wechselanteil hat keinen Mittelwert:

$$\overline{u_{\sim}} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u_{\sim}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Als Spannungsangabe der Mischgröße wird der Effektivwert angegeben:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\,\mathrm{d}t}$$ *Effektivwert*

Im Gegensatz zu zeitabhängigen Größen wie bspw. $u(t)$, die durch kleine Formelzeichen gekennzeichnet werden, wird das Formelzeichen eines Effektivwertes (bspw. U) immer großgeschrieben.

Beispiele:

1) Effektivwert einer Gleichspannung $u(t) = u_{-} = \mathrm{konst.}$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u_{-}^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left[u_{-}^2 \cdot t\right]_{t_0}^{t_0+T}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left[u_{-}^2 \cdot (t_0 + T) - u_{-}^2 \cdot t_0\right]} = \sqrt{\frac{u_{-}^2 \cdot T}{T}} = u_{-}$$

2) Effektivwert einer sinusförmigen Wechselspannung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} [\hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t)]^2 \,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2(\omega \cdot t) \,\mathrm{d}t}$$

mit $\int \sin^2(a \cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4 \cdot a} \cdot \sin(2 \cdot a \cdot x)$

(siehe bspw. „Bronstein: Taschenbuch der Mathematik“)

folgt:

$$U = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{4 \cdot \omega} \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)\right]_{t_0}^{t_0+T}}$$

$$U = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \left[\frac{t_0+T}{2} - \frac{\sin\left(2 \cdot \omega \cdot (t_0+T)\right)}{4 \cdot \omega} - \frac{t_0}{2} + \frac{\sin\left(2 \cdot \omega \cdot (t_0)\right)}{4 \cdot \omega}\right]} = U = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

bzw. $\hat{u} = \sqrt{2} \cdot U$

3) Effektivwert einer Mischgröße $u(t) = u_- + u_\sim$

$$U^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (u_- + u_\sim)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (u_-^2 + 2 \cdot u_- \cdot u_\sim + u_\sim^2) \,\mathrm{d}t$$

$$U^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u_-^2 \, \mathrm{d}t + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (2 \cdot u_- \cdot u_\sim) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u_\sim^2 \, \mathrm{d}t$$

$$U^2 = u_-^2 + \frac{2 \cdot u_-}{T} \cdot \int_0^T u_\sim \, \mathrm{d}t + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u_\sim^2 \, \mathrm{d}t$$

⇨ $U^2 = U_-^2 + U_\sim^2$ mit U_- Effektivwert des Gleichanteils u_-

⇨ $U = \sqrt{U_-^2 + U_\sim^2}$ $U_\sim$ Effektivwert des Wechselanteils $u_\sim$

Der Mittelwert des Betrags einer zeitabhängigen Funktion $f(t)$ wird als Gleichrichtwert bezeichnet. Am Beispiel einer Spannung bedeutet dies:

$$\overline{|u(t)|} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} |u(t)| \, \mathrm{d}t$$ *Gleichrichtwert*

Als bezogenen Größen werden folgende Faktoren definiert:

$$\text{Formfaktor} = \frac{\text{Effektivwert der Wechselgröße}}{\text{Gleichrichtwert der Wechselgröße}}$$

$$\text{Scheitelfaktor} = \frac{\text{Scheitelwert der Wechselgröße}}{\text{Effektivwert der Wechselgröße}}$$ (wird auch als *Crestfaktor* bezeichnet)

Liegt eine zur Nulllinie symmetrische, periodische Funktion vor, werden die Maximal- und Minimalwert als Amplitude bezeichnet. Ist die Funktion nicht symmetrisch muss zwischen positiven und negativen Scheitelwerten unterschieden werden.

1.4.4 Schreibweise von Formelzeichen

Die Schreibweise zeitabhängiger Größen ist in den Normen DIN 1304 "Allgemeine Formelzeichen", DIN 5483 "Zeitabhängige Größen" und DIN 40110 "Wechselstromgrößen" festgelegt.
Für Größen wie Spannung und Strom gibt es als Formelzeichen sowohl einen Groß- als auch einen Kleinbuchstaben. Der Großbuchstabe U oder I dient zur Kennzeichnung des Effektivwertes. Zudem werden Gleichspannung und Gleichstrom durch die Formelzeichen U und I angegeben. Der Kleinbuchstabe u oder i dient zur allgemeinen Kennzeichnung von Spannung oder Strom, ggf. erfolgt durch Anhängen von (t) unmittelbar hinter dem Formelzeichen die explizite Kennzeichnung einer Zeitabhängigkeit, wie bspw. bei $u(t)$ oder $i(t)$.
Der Gleichspannungsanteil u_{-} einer Mischspannung wird durch das Anhängen des Strichs an das Formelzeichen der Spannung u angegeben und entsprechend U_{-} für den zugehörigen Effektivwert verwendet.
Die Kennzeichnung einer Wechselgröße erfolgt durch das Anhängen einer Tilde an das Formelzeichen z.B. bei einer Wechselspannung: $u_{\sim}$. Zu beachten ist, dass $u_{\sim}$ immer eine zeitabhängige Spannung ist, die keinen Mittelwert aufweist. Ihre Stärke wird durch den Effektivwert $U_{\sim}$ angegeben.
Mittelwerte werden durch einen Überstrich über die Funktion gekennzeichnet. Es gilt:

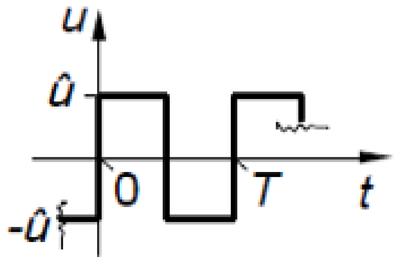
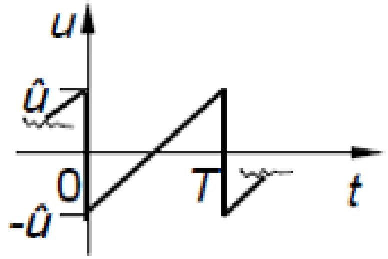
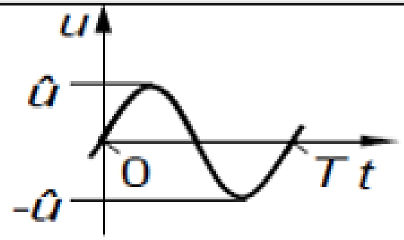
$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

