

Hochschule München    Fakultät 04    Redaktion: Kahl / Paster / Rauh / Erven    Stand WS 2010/11

**Praktikum Numerische Mathematik    Versuch 1: "Nichtlineare Gleichungen"**

**Bearbeiter: Dennis Kunz**

**Datum: 02.05.2012**

## 1 Eine nichtlineare Gleichung mit einer Unbekannten

### 1.1 Fixpunkt-Iteration (allgemein)

Von Ihrem Dozenten erhalten Sie den Term einer nichtlinearen Funktion  $f = f(x)$ , eine Fehlerschranke  $\epsilon_{ps}$  für die Bestimmung einer Nullstelle  $\xi$  von  $f$  und einen Definitionsbereich  $D$  ohne weitere Nullstellen.

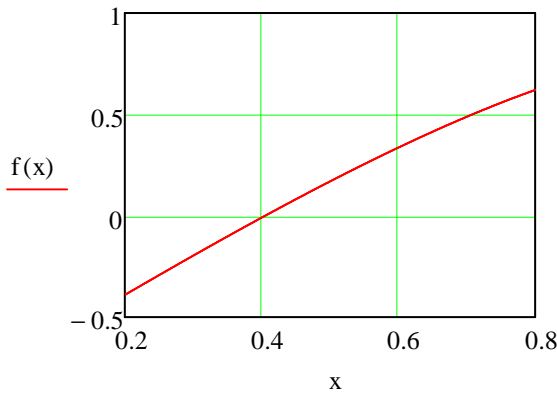
$$f(x) := a \sin(x) + x \cdot \sqrt{1 - x^2} - \frac{\pi}{4}$$

nach Angabe Ihres Dozenten (1)

Definitionsbereich  $[a, b]$ :

$$a := 0.2 \quad b := 0.8 \quad \epsilon_{ps} := 10^{-8}$$

Entnehmen Sie dem folgenden Quickplot von  $f(x)$  über  $D$  einen Näherungswert für  $\xi$ .



Die Nullstelle liegt in der Nähe von

$$x_0 := 0.4$$

Die Gleichung  $f(x) = 0$  lässt sich auf verschiedene Weise äquivalent umformen zu  $x = \phi(x)$ .

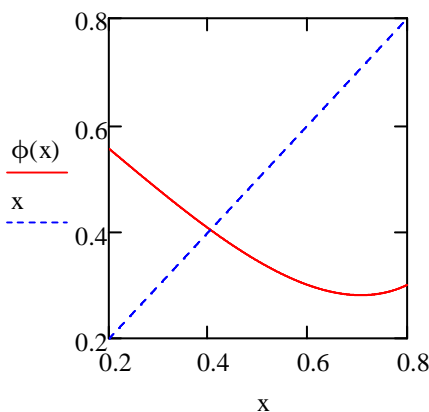
**Überlegung** auf extra Blatt: Geben Sie einige solche Umformungen an.

Verwenden Sie nun die vom Dozenten gegebene Iterationsfunktion  $\phi$ :

$$\phi(x) := \sin\left(-x \cdot \sqrt{1 - x^2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

nach Angabe Ihres Dozenten (2)

Die folgende Darstellung dieser Funktion zusammen mit der Geraden  $y = x$  gibt Ihnen einen anschaulichen Überblick über das zu erwartende Konvergenzverhalten einer Fixpunkt-Iteration.

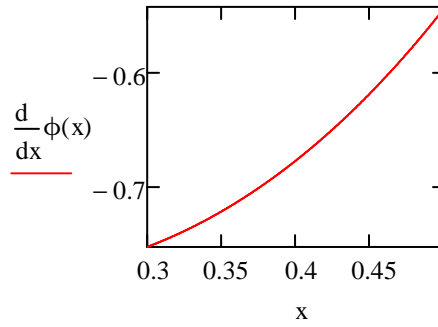


Warum ist nebenstehende Darstellung (mit der Geraden  $y = x$ ) sinnvoll?

