WISSELWERKING EN BEWEGING 2

NNV17B

De module *Wisselwerking en beweging 2* voor klas 5 vwo gaat over de bewegingen van voorwerpen – van hemellichamen als planeten en kometen tot alledaagse voorwerpen als auto's, fietsen en rolstoelen – en over de oorzaken van die bewegingen.

Het eerste hoofdstuk van deze module – *Krachten en richting* – gaat over het beschrijven, verklaren en voorspellen van bewegingen onder invloed van krachten die in verschillende richtingen op een voorwerp werken. De volgende twee hoofdstukken gaan over het beschrijven, verklaren en voorspellen van bewegingen met begrippen als arbeid, energie, vermogen en impuls. Daarbij komen in het derde hoofdstuk ook bewegingen in cirkelbanen en andere kromlijnige bewegingen aan bod.

De volgende opgaven zijn met toestemming overgenomen uit de natuurkundemethode *Newton* van uitgeverij ThiemeMeulenhoff:

Hoofdstuk 1: 12,16, 18, 27, 31, 37.

In de kantlijn van de tekst staat af en toe dit pictogram. Dat geeft aan dat je op www.schoolsupport.nl/ninaweblinks een link naar een webpagina of andere informatie kunt vinden. De links op deze NiNaweblinks-pagina worden zoveel mogelijk up to date gehouden.

Colofon

Project	Nieuwe Natuurkunde
Auteurs	Peter Dekkers, Kees Hooyman, Marjolein Vollebregt, Koos Kortland
Vormgeving	Koos Kortland
Redactie	Harrie Eijkelhof, Maarten Pieters, Chris van Weert, Fleur Zeldenrust, Guus Mulder en Koos Kortland
Versie	mei 2012

INHOUDSOPGAVE

Keuzemateriaal

Bij deze lessenserie is ook online keuzemateriaal beschikbaar. Dit materiaal bestaat uit keuzeparagrafen over andere toepassingen van de mechanica. De keuzeparagrafen bevatten geen nieuwe examenstof. Verwijzingen naar deze keuzeparagrafen staan in een kader met de kop ‘keuzemateriaal’.

Daarnaast is er bij elk van de drie hoofdstukken ook nog een verzameling extra (oefen)opgaven beschikbaar.

3 Cirkelbanen en impuls

3.1 Grenzen verleggen

Wat gaan we doen?

In hoofdstuk 2 zijn de grenzen aan de mogelijkheden bij het voortbewegen in de sport en in het verkeer verkend. Daarbij zijn begrippen gebruikt als arbeid, energie en vermogen. In dit hoofdstuk gaan we daarmee verder: wat zijn de grenzen aan de mogelijkheden bij kromlijnige bewegingen en in de ruimtevaart? Ook daarbij gebruiken we begrippen als arbeid en energie. Maar in het geval van de ruimtevaart komt daar nog een nieuw begrip bij: *impuls*.

Hoofdstukvragen	Welke rol spelen energie, arbeid en impuls in situaties waarin grenzen verlegd worden, zoals in de ruimtevaart.

Vooruitblik

In paragraaf 2 van dit hoofdstuk kijken we naar bewegingen in twee dimensies: *kromlijnige bewegingen*. Een voorbeeld van zo'n beweging is de horizontale worp, waarbij een voorwerp vanaf een zekere hoogte in horizontale richting weggeschoten wordt.

In paragraaf 3, 4 en 5 gaan we de ruimte in. Bij de satellietbanen krijgen we te maken met een ander soort kromlijnige beweging: de *cirkelbeweging*. In de energievergelijking voor een raketlancering verschijnt nu een nieuwe energiesoort: de *gravitatie-energie*.

In paragraaf 6 en 7 komen twee nieuwe begrippen aan bod: *impuls* en *impulsbehoud*. Deze begrippen zijn belangrijk bij het begrijpen van de voortstuwing van raketten en – meer in het algemeen – explosies en botsingen.

3 Cirkelbanen en impuls

3.2 De lucht in: kromlijnige bewegingen

Wat gaan we doen?

In de voorgaande hoofdstukken is vooral gewerkt met bewegingen in een rechte lijn. Bewegingen die niet in een rechte lijn verlopen heten *kromlijnige bewegingen*.

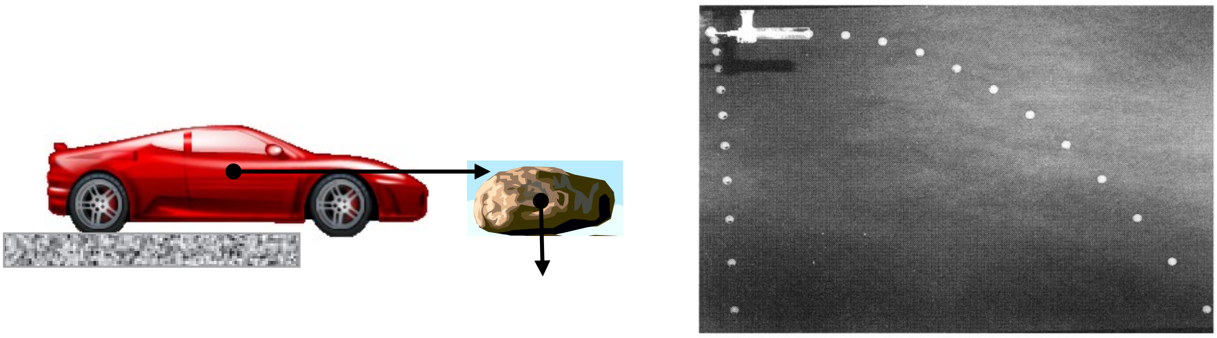
Een voorbeeld van een kromlijnige beweging is de horizontale worp. Daarbij wordt een voorwerp vanaf een hoogte in horizontale richting weggeschoten.

De centrale vragen voor deze paragraaf zijn:

- *Hoe kun je de vorm van de baan bij een horizontale worp verklaren?*
- *Hoe bereken je de afstand en de eindsnelheid bij een horizontale worp?*

1 Oriëntatie – Horizontaal wegschieten

In figuur 1 zie je twee vergelijkbare situaties.



Figuur 1 – Twee voorbeelden van een horizontale worp.

In de linker figuur rijdt een (lege) auto met grote snelheid op een steile afgrond af. Precies op het moment dat de auto over de rand van het ravijn rijdt komt er een groot rotsblok los, dat vanaf dat moment recht naar beneden valt.

a Wat is het eerst beneden: de auto of het rotsblok? Geef uitleg en neem aan dat de luchtweerstand geen rol van betekenis speelt.

Op de foto rechts zie je een stroboscoopopname van een experiment waarbij één kogeltje horizontaal wordt weggeschoten, terwijl een ander kogeltje vanaf hetzelfde tijdstip vrijwel recht naar beneden valt.

b Wat is hier het eerst beneden: het linker of het rechter kogeltje? Neem aan dat de luchtweerstand ook hier geen rol van betekenis speelt.

De vorm van de baan van het rechter kogeltje lijkt op een halve parabool. Voor die vorm zoeken we een verklaring.

c Kun je de vorm van de baan van de horizontale worp nu al verklaren met behulp van de constructiemethode van Newton of met behulp van de formules van bewegingen?

Plan van aanpak

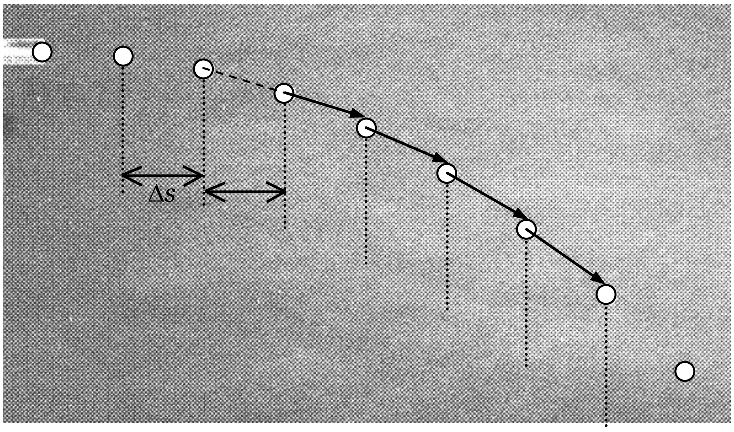
Het plan van aanpak bestaat uit de volgende onderdelen:

- Onderzoeken in hoeverre de baan van de horizontale worp te verklaren is met de constructiemethode van Newton.
- Nagaan met welke bewegingsformules de baan te beschrijven is.
- De plaats van de landing en de eindsnelheid berekenen.

Uitwerking

2 De baan verklaren met de constructiemethode

In figuur 2 zie je een deel van de horizontale worp vergroot weergegeven.



Figuur 2 – Horizontale worp en invloedloze beweging.

Bij elke positie van het kogeltje is een verticale lijn getekend. De horizontale afstand Δs tussen de lijnen is constant.

a Welke conclusie kun je hieruit trekken voor de horizontale beweging?

In figuur 2 is met pijlen de invloedloze beweging getekend: de verplaatsing die gelijk is aan de verplaatsing in de voorgaande tijdstap.

b Vergelijk het eindpunt van de invloedloze beweging met de werkelijke positie. Wat valt je op?

c Je kunt de pijlen ook zien als snelheidsvectoren. In elke tijdstap verandert de snelheid met Δv. Wat kun je zeggen over de snelheidsverandering Δv?

d Welke conclusie kun je hieruit trekken voor de verticale beweging?

Kennelijk valt de horizontale worp te splitsen in een horizontale beweging en een verticale beweging.

e Geef voor beide richtingen aan wat voor soort beweging het is.

3 Bewegingsvergelijkingen

De baan bij een horizontale worp is te splitsen in een horizontale beweging en een verticale beweging. Horizontaal is de snelheid constant, verticaal is de beweging versneld door de zwaartekracht.

a Stel dat de snelheid waarmee het kogeltje horizontaal wordt weggeschoten 2,4 m/s is. Welke vergelijking geldt dan voor de horizontale positie $s_x(t)$ op tijdstip t?

De verticale beweging is een valbeweging met een constante versnelling g van 9,8 m/s². Het kogeltje wordt afgeschoten vanaf een hoogte van 1,50 m.

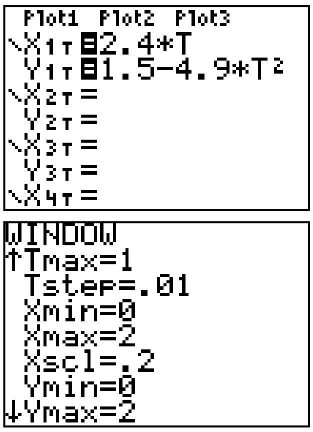
b Leg uit dat voor de verticale positie $s_y(t)$ op tijdstip t geldt:

$$s_y(t) = 1{,}50 - 4{,}9 \cdot t^2$$

De baan die het kogeltje bij deze beweging aflegt is te tekenen met de grafische rekenmachine.

c Stel de grafische rekenmachine in op *parametervoorstelling*. Kies als domein X op [0,2] en Y op [0,2]. Kijk ook of de tijd en de tijdstap juist is ingesteld.

d Voer in: X = 2,4·t en Y = 1,5 - 4,9·t² en laat de baan tekenen.



Figuur 3 – Schermbeelden van de grafische rekenmachine.

De baan lijkt sterk op een halve parabool, maar kun je dat ook aantonen? Daarvoor moet je de substitutiemethode gebruiken.

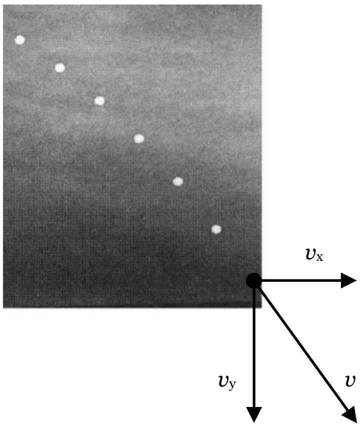
e Neem de bewegingsvergelijkingen X = 2,4·t en Y = 1,5 - 4,9·t², en schrijf Y als functie van X. Wat is je conclusie?

4 De landing van het kogeltje

Het kogeltje uit het voorbeeld wordt op een hoogte van 1,50 m met een snelheid van 2,4 m/s weggeschoten. Waar zal het kogeltje dan landen? En met welke snelheid?

a Neem de bewegingsvergelijkingen X = 2,4·t en Y = 1,5 - 4,9·t². Bij de landing geldt: Y = 0. Bereken daarmee hoe ver het kogeltje komt.

Op het moment dat het kogeltje op de grond neerkomt, heeft het een grotere snelheid dan bij de start. Bovendien is de snelheid schuin: de snelheid heeft een horizontale component v_x en een verticale component v_y (zie figuur 4).



Figuur 4 – Bij de landing heeft de snelheid een horizontale en een verticale component.

b Leg uit dat geldt: v_x = 2,4 m/s.

De verticale component van de snelheid is het gevolg van een valbeweging met g = 9,8 m/s².

c Ga met een berekening na dat voor de verticale component van de eindsnelheid geldt: v_y = 5,4 m/s.

De grootte van de eindsnelheid v is de som van de twee componenten v_x en v_y (zie figuur 4).

d Bereken de grootte van de eindsnelheid met behulp van de stelling van Pythagoras.

