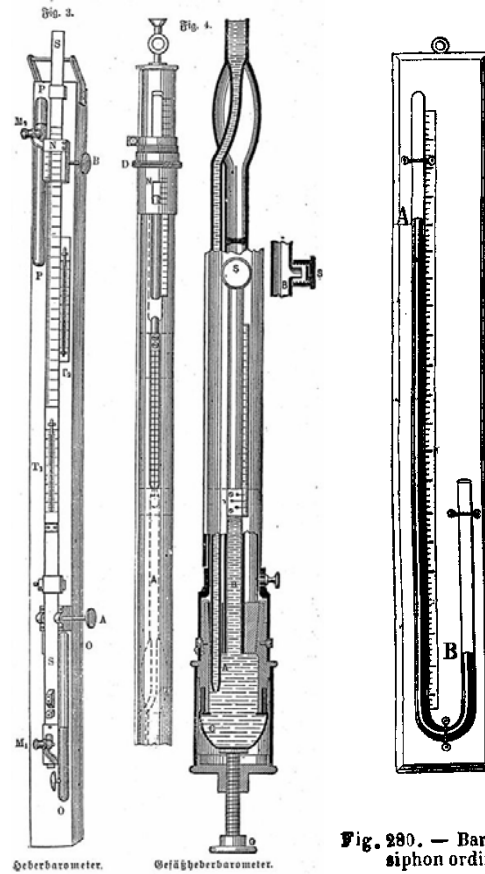


Messtechnik 2

Wandlerprinzipien und Druckmessungen

DLR-Kolloquium - Edition 09/13



„Luftdruckmessung mittels historischem Barometer“



„Erdfernerkundungsmessungen mittels Satelliten“

1 Eine Übersicht über die geläufigsten Wandlerprinzipien in der Messtechnik

resistive Wandler

Grundlage des Verfahrens ist die Bemessungsgleichung des ohmschen Widerstandes: $R = \frac{\rho l}{A}$. Die Länge „l“ oder/und die stromdurchflossene Fläche „A“ werden verändert. Hierbei muss darauf streng geachtet werden, dass die Kraftwirkung keine plastische Veränderung des Sensors vornehmen darf. Die Größe des spezifischen Widerstandes „ ρ “ bleibt unverändert, da sich das Material nicht verändert. Sehr wichtig ist in diesem Verfahren die Konstanz der Temperatur. Fall sie prozessbedingt nicht konstant sein kann, müssen elektronische Temperaturkompensationen realisiert werden.

piezoresistive Wandler

Durch Kraftwirkung wird der ohmsche Widerstand eines Halbleiterelements verändert. Halbleiterdehnmessstreifen liefern eine größere Spannung als leitende metallische Stoffe, sind aber extrem temperaturabhängig.

piezoelektrische Wandler

Durch Kraftwirkung wird die Kristallstruktur deformiert. Orthogonal zur Kraftwirkung werden Ladungsträger an der Oberfläche des Quarzes generiert. Es muss streng darauf geachtet werden, dass kein Stromfluss über parasitäre Widerstände entsteht. Die Ladungsträgerwerte sind im Bereich von femto und pico Coloumb messbar und müssen in eine Spannung umgewandelt werden. Dazu werden spezielle Verstärker (Ladungsverstärker) und Leitungen eingesetzt.

induktive Wandler

Grundlage des Verfahrens ist die Bemessungsgleichung der Induktivität: $L = \mu n^2 \frac{l}{A}$. Veränderlich können die magnetischen Feldlinienlängen „l“ sein, aber auch die Windungszahl „n“ der Spule oder der vom magnetischen Fluss durchströmte Querschnitt „A“. Nachteilig sind bei diesem Verfahren das Gewicht – bedingt durch den ferromagnetischen Kern – und die notwendige Bauelement-Mindestgröße. Induktivitäten lassen sich kaum in integrierten Schaltkreisen realisieren.

elektrodynamische Wandler

Ruhe- oder Bewegungsinduktion [alle drei Größen stehen orthogonal zueinander]: $u_{ind} = -n \frac{d\phi}{dt}$ oder

$$u_{ind} = \int_0^l (v e_x \times B e_y) e_z ds = B v l$$

Bei rotierenden Elementen wird beim Passieren eines ferromagnetischen Werkstücks (pro Umdrehung) an einem magnetischen Feld eine Spannung induziert. Die Höhe der Spannung ist von der Rotationsgeschwindigkeit abhängig. Die magnetische Flussdichte „B“ und die Länge des elektrischen Leiters im Magnetfeld „l“ werden als konstant betrachtet.