1. qualitativer Vergleich der Steigung  $|f'(x)| < 1$
2. Abschätzen der Nullstelle

Warum kann die Nullstelle durch Fixpunktiteration mit  $\phi$  ausgehend vom Startwert  $x_0$  berechnet werden?

In dieser Graphik wird die Ableitung  $\psi$  von  $\phi$  auf  $D1 := [x_0 - 0.1, x_0 + 0.1]$  dargestellt. Warum ist diese Einschränkung des Definitionsbereichs sinnvoll?  
Weil dieses Intervall die Bedingung erfüllt



Entnehmen Sie daraus eine obere Schranke  $m$  von  $|\psi|$  auf  $D1$ :

$m := 0.78$

Erster Iterationsschritt zur Gewinnung eines verbesserten Wertes  $x_1$ :

$x_1 := \phi(x_0)$

Mit den Größen  $m$ ,  $x_0$  und  $x_1$  können Sie eine "a-priori-Abschätzung" für die maximale Abweichung des Näherungswertes vom tatsächlichen Wert der Nullstelle nach einer Anzahl von  $k$  Schritten machen. In Ihrer Vorbereitung haben Sie die entsprechende Formel nach  $k$  aufgelöst. Berechnen Sie nun mit Mathcad die maximal notwendige Zahl  $k_{max}$  von Schritten, um einen Fehler  $< \epsilon$  zu erreichen.

$k_{max} := \text{ceil} \left[ \ln \left[ (1 - m) \cdot \frac{\epsilon}{x_1 - x_0} \right] \cdot \frac{1}{\ln(m)} \right]$      $k_{max} = 61$     ganzzahlig!

Zur Durchführung der Fixpunkt-Iterationen mit Iterationsfunktion  $fkt$  und Startwert  $x_{start}$  bis zum Erreichen der vorgeschriebenen Toleranz  $\epsilon$  dient folgende Prozedur:

```

fixiter(fkt, m, xstart, eps, kmax) :=
  dxmax ← (1 - m) · eps / m
  it ← 0
  dx ← 2 · dxmax
  z2 ← xstart
  while (dx > dxmax) ∧ (it < kmax)
    it ← it + 1
    z_{it+2} ← fkt(z_{it+1})
    dx ← |z_{it+2} - z_{it+1}|
  z0 ← z_{it+2}
  z1 ← it
  return z
  
```

Ausgabevektor  $z$ :  
 $z_0$  = Näherung  $x_k$   
 $z_1$  = Iterationsanzahl  $k$   
 $z_2, z_3 \dots$  = Iterierte  $x_0, \dots x_k$

$erg := \text{fixiter}(\phi, m, x_0, \epsilon, k_{max})$      $erg_0 = 0.404$      $k := erg_1$      $k = 39$      $k_{max} = 61$

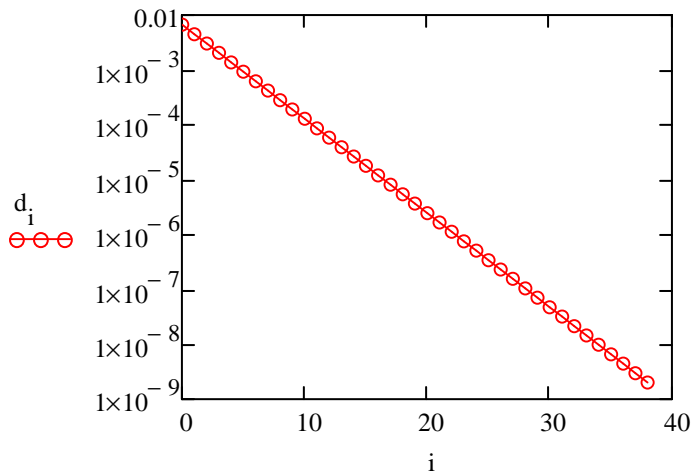
Vergleichen Sie die Zahl der tatsächlich gemachten Schritte mit Ihrer a-priori-Abschätzung.