Samenvatting

Horizontale worp – Een horizontale worp is een beweging met een horizontale beginsnelheid vanaf een bepaalde hoogte. Bij een dergelijke worp verwaarlozen we de invloed van wrijvingskrachten. Er werkt dus slechts één kracht op het voorwerp: de zwaartekracht.
Verticaal is er sprake van een constante versnelling, horizontaal is de snelheid constant. Een kromlijnige beweging is dan ook te beschrijven door in twee richtingen bewegingsvergelijkingen op te stellen.

Bewegingsvergelijkingen – Voor een horizontale worp vanaf beginhoogte h en met een horizontale beginsnelheid v_x gelden de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$s_x(t) = v_x \cdot t$$

$$s_y(t) = h - 4{,}9 \cdot t^2$$

Voor de snelheid bij de landing geldt:

$$v_y = g \cdot t$$

$$v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2$$

Begrippen

Kromlijnige beweging
Horizontale worp

Keuzemateriaal
Tussen deze paragraaf en de volgende past de online aangeboden keuzeparagraaf 3.8.
Keuzeparagraaf 3.8 gaat over de 'Mythbusters Slingshot': over welke afstand kun je iemand met een katapult wegschieten? In dit geval is de beweging niet een horizontale maar een *schuine* worp. De bewegingsvergelijkingen moeten daarvoor wat worden aangepast.

Begripstest

5 Geef bij de onderstaande beweringen met ja of nee aan of de uitspraak klopt.

a Bij een horizontale worp zonder luchtwrijving is de verticale beweging een eenparig versnelde beweging. ja / nee

b De snelheid blijft tijdens een horizontale worp constant. ja / nee

c Bij een horizontale worp wordt zwaarte-energie omgezet in bewegingsenergie. ja / nee

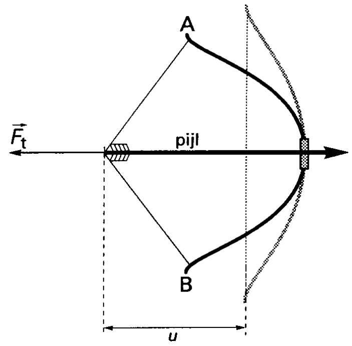
d De baan van een horizontale worp zonder luchtwrijving heeft altijd de vorm van een halve parabool. ja / nee

e De eindsnelheid wordt berekend door de horizontale en verticale snelheid op te tellen. ja / nee

Opgaven

6 Pijl en boog

Bij boogschieten wordt een pijl met een massa van 68 g met een snelheid van 40 m/s horizontaal weggeschoten in de richting van een schietschijf. Op het moment dat de pijl loskomt van de pees is de afstand tussen pijlpunt en schietschijf 18 m. Verwaarloos de luchtwrijving.



Figuur 5 – Pijl en boog.

a Hoe lang doet de pijl over het afleggen van de horizontale afstand van 18 m?

b Bereken hoeveel cm de pijl is gedaald bij aankomst op de schietschijf.

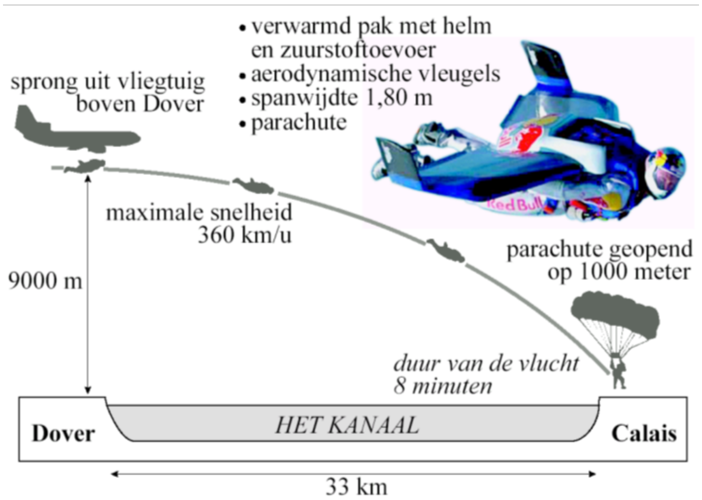
c Bereken de verticale component van de snelheid bij het raken van de schietschijf.

In werkelijkheid kan de luchtweerstand niet worden verwaarloosd. De pijl remt in horizontale richting eenparig af van 40 m/s naar 32 m/s. De invloed van de luchtweerstand op de verticale snelheid kan wel worden verwaarloosd, omdat deze snelheid relatief klein is.

d Bereken hoeveel cm de pijl nu gedaald is bij aankomst op de schietschijf.

7 Kanaalspringer

Stuntman Felix Baumgartner is er als eerste mens in geslaagd om over Het Kanaal te 'springen'. Baumgartner begon zijn vlucht op 9000 m hoogte. Hij vloog dankzij een brede vleugel op zijn rug. Hij bereikte een snelheid van maximaal 360 km/h. Hij gebruikte zijn parachute pas kort voor de landing.



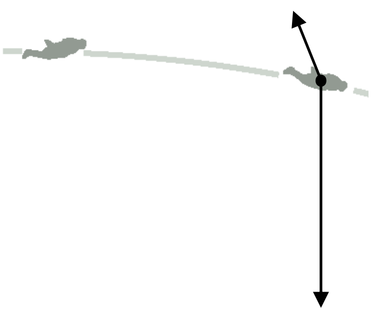
Figuur 6 – Glijvlucht over Het Kanaal.

Het vliegtuig vliegt horizontaal op het ogenblik dat de stuntman uit het vliegtuig springt. Veronderstel dat er geen luchtweerstand is, zodat de sprong gezien kan worden als een vrije val met horizontale beginsnelheid. Het hoogteverschil is daarbij 8,0 km.

a Bereken hoe lang een val zonder luchtweerstand over een hoogteverschil van 8,0 km duurt.

b Bereken welke beginsnelheid nodig is om in deze tijd een horizontale afstand van 33 km af te leggen. Geef het antwoord in km/h.

In werkelijkheid is er wel luchtweerstand. De baan is wel krom, maar geen parabool. Omdat de luchtwrijving toeneemt als de springer dichter bij het aardoppervlak komt, zal de snelheid vanaf een bepaald moment dalen. In figuur 7 is het moment aangegeven waarop de stuntman de maximale snelheid bereikt. Op dat moment werken twee krachten: de zwaartekracht en de kracht die de lucht op de springer uitoefent.



Figuur 7 – Op de kanaalspringer werken twee krachten, de zwaartekracht en de kracht van de lucht.

c Hoe kan de kracht van de lucht schuin op de bewegingsrichting staan?

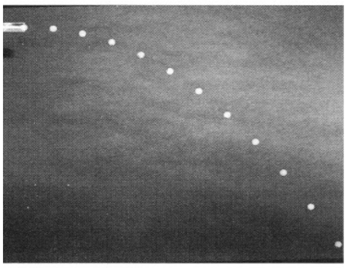
d Teken in (een kopie van) figuur 7 de resultante van de twee krachten.

De resulterende kracht is duidelijk niet nul, maar de snelheid neemt op dit tijdstip niet toe of af. De resulterende kracht heeft dus een andere invloed.

e Welke invloed heeft de resulterende kracht op de beweging?

8 Energietoename

Bij een horizontale worp wordt de snelheid van het kogeltje tijdens de val groter. Zwaarte-energie wordt omgezet in een toename van de bewegingsenergie.



Figuur 8 – Horizontale worp.

a Welke kracht zorgt voor het omzetten van de energie?

b Leg uit dat voor de energievergelijking geldt: $E_z + E_{k,A} = E_{k,B}$. Hierin is A het punt bovenaan en B het punt onderaan de baan.

Het kogeltje start op een hoogte van 1,50 m met een horizontale snelheid van 2,4 m/s. Het kogeltje heeft een massa van 60 g.

c Bereken bij de start in punt A de zwaarte-energie en de bewegingsenergie.

d Hoe groot is nu de bewegingsenergie in punt B?

e Bereken daarmee de eindsnelheid van het kogeltje. Vergelijk het antwoord met dat van opdracht 4d.

9 Kogelstoten

Een kogelstoter stoot een kogel in een rechte lijn onder een hoek van 45° met het horizontale vlak weg. De kogel verlaat de hand van de kogelstoter op een hoogte van 2,1 m met een snelheid van 6,0 m/s.

Figuur 9 – Bij kogelstoten is de werphoek erg belangrijk.

a Bereken aan de hand van deze gegevens de horizontale en de verticale component van de beginsnelheid: $v_{b,x}$ en $v_{b,y}$.

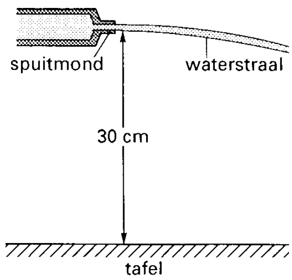
b Bepaal de afstand die deze kogel haalt met behulp van de grafische rekenmachine in twee significante cijfers.

Voor de hoogte geldt hier: $h(t) = 2{,}1 + v_{b,y} \cdot t - ½ \cdot g \cdot t^2$.

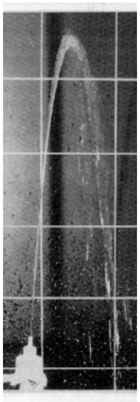
c Bereken hiermee hoe lang de kogel in de lucht is. Bereken daarmee ook de afstand die de kogel aflegt.

10 Waterstraal

Iemand doet een serie proeven met water dat uit een slang met spuitmond stroomt. De snelheid waarmee het water uit de spuitmond komt, is bij alle proeven gelijk aan 4,0 m/s. De opening bevindt zich steeds 30 cm boven een tafel. De luchtwrijving op de waterstraal wordt verwaarloosd. Bij de eerste proef verlaat het water de spuitmond met een horizontaal gerichte snelheid (zie figuur 10).



Figuur 10 – Waterstraal uit een slang.


Figuur 11

De waterstraal legt na het verlaten van de spuitmond een horizontale afstand x af voor hij de tafel treft.

a Bereken x.

Bij een tweede proef wordt de waterstraal omhoog gericht (zie figuur 11). We vergelijken de hoogte die de waterstraal bereikt met de hoogte die een voorwerp bereikt dat verticaal omhoog wordt gegooid. De beginplaats van dit voorwerp is 30 cm boven de tafel. De beginsnelheid is 4,0 m/s.

b Bereken de hoogte boven de tafel die dit voorwerp bereikt. Verwaarloos ook hier de luchtwrijving.

3 Cirkelbanen en impuls

3.3 De ruimte in: satellietbanen

Wat gaan we doen?

Een ander voorbeeld van een kromlijnige beweging is de cirkelbaan van een satelliet die rond de aarde draait. Bijzonder aan deze beweging is dat voor die baan geen motor nodig is. Satellieten hebben wel een motor, maar die wordt alleen gebruikt om bij te sturen als de satelliet een beetje uit de baan is geraakt.

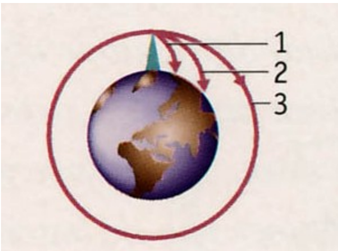
Satellieten draaien in banen op verschillende hoogte rond de aarde. Sommige satellieten staan ver weg, andere vrij dichtbij. De snelheid waarmee de satellieten ronddraaien verschilt ook. Sommige satellieten lijken stil te hangen, andere draaien in twee uur rond de aarde.

De centrale vragen voor deze paragraaf zijn:

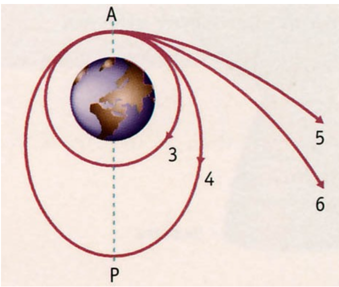
- *Hoe kan een satelliet rondjes draaien zonder motor?*
- *Welke snelheid moet een satelliet hebben voor een baan rond de aarde?*

11 Oriëntatie – Een cirkelbaan langs het aardoppervlak

Als er op de aarde geen dampkring zou zijn, dan zou je een satelliet kunnen lanceren door deze vanaf het topje van een hoge berg horizontaal weg te schieten (zie figuur 12). Bij een lage snelheid is de baan een parabool en valt de satelliet op aarde. Bij de juiste snelheid wordt de baan een cirkelbaan.



Figuur 12 – Als de snelheid precies groot genoeg is wordt de baan een cirkel.



Figuur 13 – Als de snelheid te groot is, dan wordt de baan een ellips of het voorwerp 'ontsnapt' van de Aarde.

Omdat de baan kromlijnig is, moet er een resulterende kracht zijn.

a Waarom is bij een kromlijnige beweging de resulterende kracht nooit nul?

b Welke kracht zorgt ervoor dat de satelliet 'de bocht omgaat'?

c Er is maar één snelheid waarbij de baan precies een cirkelbaan is. Welke baan zal de satelliet volgen als de snelheid groter is?

Bij de cirkelbaan werkt er voortdurend een resulterende kracht op de satelliet. Bij een rechtlijnige beweging geldt dat een resulterende kracht het voorwerp versnelt of vertraagt, maar bij de satellietbaan blijft de snelheid constant.

d Leg door gebruik te maken van energie en arbeid uit dat de snelheid bij een cirkelbaan om de aarde constant moet blijven.

e De resulterende kracht zorgt er wel voor dat de snelheid verandert, maar het is niet de grootte van de snelheid die verandert. Wat verandert er dan wel aan de snelheid?