kapazitive Wandler

Grundlage dieses Verfahrens ist die Bemessungsgleichung einer Kapazität: $C = \epsilon \frac{A}{d}$. Hier können über geschichtete Dielektrika „ ϵ “ recht vielseitige Messungen, wie Füllstands- und Abstandsmessungen, durchgeführt werden. Bei Drehkondensatoren werden die wirksamen Flächen zueinander verändert. Die hierbei zu messende nichtelektrische Größe ist die Winkelposition, z.B. bei Ventilen.

Temperaturmessung mittels Thermoelement (TC)

Ein Thermoelement wandelt durch Thermoelektrizität (Seebeck Effekt) Wärme in elektrische Energie um. Das Thermoelement ist ein Bauteil aus zwei unterschiedlichen elektrisch leitenden Materialien, die an einem Ende miteinander verbunden sind. Eine Temperaturdifferenz (Temperaturgradient über die gesamten beiden Leitungen) erzeugt durch den Wärmefluss eine elektrische Spannung. Gemessen wird die erzeugte Spannung im Verhältnis zu einer Spannung, die durch eine konstante Bezugstemperatur (Referenzspannung) gegeben ist: $u_{Mess} = u_{\theta} - u_{ref}$

Messungen mittels Ultraschallmesstechnik

Bestimmung des Volumenstroms oder Nutzung spezieller Verfahren zur indirekten Temperaturmessung des strömenden Mediums. Die Schallgeschwindigkeit c ist druckabhängig, jedoch müssen die Dichte des Mediums ρ und der Adiabatenkoeffizient κ des Gases bekannt sein. Die Größe R stellt die Gaskonstante dar.

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa RT}$$

Optische Diagnostik mittels Pyrometer, Bolometer und Infrarotkamera

Bestimmung von Temperaturen über ein indirektes Messverfahren, da das Messobjekt nicht berührt werden muss. Die selektive Strahlungsenergie $L_{\lambda,S}$ ist abhängig von der Temperatur T und von der Wellenlänge λ . Nicht nur sehr hohe Temperaturen – oft Temperaturen, die über dem Schmelzpunkt gängiger Metalle liegen - sind messbar, sondern auch tiefe Temperaturen bis $T = -50^{\circ}\text{C}$. Die Größen C_1 und C_2 sind Koeffizienten, die Größe Ω_0 stellt den Raumwinkel dar.

$$L_{\lambda,S} = \frac{C_1}{\pi \Omega_0} * \frac{1}{\lambda^5} * \frac{1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

Größe	Wandler-Prinzip						
	resistiv	piezo resistiv	piezo elektrisch	induktiv	elektro-dynamisch	kapazitiv	Thermoelement
Druck							
Kraft							
Drehmoment	O.K.	O.K.	O.K.			O.K.	
Temperatur	O.K.						O.K.
Weg							
Dehnung							
Abstand							
Winkel	O.K.			O.K.		O.K.	
Geschwindigkeit							
Schnelle							
Umdrehungen							
Durchfluss					O.K.		
Beschleunigung	O.K.	O.K.		O.K.		O.K.	
Zeit		O.K.					
Werkstoffart				O.K.		O.K.	

Tab. [1] Wandlerprinzipien und nichtelektrische Größen

2 Die Druckmessung

Druckmessungen lassen sich relativ leicht realisieren. Hierbei ist eine ideale Membrane notwendig, die sich entsprechend der Kraftwirkungen verformt. Um die Verformung zu messen, wird auf die Membrane ein Dehnmessstreifen geklebt oder geschweißt. Der Dehnmessstreifen wird durch die Kraftwirkung gestaucht oder gestreckt, somit verändert sich die Länge des Dehnmessstreifens. Betrachten wir den Dehnmessstreifen als einen temperaturunabhängigen ohmschen Widerstand, so kann nach der Bemessungsgleichung eine Widerstandsveränderung – hervorgerufen durch die Längenveränderung – festgestellt werden.

$$R = \rho \frac{l}{A} \xrightarrow{\text{Kraftwirkung}} R + \Delta R = \rho \frac{1}{A} (l + \Delta l)$$

Im einfachsten Fall – im Grundstromkreisprinzip - wird der Dehnmessstreifen mit einem konstanten Strom gespeist und folgende Spannung – als Funktion der Kraftwirkung – kann gemessen werden.

$$U(F) = (R + \Delta R[F]) * I_{const.}$$

Ein Nachteil dieser Messanordnung ist sofort erkennbar, denn auch ohne Kraftwirkung haben wir im statischen Fall immer eine Spannung, die relativ zum Messwert sehr hoch ist.

