Formelsammlung Numerik

Allgemein

Normen:

Vektoren		Matrizen	
1-Norm, Summennorm:	$\boxed{\lVert x\rVert_1=\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert}$	1-Norm, Spaltensummennorm:	$\boxed{\lVert A\rVert_1=\max_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{n}\lvert a_{ij}\rvert}$
2-Norm, euklidische Norm:	$\boxed{\lVert x\rVert_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}$	2-Norm, euklidische Norm:	$\boxed{\lVert A\rVert_2=\sqrt{p\,(A^T\cdot A)}}$
$\infty-$*Norm, Maximumnorm (für Abschätzung)*	$\boxed{\lVert x\rVert_\infty=\max_{j=1,\dots,n}\lvert x_i\rvert}$	$\infty-$*Norm, Zeilensummennorm: (für Abschätzung)*	$\boxed{\lVert A\rVert_\infty=\max_{i=1,\dots,n}\sum_{j=1}^{n}\lvert a_{ij}\rvert}$

$$cond(A)=||A||*||A^{-1}||$$

$$\frac{||\Delta x||}{||x||}\le cond(A)*\frac{||\Delta b||}{||b||}$$

z.B 10^-2

$$\frac{||\Delta x||}{||x||}\le\frac{cond\,(A)}{1-cond\,(A)*\frac{||\Delta A||}{||A||}}*\underbrace{\left(\frac{||\Delta A||}{||A||}+\frac{||\Delta b||}{||b||}\right)}_{2M}\le 10^{-2}$$

$$M=\max\left\{\frac{||\Delta A||}{||A||},\frac{||\Delta b||}{||b||}\right\}$$

Gleitpunktzahlen

IEEE Abstand von Maschinenzahlen b^{E+1-p} E=Exponent aufgabe Umwandelung Nachkomma stellen: z.B. 0,4 ➔

Format	P	E_{min}	E_{max}	Bits total	Mantisse m	Exponent r	Biaswert B
Single	24	-126	127	32	23	8	127
Double	53	-1022	1023	64	52	11	1023
Extended	64	-1682	1683	80	64	15	16383

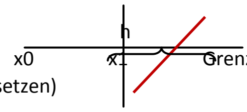
0,4*2=0,8 :0
0,8*2=0,6 :1
0,6*2=0,2 :1
0,2*2=0,4 :0

IEEE auf 1.000 verschieben➔ Anzahl der Verschiebung= Exponent r=Anzahl+Emax digital darstellen

Kondition $\kappa(f,x)=|\frac{f'(x)}{f(x)}*x|<1 => stabil$

Bisektionsverfahren:

- Intervall (x0 x1) bzw.(h) halbieren
- Rechte bzw. Linke Seite verschieben
- Prüfen auf Vorzeichen wechsel (Intervallgrenzen einsetzen)
- Fehler er=0,5^k ➔ $k=\frac{\log er}{\log 0{,}5}=\log_2 er$



Mit TR Nst. Suchen
Grenzen einsetzen

Nichtlineare Gleichungen

Fixpunkt Iteration: $\Phi(x)=x$ $|\Phi(x)|'_{max}=M<1$ Iterationsvorschrift: $x_{k+1}=\Phi(x_k)$

f(x) nach x auflösen Z.B. $x=\sqrt[3]{\frac{2x^2}{3}}$

a-priori-Fehlerabschätzung (nach k Schritten)

$$\boxed{\epsilon\le\frac{M^k}{1-M}\cdot|x_1-x_0|}\quad\boxed{k\ge\frac{1}{\ln M}\cdot\ln\left((1-M)\cdot\frac{\epsilon}{|x_1-x_0|}\right)}$$

ϵ=*Fehler*
k=Anzahl notwendiger Schritte für ϵ *(k Aufrunden)*

a-posteriori-Fehlerabschätzung(Vorabschätzung)

$$\boxed{\epsilon\le\frac{M}{1-M}\cdot|x_k-x_{k-1}|}$$

zur Berechnung von k : Maximale Anzahl an benötigten Schritten mit $M=|\phi'(x_k)|_{max}$ *; Wahrscheinliche Anzahl an Schritten mit* $M=|\phi'(x_k)|$ *für* x_k*=Startwert*

$$\boxed{c\ge\frac{|x_{k+1}-\xi|}{|x_k-\xi|^q}}$$

q: Konvergenzordnung
q=1: lineare Konvergenz
q=2: quadratische Konvergenz

für lineare Konvergenz gilt: $\left|\frac{d_{k+1}}{d_k}\right|=\frac{|x_{k+2}-x_{k+1}|}{|x_{k+1}-x_k|}\approx const=M_\xi\approx|\phi'(\xi)|$