Plan van aanpak

Een satelliet draait zonder motor in een cirkelbaan rond de aarde. Het plan van aanpak bestaat uit de volgende onderdelen:

- Zoek uit hoe groot de kracht is die nodig is om bij een bepaalde snelheid een bocht met een bepaalde straal te maken.
- Gebruik dat de zwaartekracht hier de kracht levert die nodig is om een bocht te maken.
- Bereken bij welke snelheid de zwaartekracht precies groot genoeg is om de kracht te leveren die hoort bij een cirkelbaan langs het aardoppervlak.
- Zoek een formule voor het verband tussen de snelheid van de satelliet en de afstand tot de aarde.

Uitwerking

12 Een kracht om 'de bocht om te gaan'

Als je een bocht maakt, dan moet de snelheid van richting veranderen – en dat kan niet zonder kracht. Die kracht hangt af van drie grootheden: de *massa*, de *snelheid* en de *straal* van de bocht.

Voor een zwaarder voorwerp is een grotere kracht nodig: de kracht is *recht evenredig* met de massa. Daarnaast hangt de kracht af van de snelheid en van de straal van de cirkel (een scherpe of flauwe bocht).

a Heb je bij een grotere snelheid (bij dezelfde massa en straal) een grotere of een kleinere kracht nodig?

b Wat voor soort verband verwacht je tussen kracht en snelheid: recht evenredig, omgekeerd evenredig of een ander soort verband?

c Heb je bij een grotere straal (dus een flauwere bocht, bij dezelfde massa en snelheid) een grotere of een kleinere kracht nodig?

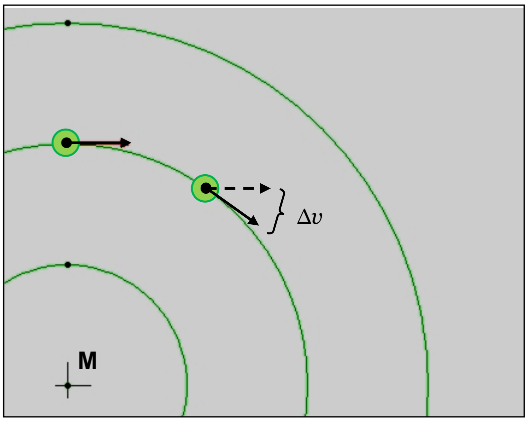
d Wat voor soort verband verwacht je tussen kracht en straal: recht evenredig, omgekeerd evenredig of een ander soort verband?

Figuur 14 – In een zweefmolen hangt de snelheid samen met de afstand tot het midden.

13 Een formule voor de kracht

In een draaimolen of zweefmolen draait iedereen in dezelfde tijd zijn rondjes, maar de snelheden en de straal van de cirkelbanen verschillen. Naarmate je verder van het midden af zit wordt zowel de *snelheid* als de *straal* van de cirkelbaan groter.

a Hoe verandert de kracht die nodig is om de bocht om te gaan naarmate je verder van het midden af zit? Wordt die kracht groter, kleiner of blijft die even groot? Gebruik je eigen ervaringen.



Figuur 15 – Snelheidsverandering in een draaimolen.

In figuur 15 is op twee tijdstippen de snelheid van een persoon in een draaimolen getekend. De snelheidsverandering Δv is het verschil tussen de oude snelheid (de gestippelde pijl) en de nieuwe snelheid.

b Teken voor een persoon in de binnenste of buitenste baan de posities op dezelfde tijdstippen en geef in de tekening de snelheidspijlen aan. Gebruik daarbij dat de snelheid evenredig toeneemt met de straal.

c Leg aan de hand van de tekening uit dat in een draaimolen de kracht evenredig toeneemt met de afstand tot het midden van de baan.

De kracht die nodig is voor een cirkelbaan wordt de *middelpuntzoekende kracht* genoemd. Die kracht moet voortdurend naar het midden van de baan wijzen (vandaar de naam *middelpuntzoekend*). Voor de grootte van de middelpuntzoekende kracht F_{mpz} geldt:

$$F_{mpz} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

> **Snelheidsverandering**
> De kracht die nodig is voor een snelheidsverandering volgt ook uit de definitie van kracht:
> $$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

In deze formule is F_{mpz} de kracht (in N), m de massa (in kg) van het voorwerp, v de snelheid (in m/s) van het voorwerp in zijn cirkelbaan en r de straal (in m) van die cirkelbaan.

d Leg aan de hand van de formule uit dat in een draaimolen de kracht recht evenredig is met de afstand tot het midden.

e Hoe verandert de kracht als de draaimolen twee keer zo snel draait?

14 Een satellietbaan langs het aardoppervlak

Langs het aardoppervlak is de zwaartekracht constant: zelfs op de Mount Everest geldt nog g = 9,8 m/s². Als er geen dampkring zou zijn, dan zou een satelliet in een cirkelbaan langs het aardoppervlak kunnen bewegen.

a Verbeter de volgende uitspraak: “Als een satelliet in een cirkelbaan met constante snelheid beweegt, dan is de resulterende kracht nul. De zwaartekracht heft dan precies de middelpuntzoekende kracht op.”

De straal van een cirkelbaan langs het aardoppervlak is $6{,}38 \cdot 10^6$ m. Neem aan dat de satelliet een massa heeft van 100 kg.

b Hoe groot is dan de zwaartekracht op de satelliet?

c Hoe groot moet de middelpuntzoekende kracht zijn voor een cirkelbaan langs het aardoppervlak?

d Leg uit dat hier geldt: $v^2/r = 9{,}81$.

e Bereken de snelheid die de satelliet moet hebben voor een cirkelbaan langs het aardoppervlak.

Satellietbaan
Voor een cirkelbaan is een kracht nodig die gericht is naar het midden van de cirkel. Bij een satelliet levert de gravitatiekracht de middelpuntzoekende kracht.

Gravitatiekracht
Voor de gravitatiekracht geldt:

$$F_{grav} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Bij een satelliet is m_1 de massa van de aarde ($5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg), m_2 de massa van de satelliet, G de gravitatieconstante ($6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²) en r de afstand van de satelliet tot het middelpunt van de aarde.

15 Een satellietbaan in de ruimte

Als de baan van de satelliet verder van de aarde ligt, dan verandert de aantrekkingskracht van de aarde. Daarbij hoort ook een andere snelheid.

a Leg uit dat bij elke satellietbaan geldt: $F_{mpz} = F_{grav}$.

b Vul in deze vergelijking de formules voor F_{mpz} en F_{grav} in.

c De massa van de satelliet speelt geen rol. Hoe kun je dat zien aan de vergelijking?

d Laat zien dat de vergelijking te vereenvoudigen is tot: $v^2 \cdot r = G \cdot M$. Hierin is M de massa van de aarde.

Samenvatting

Cirkelbeweging – Bij een cirkelbeweging met constante snelheid verandert voortdurend de richting van de snelheid. Het voorwerp moet ‘de bocht om’. Voor een verandering van de snelheid is een kracht nodig die gericht is naar het middelpunt van de cirkel. Die kracht wordt de *middelpuntzoekende kracht* genoemd.

De grootte van de middelpuntzoekende kracht geeft aan hoeveel kracht er *nodig* is voor een cirkelbaan. In het verkeer zal die kracht bijvoorbeeld geleverd worden door de wrijving met het wegdek.

Voor de grootte van de middelpuntzoekende kracht F_{mpz} (in N) geldt:

$$F_{mpz} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

In deze formule is m de massa (in kg), v de baansnelheid (in m/s) en r de baanstraal (in m).

Voor de baansnelheid v (in m/s) bij een cirkelbeweging geldt:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

In deze formule is r de baanstraal (in m) en T de omlooptijd (in s).

Begrippen

Cirkelbaan
Middelpuntzoekende kracht
Baansnelheid
Omlooptijd

Satellietbanen – Voor satellieten die rond een (veel zwaarder) hemellichaam draaien geldt dat de gravitatiekracht F_{grav} zorgt voor de middelpuntzoekende kracht:

$$F_{mpz} = F_{grav}$$

Satellieten moeten een vaste baansnelheid hebben, die alleen afhangt van de hoogte van de baan rond de aarde. Daarbij geldt:

$$v^2 \cdot r = G \cdot M$$

In deze formule is M de massa van het hemellichaam waar de satelliet omheen draait. Deze formule wordt in de astronomie gebruikt om de massa van planeten of sterren te bepalen.

Begripstest

16 Geef bij de onderstaande beweringen met ja of nee aan of de uitspraak klopt.

a Op de personen in een draaimolen werkt een kracht die naar buiten gericht is. ja / nee

b Voor een cirkelbeweging is een kracht nodig die naar het middelpunt gericht is. ja / nee

c Bij een satellietbaan is de zwaartekracht even groot als de middelpuntzoekende kracht. Die krachten heffen elkaar op. ja / nee

d Twee schaatsers rijden met dezelfde snelheid door een bocht. In de binnenbaan is F_{mpz} het grootst. ja / nee

e Bij een centrifuge is de 'slingerkracht' evenredig met het kwadraat van het toerental. ja / nee

f Bij een cirkelbeweging is de omlooptijd omgekeerd evenredig met de baansnelheid. ja / nee

g De bewegingsenergie van een satelliet neemt af naarmate de satelliet in een baan draait die verder van de aarde ligt. ja / nee

Opgaven

17 De snelheid van het ISS

Figuur 16 – Het International Space Station (ISS).

Het ruimtestation ISS bevindt zich op 342 km boven het aardoppervlak. De afstand tot het midden van de aarde is dan $6{,}72 \cdot 10^6$ m. In 2008 bedroeg de totale massa van het ISS $2{,}80 \cdot 10^5$ kg.

In deze situatie zorgt alleen de zwaartekracht voor de beweging: de zwaartekracht 'levert' de middelpuntzoekende kracht.

a Bereken de gravitatiekracht op het ISS.

b Bereken de snelheid van het ISS door gebruik te maken van $F_{mpz} = F_{grav}$.

c Bereken de snelheid van het ISS ook met $v^2 \cdot r = G \cdot M$.

d Als het goed is leveren beide methodes hetzelfde resultaat. Welke aanpak vind je handiger?

Met de snelheid van de satelliet en de straal van de baan moet je kunnen berekenen hoe lang de satelliet over één rondje doet.

e Bereken de afstand die het ISS aflegt bij één rondje om de aarde.

f Bereken de omlooptijd van het ISS in uren.

3 Cirkelbanen en impuls

3.4 De ruimte in: geostationaire baan

Wat gaan we doen?

Een groot deel van de satellieten wordt gebruikt voor communicatie. De paraboolantennes op aarde worden daarvoor precies gericht naar de satelliet. De satelliet moet dus op een vaste plek aan de hemel staan. Maar hoe werkt dat dan: een satelliet moet toch een snelheid hebben?

De centrale vraag voor deze paragraaf is:

- *Hoe kunnen communicatiesatellieten op een vaste positie aan de hemel staan?*

18 Oriëntatie – Geostationaire baan

Alle communicatiesatellieten bevinden zich in dezelfde baan rond de aarde. Deze baan wordt de *geostationaire baan* genoemd, omdat alle satellieten in die baan een stationaire positie ten opzichte van het aardoppervlak hebben.

De exacte rotatieperiode van de aarde is 23,93 uur (zie BINAS tabel 31).

a Leg uit dat de satellieten in de geostationaire baan precies dezelfde omlooptijd moeten hebben als de rotatieperiode van de aarde.

Om het signaal van de satelliet te kunnen ontvangen, moet op aarde de paraboolantenne nauwkeurig gericht worden.

b Leg uit waarom vanaf de aarde gezien alle communicatiesatellieten recht boven de evenaar hangen, en niet recht boven Nederland of Australië.

Voor de baan van een satelliet gelden de volgende formules:

$$v^2 \cdot r = G \cdot M$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Het probleem is hier dat zowel de snelheid v als de straal r van de cirkelbaan onbekend zijn. Voor de hoogte van een communicatiesatelliet boven het aardoppervlak geldt: $h = 40 \cdot 10^3$ km. Maar dat is een grove benadering.

c Ga na dat de straal van de cirkelbaan dan $46 \cdot 10^6$ m is.

Als je deze waarde invult in $v^2 \cdot r = G \cdot M$ dan vind je $v = 2{,}9 \cdot 10^3$ m/s.

d Bereken v met de formule $v = 2\pi \cdot r / T$. Wat is je conclusie?

e Hoe zou je dit probleem met twee formules en twee onbekenden kunnen oplossen? Overleg met elkaar.

Geostationaire baan
De geostationaire baan werd in 1945 werd ontdekt. Een satelliet die in zo'n baan boven de evenaar draait, heeft vanaf de aarde gezien steeds dezelfde positie (geostationair).
Deze satellieten zijn zeer geschikt voor communicatie. De satellieten vliegen met een grote snelheid, maar lijken vanaf de aarde gezien stil te hangen.

Figuur 17 – Communicatiesatellieten draaien meestal in een geostationaire baan. Daardoor staan ze steeds op dezelfde positie aan de hemel.