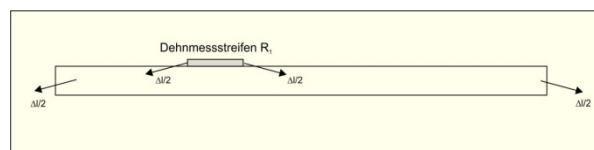
Der zweite Nachteil ergibt sich aus der Proportionalität von Veränderung des ohmschen Widerstandes und der gemessenen Spannung. Verändert sich der Widerstandswert um 1%, so kann sich die gemessene Spannung auch nur um 1% verändern. Dieser „Signalgewinn“ ist für die praktische Messtechnik nicht akzeptabel. Aus diesem Grund wird das Messbrückenverfahren eingesetzt, das zwar aufwendiger ist, jedoch ein höheres Messsignal liefert.

Lösung der Brückenschaltung:

$$U_{mess} = E \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right]$$

- E = 10.000mV
- alle Widerstände besitzen den Wert 100Ω

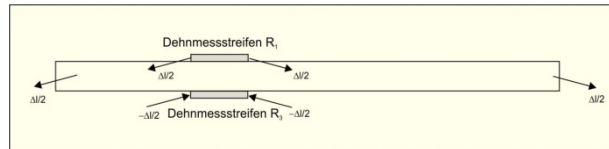
Signalgenerierung bei einem aktiven Element (R_1 verändert den Wert um 1%) in der Messbrücke [ein von vier möglichen Elementen ist aktiv – Fachbegriff der Messtechnik: Viertelbrücke]:



$$U_{mess} = E \left[\frac{R_1 + 0,01R_1}{R_1 + 0,01R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right] = 10.000mV \left[\frac{101}{201} - \frac{1}{2} \right] = 24,876mV$$

Gegenüber unserem stromdurchflossenen Einzelwiderstand erreichen wir bei 1%iger Widerstandsänderung einen mehr als 24fachen Signalgewinn.

Signalgenerierung bei zwei aktiven Element (R_1 verändert den Wert um +1%, R_3 verändert den Wert um -1%) in der Messbrücke [zwei von vier möglichen Elementen sind aktiv – Fachbegriff der Messtechnik: Halbbrücke]:



$$U_{mess} = E \left[\frac{R_1 + 0,01R_1}{R_1 + 0,01R_1 + R_2} - \frac{R_3 - 0,01R_3}{R_3 - 0,01R_3 + R_4} \right] = 10.000mV \left[\frac{101}{201} - \frac{99}{199} \right] = 50,001mV$$

Wohl gemerkt – die Kraftwirkung ist die gleiche geblieben, nur wirkt die Kraft auf den Widerstand R_1 vergrößernd (der Widerstand wird gedehnt) und auf den Widerstand R_3 verkleinernd (der Widerstand wird um den gleichen Betrag gestaucht).

Werden alle Elemente der Brückenschaltung aktiv – man nennt es Vollbrücke - in das Messverfahren mit einbezogen, so erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$U_{mess} = E \left[\frac{R_1 + 0,01R_1}{R_1 + 0,01R_1 + R_2 - 0,01R_2} - \frac{R_3 - 0,01R_3}{R_3 - 0,01R_3 + R_4 + 0,01R_4} \right] = 100mV$$

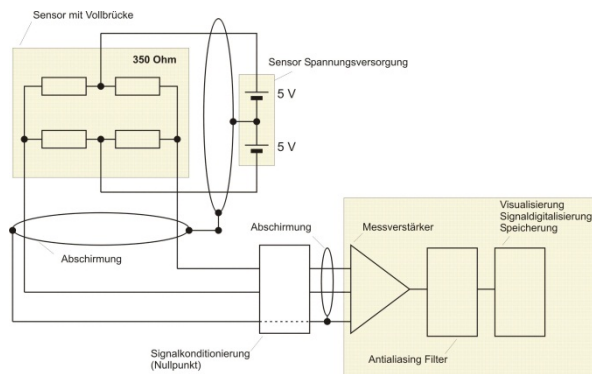


Abb. [1] Prinzip der Vollbrückenschaltung

In dieser Schaltung werden alle vier Messbrückenelemente am Messvorgang beteiligt. Mit vier aktiven Elementen erreichen wir - gegenüber dem Grundstromkreisprinzip - ein 100faches höheres Messsignal.