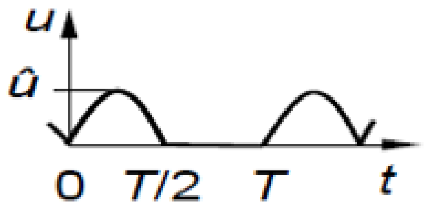
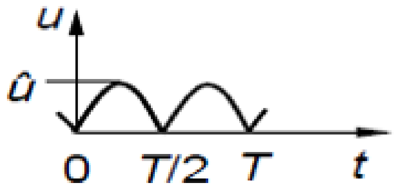
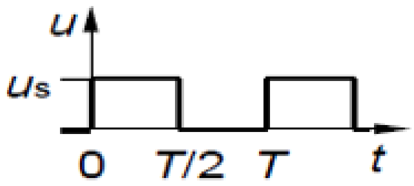
Der Mittelwert eines Produkts ergibt sich beispielsweise bei der Leistungsberechnung mit:

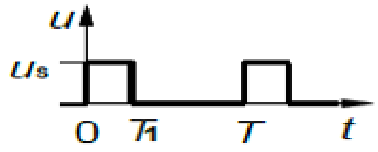
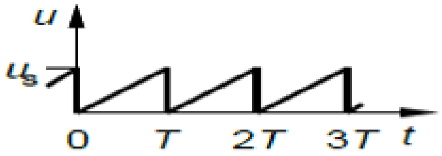
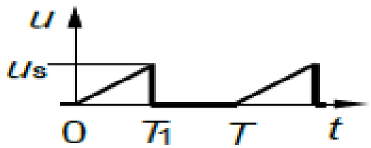
$$P = \overline{u \cdot i} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} [u(t) \cdot i(t)]\,\mathrm{d}t \neq \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\,\mathrm{d}t \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} i(t)\,\mathrm{d}t = \bar{u} \cdot \bar{\imath}$$

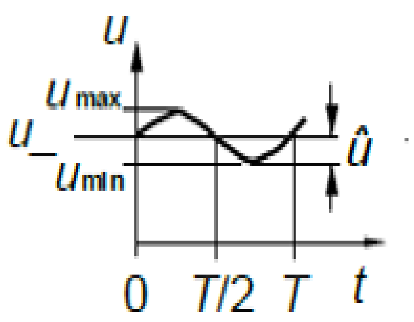
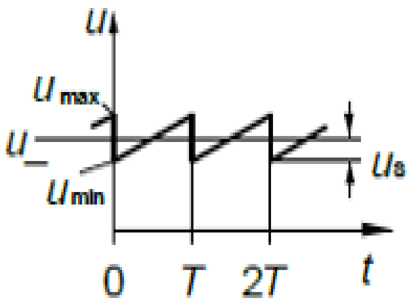
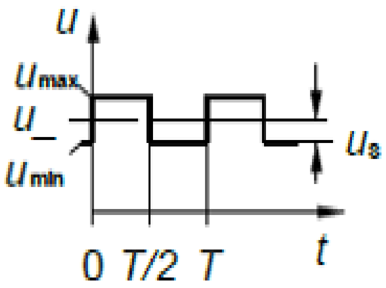
Tabelle 1 gibt eine Übersicht einiger typischer zeitabhängiger Funktionen mit ihren charakteristischen Werten.

Tabelle 1: Typische zeitabhängige Funktionen mit ihren charakteristischen Werten

Nr.	Wechselspannungen	Effektivwert	Gleichwert	Scheitelfaktor
1	 $u(t) = \hat{u}$ für $0 \leq t < T/2$ $u(t) = -\hat{u}$ für $T/2 \leq t < T$	$U = \hat{u}$	$\underline{u} = 0$	1
2	 $u(t) = -\hat{u} + 2\hat{u}t/T$	$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\underline{u} = 0$	$\sqrt{3}$
3	 $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$	$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$\underline{u} = 0$	$\sqrt{2}$

Nr.	Mischspannungen Teil 1	Effektiv-wert	Gleichwert	Scheitel-faktor	Formfak-tor
4	 $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ für $0 \le t < T/2$ $u(t) = 0$ für $T/2 \le t < T$	$U = \frac{\hat{u}}{2}$	$u\_ = \frac{\hat{u}}{\pi}$	2	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
5	 $u(t) = \hat{u}\,\lvert\sin(\omega t)\rvert$	$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$u\_ = \frac{2\hat{u}}{\pi}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$
6	 $u(t) = u_S$ für $0 \le t < T/2$ $u(t) = 0$ für $T/2 \le t < T$	$U = \frac{u_S}{\sqrt{2}}$	$u\_ = \frac{u_S}{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

7	 $u(t) = u_s$ für $0 \le t < T_1$ $u(t) = 0$ für $T_1 \le t < T$	$U = u_s\sqrt{\frac{T_1}{T}}$	$u\_ = u_s \frac{T_1}{T}$	$\sqrt{\frac{T}{T_1}}$	$\sqrt{\frac{T}{T_1}}$
8	 $u(t) = u_s t / T$	$U = \frac{u_s}{\sqrt{3}}$	$u\_ = \frac{u_s}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
9	 $u(t) = 2u_s t / T$ für $0 \le t < T/2$ $u(t) = 0$ für $0 \le t < T$	$U = \frac{u_s}{\sqrt{6}}$	$u\_ = \frac{u_s}{4}$	$\sqrt{6}$	$\frac{4}{\sqrt{6}}$
10	 $u(t) = u_s t / T_1$ für $0 \le t < T_1$ $u(t) = 0$ für $T_1 \le t < T$	$U = \frac{u_s}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{T_1}{\mathrm{T}}}$	$u\_ = \frac{u_s}{2}\frac{T_1}{T}$	$\sqrt{3}\sqrt{\frac{T}{T_1}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{T}{T_1}}$