Plan van aanpak

We hebben hier dus een probleem met twee formules en twee onbekenden. In de volgende twee opdrachten wordt dat probleem opgelost. Deze twee manieren van oplossen zijn geen examenstof.

Het plan van aanpak bestaat uit de volgende onderdelen:

- Gebruik de grafische rekenmachine om het probleem op te lossen.
- Leid een verband af tussen r en T waar de snelheid v niet in voorkomt. Bereken daarmee de hoogte van de baan.

Uitwerking

19 Oplossing met de grafische rekenmachine

We hebben hier een probleem met twee formules en twee onbekenden. De eerste manier van oplossen is met de grafische rekenmachine.

a Laat zien dat de formule $v^2 \cdot r = G \cdot m_{planeet}$ ook geschreven kan worden als:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Beide formules uit opdracht 18 zijn nu geschreven als $v = \ldots$ Daardoor kun je beide vergelijkingen invullen in de grafische rekenmachine. Daarbij stelt x de straal r van de cirkelbaan voor. Voor alle andere variabelen wordt de getalswaarde ingevuld.

b Eén van de formules is te schrijven als: Y1 = 2π·X/(23,93·3600). Leg dit uit.

c Hoe wordt de andere formule dan geschreven?

d Voer de twee vergelijkingen als functies in bij de grafische rekenmachine.
Gebruik de grafische rekenmachine om het snijpunt van de twee functies te zoeken (via het menu CALC – INTERSECT). Kies daarvoor wel het juiste domein: de snelheid is kleiner dan 7 km/s, de afstand is kleiner dan 50.000 km.

e Welke waarde heeft r voor de geostationaire baan?

f Hoeveel km boven het aardoppervlak is de geostationaire baan?

20 Oplossen door een nieuwe formule te maken

Een tweede aanpak is met behulp van substitutie van formules. Voor de baan van een satelliet gelden de volgende formules:

$$v^2 \cdot r = G \cdot M$$

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

a Substitueer de formule $v = 2\pi \cdot r/T$ in de eerste formule voor v.

b Werk het kwadraat uit en laat zien dat je het verband kunt herschrijven tot $4\pi^2 \cdot r^3 = G \cdot M \cdot T^2$.
Deze formule staat bekend als de derde wet van Kepler. (Hij schreef deze formule overigens als r^3/T^2 = constant = $G \cdot M/4\pi^2$).

c Laat zien dat in de formule voor de derde wet van Kepler nog maar één onbekende grootheid staat.

d Vul alle bekende gegevens in en bereken r.

e Hoeveel km boven het aardoppervlak is de geostationaire baan?

Samenvatting

Geostationaire baan – Bij een geostationaire baan staat een satelliet vanaf de aarde gezien steeds op dezelfde positie aan de hemel. Dat kan alleen in een baan op een hoogte van 35 786 km boven het aardoppervlak.

Begrippen

Geostationaire baan

Keuzemateriaal

Tussen deze paragraaf en de volgende past de online aangeboden keuzeparagraaf 3.9.

Keuzeparagraaf 3.9 gaat over de krachten bij schommelen. De beweging is hier een deel van een cirkelbeweging, maar dan met een voortdurend veranderende snelheid onder invloed van de spankracht in het schommeltouw en de zwaartekracht.

Opgaven

21 De invloed van de massa van de aarde

Voor de snelheid van een satelliet in een cirkelbaan rond de aarde geldt: $v^2 \cdot r = G \cdot M$. In deze formule is te zien dat de massa van de satelliet niet belangrijk is, maar de massa van de aarde wel.

a Wat zou er met de baan van een satelliet gebeuren als de massa van de aarde opeens veel groter zou worden? Leg kort uit.

De formule kan ook gebruikt worden om de massa van de aarde te meten, bijvoorbeeld door gebruik te maken van de omlooptijd van de maan. De maan draait in 27,32 dagen rond de aarde op een afstand van $384{,}4 \cdot 10^6$ m.

b Bereken de snelheid waarmee de maan om de aarde draait.

c Bereken uit deze gegevens de massa van de aarde. Klopt het antwoord met BINAS?

De aarde draait in 365,25 dagen rond de zon.

d Zoek in BINAS de straal van de baan van de aarde op en bereken de snelheid waarmee de aarde om de zon draait.

e Bereken uit deze gegevens de massa van de zon. Klopt het antwoord met BINAS?

22 Cirkelbanen van hemellichamen

De planeet Mars draait met een snelheid van 24,1 km/s in een vrijwel cirkelvormige baan rond de zon. De massa van de zon is $1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg.

a Bereken de straal van de baan van Mars rond de zon en de omlooptijd.

Een satelliet met een massa van $2{,}1 \cdot 10^3$ kg draait op een hoogte van $10{,}4 \cdot 10^3$ km boven het aardoppervlak in 6,0 uur rond de aarde.

b Bereken de grootte van de middelpuntzoekende kracht die nodig is om de satelliet in zijn baan rond de aarde te houden.

23 Omlooptijden van manen en planeten

Astronomen bepalen bij hemellichamen de omlooptijd en de straal van de baan, die meestal vrijwel cirkelvormig is. In de tabel van figuur 18 zijn die gegevens van de manen van Jupiter genoteerd.

maan	straal r (10^9 m)	omlooptijd T (dagen)	
Io	0,4216	1,77	
Europa	0,6709	3,55	
Ganymedes	1,070	7,16	
Callisto	1,880	16,69	

Figuur 18

a Laat met een rekenvoorbeeld zien dat de omlooptijd T niet recht evenredig is met de afstand r.

Het verband tussen T en r is af te leiden uit $v^2 \cdot r = G \cdot M$.

b Leg met deze formule uit dat de snelheid van een maan lager wordt naarmate de maan verder van Jupiter staat.

c Stel dat de straal 2 keer zo groot wordt, met welke factor neemt dan de snelheid af?

d Laat zien dat de omlooptijd dan $2 \cdot \sqrt{2} = 2^{1,5}$ keer zo groot wordt.

Kennelijk is T evenredig met $r\cdot\sqrt{r} = r^{1,5}$.

e Laat met de tabel zien dat T evenredig is met $r\cdot\sqrt{r}$.

f Ga met de gegevens uit BINAS na of voor de omlooptijd van de planeten rond de zon ook geldt dat T evenredig is met $r\cdot\sqrt{r}$.

24 Omlooptijd en afstand

Van een bepaalde satelliet is bekend dat omlooptijd 14,4 uur bedraagt. Op welke hoogte bevindt deze satelliet zich? Hoe groot is de snelheid? Dat moet te bepalen zijn uit de formules $v^2\cdot r = G\cdot M$ en $v = 2\pi\cdot r/T$.

a Leg uit waarom deze vragen niet te beantwoorden zijn door de omlooptijd in te vullen in een van deze twee formules.

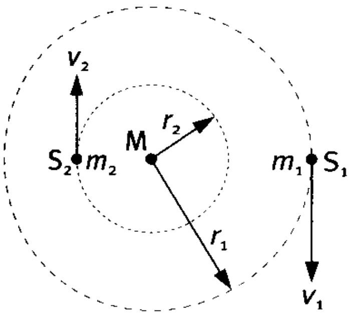
b Substitueer de formule voor de snelheid en leid daarmee een nieuwe relatie af tussen T en r.

c Reken de omlooptijd T om in seconde en bereken met de nieuwe formule de hoogte van de satelliet.

d Bereken de snelheid van de satelliet.

25 Dubbelster

Twee sterren S_1 en S_2 vormen een dubbelster: ze bewegen in cirkelbanen rond een gemeenschappelijk middelpunt M (zie figuur 19). De onderlinge gravitatiekracht houdt elk van de sterren in hun cirkelbaan en levert dus de benodigde middelpuntzoekende kracht.



Figuur 19 – Bij een dubbelster draaien beide sterren om het gezamenlijk zwaartepunt M.

a Leg uit dat de middelpuntzoekende kracht op beide sterren even groot moet zijn.

Het punt M is het zwaartepunt van de twee sterren.

b Welke ster heeft de grootste massa: ster S_1 of ster S_2?

De twee sterren S_1 en S_2 bewegen in cirkelbanen rond M. De omlooptijd T is voor beide sterren gelijk.

c Stel dat r_1 2 keer zo groot is als r_2. Leg uit dat de baansnelheid v_1 van S_1 dan ook 2 keer zo groot moet zijn als de baansnelheid v_2 van S_2.

Bij een dubbelster is de afstand tot punt M omgekeerd evenredig met de massa van elke ster. Daarbij hoort het volgende verband: $m_1\cdot r_1 = m_2\cdot r_2$.

d Toon dit aan met behulp van $F_{grav} = F_{mpz} = m\cdot v^2/r$.

Uit metingen aan de beide sterren volgt een omlooptijd T van $2{,}5\cdot10^9$ s, een baansnelheid v_1 van 4,8 km/s en een baansnelheid v_2 van 2,4 km/s.

e Bereken bij elk van de sterren de straal r van de cirkelbaan.

De onderlinge gravitatiekracht moet elk van de sterren in een cirkelbaan laten bewegen. Dus: $F_{grav} = F_{mpz}$.

f Toon aan dat hieruit volgt dat voor S_2 geldt:

$$\frac{v_2^{\ 2}}{r_2} = G\cdot\frac{m_1}{(r_1+r_2)^2}$$

g Bereken de massa van elk van de sterren.

26 Skater

Figuur 20 – Skater in een halfpipe.

Op de foto van figuur 20 stort een skater zich in een cirkelvormige 'halfpipe' omlaag. In figuur 21 links is de skater voorgesteld als een rechthoekig lichaam met zwaartepunt Z. De massa van de skater is 61 kg, de baansnelheid van de skater is 9,0 m/s. De wrijvingskracht is te verwaarlozen.

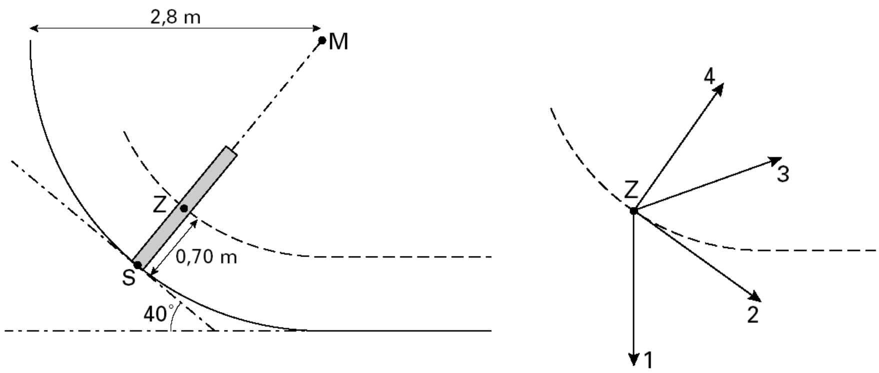
a Welke twee krachten werken op de skater in punt S?

b Bereken de benodigde middelpuntzoekende kracht.

c Bereken de normaalkracht die de helling in deze situatie op de skater uitoefent. Ontbind daartoe eerst de zwaartekracht op de skater.

De snelheid langs de helling neemt toe. In figuur 21 rechts zijn met genummerde pijlen vier richtingen aangegeven. Eén van deze richtingen is bij benadering de richting van de resulterende kracht op de skater.

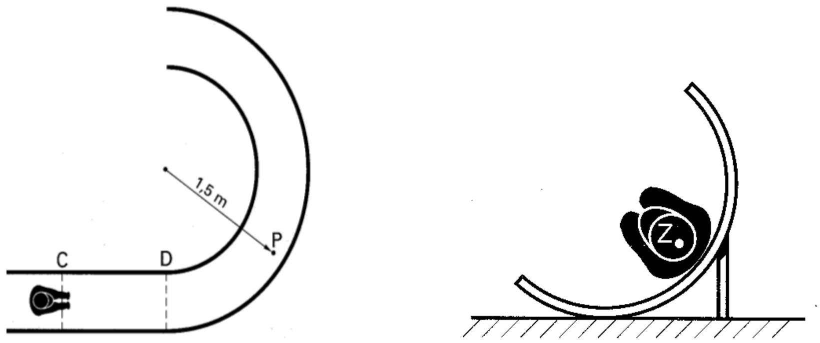
d Leg uit welke pijl deze richting het beste benadert.



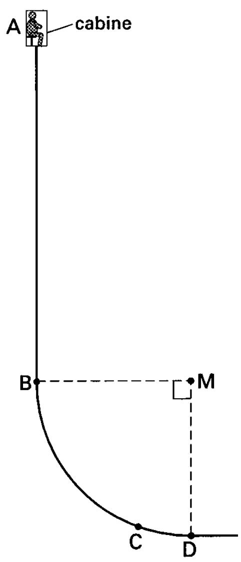
Figuur 21 – Positie van de skater in punt S.

27 Glijbaan

In figuur 22 is het bovenaanzicht van een glijbaan weergegeven. Keesje (massa 35 kg) laat zich naar beneden glijden. Tussen C en D versnelt Keesje, daarna volgt een horizontaal gelegen bocht waardoor Keesje een cirkelbeweging uitvoert. De goot heeft een opstaande rand om het uit de bocht vliegen te voorkomen.



Figuur 22 – Bovenaanzicht (links) en dwarsdoorsnede (rechts) van een glijbaan.