Diese Betrachtungen konzentrieren sich nur auf die Längenänderung bei konstanter Temperatur.

Für die Temperaturabhängigkeit muss folgende Beziehung beachtet werden:

$$R_\vartheta = R_0(1 + \alpha_T \Delta\vartheta)$$

$R_\vartheta \Rightarrow$ veränderter Widerstand

$R_0 \Rightarrow$ der Widerstandswert vor Temperatureinwirkung

$\alpha_T \Rightarrow$ Temperaturkoeffizient z. B. für Metalle $\alpha_T = 0,0038 \frac{1}{K}$

$\Delta\vartheta \Rightarrow$ Temperaturdifferenz

Um wie viel Prozent ändert ein metallischer Widerstand seinen Wert, wenn die Temperatur um 10K ansteigt?

$$R_\vartheta = R_0(1 + \alpha_T \Delta\vartheta) = 100\Omega \left(1 + 0,0038 \frac{1}{K} 10K \right) = 103,8\Omega$$

Ergebnis:

Bei einer Temperaturschwankung von 10K, verändert sich der Widerstandswert um 3,8%. Wenn man beachtet, dass sich unser Messsignal, bedingt durch die Kraftwirkung, voraussichtlich um 1% verändert, dann sieht man welchen großen Einfluss die Temperatur auf die Genauigkeit der Messdaten hat.

Konstantan¹ ist ein Werkstoff, der speziell dafür entwickelt wurde, diese störende Temperaturabhängigkeit zu kompensieren.

α_T für Konstantan beträgt 0,00001 1/K (bei 20°C)

$$R_{\vartheta} = R_0(1 + \alpha_T \Delta\vartheta) = 100\Omega \left(1 + 0,00001 \frac{1}{K} 10K\right) = 100,01\Omega$$

Man sieht, dass unter den gleichen thermischen Bedingungen die Temperaturabhängigkeit deutlich geringer wird. Wir erhalten mit Konstantan¹ einen Fehler von 0,01%. Das Verhältnis von Nutz- zu Störsignal beträgt: $\frac{1\%}{0,01\%} = 100$.

Wirkt jedoch der Druck bzw. die Kraft auf das gesamte Bauelement, so müssen alle möglichen Komponenten partiell nach der Ursachengröße differenziert werden:

$$\frac{dR}{dp} = \frac{d\left(\frac{\rho l}{A}\right)}{dp} = \frac{l}{A} \frac{\delta\rho}{\delta p} + \frac{\rho}{A} \frac{\delta l}{\delta p} - \frac{\rho l}{A^2} \frac{\delta A}{\delta p}$$

Wenn wir diesen Ausdruck (Widerstandsänderung durch Druckänderung) relativ zum unveränderten Widerstandswert betrachten, dann muss im Anschluss dR durch R dividiert werden:

$$\frac{\frac{dR}{R}}{\frac{dp}{p}} = \frac{d\left(\frac{\rho l}{A}\right)}{\frac{R}{p}} = \frac{1}{\rho} \frac{\delta\rho}{\delta p} + \frac{1}{l} \frac{\delta l}{\delta p} - \frac{1}{A} \frac{\delta A}{\delta p} = \alpha_p$$

Für die Abhängigkeit des Widerstandes R vom Druck p erhält man somit:

$$R_p = R_0 + \frac{dR}{dp} * \Delta p = R_0(1 + \alpha_p \Delta p)$$

Der Druckkoeffizient α_p für Manganin² beträgt $2,5 \cdot 10^{-6}$ 1/bar. Solche Werkstoffe sind nur für hohe Drücke einsetzbar. Im Normalfall werden Dehnmessstreifen mit entsprechender Temperaturkompensation eingesetzt. Zwei Elemente wirken aktiv als Kraftaufnehmer (Halbbrückenprinzip) und zwei Elemente kompensieren die Temperaturdifferenz durch die gegenläufige Verschaltung.