Da die a-posteriori-Abschätzung schärfer ist ist  $k < k_{max}$ , also deutlich weniger

Berechnung der Differenzen:     $i := 0..k - 1$      $d_i := |erg_{i+3} - erg_{i+2}|$

In Ihrer Vorbereitung haben Sie sich klar gemacht, nach welcher Gesetzmäßigkeit die Differenzen abnehmen. Wir wählen für die Folge der Differenzen eine halblogarithmische Darstellung (warum?):

Die Geometrische Folge bilde annähernd eine Gerade



Als **Konvergenzfaktor**  $k_f$  der Iteration berechnen wir den Quotienten der beiden letzten Differenzen. Sein Zahlenwert ist auch eine gute Näherung für  $|\psi|$  in der Nähe der Lösung.

$$k_f := \frac{d_{k-1}}{d_{k-2}} \quad k_f = 0.674 \quad \psi(x) := \frac{d}{dx} \phi(x) \quad |\psi(\text{erg}_0)| = 0.674$$

Mit diesem Wert können wir jetzt eine a-posteriori-Abschätzung zum Fehler **err** unseres letzten iterierten Wertes **xk** machen. Die Formel dazu haben Sie **vorbereitet**.

$$\text{err} := \frac{m}{1-m} \cdot (\text{erg}_{k+2} - \text{erg}_{k+1}) \quad \text{err} = 7.125 \times 10^{-9}$$

Wird unsere Toleranz **eps** eingehalten?

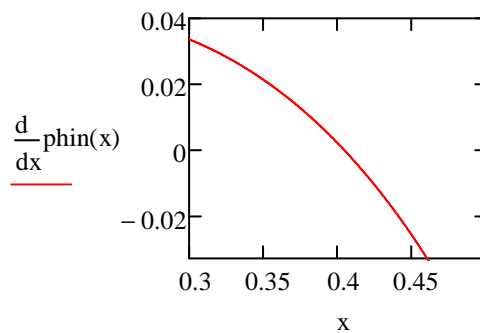
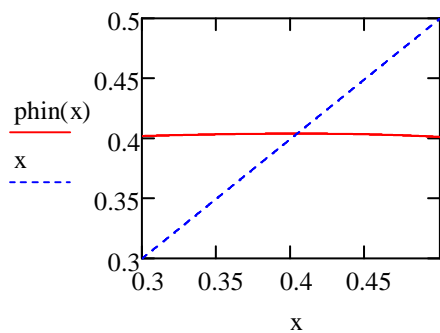
Ja,  $\text{err} \ll 10^{-8}$ , also sehr gut!

### 1.2 Newton-Iteration

Eine besonders effiziente Variante der Fixpunkt-Iteration ist das Newton-Verfahren. Es benötigt allerdings die Ableitung der Funktion **f(x)**. Wie lautet die Formel für die Ableitung in unserem Beispiel (**Handrechnung!**)?

$$df(x) := 2 \cdot \sqrt{1-x^2} \quad \text{Die Iterationsfunktion lautet:} \quad \text{phin}(x) := x - \frac{f(x)}{df(x)}$$

Machen Sie nun eine Untersuchung der Newton-Iteration wie oben bei der Fixpunkt-Iteration, indem Sie **phin(x)** zusammen mit der Geraden **y = x** und **phin'(x)** jeweils in einem Diagramm über **D1** betrachten.



Führen Sie mit der Prozedur **fixiter** und der Iterationsfunktion **phin** die Newton-Iteration durch.

$\text{erg} := 0$  rücksetzen, da Vektor kürzer wird; altes **kmax** sollte genügen; neues **m** eventuell nützlich!

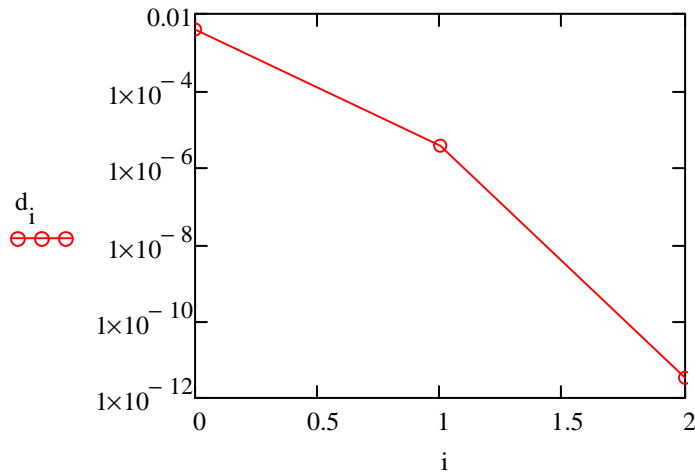
$$\text{erg} := \text{fixiter}(\text{phin}, 0.03361, x_0, \text{eps}, \text{kmax}) \quad \text{erg}_0 = 0.40397275$$