Figuur 23

Op een bepaald punt P in de goot is Keesjes snelheid 2,5 m/s. In figuur 22 rechts is een verticale dwarsdoorsnede van de goot in dat punt getekend. Het zwaartepunt Z van Keesje is daarin met een witte stip aangegeven. Op Keesje werken (naast de wrijvingskracht) twee krachten die in het vlak van tekening liggen.

a Welke twee krachten werken er op Keesje in het vlak van de doorsnede?

b Leg uit dat de resulterende kracht op Keesje niet nul is.

c In welke richting werkt de resulterende kracht?

d Bereken de zwaartekracht en de middelpuntzoekende kracht.

e Teken in (een kopie van) figuur 22 alle krachten op Keesje in de juiste verhouding.

28 Vrije val

Bij een attractie in een pretpark kan men ondervinden hoe een 'vrije val' aanvoelt. Een speciale cabine ondergaat op het traject AB van figuur 23 een vrije val. Na B is de baan cirkelvormig tot punt D, met middelpunt M en een straal van 5,0 m. Op het stuk BCD is de wrijving niet te verwaarlozen. In punt C bereikt de cabine de maximale snelheid: 17,0 m/s. De inzittende heeft een massa van 65 kg.

a Bereken de grootte van de middelpuntzoekende kracht op de inzittende als de cabine punt C passeert.

Op de cabine werken drie krachten: de zwaartekracht, de normaalkracht en de wrijvingskracht. De cabine met inzittende heeft een massa van 250 kg.

In punt C bereikt de cabine de maximale snelheid: 17,0 m/s.

b Leg uit dat de resulterende kracht op de cabine in punt C gericht is naar punt M.

3 Cirkelbanen en impuls

3.5 De ruimte in: gravitatie-energie

Wat gaan we doen?

Het lanceren van satellieten kost veel energie. Een deel van die energie wordt gebruikt om de satelliet snelheid te geven, een ander deel is nodig om tegen de gravitatiekracht in te bewegen. Die energie gaat niet verloren maar wordt, net als bij de zwaartekracht, omgezet in gravitatie-energie.

De centrale vragen voor deze paragraaf zijn:

- *Wat wordt bedoeld met gravitatie-energie?*
- *Hoe kun je de formule voor de gravitatie-energie gebruiken?*

29 Oriëntatie – Een formule voor gravitatie-energie

Voor de gravitatie-energie E_{grav} (in J) geldt de volgende formule:

$$E_{grav} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Figuur 24 – Voor de lancering van een satelliet is een grote raket nodig. De satelliet bevindt zich in de neus van de raket.

In deze formule is G de gravitatieconstante (zie BINAS – tabel 7), M de massa (in kg) van de aarde (of een ander hemellichaam), m de massa (in kg) van de satelliet en r de afstand (in m) van de satelliet tot het midden van de aarde.

Het lijkt op het eerste gezicht een normale formule, maar er is toch wel iets merkwaardigs aan de hand. Zo is de uitkomst van deze formule altijd *negatief*. Hoe kan dat? Daarnaast is de energie omgekeerd evenredig met de afstand, terwijl de gravitatiekracht omgekeerd kwadratisch evenredig met de afstand is.

Als je de formule invult voor een massa van 1 kg op het aardoppervlak dan is het resultaat -62,5 MJ (ruwweg de energie van 2 L benzine).

a Wat zou die uitkomst kunnen betekenen?

Als een satelliet gelanceerd wordt, dan kost het energie om tegen de gravitatiekracht in te bewegen. Die energie wordt opgeslagen als gravitatie-energie. Dus moet de gravitatie-energie toenemen naarmate de satelliet verder van de aarde komt.

b Ga na of bij deze formule de gravitatie-energie toeneemt naarmate de satelliet verder van de aarde gebracht wordt.

c Stel dat je de afstand r 3 keer zo groot maakt. Hoe groot wordt dan volgens de formule de gravitatie-energie van een voorwerp van 1 kg?

d Ga na dat de gravitatie-energie toeneemt als de afstand r 3 keer zo groot wordt.

Met de formule voor de gravitatie-energie moet je kunnen berekenen hoeveel energie er nodig is om een satelliet te lanceren.

e Hoe denk je dat je de formule zou kunnen gebruiken om te berekenen hoeveel energie er nodig is voor de lancering van een satelliet, bijvoorbeeld vanaf de aarde naar een baan waarbij de afstand r 3 keer zo groot is?

Plan van aanpak

Het plan van aanpak bestaat uit de volgende onderdelen:

- Nagaan wat de betekenis van gravitatie-energie is.
- De toename van de gravitatie-energie vergelijken met de arbeid tegen de gravitatiekracht in.
- De formule voor gravitatie-energie afleiden met integralen (alleen voor leerlingen met wiskunde B).

Uitwerking

30 Betekenis van gravitatie-energie

De gravitatie-energie hangt, net als de zwaarte-energie, af van de *positie* van het voorwerp. Met de gravitatie-energie kun je de arbeid berekenen die verricht moet worden om een voorwerp te *verplaatsen* van de ene positie naar de andere.
Als de energie afhangt van de *positie*, dan moet je ook afspreken op welke positie de energie nul is. Die afspraak is niet veel meer dan een handige keuze.

a Op welke positie is de zwaarte-energie nul?

b Op welke positie is de energie van een massa aan een veer nul?

Volgens de formule voor de gravitatie-energie is de energie op geen enkele positie nul.

c Op welke positie is de gravitatie-energie vrijwel nul?

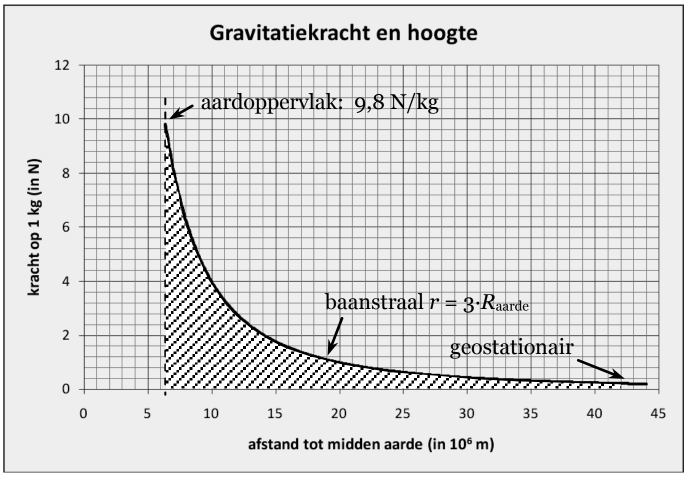
Bij een lancering wordt ook wel gesproken over *ontsnappingsenergie*. Dat geeft aan hoeveel energie er nodig is om een voorwerp zo ver weg te brengen dat de invloed van de aarde verwaarloosbaar geworden is.

d Leg uit (of bereken) dat vanaf het aardoppervlak de ontsnappingsenergie 62,5 MJ per kg is.

e Leg uit wat de betekenis is van het feit dat de gravitatie-energie op elke positie *negatief* is.

31 Arbeid voor een lancering

Bij een lancering is arbeid nodig om tegen de gravitatiekracht in te bewegen. In de grafiek van figuur 25 is het verband tussen de gravitatiekracht op 1 kg en de afstand tot het midden van de aarde getekend. In deze opdracht kijken we naar een lancering tot een baan met $r = 3 \cdot R_{\text{aarde}}$.



Figuur 25 – Gravitatiekracht en de hoogte boven het aardoppervlak.

a Leg uit dat de arbeid bij de lancering van 1 kg gelijk is aan de oppervlakte onder de grafiek van figuur 25.

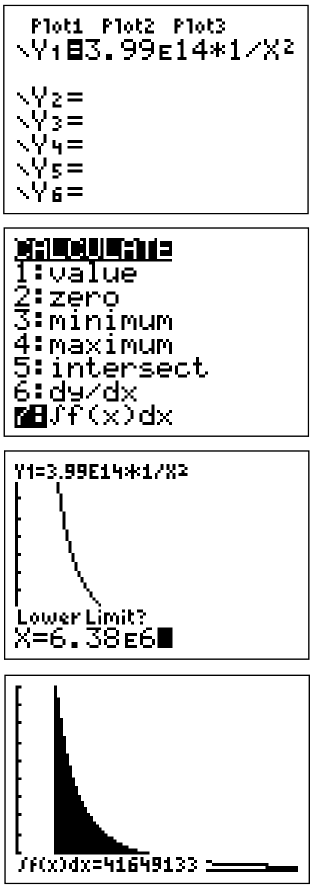
Met de grafische rekenmachine is de oppervlakte te berekenen. Invullen van de gegevens van de aarde in de formule voor de gravitatiekracht geeft:

$$F_{\text{grav}} = G \cdot \frac{M_{\text{aarde}} \cdot 1}{r^2} = 3{,}99 \cdot 10^{14} \cdot \frac{1}{r^2}$$

In deze formule is r de afstand (in 10^6 m) tot het midden van de aarde.

b Noteer deze formule in de grafische rekenmachine als Y = $3{,}99 \cdot 10^{14} \cdot 1/X^2$.

c Stel het juiste window in: X op [0; 45E6] en Y op [0; 10] en laat de grafiek van F_{grav} tekenen. De horizontale schaal is in m, de verticale schaal is in N/kg.



Figuur 26 – Berekenen van de arbeid via de oppervlakte-methode met de grafische rekenmachine.

Bij een lancering naar een baan met $r = 3 \cdot R_{\text{aarde}}$ geldt: $r = 19{,}1 \cdot 10^6$ m.

d Gebruik het menu CALC om de oppervlakte onder de grafiek te berekenen van $r = 6{,}38 \cdot 10^6$ tot $r = 19{,}1 \cdot 10^6$ m. Geef het antwoord in MJ.

e Vergelijk het resultaat met de gravitatie-energie op aarde (–62,5 MJ/kg) en in de baan met $r = 3 \cdot R_{\text{aarde}}$. Wat is je conclusie?

32 Oppervlakte met een integraal (wiskunde B)

De oppervlakte onder de grafiek van de gravitatiekracht vanaf het aardoppervlak tot een willekeurige baan met straal r is gelijk aan de integraal:

$$\int_{R_{\text{aarde}}}^{r} F_{\text{grav}}(x) \cdot dx$$

a Leg uit dat je deze integraal kunt schrijven als:

$$\int_{R_{\text{aarde}}}^{r} G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{x^2} \cdot dx$$

b Wat is de primitieve van $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$?

c Laat zien dat je de integraal kunt schrijven als:

$$\left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{r}\right) - \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{R_{\text{aarde}}}\right)$$

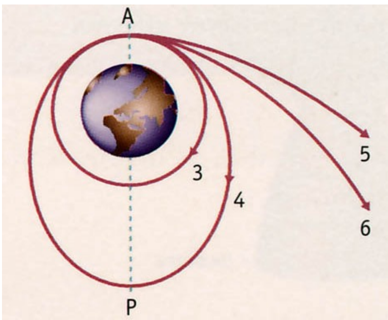
d Laat zien dat de uitkomst van deze formule positief is.

Met de integraal bereken je de arbeid. De formule die daaruit volgt kun je lezen als het verschil in zwaarte-energie: $W = E_{\text{grav,r}} - E_{\text{grav,aarde}}$.

e Leg dit uit.

Begrippen

Gravitatie-energie



Figuur 27 – Als de snelheid groot genoeg is, dan keert de satelliet nooit meer terug. Hij 'ontsnapt' van de aarde.

Samenvatting

Gravitatie-energie – Er is energie nodig om weg te komen van de aarde. De arbeid die nodig is om tegen de gravitatiekracht in te bewegen zorgt voor een toename van de gravitatie-energie.

Voor de gravitatie-energie E_{grav} (in J) geldt:

$$E_{\text{grav}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

In deze formule is G de gravitatieconstante ($6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²), M_{aarde} de massa (in kg) van de aarde, m de massa (in kg) van het voorwerp en r de afstand (in m) van het voorwerp tot het midden van de aarde.

Uit deze formule blijkt dat het nulpunt voor de gravitatie-energie niet op het aardoppervlak ligt, maar juist oneindig ver weg.

Negatieve energie – De gravitatie-energie is altijd *negatief*. De gravitatie-energie wordt ook wel de *bindingsenergie* (of energieschuld) genoemd. Hoe verder het voorwerp van de aarde komt, des te zwakker is het gebonden en des te kleiner (en negatief) is de gravitatie-energie.

De arbeid die nodig is om een voorwerp naar een positie verder van de aarde te brengen is gelijk aan het verschil in gravitatie-energie tussen de twee posities.

Om te kunnen 'ontsnappen' aan de aarde moet tenminste zoveel energie worden toegevoerd dat de totale energie positief is.

Keuzemateriaal
Tussen deze paragraaf en de volgende past de online aangeboden keuzeparagraaf 3.10.
Keuzeparagraaf 3.10 gaat over de energie die nodig is voor het uitvoeren van ruimtereizen, bijvoorbeeld naar de planeet Mars.