M_ξ=*Konvergenz-faktor*

Differenzen $=d_{k+1}=x_{k+1}-x_k$ *Konvergenzfaktoren=Quotienten der Differenzen*

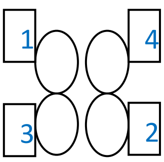
falls Konvergenzfaktoren const. $\to$ *lineare Konvergenz*
falls Konvergenzfaktoren nicht const. $\to$ *steiler*

Newton $\Phi(x)=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Nichtlineare GLS (Newton Verfahren für Systeme):

1. Jacobi Matrix: $A=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}$ 2. Konvergenzkriterium: Det(J)≠0 3. Newton Rapson Schritt: $x_{(k+1)}=x_k-J^{-1}*f(x_k)$ (Vektoren!!)

Det(J)=1*2-3*4



Lösung Linearer GLS

Cholesky Verfahren(positiv definit):

n x n Matrix A symmetrisch

Für i=1…n berechne: Betragsgrößte Zeile nach oben Schreiben (tauschen)

S:= $aii - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2$ (für i=1➔s=a11)

Falls s=0 ➔A nicht positive definit ➔ stop

Falls s>0 $r_{ii} = \sqrt{s}$

$für\ j = i+1, \ldots, n \quad rij = \frac{1}{rii}(aij - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj})$

LGS lösen:

A = S * S^T S^T *y = b S*x = y (wie bei LR-Zerlegung)

LR Zerlegung mit Pivot:

Gaus Elimination machen und die Faktoren merken

L=Einheitsmatrix +Faktoren R= Rest

A*x=b A=L*R L*R*x=b L*y=b R*x=y

y muss mit vertauscht werden wie pivot; x aber nicht!!

Iterative Verfahren:(nach Jacobi und Gauß-Seidel)

Konvergenzkriterium: (nur hinreichend)

$Zeilensummenkrit.: \sum_{\substack{j=1\ldots n \\ j\neq i}} |a_{ij}| < |a_{ii}|$

$Spaltensummenkrit.: \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ i\neq j}} |a_{ij}| < |a_{jj}|$

Summe<1➔konvergent

Falls Zeilensummenkriterium nicht erfüllt → weitere Betrachtung: 1. durch Vertauschung der Gleichungen (Zeilen + rechte Seite) oder 2. Matrix A + rechte Seite b mit der Transponierten A^T multiplizieren $A' = A^T \cdot A$; $b' = A^T \cdot b \rightarrow$ *neues Gleichungssystem* $A' \cdot x = b'$

$Gesamtschrittverfahren\ nach\ Jacobi: x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{k=1\ldots n \\ k\neq i}} \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \cdot x_k^{(k)}$

$Einzelschrittverfahren\ nach\ Gauß-Seidel: x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{k=1\ldots n \\ k\neq i}} \frac{a_{ik}}{a_{ii}} x_k$

---

2. Weg:
Gesamtschrittverfahren Jacobi: $A \cdot x = b$
Dann heißt die Fixpunktiteration
$Dx^{(n+1)} = -(L+R)x^{(n)} + b$
d.h. $x^{(n+1)} = -D^{-1}(L+R)x^{(n)} + D^{-1}b$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{=L} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=R}$$

2. Weg:
Einzelschrittverfahren Gauß-Seidel: $A \cdot x = b$
Dann heißt die Fixpunktiteration:
$(D+L)x^{(n+1)} = -Rx^{(n)} + b$
d.h. $x^{(n+1)} = -(D+L)^{-1}Rx^{(n)} + (D+L)^{-1}b$

Iterationsmatrix: M=I-D^{-1}*A I=Einheitsmatrix

M=$(D-L)^{-1}$*R

Interpolation

Monom Basis: Vandermond Ansatz $\begin{pmatrix} 1 & x1 & x1^2 \\ 1 & x2 & x2^2 \\ 1 & x3 & x3^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c0 \\ c1 \\ c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix}$ Anzahl der Werte= Grad der Fkt. Zeilenanzahl der Matrix. Werte einsetzen GLS lösen.

$p^*(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \ldots$

Lagrange: $L_i(x) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-xj)}{(xi-xj)}$ ein Term wird immer weggelassen $p*(x) = \sum_{i=0}^{n} yi * Li(x)$

Kubische Splines: $h_i = x_{i+1} - x_i$ z.B. (0;1) (2;2) (3;4) !!Natürliche Splines $M_0 = M_n = 0$!!