$$k := \text{erg}_1 \quad k = 3$$

Die Differenzen der Näherungswerte sind:

$$d := 0 \quad \text{rücksetzen} \quad i := 0..k-1 \quad d_i := |\text{erg}_{i+3} - \text{erg}_{i+2}|$$

Darstellung halblogarithmisch:



Wie heißt diese Art der Konvergenz?  
 quadratische Konvergenz  
 kein konstanter Quotient

## 2 Nichtlineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten

Wir betrachten folgende zwei Funktionen auf dem Definitionsbereich  $D$ :

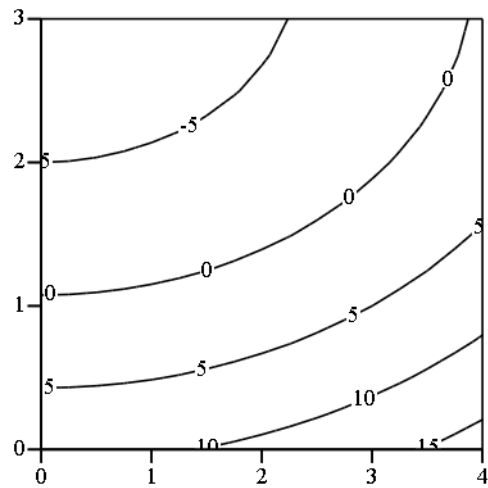
$$f(x, y) := 0.5x^2 + 1.5y^2 - 10y + 9 \quad g(x, y) := x^2 \cdot y - 12x + 2y + 8 \quad \text{nach Angabe Ihres Dozenten (3)}$$

zu untersuchen im Bereich  $D$ :

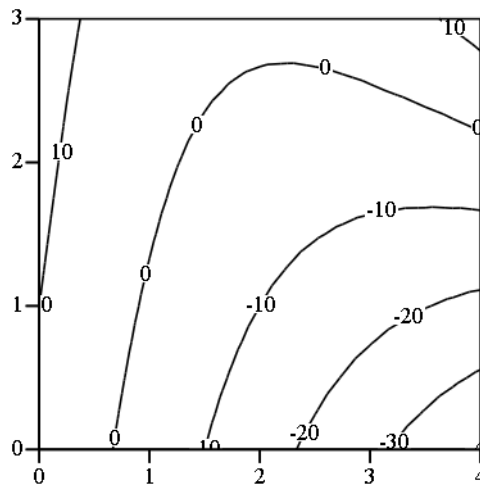
Gesucht sind die Lösungen des Gleichungssystems  $f(x,y)=0$  &  $g(x,y)=0$ .

Inwiefern kann die unten stehende Höhenlinien-Darstellung von  $f$  und  $g$  auf  $D$  bei einer groben Nullstellenbestimmung hilfreich sein?

Durch Schnittpunkt der beiden Höhenlinien vom Wert 0 kann man das GS lösen.



f



g

Schätzen Sie grob die beiden Nullstellen  $(x_1s, y_1s)$  und  $(x_2s, y_2s)$  des Systems:

$$\begin{pmatrix} x_1s \\ y_1s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2s \\ y_2s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3.6 \\ 2.3 \end{pmatrix}$$

Die Funktionswerte an diesen Punkten sind:

$$\begin{pmatrix} f_1s \\ g_1s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(x_1s, y_1s) \\ g(x_1s, y_1s) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_1s \\ g_1s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.291 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_2s \\ g_2s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(x_2s, y_2s) \\ g(x_2s, y_2s) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_2s \\ g_2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.415 \\ -0.792 \end{pmatrix}$$