Typische Angaben bei Dehnmessstreifen²:

Temperaturkoeffizient α_T : $11 \cdot 10^{-6}$ 1/K

Widerstand: $350\Omega \pm 0,2\%$

¹ Konstantan ist ein Markenname der ThyssenKrupp VDM GmbH für eine Legierung, die im Allgemeinen aus 55 % Kupfer, 44% Nickel und 1 % Mangan besteht.

² Als Beispiel wurde der Dehnmessstreifen 6/350 LY 11 der Fa. Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH herangezogen.

k-Faktor (Gage factor): 2,04 +/- 1,0%

Temperatur-Koeffizient des k-Faktors (nicht konstant über den Temperaturbereich): $95 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$

Zum k-Faktor – die Empfindlichkeit des Dehnungsmessstreifens:

$$\frac{\Delta R}{R} = k \frac{\Delta l}{l} = k \varepsilon$$

$$k = \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{1}{\varepsilon} + 1 + 2\mu$$

μ - Querdehnungszahl

ε – relative Längenänderung

ρ – spezifische Widerstand

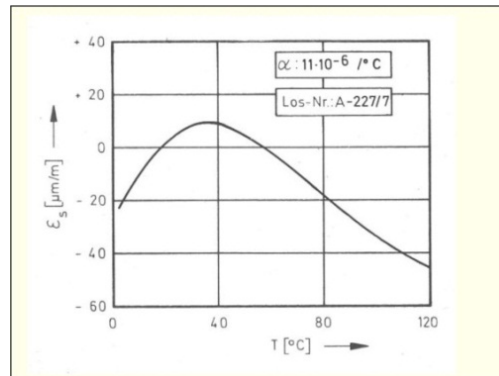


Abb. [2] Längenausdehnung als Funktion der Temperatur

Ein wichtiger praktischer Fakt muss noch erwähnt werden. Wie bringe ich den Dehnmessstreifen auf meinen Prüfling an? Es gibt spezielle Schweißtechniken, auf die hier nicht eingegangen wird. Die Alternative ist das Kleben von Dehnmessstreifen. Das Ziel ist es, dass der Dehnmessstreifen alle Dehnbewegungen des Prüflings mitmachen muss. Der Klebstoff darf nicht elastisch die mechanische Bewegung verändern.

Jeder Dehnmessstreifen kann nur einmal geklebt oder geschweißt werden. Die Lebensdauer des Dehnmessstreifens ist abhängig von der mechanischen und thermischen Belastung. Wenn der Dehnmessstreifen sich plastisch verformt, so ist er nicht mehr einsetzbar.

Empfohlene Klebstoffe für diese spezielle Dehnungsmessstreifen:

- Kalthärtender Einkomponentenschnellkleber „Z80“ – bis 120°C anwendbar bei glatten Oberflächen
- Kalthärtender Zweikomponentenschnellkleber „X60“ – bis 80°C anwendbar
- Heißhärtender Zweikomponentenkleber – bis 250°C anwendbar

Welche Klebstoffe für welche Streifentypen geeignet sind oder nicht, entnimmt man aus der Gebrauchsanweisung und Empfehlung des jeweiligen Dehnmessstreifenherstellers.

2.1 Absolutdruckmessung

Die Absolutdruckmessung ist die Messung eines Druckes in Relation zum technischen Vakuum – im Idealfall $p_0 = 0 \text{ bar}$. Dieses Verfahren wird in geschlossenen Rohr-, Tank- und Kesselsystemen eingesetzt.

Der komplette Aufnehmer besteht nicht nur aus mechanischen Komponenten, der Membrane und den aufgeklebten Dehnungsmessstreifen, sondern der Aufnehmer wandelt bereits die Druckgröße in eine Spannung. Dazu müssen die Dehnungsmessstreifen in einer speziellen Schaltung – der Brückenschaltung – angeordnet und mit einer konstanten Gleichspannung gespeist werden. Ein integrierter Verstärker wirkt als Impedanzwandler (Verstärkungsfaktor = 1), indem er mit einem sehr hohen Innenwiderstand das Signal aufnimmt und mit einem sehr niedrigen Verstärkerausgangswiderstand das Signal optimal an die elektrische Leitung anpasst. Das Gehäuse ist aus hochwertigem Material, da

nicht auszuschließen ist, dass der Aufnehmer aggressiven bzw. reaktionsfreudigen Medien ausgesetzt wird. Jeder montierte Aufnehmer darf den Prozess nicht verändern, daher sind aufwendige Flansche und Dichtungen nötig, um möglichst technisch „unbemerkt“ den Druck erfassen zu können.