Nr.	Mischspannungen Teil 2	Wechselanteil	Gleichanteil
11		$u_\sim = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$	$u_- = u_{min} + \hat{u}$
12		$u_\sim = - u_s + 2u_s t / T$	$u_- = u_{min} + u_s$
13		für $0 \le t < T/2$: $u_\sim = u_s$ für $T/2 \le t \quad T$: $u_\sim = - u_s$	$u_- = u_{min} + u_s$

1.5 Komplexe Ebene

1.5.1 Zeigerdarstellung der Sinus- und Kosinusfunktion

Neben der Zeitliniendarstellung kann eine Sinus- oder Kosinusfunktion durch einen Vektor in der x, y-Ebene dargestellt werden. Die Funktion $z \cdot \sin(\varphi)$ kann als Projektion auf die y-Achse des unter dem Winkel φ in der x, y-Ebene dargestellten Vektors z aufgefasst werden (Bild 3). Die Funktion $z \cdot \cos(\varphi)$ kann als Projektion des Vektors z auf die x-Achse aufgefasst werden.

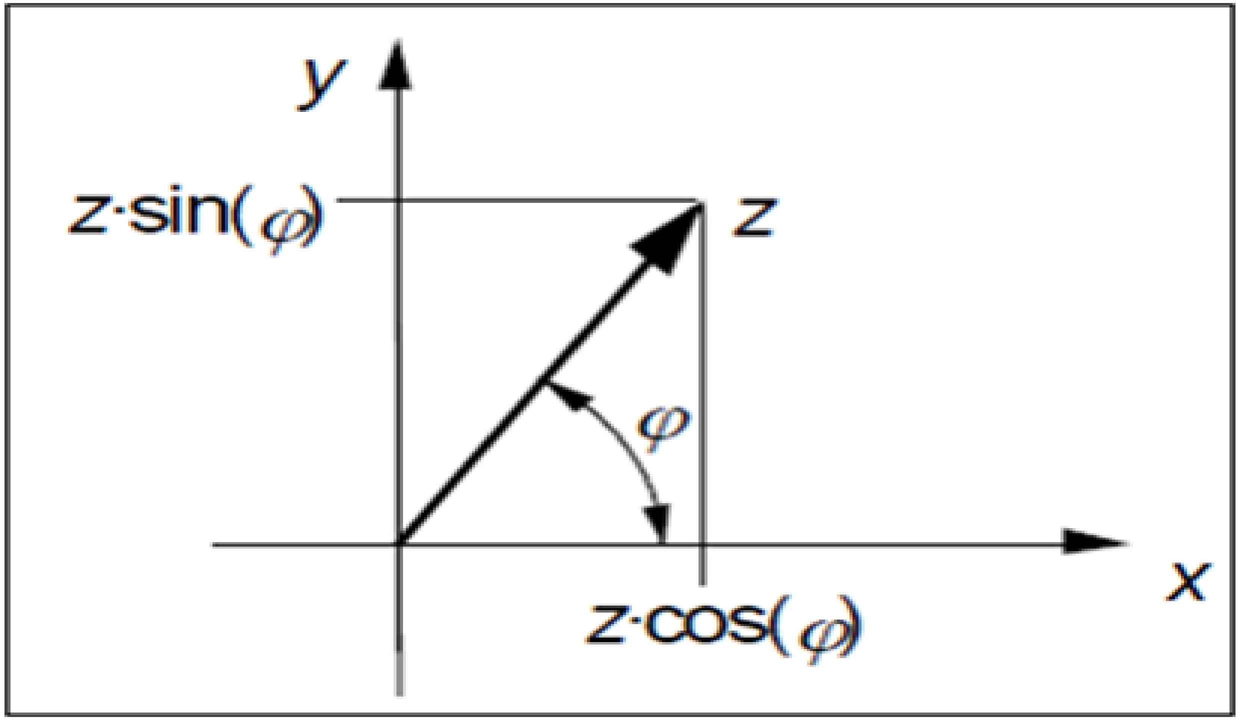


Bild 3: Darstellung von Sinus- und Kosinusfunktion durch einen Vektor in der x, y-Ebene

Sinus- und Kosinusfunktion können also auch als Projektion eines Vektors auf die x- oder y-Achse der kartesischen Ebene gedeutet werden.

1.5.2 Der Zeiger

Es bietet sich an, für die Darstellung von Sinus- und Kosinusfunktionen die Gauß´sche-Ebene heranzuziehen, in der komplexe Zahlen dargestellt werden. Die komplexe Zahl $\underline{z}$ besteht aus dem Realteil $\mathrm{Re}[\underline{z}]$ und dem Imaginärteil $\mathrm{Im}[\underline{z}]$, so dass gilt:

$$\underline{z} = \mathrm{Re}[\underline{z}] + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}[\underline{z}]$$

Graphisch wird die Distanz zwischen zwei komplexen Zahlen durch einen Zeiger dargestellt. Im Bild 4 ist dies der Zeiger vom Ursprung $\underline{z}_0 = 0 + \mathrm{j} \cdot 0$ zur komplexen Zahl $\underline{z} = \mathrm{Re}[\underline{z}] + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}[\underline{z}]$. Der Zeiger zwischen dem Ursprung $(0 + j \cdot 0)$ zum Punkt $\underline{z}$ berechnet sich zu:

$$\underline{z} - \underline{z}_0 = \mathrm{Re}[\underline{z}] + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}[\underline{z}] - (0 + \mathrm{j} \cdot 0) = \mathrm{Re}[\underline{z}] + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}[\underline{z}] = \underline{z}$$

Der Zeiger vom Ursprung zur komplexen Zahl *z* ist also gleich der komplexen Zahl $\underline{z}$.
Die Länge des Zeigers wird als Betrag bezeichnet. Länge bzw. Betrag lassen sich aus dem Satz des Pythagoras bestimmen:

$$|\underline{z}| = z = \sqrt{\mathrm{Re}^2[\underline{z}] + \mathrm{Im}^2[\underline{z}]}$$

Der Betrag wird durch Betragsstriche um das Formelzeichen, also $|\underline{z}|$, oder durch Fortlassen des Unterstriches beim Formelzeichen, also z, gekennzeichnet.