Bei dem Newton-Raphson-Verfahren tritt an die Stelle der skalaren Funktion  $f(x)$  die Jacobi-Matrix der vektorwertigen Funktion  $(f, g)$ . Berechnen Sie diese Matrix als Funktion von  $x$  und  $y$  per Hand und schreiben Sie die Terme in folgende Funktion:

$$\text{Jacobi}(x, y) := \begin{pmatrix} x & 3y - 10 \\ 2 \cdot x \cdot y - 12 & x^2 + 2 \end{pmatrix}$$

Wir beginnen die Iteration im Startpunkt

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{2s} \\ y_{2s} \end{pmatrix}$$

nach Angabe Ihres Dozenten (4)

Die Zahlenwerte der Jacobi-Matrix, ihrer Determinante und ihrer Inversen im Startpunkt sind

$$J_f := \text{Jacobi}(x_s, y_s) \quad J_f = \begin{pmatrix} 3.6 & -3.1 \\ 4.56 & 14.96 \end{pmatrix} \quad |J_f| = 67.992 \quad J_{\text{inv}} := J_f^{-1} \quad J_{\text{inv}} = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.046 \\ -0.067 & 0.053 \end{pmatrix}$$

Die Funktionswerte im Startpunkt sind

$$\begin{pmatrix} f_s \\ g_s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(x_s, y_s) \\ g(x_s, y_s) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_s \\ g_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.415 \\ -0.792 \end{pmatrix}$$

Jetzt kommt der Newton-Raphson-Schritt zur Gewinnung eines (hoffentlich!) verbesserten Lösungsvektors:

$$\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} - J_{\text{inv}} \cdot \begin{pmatrix} f_s \\ g_s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.545 \\ 2.370 \end{pmatrix}$$

Die verbesserten Funktionswerte sind:

$$\begin{pmatrix} f_v \\ g_v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(x_v, y_v) \\ g(x_v, y_v) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_v \\ g_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.825 \times 10^{-3} \\ -0.021 \end{pmatrix}$$

Um welchen Faktor (bezogen auf die Maximums-Norm des Vektors der Funktionswerte) konnte die Abweichung von der exakten Lösung verbessert werden? wegen Maximums norm der g-Wert weil größer

$$\text{Faktor} := \left| \frac{g_s}{g_v} \right| \quad \text{Faktor} = 38.6$$

Wir machen jetzt einen zweiten Newton-Raphson-Schritt. Beachten Sie, dass dazu die Jacobi-Matrix neu berechnet werden muss. Der eben berechnete verbesserte Lösungsvektor dient als Startvektor:

$$\begin{pmatrix} x_{s2} \\ y_{s2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{s2} \\ g_{s2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_v \\ g_v \end{pmatrix}$$

$$J_f := \text{Jacobi}(x_{s2}, y_{s2}) \quad J_f = \begin{pmatrix} 3.545 & -2.891 \\ 4.801 & 14.566 \end{pmatrix} \quad |J_f| = 65.51 \quad J_{\text{inv}} := J_f^{-1} \quad J_{\text{inv}} = \begin{pmatrix} 0.222 & 0.044 \\ -0.073 & 0.054 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{v2} \\ y_{v2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{s2} \\ y_{s2} \end{pmatrix} - J_{\text{inv}} \cdot \begin{pmatrix} f_{s2} \\ g_{s2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{v2} \\ y_{v2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.544 \\ 2.372 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{v2} \\ g_{v2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(x_{v2}, y_{v2}) \\ g(x_{v2}, y_{v2}) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{v2} \\ g_{v2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.186 \times 10^{-6} \\ -1.051 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Um welchen Faktor (wieder bezogen auf die Max-Norm des Vektors der Funktionswerte) konnte im zweiten Schritt die Abweichung von der exakten Lösung verbessert werden?

$$\text{Faktor} := \left| \frac{g_{s2}}{g_{v2}} \right| \quad \text{Faktor} = 2 \times 10^3$$

Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Verbesserungsfaktor aus dem ersten Schritt. Welches Konvergenzverhalten liegt hier wohl vor?

deutlich überlineare Konvergenz bezogen auf die Funktionswerte

### 3 Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme

Sie kennen aus der Vorlesung iterative Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme ( $A \cdot x = b$ ).