Begripstest

33 Geef bij de onderstaande beweringen met ja of nee aan of de uitspraak klopt.

a De gravitatie-energie is omgekeerd evenredig met de hoogte boven het aardoppervlak. ja / nee

b De eenheid van gravitatie-energie is MJ/kg. ja / nee

c De gravitatie-energie is nul op het aardoppervlak. ja / nee

d Naarmate een voorwerp verder van de aarde komt, neemt de gravitatie-energie toe. ja / nee

e De gravitatie-energie van een satelliet geeft aan hoeveel energie er nodig is geweest om die satelliet op te tillen vanaf het aardoppervlak naar de baan waarin de satelliet draait. ja / nee

f De arbeid die nodig is om een satelliet 'op te tillen' vanaf het aardoppervlak is evenredig met de hoogte. ja / nee

Opgaven

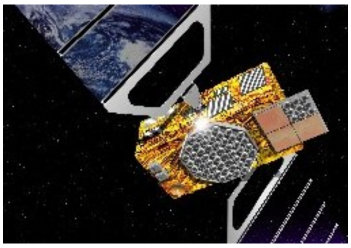
34 De gravitatie-energieformule gebruiken
We hebben nu een formule gevonden voor de gravitatie-energie:

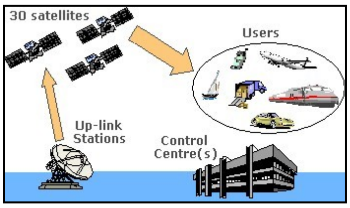
$$E_{grav} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

a Bereken met de formule de gravitatie-energie aan het aardoppervlak voor een satelliet van 100 kg. Geef het antwoord in GJ.

b Bereken met de formule de gravitatie-energie in een geostationaire baan (met een straal van 42.242 km om de aarde) voor een satelliet met een massa van 100 kg. Geef het antwoord in GJ.

c Bereken hiermee de arbeid die nodig is om de satelliet op te tillen vanaf het aardoppervlak naar een geostationaire baan.





Figuur 28 – Het GPS-netwerk van Galileo.

35 GPS-satellieten
Satellieten van het Galileo GPS-netwerk hebben een massa van 525 kg en worden in een baan op een hoogte van 23.222 km boven het aardoppervlak gebracht.

a Bereken de snelheid die de satellieten in deze baan hebben.

b Bereken de bewegingsenergie van zo'n satelliet.

Bij de lancering wordt gebruik gemaakt van de draaiing van de aarde. Voor de lancering is de snelheid van de satelliet daardoor 370 m/s.

c Bereken de toename aan kinetische energie van de satelliet vanaf de lancering tot de in de GPS-baan rond de aarde.

d Bereken de toename in gravitatie-energie bij het in een baan brengen van een satelliet.

Van de brandstof die bij de lancering wordt gebruikt wordt 2,5% omgezet in een toename van de bewegings- en gravitatie-energie.

e Bereken hoeveel energie de brandstof in totaal moet leveren.

36 Gravitatie-energie

De satelliet Artemis met een massa van $3{,}2 \cdot 10^3$ kg werd in juli 2001 gelanceerd door de ESA en in een geostationaire baan rond de aarde gebracht.

a Bereken hoeveel arbeid er tegen de zwaartekracht in verricht moet worden om deze satelliet in een geostationaire baan te brengen.

Het ruimtestation ISS bevindt zich op een hoogte van ongeveer 342 km boven het aardoppervlak. De massa van alle reeds geplaatste modules samen bedraagt 208 ton. Elke dag daalt het vaartuig ongeveer 100 m, waarvoor continu moet worden gecorrigeerd. De gemiddelde snelheid bedraagt 27.744 km/h.

b Bereken hoeveel energie er elke dag nodig is om de daling te corrigeren. Gebruik daarbij dat de zwaartekracht over een afstand van 100 m nauwelijks verandert.

37 Ontsnappingssnelheid

In de astrofysica wordt wel de term *ontsnappingssnelheid* gebruikt. Daarmee bedoelt men de snelheid waarmee een voorwerp vanaf het oppervlak van een hemellichaam wordt afgeschoten zodat het kan 'ontsnappen' aan de aantrekkingkracht van het hemellichaam.

De ontsnappingssnelheid staat ook in BINAS. Bij de aarde is die ontsnappingssnelheid 11,2 km/s, bij de zon 618 km/s. Bij een zwart gat is die snelheid groter dan de lichtsnelheid. Je kunt ook zeggen: een voorwerp met de ontsnappingssnelheid heeft voldoende energie om aan een hemellichaam te ontsnappen.

De gravitatie-energie van een voorwerp van 1 kg aan het aardoppervlak is –62,5 MJ.

a Bereken de bewegingsenergie van een voorwerp van 1 kg met een snelheid van 11,2 km/s. Leg uit dat deze snelheid groot genoeg is om aan de aarde te ontsnappen.

b De ontsnappingssnelheid bij de zon is 55 keer zo groot als bij de aarde. Betekent dit dan ook dat er 55 keer zoveel energie nodig is om iets vanaf de zon weg te schieten? Leg uit of geef een berekening.

38 Meteoor

Een 'vallende ster' is een meteoor, die tijdens het binnendringen in de dampkring verbrandt en hierdoor een lichtend spoor trekt. Soms is een meteoor zo groot dat deze niet geheel verbrandt en het aardoppervlak bereikt. Lang geleden is bij Mexico zo'n enorme meteoor met een snelheid van 30 km/s op het aardoppervlak ingeslagen. Vanwege de enorme massa is in dit geval de invloed van de luchtwrijving op de snelheid bij het doorklieven van de dampkring te verwaarlozen.

Bereken de snelheidstoename van de meteoor ten gevolge van de gravitatiekracht van de aarde.

3 Cirkelbanen en impuls

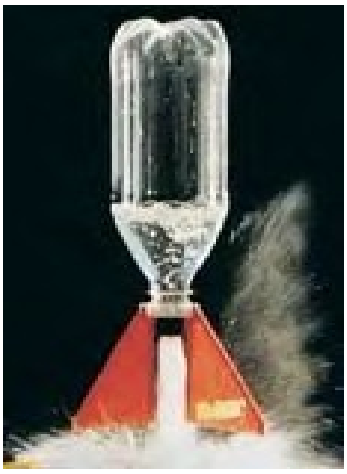
3.6 Explosies en botsingen: de voortstuwing van raketten

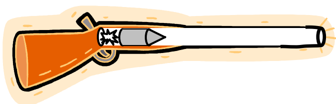
Wat gaan we doen?

Een raket stoot onder hoge snelheid brandstof uit. De stuwkracht van de motor wordt bepaald door de snelheid van de brandstof en de hoeveelheid brandstof die uitgestoten wordt.

De centrale vragen voor deze paragraaf zijn:

- *Hoe werkt de voorstuwing van een raket in de ruimte?*
- *Hoe is de stuwkracht van de motor te bepalen?*





Figuur 29 – Een waterraket (boven) maakt gebruik van een explosie, net als een geweer (onder).

39 Oriëntatie – Raket of geweer

Het uitstoten van brandstof door een raket is een voorbeeld van een *explosie*, net als het afschieten van een kogel door een geweer. Bij een explosie gaat het steeds om twee voorwerpen waartussen een afstotende kracht werkt.

a Hoe merk je bij een geweer dat er niet alleen een kracht op de kogel werkt, maar ook op het geweer?

De kogel in een geweer is niet zo eenvoudig te vergelijken met het water in een waterraket.

b Noem één belangrijk verschil tussen het water en de kogel.

c Bij een geweer is de explosie goed te herkennen. Wat is bij een waterraket de oorzaak van de afstotende kracht?

d Leg uit hoe er bij een waterraket een kracht omhoog ontstaat.

Bij een geweer moet de kracht van de explosie afgeleid kunnen worden uit de snelheid en de massa van de kogel.

e Bij een waterraket wordt geen kogel maar water weggeschoten. Uit welke twee gegevens moet je dan de stuwkracht van de explosie kunnen afleiden?

Plan van aanpak

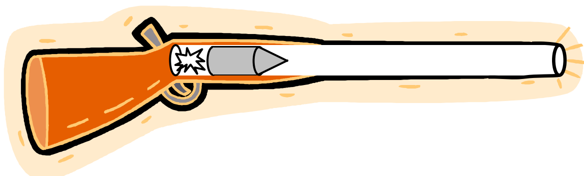
Het plan van aanpak bestaat uit de volgende onderdelen:

- Bepaal de grootte van de kracht op het geweer uit de massa en de snelheid van de kogel.
- Onderzoek het verband tussen de snelheden en de massa's.
- Bereken de stuwkracht van een raket uit de eigenschappen van de brandstofuitstoot.

Uitwerking

40 Krachten bij een explosie

Door de explosie ontstaat in de ruimte binnen het geweer een grote druk.



Figuur 30 – Door de explosie in een geweer wordt de kogel afgeschoten.

Figuur 31 – De wateruitstoot zorgt bij een waterraket voor de stuwkracht.

Deze druk zorgt zowel voor de kracht op de kogel als voor de kracht die het geweer naar achteren duwt (de terugslag).

a Leg uit dat de kracht op de kogel even groot is als de kracht van de explosie naar achteren op het geweer (de terugslag).

Door de explosie krijgen de kogel en het geweer beide een snelheid, maar het geweer krijgt een veel kleinere snelheid dan de kogel.

b Waardoor is de snelheid van het geweer veel kleiner?

Om de gemiddelde kracht die tijdens de explosie op de kogel werkt te berekenen wordt de volgende formule gebruikt:

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

c Welke twee eigenschappen van de afgevuurde kogel kun je hier rechtstreeks invullen? En welk gegeven ontbreekt nog om de kracht te kunnen berekenen?

Een wapen dat berucht is om de zware terugslag is de AK-47, die ook wel naar de ontwerper Kalashnikov genoemd wordt.

Gegevens AK-47	
massa	5,13 kg
lengte geweer	87 cm
lengte loop:	41 cm
snelheid kogel	710 m/s
massa kogel	7,9 g

Figuur 32 – AK-47.

In de kantlijn staan gegevens over de snelheid en de energie van de kogels uit de AK-47. Voor het rekengemak nemen we aan dat de kracht tijdens het wegschieten constant is. Met de lengte van de loop en de eindsnelheid is de tijd te berekenen die voor het versnellen nodig is.

d Laat zien dat de versneltijd Δt in de loop 1,15 ms is.

e Bereken de kracht op de kogel met de formule $F = m \cdot \Delta v / \Delta t$.

41 Massa en snelheid

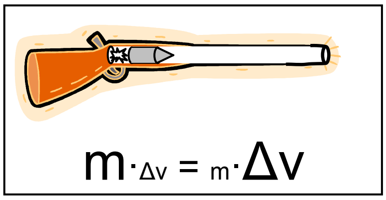
Bij een explosie is de kracht op beide voorwerpen gelijk. De massa van het geweer is 650 keer zo groot als de massa van de kogel.

a Betekent dit nu dat het geweer een 650 keer zo kleine snelheid heeft gekregen? Ga dit na met een berekening met de formule $F = m \cdot \Delta v / \Delta t$.

Deze formule kan ook geschreven worden als: $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$.

b Leg hiermee uit dat bij een explosie altijd geldt dat de snelheden die de twee voorwerpen krijgen omgekeerd evenredig zijn met de massa's.

c Dit principe is ook weergegeven in figuur 33. Leg uit dat bij een explosie altijd geldt dat $m_1 \cdot \Delta v_1 = m_2 \cdot \Delta v_2$.



Figuur 33

42 Stuwkracht

Bij een raket moet de stuwkracht ook berekend kunnen worden uit de massa en de snelheid van de uitgestoten brandstof, met dezelfde formule als bij het geweer: $F = m \cdot \Delta v / \Delta t$.

In deze formule is Δv de snelheidstoename van het water.

a Leg uit dat Δv gelijk is aan de snelheid waarmee de brandstof naar buiten geschoten wordt.

b Laat zien dat je de formule ook kunt schrijven als: $F = (m/\Delta t) \cdot \Delta v$.

c Wat zou in deze formule de betekenis van $m/\Delta t$ zijn?

Een raket heeft een massa van 500 kg. De uitstroomsnelheid van het water is $1{,}5 \cdot 10^3$ m/s en er wordt 4,5 kg brandstof per seconde uitgestoten.

d Bereken de stuwkracht van de raket.

e Bereken de versnelling van de raket direct na de start. Houd daarbij rekening met de zwaartekracht.

Begrippen

Explosie
Stuwkracht
Impuls (hoeveelheid beweging)

Samenvatting

Explosie – Bij een explosie tussen twee voorwerpen zijn de kracht F op beide onderdelen en de tijd Δt waarin de kracht werkt even groot. Beide voorwerpen krijgen door de explosie een snelheid. Voor de snelheidstoename Δv geldt:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$$

Bij een explosie tussen twee voorwerpen krijgen beide een snelheid. De grootte van de snelheid is omgekeerd evenredig met de massa:

$$m_1 \cdot \Delta v_1 = m_2 \cdot \Delta v_2$$

Stuwkracht raket – Bij een raket is de stuwkracht te bepalen uit de snelheid en de massa van de uitgestoten brandstof. Voor de stuwkracht wordt de formule geschreven als:

$$F = \frac{m}{\Delta t} \cdot \Delta v$$

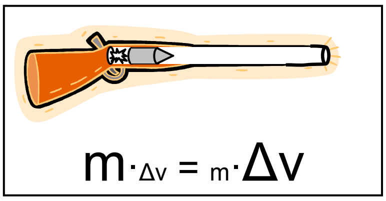
In deze formule is $m/\Delta t$ de massa-uitstoot per seconde (in kg/s).