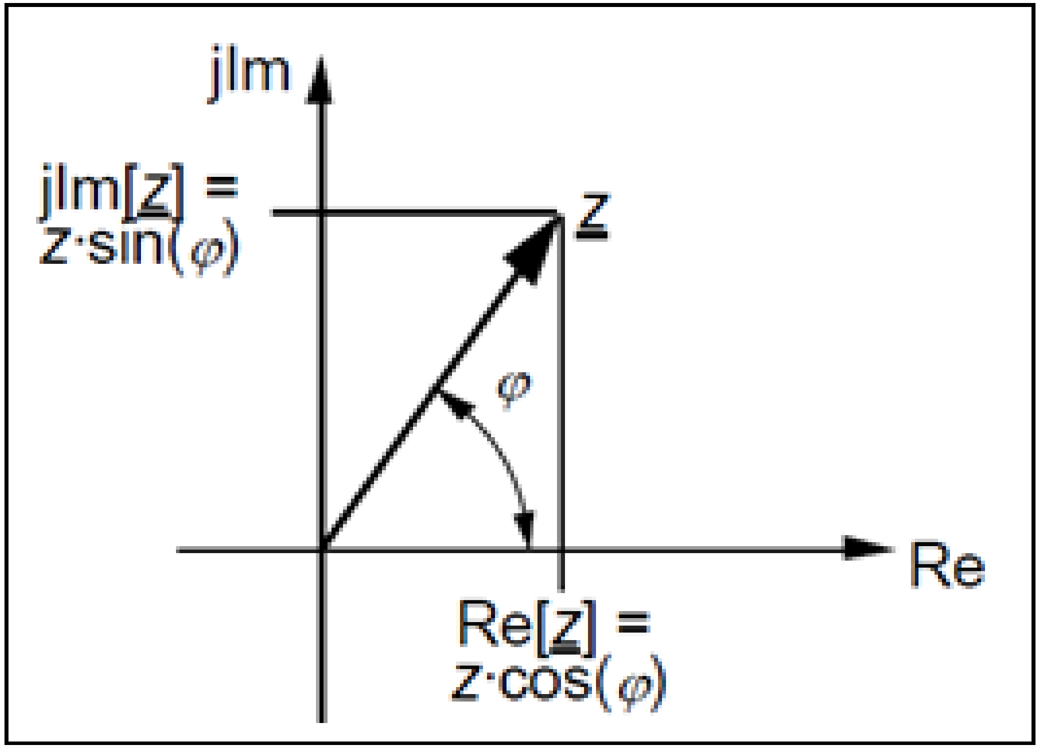


Bild 4: Darstellung der komplexen Zahl $\underline{z}$ in der komplexen Ebene

Der Winkel φ des Zeigers gegenüber der reellen Achse wird als Phasenwinkel (kurz Phase) bezeichnet. Er wird mittels der erweiterten Arcus-Tangens-Funktion berechnet:

$$\varphi = \arg(\underline{z}) = \operatorname{atan2}\left(\frac{\mathrm{Im}[\underline{z}]}{\mathrm{Re}[\underline{z}]}\right)$$

Nach dem Satz von Euler

$$\underline{z} = z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi} = z \cdot [\cos(\varphi) + \mathrm{j} \cdot \sin(\varphi)] = z \cdot \cos(\varphi) + \mathrm{j} \cdot z \cdot \sin(\varphi) = \mathrm{Re}[\underline{z}] + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}[\underline{z}]$$

lässt sich eine komplexe Zahl $\underline{z}$ durch ihren Betrag z und einen Drehzeiger $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi}$ darstellen.

Wird der Imaginärteil einer komplexen Zahl $\underline{z}$ mit -1 multipliziert, erhält man die konjugiert komplexe Zahl $\underline{z}^*$:

$$\underline{z}^* = \mathrm{Re}[\underline{z}] - \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}[\underline{z}] = z \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j} \cdot \varphi}$$

Die Multiplikation der komplexen Zahl $\underline{z}$ mit ihrer konjugiert komplexen Zahl $\underline{z}^*$ liefert:

$$\underline{z} \cdot \underline{z}^* = \mathrm{Re}^2[\underline{z}] + \mathrm{Im}^2[\underline{z}] = z^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \varphi} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j} \cdot \varphi} = z^2$$

Zusammenfassung komplexer Zeiger:

Komponentenform $\underline{z} = \mathrm{Re}[\underline{z}] + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}[\underline{z}]$

Zeigerform $\underline{z} = z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \varphi}$

Betrag $|\underline{z}| = z = \sqrt{\mathrm{Re}^2[\underline{z}] + \mathrm{Im}^2[\underline{z}]} = \sqrt{\underline{z} \cdot \underline{z}^*}$

Phase $\varphi = \arg(\underline{z}) = \mathrm{atan2}\left(\frac{\mathrm{Im}[\underline{z}]}{\mathrm{Re}[\underline{z}]}\right)$

Realteil $\mathrm{Re}[\underline{z}] = z \cdot \cos(\varphi)$

Imaginärteil $\mathrm{Im}[\underline{z}] = z \cdot \sin(\varphi)$

1.5.3 Transformation der Sinus- und Kosinusschwingung auf die komplexe Ebene

In der Elektrotechnik werden vorwiegend sinusförmige Vorgänge in Abhängigkeit von der Zeit betrachtet. Dazu bedient man sich der komplexen Darstellung von Sinus- und Kosinusschwingung mit $\mathrm{Re}\left[\underline{z}(t)\right] = \hat{z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ und $\mathrm{Im}\left[\underline{z}(t)\right] = \hat{z} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$, die in der komplexen Ebene durch den drehenden Zeiger $\underline{z}(t)$ abgebildet (Bild 5) werden. Dieser komplexe Drehzeiger ist zum Zeitpunkt $t = 0$ gegenüber der reellen Achse um den Nullphasenwinkel φ_0 nach links verdreht und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω im mathematisch positiven Sinn, also nach links bzw. gegen den Uhrzeigersinn. Es handelt sich bei dieser Darstellung um die Transformation einer zeitabhängigen, sinus- bzw. kosinusförmigen Schwingung auf die komplexe Ebene.