Zu Demonstrationszwecken berechnen wir die Lösung des linearen Gleichungssystems für den zweiten Newton-Schritt mit dem Gauß-Seidel-Verfahren. Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} fs \\ gs \end{pmatrix} + \text{joule} \cdot \left[ \begin{pmatrix} xv \\ yv \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xs \\ ys \end{pmatrix} \right] = 0$$

Zur Ausführung eines Gauß-Seidel-Iterationsschritts verwenden wir die vorgegebene Prozedur `seidel`. Durch einen Aufruf `x_neu := seidel(A,b,x)` erhält man aus einer Näherungslösung `x` eine - evtl. verbesserte - Näherungslösung `x_neu`.

```
seidel(amp, b, x) :=
  n ← length(b)
  for i ∈ 0..n-1
    xi ← [ bi - ∑_{k=0}^{n-1} (amp_{i,k} · x_k) + amp_{i,i} · xi ] ÷ amp_{i,i}
  return x
```

Mit Hilfe der Bereichsvariablen von Mathcad kann man eine Folge von iterierten Vektoren als Spalten einer Matrix `X` speichern. Die erste Spalte `X<0>` besetzen wir mit dem Nullvektor als Startwert.

$$X^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{amp} := \text{Jf } b := \begin{pmatrix} -fs \\ -gs \end{pmatrix} \quad n := 10 \quad \text{it} := 0..n-1 \quad X^{(it+1)} := \text{seidel}(\text{amp}, b, X^{(it)})$$

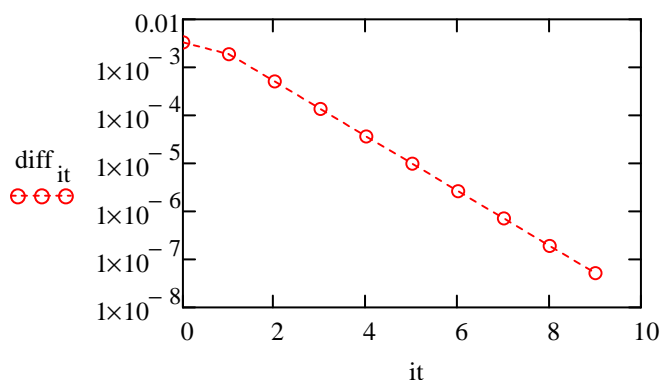
	0	1	2	3	4	5	6
0	0	-2.489·10 <sup>-3</sup>	-6.722·10 <sup>-4</sup>	-1.161·10 <sup>-3</sup>	-1.029·10 <sup>-3</sup>	-1.065·10 <sup>-3</sup>	-1.055·10 <sup>-3</sup>
1	0	2.228·10 <sup>-3</sup>	1.63·10 <sup>-3</sup>	1.79·10 <sup>-3</sup>	1.747·10 <sup>-3</sup>	1.759·10 <sup>-3</sup>	...

Nach `n` Gauß-Seidel-Iterationsschritten erhalten wir für die verbesserte Lösung des Newton-Verfahrens ähnliche Werte wie bei der Lösung des Gleichungssystems mit der inversen Jacobi-Matrix.

$$\begin{pmatrix} xv \\ yv \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xs \\ ys \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{0,n} \\ X_{1,n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} xv \\ yv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.544 \\ 2.372 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} fv \\ gv \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(xv, yv) \\ g(xv, yv) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} fv \\ gv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.233 \times 10^{-6} \\ -1.051 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Zur Beurteilung der Konvergenz der Gauß-Seidel-Iteration stellen wir die Beträge der Differenzen aufeinanderfolgender Näherungsvektoren  $\text{diff}_{it} = |X^{(it+1)} - X^{(it)}|$  in einer einfach-logarithmischen Darstellung graphisch dar.

$$\text{diff}_{it} := |X^{(it+1)} - X^{(it)}|$$



Beschreiben Sie das Konvergenzverhalten.  
lineare Konvergenz wie bei der Fixpunktiteration