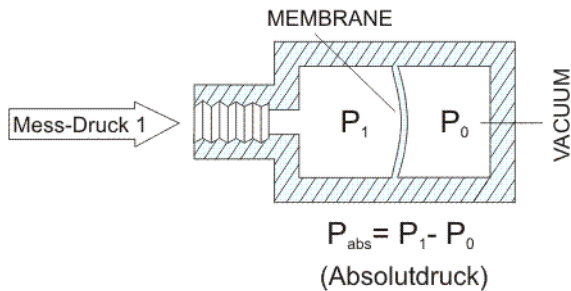


Abb. [3] Absolutdruckaufnehmer – prinzipieller Aufbau und in der Praxis

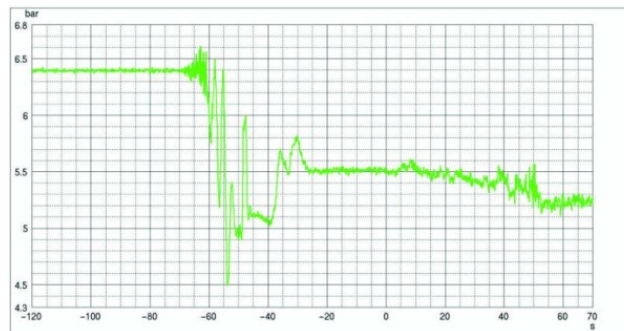


Abb. [4] Druckverlauf innerhalb eines geschlossenen Systems;

In diesem Diagramm ist gut sichtbar, dass der Druck statische und dynamische Signalkomponenten besitzt. Hier muss entschieden werden, welche Komponente die entscheidende Information enthält.

2.2 Relativdruckmessung

Diese Druckmessung erfolgt relativ zum atmosphärischen Druck. Der Umgebungsdruck wird über eine kleine Öffnung am Druckaufnehmer erfasst.

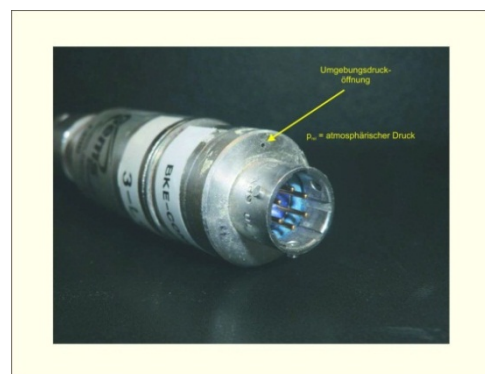
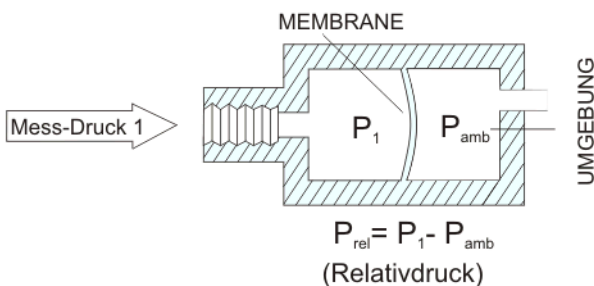


Abb. [5] Relativdruckaufnehmer – prinzipieller Aufbau und in der Praxis



Abb. [6] Relative Druckmessung zum atmosphärischen Druck

In diesem Diagramm ist recht deutlich dargestellt, wie der gemessene Druckwert sich ab 1bar aufbaut.

2.3 Differenzdruckmessung

Differenzdruckmessungen von strömenden Gasen und Flüssigkeiten in Rohrleitungen sind ein wichtiges Einsatzgebiet dieser Messart. Des Weiteren werden Tankfüllstände über Differenzdruckmessungen (Messung des hydrostatischen Druckes) ermittelt. Bei Volumenstrommessungen werden mittels Blenden und Düsen die Drücke vor und nach dem Wirkdruckelement erfasst und mit entsprechenden Formeln berechnet.