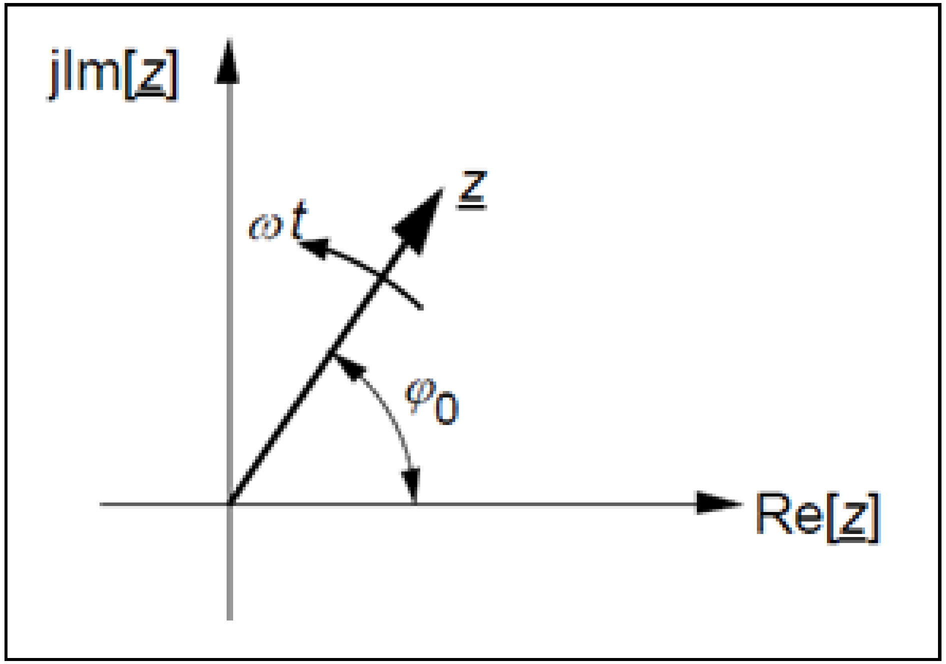


Bild 5: Darstellung des Drehzeigers $\underline{z}(t)$ in der komplexen Ebene:

Bspw. wird ein komplexer Spannungszeiger $\underline{u}(t)$ in der komplexen Ebene wie folgt beschrieben:

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot(\omega t + \varphi_0)}$$

Mit dem Satz von Euler folgt daraus:

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot(\omega t+\varphi_0)} = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + \mathrm{j} \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\mathrm{Re}\left[\underline{u}(t)\right] = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\mathrm{Im}\left[\underline{u}(t)\right] = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Der Realteil des komplexen Zeigers $\underline{u}(t)$ stellt die Kosinusschwingung dar, der Realteil die Sinusschwingung. Der komplexe Spannungszeiger $\underline{u}(t)$ hat die Länge $\hat{u}$ und dreht sich mit der Kreisfrequenz ω in der komplexen Ebene um den Ursprung. Da sich der Zeiger immer mit derselben Kreisfrequenz dreht, ist damit keine besondere Information verbunden, man kann das Drehen des Zeigers vernachlässigen, ohne einen Informationsverlust befürchten zu müssen. Wird die Zeigerlänge bzw. die Amplitude durch $\sqrt{2}$ dividiert, entspricht die Länge dem Effektivwert. Unter diesen Umständen kann der drehende Zeiger $\underline{u}(t)$ in einen ruhenden, komplexen Zeiger $\underline{U}$ und in den Drehzeiger $\sqrt{2} \cdot e^{j\cdot\omega t}$ aufgespalten werden:

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot(\omega t+\varphi_0)} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi_0} = \underline{U} \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega t}$$

Dabei hat der komplexe Effektivwertzeiger $\underline{U} = U \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi_0}$ die Zeigerlänge U, die dem Effektivwert der Sinus- bzw. Kosinusschwingung entspricht. Seine Verdrehung gegenüber der reellen Achse entspricht dem Nullphasenwinkel φ_0.

Während der Berechnungen wird nur mit komplexen, ruhenden Zeigern gearbeitet.

Erst wenn die Sinus- oder Kosinusschwingung gebraucht wird, wird der komplexe Zeiger mit dem Faktor $\sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \omega t}$ multipliziert und damit wieder in den komplexen, zeitabhängigen Zeiger überführt. Durch Realteilbildung erhält man die dazu korrespondiere die Kosinusschwingung oder durch Imaginärteilbildung die dazu korrespondiere Sinusschwingung.

Beispiele:

1) Bestimmung der Zeitfunktion aus einem komplexen, ruhenden Zeiger

Es sei folgender komplexe (Effekivwert-)Stromzeiger gegeben:

$$\underline{I} = I \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \varphi_0}$$

Welche Zeitfunktionen lassen sich für den Stromverlauf $i(t)$ daraus bestimmen?