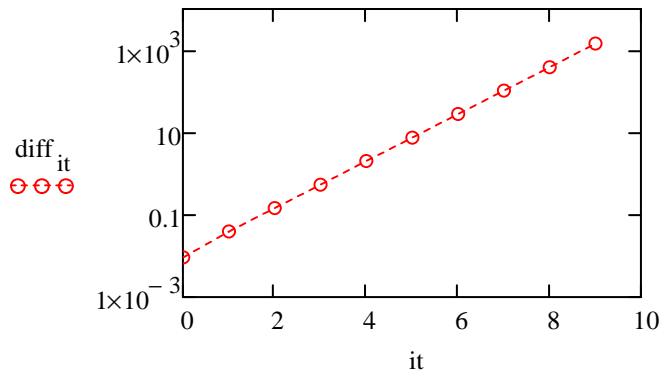
Wir vertauschen die Reihenfolge der Gleichungen und wiederholen die Gauß-Seidel-Iteration. Die Vertauschung erfolgt durch Multiplikation der Koeffizientenmatrix A und der rechten Seite b mit der Permutationsmatrix P. Geben Sie die Permutationsmatrix P an.

$$\text{poise} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{amp} := \text{poise} \cdot b := \text{poise} \cdot b \quad \text{amp} = \begin{pmatrix} 4.801 & 14.566 \\ 3.545 & -2.891 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0.021 \\ -8.825 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$X^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X^{(it+1)} := \text{seidel}(\text{amp}, b, X^{(it)})$$

X =		0	1	2	3	4	5	6
0		0	$4.272 \cdot 10^{-3}$	-0.021	0.073	-0.276	1.02	-3.8
1		0	$8.291 \cdot 10^{-3}$	-0.023	0.092	-0.335	1.254	...

$$\text{diff}_{it} := |X^{(it+1)} - X^{(it)}|$$



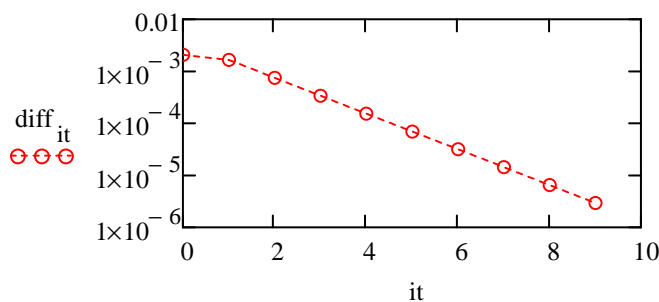
Beschreiben Sie das Konvergenzverhalten.  
keine Konvergenz

Erläutern Sie das beobachtete Verhalten.  
ursprüngliches Gleichungssystem: Zeilenkriterium erfüllt -> Konvergenz  
neues Gleichungssystem: Zeilensummen- und Spaltensummenkriterium nicht erfüllt

Wir können Konvergenz durch die Symmetrisierung der Koeffizientenmatrix über die Multiplikation der Gleichung mit der transponierten Matrix erhalten. Berechnen Sie die neue Koeffizientenmatrix As und die neue rechte Seite bs.

$$A_s := \text{amp}^T \cdot \text{amp} \quad b_s := \text{amp}^T \cdot b \quad A_s = \begin{pmatrix} 35.612 & 59.678 \\ 59.678 & 220.513 \end{pmatrix} \quad X^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X^{(it+1)} := \text{seidel}(A_s, b_s, X^{(it)})$$

X =		0	1	2	3	4
0		0	$1.886 \cdot 10^{-3}$	$2.777 \cdot 10^{-4}$	$-4.518 \cdot 10^{-4}$	$-7.826 \cdot 10^{-4}$
1		0	$9.598 \cdot 10^{-4}$	$1.395 \cdot 10^{-3}$	$1.593 \cdot 10^{-3}$	...

$$\text{diff}_{it} := |X^{(it+1)} - X^{(it)}|$$


Beschreiben Sie das Konvergenzverhalten.  
wieder Konvergenz aber mit kleinerem Konvergenzfaktor