Impuls – Bij een explosie (of botsing) verandert de hoeveelheid beweging van beide voorwerpen. De hoeveelheid beweging wordt ook wel de *impuls* van een voorwerp genoemd. Impuls heeft ook een richting. Als de impuls naar rechts positief is, dan is de impuls naar links negatief.
Voor de impuls p (in kgm/s) van een voorwerp geldt:

$$p = m \cdot v$$

In deze formule is m de massa (in kg) en v de snelheid (in m/s) van het voorwerp.

Impuls of energie – Bij botsingen en explosies is impuls een veel belangrijker begrip dan energie. Het principe van behoud van impuls of impulsoverdracht geldt in elke situatie. Het principe van behoud van energie is natuurlijk ook altijd geldig, maar vaak gaat een deel van de energie 'verloren' aan wrijving of warmte.



Figuur 34 – Bij een geweer is de totale impuls na de explosie nog steeds nul.

Begripstest

43 Geef bij de onderstaande beweringen met ja of nee aan of de uitspraak klopt.

a Bij een explosie krijgen beide voorwerpen een even grote snelheid. ja / nee

b Bij een explosie krijgen beide voorwerpen een even grote impuls. ja / nee

c De eenheid van impuls is Nm/s. ja / nee

d De stuwkracht van een raket is evenredig met de massa-uitstoot per seconde. ja / nee

e Als een raket 2 keer zoveel brandstof per seconde uitstoot met een 2 keer zo grote snelheid, dan wordt de stuwkracht 2 keer zo groot. ja / nee

Opgaven

44 Waterraket

Een waterraket is gevuld met 400 g water. De raket heeft een massa van 100 g. Bij de start van de lancering is de versnelling 18 m/s² recht omhoog.

a Bereken de stuwkracht van het uitstromende water. Houd rekening met de zwaartekracht.

Bij de start is de uitstroomsnelheid van het water 12,5 m/s.

b Bereken hoeveel gram water er per seconde wordt uitgestoten.

Neem aan dat de uitstroomsnelheid van het water tijdens de lancering constant is.

c Bereken hoe lang de lancering duurt.

d Leg uit dat de versnelling tijdens de lancering niet constant is.

45 De energie van de explosie

De kogel uit een AK-47 krijgt een snelheid van 710 m/s. Het geweer krijgt door het afvuren van één kogel een snelheid van 1,09 m/s. Gebruik in deze opgave waar nodig ook de gegevens in het kader bij opdracht 40.

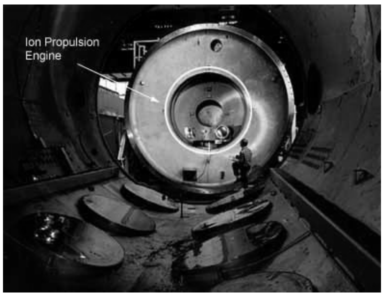
a Laat met een berekening zien dat de impuls van de kogel even groot is als de impuls van het geweer.

b Bereken de bewegingsenergie van het geweer en de bewegingsenergie van de kogel.

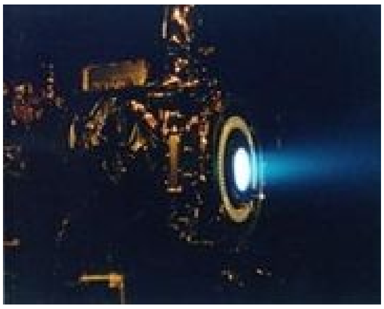
De kogel en het geweer kregen beide evenveel impuls, maar de energie blijkt helemaal niet eerlijk verdeeld.

c Laat zien dat de energie van de kogel en het geweer omgekeerd evenredig zijn met de massa.

d Wat betekent dat voor raketmotoren? Waar gaat de meeste energie naar toe?



Figuur 35 – Een ionenmotor.



Figuur 36 – Deep Space I.

46 Ionenmotor

De Amerikaanse ruimtesonde Deep Space I is de eerste van een serie ruimtesondes met een ionenmotor die werkt op het edelgas xenon. De xenon-atomen worden eerst geïoniseerd en daarna versneld met een elektrische kracht.

Deep Space I heeft 80 kg xenongas aan boord, waarop zijn ionenmotor 430 dagen lang zou kunnen werken.

a Bereken hoeveel gram xenon per seconde wordt uitgestoten.

De uitstoot van xenon levert een stuwkracht van 90 mN op (90 millinewton: het gewicht van twee A4-tjes).

b Bereken de snelheid waarmee de xenon-ionen uitgestoten worden.

De massa van Deep Space I neemt door het uitstoten van xenon gelijkmatig af. De gemiddelde massa tijdens de reis bedraagt 460 kg.

c Bereken hoe groot de totale snelheidstoename van Deep Space I is op basis van de genoemde stuwkracht.

De ionenmotor werkt op zonnepanelen en verbruikt 2400 W aan elektrisch vermogen.

d Bereken hoeveel procent van deze energie wordt omgezet in bewegingsenergie van de xenon-ionen.

Bij een ionenmotor gaat dus een aanzienlijk deel van de energie ‘verloren’ aan de uitgestoten ionen.

e Waarom is dit bij de ionenmotor niet zo’n groot probleem?

Ionenmotor

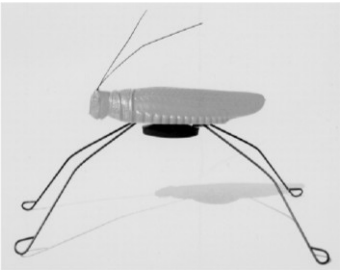
Conventionele raketmotoren kunnen in een korte tijd een enorme versnelling geven, maar verbruiken daarbij ook grote hoeveelheden brandstof. De brandstofvoorraad zelf moet evenals het ruimtevaartuig en de zware raketmotoren ook voortgestuwd worden.

Ionenmotoren daarentegen produceren een kleine voortstuwingskracht, maar zijn bijzonder zuinig. Ze produceren per kilogram brandstof meer voortstuwingskracht dan conventionele raketmotoren. Ze kunnen op de lange duur dus dezelfde snelheid bereiken, maar met een veel lager brandstofverbruik.

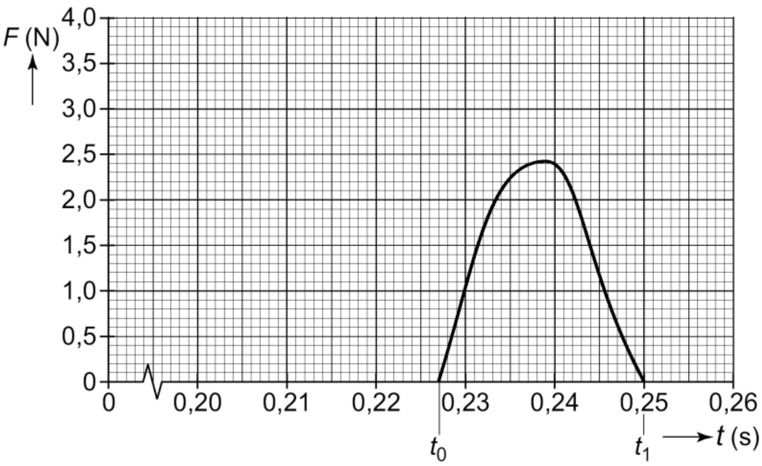
47 Sprinkhaan

Op de foto van figuur 37 zie je een speelgoedsprinkhaan. Onder het lijf van de sprinkhaan zit een zuignap, die zich op de ondergrond vastzuigt als je de sprinkhaan stevig naar beneden drukt. Als de zuignap loskomt van de ondergrond, begint de afzet van de sprong (tijdstip t_0). Even later komen ook de poten los van de ondergrond. Dan eindigt de afzet (tijdstip t_1).

Met een krachtsensor is de resulterende kracht tijdens de afzet gemeten. De F,t-grafiek is weergegeven in figuur 38.



Figuur 37



Figuur 38 –Afzetkracht van de vier poten van de sprinkhaan.

De massa van de sprinkhaan is 6,2 g.

a Bepaal de oppervlakte onder de F,t-grafiek.

b Leg uit dat de impuls van de sprinkhaan na de afzet even groot is als de oppervlakte onder de grafiek.

c Bereken daarmee de snelheid van de sprinkhaan op het tijdstip t_1.

48 Raketvoortstuwing

Een raket brengt een satelliet omhoog. De raket bestaat uit twee trappen. Op het moment dat de laatste trap in werking treedt, heeft het geheel al een bepaalde snelheid. In de tabel van figuur 39 staan de gegevens over de voortstuwing door de laatste trap van de raket.

beginsnelheid	v_b	600 m/s
massa raket	m_{raket}	960 kg
massa satelliet	m_{sat}	400 kg
massa stuwstoffen	m_s	5360 kg
stuwstofverbruik	$\Delta m_s/\Delta t$	80 kg/s
uitstootsnelheid verbrandingsgassen	v_{gas}	2,4 km/s

Figuur 39

De laatste trap van de raket treedt in werking op het tijdstip dat we t = 0 noemen. De raket heeft op dat moment een beginsnelheid v_b van 600 m/s. Vanaf t = 0 stoot de raket elke seconde 80 kg brandstof uit met een snelheid van 2,4 km/s.

a Bereken de stuwkracht van de raket.

De totale massa van het geheel bestaat uit de raket, de satelliet en de stuwstoffen. Door de uitstoot van stuwstoffen daalt de totale massa.

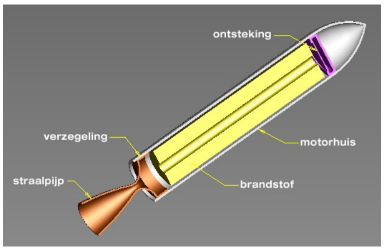
b Bereken de snelheidstoename van de raket gedurende de eerste seconde. Gebruik daarbij de gemiddelde massa in de eerste seconde.

c Hoe groot is dan de snelheid van de raket op het tijdstip t = 1,00 s?

Tijdens de tweede seconde neemt de snelheid van de raket verder toe. Maar de massa van de raket is door het uitstoten van verbrandingsgassen inmiddels iets kleiner geworden.

d Leg uit of de snelheid van de raket gedurende de tweede seconde meer of minder zal toenemen dan gedurende de eerste seconde.

e Bereken de snelheid van de raket op het tijdstip t = 2,00 s.



Figuur 40 – Een raket met vaste brandstof.

3 Cirkelbanen en impuls

3.7 Explosies en botsingen: impuls-behoud bij botsingen

Wat gaan we doen?

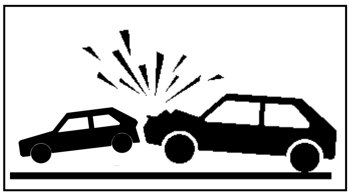
In de voorgaande paragraaf hebben we kennis gemaakt met het begrip *impuls*. Dit begrip is vooral handig in situaties waarbij twee voorwerpen een kracht op elkaar uitoefenen, waardoor hun beweging verandert. Voorbeelden daarvan zijn explosies en botsingen.

De centrale vraag voor deze paragraaf is:

- *Hoe kun je het begrip impuls gebruiken bij botsingen?*

49 Oriëntatie – Een kop-staartbotsing

Bij een kop-staartbotsing rijdt een auto van achteren tegen een stilstaande auto. Een dergelijke botsing kan, ook bij lage snelheden, ernstig letsel toebrengen aan de inzittenden van de voorste auto (bijvoorbeeld een whiplash). De 'klap' voor de inzittenden wordt vooral bepaald door de versnelling van de auto tijdens de botsing.



Figuur 41 – Kop-staartbotsing waarbij de achterste auto veel zwaarder is.

Met de komst van steeds grotere en zwaardere personenauto's neemt de kans op ernstig letstel toe. In figuur 41 zie je zo'n situatie, waarbij de achterste auto groter en zwaarder is dan de voorste auto.

a In welke richting werkt de kracht op de voorste auto? En op de achterste auto?

Neem aan dat de massa van de achterste auto 2 keer zo groot is als de massa van de voorste auto. Wat heeft dat voor gevolg voor de krachten, de snelheidsverandering en de versnelling? Geef bij de volgende vragen jouw voorspelling.

b Denk je dat de kracht op de achterste auto dan 2 keer zo groot, even groot of 2 keer zo klein is als de kracht op de voorste auto?

c Wat zal het gevolg zijn voor de snelheidsverandering en de versnelling: 2 keer zo groot, even groot of 2 keer zo klein? Noteer je voorspelling.

Plan van aanpak

In deze situatie gaat het om krachten op de auto's en om de versnelling tijdens de botsing. Het plan van aanpak bestaat uit de volgende onderdelen:

- Nagaan wat er geldt voor de krachten op de auto's tijdens de botsing.
- Nagaan hoe hier gebruik gemaakt kan worden van impulsbehoud.
- De tijdsduur van de botsing schatten.
- De snelheidsverandering en de versnelling van beide auto's bepalen.

Uitwerking

50 Krachten en impulsbehoud

Tijdens de botsing oefenen de twee auto's een kracht op elkaar uit. Voor beide auto's geldt: $F{\cdot}\Delta t = m{\cdot}\Delta v$. De tijdsduur Δt van de botsing is nog niet bekend: die hangt af van de kreukelzone van de auto's.

a Stel je de kreukelzone voor als een grote veer. Leg uit dat een goede kreukelzone de klap voor beide auto's kleiner maakt.

b Leg uit dat de kracht op de voorste auto tijdens de botsing even groot is als de kracht op de achterste auto.