$g0: \frac{h_0}{3}M_0 + \frac{h_0}{6}M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - s(x_0)$

$g1: \frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$

$gn: \frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3}M_n = s(x_0) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$

$c_0 = y_i$

$c_1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6} h_i$

$c_2 = \frac{1}{2} M_i$

$s_i(x) = c_0 + c_1(x - x_i) + c_2(x - x_i)^2 + c_3(x - x_i)^3$

Newton Interpolation: $P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$

i

$x_i \quad f_i \quad f(x_i, x_{i+1}) \quad f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$

k

$x_0 \quad \overset{c_0}{f(x_0)}$

$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \overset{c_1}{f(x_0, x_1)}$

$x_1 \quad f(x_1)$

$\frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \overset{c_2}{f(x_0, x_1, x_2)}$

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(x_1, x_2)$

$\frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0} = \overset{c_3}{f(x_0, x_1, x_2, x_3)}$

$x_2 \quad f(x_2)$

$\frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = f(x_1, x_2, x_3)$

$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f(x_2, x_3)$

$x_3 \quad f(x_3)$

Interpolationsfehler e_{max}:

konstante Interpolation: $e_{max} = 1/2 \cdot h \cdot |f'_{max}|$

lineare Interpolation: $e_{max} = 1/8 \cdot h^2 \cdot |f^{(2)}_{max}|$

hierzu $|f^{(k)}_{max}|$ *abschätzen*

quadratische Interpolation: $e_{max} = \sqrt{3}/27 \cdot h^3 \cdot |f^{(3)}_{max}|$

kubische Interpolation (für mittleres Intervall) $= 3/128 \cdot h^4 \cdot |f^{(4)}_{max}| \Leftrightarrow 1/24 \cdot h^4 \cdot |f^{(4)}_{max}|$ *(für äußere Intervalle)*

Hermite

x0	y0
x0	y0
x0	y0
x1	y1
x1	y1

⇨ Dreieckschema ähnlich wie Newton. Bei Gleichen x Werten $\frac{f^{l}(x)}{l!}$ l=Ableitung

⇨ Bei unterschiedlichen ganz normal die Differenzen Formel $\frac{f(x1)-f(x0)}{x1-x0}$

Neville-Aitken liefert nicht Interpolationspolynom, sondern nur einen oder mehrere Funktionswerte. Aufwand n(n+1)

$P_{i0}(x)=f(x_i)$ dann k=1,…n i=0, … n-k $P_{ik}(x) = P_{i+1,k-1}(x) + \frac{x_{i+k}-x}{x_{i+k}-x_i}(P_{i,k-1}(x) - P_{i+1,k-1}(x))$

$Y_0=p_{00}(x)$			
	$p_{01}(x)$		
$Y_1=p_{10}(x)$		$p_{02}(x)$	
	$p_{11}(x)$		$p_{03}(x)$
$Y_2=p_{20}(x)$		$p_{12}(x)$	
	$p_{21}(x)$		
$Y_3=p_{30}(x)$			

Fehler: $f(x_0) - \dot{p}(x_0) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} * (x - x_0) * (x - x_1) * \ldots$ n=nicht die Anzahl der stützstellen! n=[0,1,2]=2

Formelherleitung/ Interpolationsfehler allgemein: 1. Allgemeinen Ansatz über Formel 2. |w(x)| x definieren mit h 3. Ausmultiplizieren➔ Maximum finden 4. Auf Intervall prüfen 5. In Formel einsetzen

Approximation (Ausgleichsrechnung)

Linear bei Polynomen 1. Vandermond 2. A^T*A 3. A^T*b 4. $A^T*A*\lambda= A^T*b$ (Normalengleichung)

QR Zerlegung: A*x=b A=Q*R $Q^T*Q=I$ v1=a:1 +sign(a11) $||a:1||_2$ e1

$Qv = I - 2\frac{v*v^T}{v^T*v}$ $Qv_1 = Qv * a:1$ $Qv_2 = Qv * a:2$ $usw.$

Nichtlinear
1.F(x1,x2)= b – A =>für b y Werte und t oder x Werte in A einsetzen z.B.f(x)= $x1*e^{-t*x2}$ mit $x_0=(1,0)^T$
2. x_0 einsetzen 3. Jacobi Matrix also linke Spalte nach x1 und rechte nach x2 Ableiten.
4.min|| $F(x_0)$ + J*s|| x_0 in Jakobi einsetzen

5. Normalengleichung $J^T*J*s= J^T*F(x_0)$ => Auflösen 6. s= $x_1 – x_0$

Differentiation

Fehleranalyse: Bestimmung der optimalen Schrittweite h. Bei kleinerer Schrittweite spielt der Rundungsfehler eine größere Rolle.