1. Bestimmung des komplexen, rotierenden Zeigers $\underline{i}(t)$:

$$\underline{i}(t) = \underline{I} \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \omega t} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \varphi_0} \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \omega t} = \hat{\imath} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot (\omega t + \varphi_0)}$$

2. Zerlegung von $\underline{i}(t)$ in Real- und Imaginärteil nach Euler:

$$\underline{i}(t) = \hat{\imath} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + \mathrm{j} \cdot \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$i_1(t) = \mathrm{Re}[\underline{i}(t)] = \hat{\imath} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$i_2(t) = \mathrm{Im}[\underline{i}(t)] = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

2) Zwei sinusförmige Spannungen unterschiedlicher Frequenz

Was passiert, wenn zwei sinusförmige Spannungen mit unterschiedlichen Frequenzen als Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt werden?
Gegeben sind zwei unterschiedliche Spannungsverläufe, die jeweils als komplexe Zeiger dargestellt werden können:

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) \quad => \quad \underline{u}_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot(\omega_1 t + \varphi_{01})} = \underline{U}_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega_1 t}$$

$$u_2(t) = \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}) \quad => \quad \underline{u}_2(t) = \hat{u}_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot(\omega_2 t + \varphi_{02})} = \underline{U}_2 \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega_2 t}$$

Beide Zeiger drehen sich in der komplexen Ebene, wobei ihre Drehzahl durch ihre jeweilige Kreisfrequenz bestimmt ist. Je nach gewähltem Zeitaugenblick t haben sie eine Stellung zueinander, die durch den zeitabhängigen Differenzwinkel $\varphi(t)$ (phase difference) bestimmt ist:

$$\varphi(t) = (\omega_1 t + \varphi_{01}) - (\omega_2 t + \varphi_{02}) = \Delta\omega \cdot t + \Delta\varphi_0$$

mit
$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$
$$\Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02}$$

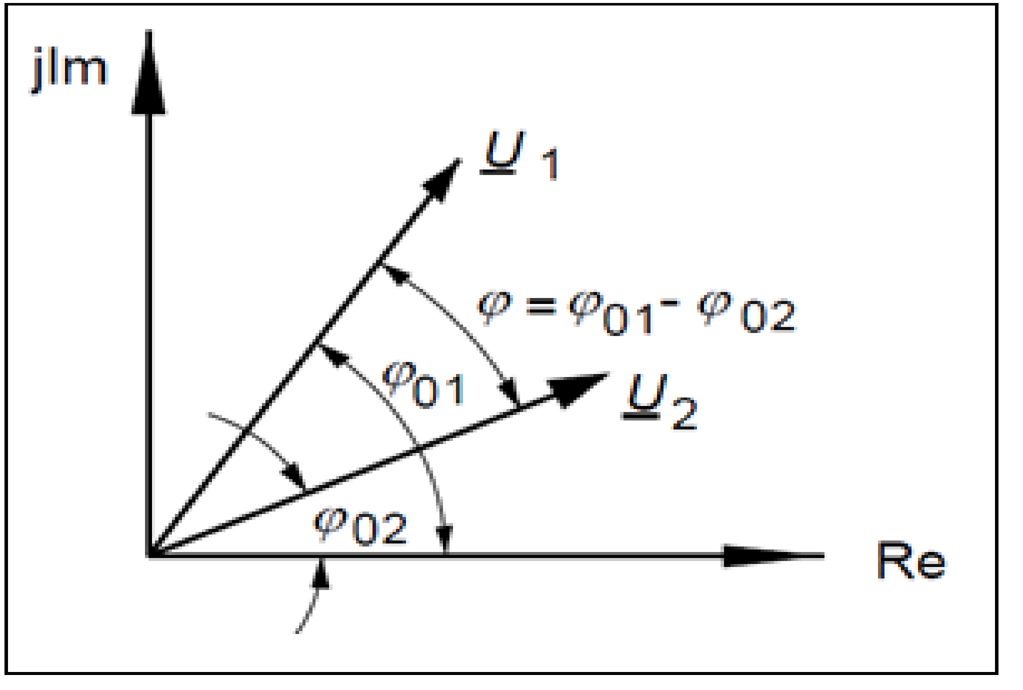


Bild 6: Zeigerdiagramm von $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ der Spannungen u_1 und u_2

Wird nun gefordert, dass die Frequenzen der beiden Schwingungen übereinstimmen, ergibt sich mit $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ das in Bild 6 dargestellte Zeigerdiagramm:

Da die Kreisfrequenzen beider Zeiger übereinstimmen, ist nun auch der Differenzwinkel $\varphi(t) = \Delta\varphi_0$ immer konstant und es ergeben sich die beiden ruhenden (Effektivwert-)Spannungszeiger zu:

$$\underline{U_1} = U_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi_{01}}$$

$$\underline{U_2} = U_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi_{02}}$$

Durch Multiplikation der komplexen, ruhenden Zeiger $\underline{U_1}$ und $\underline{U_2}$ mit $\sqrt{2} \cdot e^{j\cdot\omega t}$ erhält man dann wieder die komplexen, drehenden Zeiger $\underline{u}_1(t)$ und $\underline{u}_2(t)$, aus denen durch Realteilbildung wiederum die ursprünglichen Spannungsverläufe gewonnen werden können.

$$u_1(t) = \mathrm{Re}\left[\underline{u}_1(t)\right] = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{01})$$

$$u_2(t) = \mathrm{Re}\left[\underline{u}_2(t)\right] = \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{02})$$

Die Darstellung von sinusförmigen Wechselströmen und Wechselspannungen als ruhende Zeiger in einer komplexen Ebene setzt voraus, dass alle Ströme und Spannungen die gleiche Frequenz aufweisen.