Beide auto's ondervinden tijdens de botsing een kracht. Die krachten zijn even groot en tegengesteld van richting. Bovendien werken de krachten even lang op de auto's. Dus: F en Δt zijn even groot.

c Laat zien dat voor beide auto's de impulsverandering $m \cdot \Delta v$ even groot is.

d Leg uit dat dan ook moet gelden dat de totale impuls na de botsing even groot is als voor de botsing.

> **Inelastische botsing**
> Een botsing waarbij de voorwerpen na de botsing aan elkaar vast zitten noemen we een *volkomen inelastische botsing*.
> Bij de meeste botsingen wordt een deel van de bewegingsenergie omgezet in warmte. Een elastische botsing is een botsing waarbij ook de bewegingsenergie behouden blijft.

51 Snelheidsverandering en kracht

De voorste auto heeft een massa van 800 kg. De massa van de achterste auto is 2 keer zo groot: 1600 kg. De snelheid van de achterste auto is 12 m/s, de voorste staat stil.

a Bereken de impuls voor de botsing.

Bij een kop-staartbotsing blijven de auto's na de botsing vaak aan elkaar vast zitten. Samen vormen ze dan een voorwerp van 2400 kg. Zo'n botsing noemen we een *volkomen inelastische botsing*.

b Bereken de snelheid direct na de botsing. Maak daarbij gebruik van impulsbehoud.

c Bereken voor elke auto de snelheidsverandering Δv.

Onder de 'klap' verstaan we de (gemiddelde) versnelling of vertraging tijdens de botsing. De tijdsduur van de botsing hangt af van de kreukelzones van de auto's. Een redelijke schatting voor die tijdsduur is 0,10 s.

d Bereken voor beide auto's de versnelling en de kracht op de auto tijdens de botsing.

e Ga na of je voorspellingen bij opdracht 49 zijn uitgekomen.

Samenvatting

Voor de *impuls p* (in kg·m/s) van een voorwerp geldt:

$$p = m \cdot v$$

In deze formule is m de massa (in kg) en v de snelheid (in m/s) van het voorwerp.

Bij een explosie of een botsing is de impulsverandering van beide voorwerpen even groot, de richting is tegengesteld:

$$m_1 \cdot \Delta v_1 = -m_2 \cdot \Delta v_2$$

Bij een volkomen inelastische botsing blijven de voorwerpen aan elkaar vast zitten. De totale impuls blijft constant. Dat kan geschreven worden als:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_{\text{eind}}$$

Begrippen

Impulsverandering
Impulsbehoud
Inelastische botsing

Begripstest

52 Geef bij de onderstaande beweringen met ja of nee aan of de uitspraak klopt.

a	Bij elke botsing of explosie geldt de wet van behoud van impuls.	ja / nee
b	Bij een inelastische botsing is wel sprake van energiebehoud maar niet van impulsbehoud.	ja / nee
c	Bij een botsing tussen twee auto's vangt de zwaarste auto de grootste klap op.	ja / nee
d	Bij een botsing tussen twee auto's is de snelheidsverandering van de twee auto's even groot.	ja / nee
e	Bij een volkomen inelastische botsing verdwijnt alle bewegingsenergie.	ja / nee

Opgaven

53 Frontale botsing

Twee auto's botsen frontaal op elkaar. De ene auto komt van links, heeft een massa van 900 kg en een snelheid van 12 m/s. De andere auto komt van rechts, heeft een massa van 1200 kg en een snelheid van 15 m/s.

a Bereken voor beide auto's de impuls.

b Leg uit dat de totale impuls voor de botsing $7{,}2 \cdot 10^3$ kg·m/s is.

c Na de botsing blijven de auto's aan elkaar vast zitten. Bereken de snelheid en de richting waarin beide auto's bewegen na de botsing.

Bij de botsing is een groot deel van de bewegingsenergie omgezet in warmte (door de vervorming van de kreukelzones).

d Bereken hoeveel procent van de bewegingsenergie is omgezet in warmte.

e Voor welke auto is de 'klap' nu het grootst? Gebruik in je uitleg de snelheidsverandering.

Figuur 42 – Geldt de wet van behoud van impuls ook bij deze botsing?

54 Honkbalwedstrijd

Bij een honkbalwedstrijd gooit de werper de bal met een snelheid van 150 km/h over de thuisplaat. De slagman raakt de bal vol, en de bal heeft na de klap een snelheid van 200 km/h in tegenovergestelde richting. De bal heeft een massa van 145 g.

a Bereken de impuls van de bal voor de klap.

b Laat zien dat de impulsverandering van de bal 14,1 kg·m/s bedraagt.

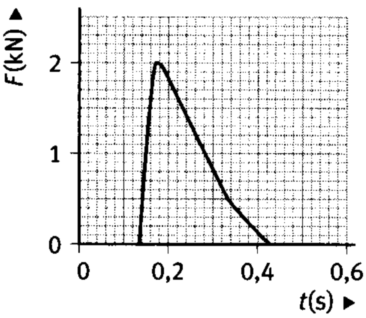
De honkbalknuppel heeft een massa van 0,72 kg en vlak voor de klap een snelheid van 25,1 m/s.

c Bereken de snelheid van de knuppel direct na de klap.

Bij een andere worp gaat de bal met een snelheid van 120 km/h over de thuisplaat. Gedurende 12,5 ms oefent de knuppel een kracht van 750 N uit op de bal.

d Bereken de snelheid waarmee de bal wordt weggeslagen.

e Bereken de impulsverandering van de knuppel tijdens de slag.



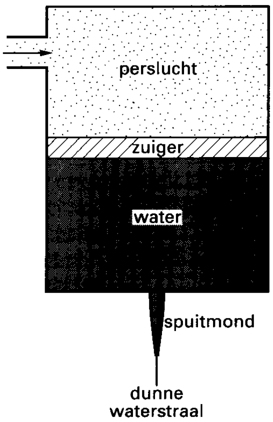
Figuur 43 – Kracht op het startblok.

55 Uit de startblokken

Bij de start van een hardloopwedstrijd wordt de horizontale kracht van een atleet op het startblok gemeten. De atleet heeft een massa van 74 kg. In het diagram van figuur 43 is de gemeten kracht *F* weergegeven als functie van de tijd *t*.

a Bepaal de oppervlakte onder de *F*,*t*-grafiek.

b Bereken daarmee de horizontale snelheid van de atleet onmiddellijk na het verlaten van het startblok.



Figuur 44 – Watersnijder

56 Snijden met water

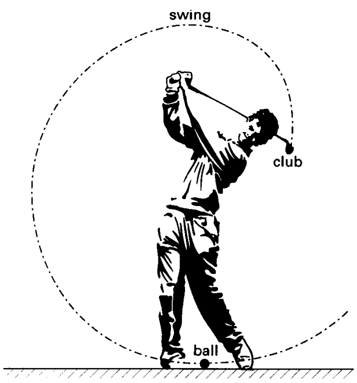
Als water in een dunne straal een grote snelheid heeft, kan men er hard materiaal mee snijden. Voordelen van snijden met water zijn een grote nauwkeurigheid en gave snijranden. Door de druk van de perslucht op de zuiger (zie figuur 44) spuit het water met een snelheid van 850 m/s uit de opening van de spuitmond. Het waterverbruik is 27 mL per seconde.

a Bereken de kinetische energie van het water dat de opening in één seconde verlaat.

Het materiaal dat gesneden moet worden, ligt vlak onder de spuitmond. De waterstraal spuit verticaal, loodrecht op het materiaal. Na het materiaal gesneden te hebben, stroomt het water in verticale richting verder met een snelheid van 20 m/s.

b Bereken aan de hand van de impulsverandering per seconde de gemiddelde kracht waarmee het water het materiaal snijdt.

57 Golf



Figuur 45 – Golfswing.

Bij het golfspel wordt met een slagbeweging van de slagstok (de 'club') een bal weggeslagen. Uit video-analyse blijkt dat de club de bal met een snelheid van 50 m/s raakt.

De massa van het uiteinde van de club is 450 g en de massa van de bal is 85 g. De snelheid van de bal bij het loskomen was 63 m/s. Het rendement van de swing wordt gedefinieerd als de bewegingsenergie van de bal na de slag gedeeld door de bewegingsenergie van het uiteinde van de club vlak voor het contact met de bal.

a Bereken het rendement van de swing.

Bij de botsing tussen het uiteinde van de club en de bal blijft de impuls behouden, maar wordt een deel van de kinetische energie omgezet in warmte.

b Bereken hoeveel energie er bij de botsing in warmte wordt omgezet.

58 Sloopkogel


Figuur 46 – Sloopkogel.

Cindy en Dirk maken video-opnames van het slopen van een oude flat met een ijzeren sloopkogel (zie figuur 46). Dirk wil op grond van de videofilm een schatting maken van de kracht op de muur ten gevolge van deze botsing.

Beschrijf wat hij kan doen om deze kracht te schatten. Geef daarbij antwoord op de volgende vragen:

a Welke formule(s) heeft hij nodig?

b Van welke grootheden moet hij de waarde te weten komen?

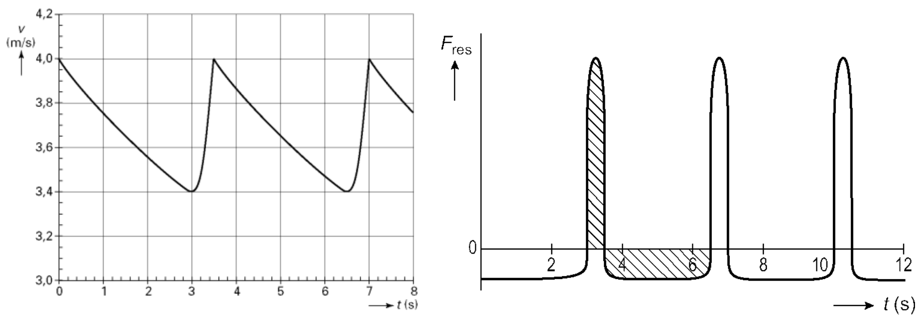
c Hoe kan hij de waarde van deze grootheden schatten?

59 Steppen


Figuur 47 – Step.

Arie en Bianca doen een onderzoek aan steppen. Met een snelheidssensor meten zij de snelheid van de step. Arie stept over een horizontale weg. De massa van Arie met step is 67 kg.

In figuur 48 staat links het *v*,*t*-diagram van de step. In deze grafiek is te zien dat wrijvingskrachten een rol spelen: na een afzet met de voet neemt de snelheid bij het uitrijden weer af.



Figuur 48 – Grafieken van de snelheid en de kracht tijdens het steppen.

De resulterende kracht op Arie met step als functie van de tijd is weergegeven in figuur 48 rechts. In deze grafiek zijn twee gebieden gearceerd die een even grote oppervlakte hebben. De verticale schaal van de grafiek is echter niet gegeven.

a Leg uit dat de oppervlakte tussen t = 3,0 s en t = 3,5 s even groot is als de impulsverandering tijdens de afzet.

b Leg uit waarom de oppervlakte tussen t = 3,5 s en t = 5,5 s even groot moet zijn als de oppervlakte tussen t = 3,0 s en t = 3,5 s.

c Bepaal met behulp van de linkergrafiek de grootte van één van de twee gearceerde oppervlakken.

Bijlage: Formules

Bewegingen

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$F_{\text{res}} = \Sigma F = m \cdot a$$

$$v(t) = a \cdot t$$

$$s(t) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Krachten

$$F_{\text{z}} = m \cdot g$$

$$F_{\text{w,l}} = \tfrac{1}{2} \cdot c_{\text{w}} \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$$

$$F_{\text{w,r}} = c_{\text{r}} \cdot F_{\text{n}}$$

$$F_{\text{w,max}} = f \cdot F_{\text{n}}$$

$$F_{\text{veer}} = C \cdot u$$

$$F_{\text{grav}} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$F_{\text{ovst}} = F \cdot \sin\alpha$$

$$F_{\text{aanl}} = F \cdot \cos\alpha$$

$$F_{\text{AB}} = -F_{\text{BA}}$$

Hefbomen

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

$$M = F \cdot r$$

$$\Sigma M = 0$$

Arbeid en vermogen

$$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

$$P_{\text{mech}} = \frac{W}{t} = F \cdot v$$

Energie en rendement

$$E_{\text{z}} = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$E_{\text{veer}} = \tfrac{1}{2} \cdot C \cdot u^2$$

$$E_{\text{chem}} = r_{\text{v}} \cdot V$$

$$E_{\text{chem}} = r_{\text{m}} \cdot m$$

$$E_{\text{grav}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

$$\Sigma E_{\text{in}} = \Sigma E_{\text{uit}}$$

$$\Sigma W = \Delta E_{\text{kin}}$$

$$\eta = \frac{W_{\text{uit}}}{E_{\text{in}}} = \frac{P_{\text{mech}}}{P_{\text{in}}}$$

Trillingen

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$$

Kromlijnige bewegingen

$$s(t) = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$$F_{\text{mpz}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v}$$

Impuls

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$$

$$m_1 \cdot \Delta v_1 = -m_2 \cdot \Delta v_2$$

$$p = m \cdot v$$

$$\Sigma p_{\text{voor}} = \Sigma p_{\text{na}}$$