Zentrale 1. Ordnung $y'_k = \frac{f(x_k+h)-f(x_k-h)}{2h}$ $f(x_k+h) = y_{k+1} + e_1$ $f(x_k-h) = y_{k+1} + e_{-1}$ $|E| \cong \frac{e}{h} + \frac{|f```\xi|h^2}{6}$ ➔ $|E|' = \frac{e}{h^2} + \frac{|f```\xi|h}{3}$ $h = \sqrt[3]{\frac{3e}{|f```\xi|}}$

2. Ordnung $y'_k = \frac{f(x_k+h)-f(x_k)+f(x_k-h)}{h^2}$

Vorwärtsdifferenz: $y'_V = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

e= Fehlergenauigkeit der Maschine

Integration

Exaktheitsgrad: für f(x) 1; x; x^2; x^3 usw. nacheinander einsetzen und prüfen ob noch mit exakter Lösung übereinstimmt.

Skizze machen hilft!

Summierte Trapez-Regel: $T(h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh)$ $\boxed{E_{Tn}=-(b-a)\cdot\frac{1}{12}\cdot h^2\cdot f''(\xi)}$ $\boxed{E_T=\frac{-1}{12}\cdot h^3\cdot f''(\xi)}$

$\boxed{E_{Sn}=-(b-a)\cdot\frac{1}{180}\cdot h^4\cdot f^{(4)}(\xi)}$ $\boxed{E_S=\frac{-1}{90}\cdot h^5\cdot f^{(4)}(\xi)}$

Summierte Simpson-Regel: $S(h) = \frac{h}{3}(f(a) + f(b) + 4\sum_{j=0}^{n-1} f(a + (2j+1)h) + \sum_{j=1}^{n-1} f(a + (2j)h)$

Rekursionsgleichung: $q_{n+1}(x) = \frac{(b_n + c_n * x) * q_n(x) - d_n * q_{n-1}(x)}{a_n}$

Name	q_0	q_1	a_n	b_n	c_n	d_n
Legendre	1	x	n+1	0	2n+1	n

n	+-x_i	α_i^n
2	1	1.000000
3	0.00000 $\sqrt{3/5}$	8/9 5/9

Umwandlung beliebiger Integrationsintervalle auf [-1, 1] $\qquad g(t) = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2} \qquad g'(t) = \frac{b-a}{2}$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

<u>Legendre:</u> Umwandlung siehe oben➔Tabelle

<u>Laguere:</u> Aufgaben Bsp. $\int_{-\infty}^{2} e^{-t^2}\, dt$ durch substitution x= -t + 2 überführe man das integral in die Form $\int_0^\infty g(x)\, e^{-x}\, dt$

x=-t+2 ➔ t=2-x ➔dt/dx = -1 ➔ dt= - x $\qquad \int_{-\infty}^{2} e^{-t^2} - dx = -\int_{\infty}^{0} e^{-(2-x)^2} dx = -\int_0^\infty e^{-(2-x)^2} * e^x * e^{-x} dx$ ➔ g(x)

<u>Romber Richardsen Extrapolation Integrieren und Differenzieren:</u>

Fehler: n*h=b-a $\qquad$ für alle Regeln!! $\qquad$ U= Unterer WertO=Oberer Wert

h	Formel			
		$\frac{1}{3}$(4U-O)		
h/2	des		$\frac{1}{15}$(16U-O)	
		$\frac{1}{3}$(4U-O)		$\frac{1}{63}$(64U-O)
h/4	Schemas		$\frac{1}{15}$(16U-O)	
		$\frac{1}{3}$(4U-O)		
h/6	„			

DGL

Umformen auf 1. Ordnung $\qquad$ Bsp. $\qquad$ Kugel der Masse m = 1 kg an der Stelle (0;1) zur Zeit t=0 mit der Geschwindigkeit v=(1;0) von einer Platte gestoßen. g=9,81

X"(t)=0 $\quad$ x(0)=0 $\quad$ x'(0)=1

Y"(t)=-g $\quad$ y(0)=1 $\quad$ y'(0)=1

Lösung: $\quad$ y1=x $\quad$ y2=x' $\quad$ Y3=y $\quad$ y4=y'

Anfangs Bed.

$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y2 \\ 0 \\ y4 \\ -g \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y1(0) \\ y2(0) \\ y3(0) \\ y4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

X Richtung

Y Richtung