1.5.4 Transformationsregeln

Im Folgenden werden sinusförmiger Vorgänge mit gleicher Frequenz vorausgesetzt. Die Übertragung sinusförmiger Vorgänge auf die komplexe Ebene und wieder zurück in den Zeitbereich stellt mathematisch eine Transformation zur Behandlung periodischer, sinusförmiger Vorgänge dar. Aus dem Originalbereich, dem Zeitbereich, wird der Vorgang in den Bildbereich, also in die komplexe Ebene (kürzer: ins Komplexe) transformiert. Von dort kann der Vorgang wieder in den Originalbereich zurück transformiert werden. Ausgehend von der sinusförmigen Spannung $u_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{01})$ folgt die Darstellung als komplexer Zeiger zu:

$$\underline{u}_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot(\omega t+\varphi_{01})} = \underline{U}_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\omega t} \quad \text{mit} \quad \underline{U}_1 = U_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi_{01}}$$

Da $\sqrt{2} \cdot e^{j\cdot\omega t}$ keinen zusätzlichen Informationsgehalt haben, wir aus der zeitabhängigen, sinusförmigen Spannung $u_1(t)$ durch Transformation der komplexe Zeiger $\underline{U}_1$:

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{01}) \quad ○\!\!-\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U}_1 = U_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi_{01}}$$

Für einen zweiten Spannungsverlauf gilt analog:

$$u_2(t) = \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{02}) \quad ○\!\!-\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U}_2 = U_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi_{02}}$$

Sollen zwei Sinusschwingungen gleicher Frequenz überlagert werden, so ergibt das eine neue Schwingung gleicher Frequenz. Da sich die Frequenz nicht ändert, kann die Überlagerung auch im Komplexen durchgeführt werden. Es gilt daher:

$$u = u_1 + u_2 = \hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{01}) + \hat{u}_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{02}) \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; \underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = U_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi_{01}} + U_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi_{02}}$$

mit $\underline{U}_1 = U_1 \cdot \cos(\varphi_{01}) + \mathrm{j} \cdot z \cdot \sin(\varphi_{01}) = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_1\right] + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}\left[\underline{U}_1\right]$

und $\underline{U}_2 = U_2 \cdot \cos(\varphi_{02}) + \mathrm{j} \cdot z \cdot \sin(\varphi_{02}) = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_2\right] + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}\left[\underline{U}_2\right]$

folgt: $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_1\right] + \mathrm{Re}\left[\underline{U}_2\right] + \mathrm{j} \cdot \left(\mathrm{Im}\left[\underline{U}_1\right] + \mathrm{Im}\left[\underline{U}_2\right]\right)$

Betrag und Phase der überlagerten Spannung ergeben sich damit zu:

$$\left|\underline{U}\right| = U = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\left[\underline{U}_1\right] + \mathrm{Re}\left[\underline{U}_2\right]\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\left[\underline{U}_1\right] + \mathrm{Im}\left[\underline{U}_2\right]\right)^2}$$

$$\arg\left(\underline{U}\right) = \varphi = \mathrm{atan2}\left(\frac{\mathrm{Im}\left[\underline{U}_1\right] + \mathrm{Im}\left[\underline{U}_2\right]}{\mathrm{Re}\left[\underline{U}_1\right] + \mathrm{Re}\left[\underline{U}_2\right]}\right)$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert den sinusförmigen Zeitverlauf der überlagerten Spannung:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j\cdot\varphi} \qquad u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Die Transformation $\underline{F} = T[f(t)]$ ins Komplexe ist eine lineare Transformation, denn sowohl
Homogenität $a \cdot \underline{F} = T[a \cdot f(t)]$
als auch Additivität $\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = T[f_1(t) + f_2(t)]$
sind gegeben. Da bei linearen Transformationen die linearen Operationen gegenüber der Transformation invariant sind, also erhalten bleiben, entspricht der Überlagerung zweier Sinus- bzw.

Kosinusschwingungen im Zeitbereich auch die Überlagerung ihrer komplexen Zeiger. Die Multiplikation ist jedoch eine nichtlineare Operation. Daher folgt

$$\underline{F}_1 \cdot \underline{F}_2 \neq T[f_1(t) \cdot f_2(t)]$$

Also gibt es zur Multiplikation zweier Sinus- bzw. Kosinusschwingungen im Zeitbereich keine entsprechende Operation im Komplexen. Dies verdeutlicht das Beispiel der sogenannten Augenblicksleistung $p(t)$, deren Zeitverlauf sich durch die Multiplikation von Spannungs- und Stromverlauf mit gleicher Frequenz im Zeitbereich ergibt:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0\mathrm{u}}) \cdot \hat{\imath} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0\mathrm{i}})$$

mit $\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$

und der vereinfachenden Annahme, dass $\varphi_{0\mathrm{u}} = \varphi_{0\mathrm{i}} = 0$ gelten soll, folgt dann:

$$p(t) = \hat{u} \cdot \hat{\imath} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega t)\right]$$

Dahingegen ergibt die Multiplikation der transformierten Größen im Komplexen folgendes:

$$\underline{U} \cdot \underline{I} = U \cdot I \cdot e^{j \cdot 0°} \cdot e^{j \cdot 0°} = U \cdot I = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{u} \cdot \hat{\imath}}{2}$$

Es ist ersichtlich, dass die Rücktransformation von $\underline{U} \cdot \underline{I} = U \cdot I \cdot e^{j \cdot (\varphi_{0\mathrm{u}} + \varphi_{0\mathrm{i}})}$ wieder eine sinusförmige Zeitfunktion mit der Kreisfrequenz ω ergeben würde, was aber nicht der Multiplikation der zuvor gezeigten Multiplikation von Spannungs- und Stromverlauf im Zeitbereich entspricht.
Wird ein sinus- bzw. kosinusförmiger Vorgang im Zeitbereich differenziert, ergibt sich wieder ein sinus- bzw. kosinusförmiger Vorgang derselben Frequenz mit einer um 90° voreilenden Phase:

$$\frac{\mathrm{d}[\sin(\omega t + \varphi)]}{\mathrm{d}t} = \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi + 90°)$$
$$\frac{\mathrm{d}[\cos(\omega t + \varphi)]}{\mathrm{d}t} = -\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi + 90°)$$

Übertragen auf die komplexe Ebene bedeutet das, dass die Zeiger von $\frac{\mathrm{d}[\sin(\omega t + \varphi)]}{\mathrm{d}t}$ bzw. $\frac{\mathrm{d}[\cos(\omega t + \varphi)]}{\mathrm{d}t}$ um jeweils 90°gegenüger den Zeigern von $\sin(\omega t + \varphi)$ bzw. $\cos(\omega t + \varphi)$ voreilend ist. Der ursprüngliche Betrag wird mit der Kreisfrequenz ω multipliziert. Somit gelten folgende Transformationsregeln:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U} = U \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j} \cdot \varphi}$$

$$\frac{\mathrm{d}[\hat{u}\cdot\cos(\omega t+\varphi)]}{\mathrm{d}t} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \omega\cdot\underline{U}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot 90°} = \mathrm{j}\cdot\omega\cdot\underline{U} = \omega\cdot U\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot(\varphi+90°)}$$

Wird ein kosinusförmiger Vorgang im Zeitbereich integriert, folgt als Ergebnis wieder ein kosinus-förmiger Vorgang derselben Frequenz, jedoch mit einer um 90° nacheilenden Phase:

$$\int \cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\cdot\sin(\omega t+\varphi) = \frac{1}{\omega}\cdot\cos(\omega t+\varphi-90°)$$

Übertragen auf die Transformation ins Komplexe folgt, dass der Zeiger von $\int \cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t$ um 90° gegenüber dem Zeiger von $\cos(\omega t+\varphi)$ nacheilend ist. Sein ursprünglicher Betrag wird durch die Kreisfrequenz ω dividiert. Somit gelten folgende Transformationsregeln:

$$u(t) = \hat{u}\cdot\cos(\omega t+\varphi) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U} = U\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi}$$

$$\int \hat{u}\cdot\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\omega}\cdot\underline{U}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot 90°} = \frac{1}{\mathrm{j}\cdot\omega}\cdot\underline{U} = \frac{1}{\omega}\cdot U\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot(\varphi-90°)}$$

Mit Hilfe der Transformation periodischer, kosinusförmiger Vorgänge in die komplexe Ebene lassen sich Addition und Subtraktion von kosinusförmigen Zeitvorgängen auf die Addition und Subtraktion ihrer komplexen Zeiger übertragen. Differentiation eines kosinusförmigen Zeitvorganges lässt sich im Komplexen durch Drehung des entsprechenden Zeigers um 90° voreilend und durch Multiplikation des ursprünglichen Zeigers mit der Kreisfrequenz ω nachbilden, während die Integration eines kosinusförmigen Zeitvorganges durch Drehung des komplexen Zeigers um 90° nacheilend und Division des ursprünglichen Zeigers durch die Kreisfrequenz ω nachgebildet wird.

$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U} = U \cdot e^{j \cdot \varphi}$
$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2}$
$\frac{\mathrm{d}[\hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)]}{\mathrm{d}t}$	$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$	$j \cdot \omega \cdot \underline{U} = \omega \cdot U \cdot e^{j \cdot (\varphi + 90°)}$
$\int \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$	$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \underline{U} = \frac{1}{\omega} \cdot U \cdot e^{j \cdot (\varphi - 90°)}$
Rücktransformation $\underline{U} = U \cdot e^{j \cdot \varphi}$	$\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$	$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

Tabelle 2: Transformationsregeln periodischer, kosinusförmiger Vorgänge

Die Transformationen periodischer, kosinusförmiger Vorgänge sind in Tabelle 2 zusammengefasst:

Mit Hilfe der Transformation von kosinusförmigen, periodischen Zeitverläufen aus dem Zeitbereich ins Komplexe (dem Bildbereich) ergibt sich zum einen der Vorteil, dass mit der komplexen Rechnung die mathematische Behandlung der kosinusförimgen Zeitfunktionen vereinfacht wird, und zum anderen eine bessere Veranschaulichung der Beziehungen unterschiedlicher Größen zueinander in der komplexen Ebene, dem sogenannten Zeigerdiagramm gegeben ist.

$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$○\!\!-\!\!\!-\!\!●$	$\underline{U} = U \cdot e^{j \cdot \varphi}$
$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$	$○\!\!-\!\!\!-\!\!●$	$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$
$\frac{\mathrm{d}[\hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)]}{\mathrm{d}t}$	$○\!\!-\!\!\!-\!\!●$	$j \cdot \omega \cdot \underline{U} = \omega \cdot U \cdot e^{j \cdot (\varphi + 90°)}$
$\int \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$	$○\!\!-\!\!\!-\!\!●$	$\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \underline{U} = \frac{1}{\omega} \cdot U \cdot e^{j \cdot (\varphi - 90°)}$
Rücktransformation $\underline{U} = U \cdot e^{j \cdot \varphi}$	$●\!\!-\!\!\!-\!\!○$	$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Tabelle 3: Transformationsregeln periodischer sinusförmiger Vorgänge

In gleicher Weise wie für kosinusförmige, periodische Zeitverläufe gezeigt kann die Transformation auch für sinusförmige, periodische Zeitverläufe angewendet werden. Die Transformationsregeln hierfür sind in Tabelle 3 zusammengefasst.
Liegen für die Beschreibung periodischer Zeitverläufe im Zeitbereich sowohl Sinus- als auch Kosinusfunktionen vor, müssen mit Hilfe von

$\sin(x + 90°) = \cos(x)$ bzw. $\cos(x - 90°) = \sin(x)$ (siehe Kapitel 1.1.2) zunächst alle Zeitverläufe über die Sinus- oder die Kosinusfunktion beschrieben werden. Dann kann entsprechend über die in Tabelle 2 (ausgehend von Kosinusfunktionen) bzw. Tabelle 3 (ausgehend von Sinusfunktionen) die Transformation ins Komplexe erfolgen und hier mit Hilfe der komplexen Rechnung und Darstellung gegebene Aufgabenstellungen gelöst werden. Bei der Rücktransformation in den Zeitbereich muss dann beim Ausgang von reinen Kosinusfunktionen im Zeitbereich über den Realteil des komplexen Zeigers rücktransformiert werden, beim Ausgang von reinen Sinusfunktionen entsprechend über den Imaginärteil des komplexen Zeigers:

$$\mathrm{Re}\left[\underline{u}\right] = u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{bzw.}\ \mathrm{Im}\left[\underline{u}\right] = u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$