Oft beobachtet man in der Praxis einen schwerwiegenden Design-Fehler. Wir haben ein System in dem 100bar erwartet werden. Um einen Differenzdruck zu messen, werden zwei 150bar Aufnehmer eingesetzt und nach der Messung ist letztendlich das Ergebnis nicht plausibel. Wird ein maximaler zulässiger Fehler über die gesamte Messkette von 1% angenommen, so produziert jede Messung 1,5bar Ungenauigkeit. Im schlimmsten Fall (worst case) haben wir bei zwei Messungen des gleichen Druckwertes und letztendlich einen scheinbar gemessenen Differenzdruckwert von 3bar (0 bar ist zu erwarten). Dieses Problem ist lösbar, indem man nicht vom absoluten oder relativen Betriebsdruck ausgeht, sondern Druckaufnehmer mit einem maximalen Messbereich von 5 bar einsetzt (Druckdifferenzen bis zu 4bar sind zu erwarten). Der damit maximal zulässigen Fehler beträgt 0,05bar pro Aufnehmer und im „worst case“ 0,1bar. Es muss nur noch darauf geachtet werden, dass beide Druckaufnehmer auch physisch bis 150bar belastbar sind.

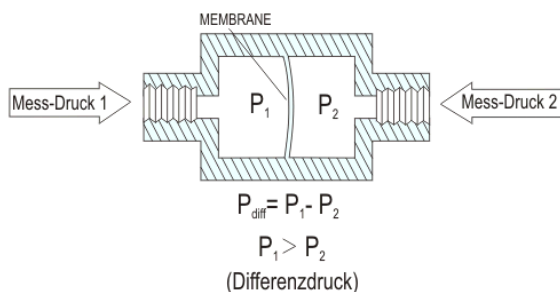


Abb. [7] Differenzdruckaufnehmer – prinzipieller Aufbau und in der Praxis

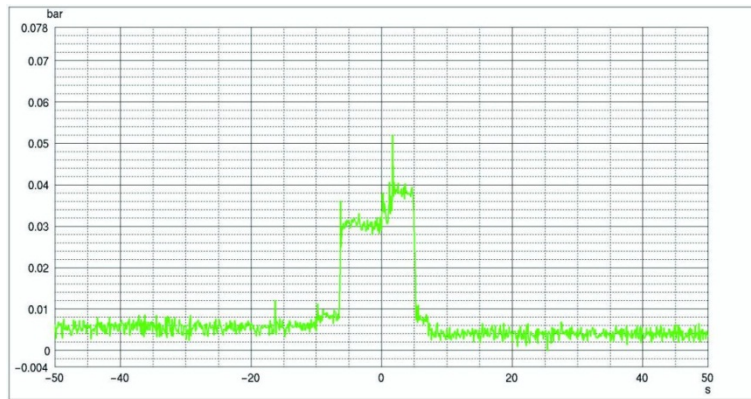


Abb. [8] Differenzdruckverlauf in einem 10bar System

Die erwartete Differenzdruckgröße beträgt maximal 10mbar. Eingesetzt wurden zwei 1bar Aufnehmer mit einem maximalen zulässigen Fehler von 1% (jeweils über die gesamte Messkette) – der resultierende Fehler beträgt 5mbar (0 mbar wäre exakt).

2.4 Dynamische Druckmessung

Die Besonderheit dieser Art der Messung besteht in der notwendigen Schnelle des Sensors, wie die Kraftwirkung auf die aktive Fläche umgesetzt wird. Hier kommen grundsätzlich zwei Wandlerprinzipien in Frage:

- Wandlung mittels Dehnungsmessstreifen – also mittels resistiven Verfahren
- Wandlung mittels piezo-elektrischen Wandlern (siehe Abb. 12)

Wie aus der Abb. 9 ersichtlich, sind zwei Anschlüsse für eine Wasserkühlung vorgesehen, da in der Nähe des Prüflings sehr hohe Temperaturen zu erwarten sind. Auch hier ist darauf zu achten, dass qualitativ hochwertige Materialien eingesetzt werden, denn es ist nicht auszuschließen, dass die Aufnehmer oxidationsfördernden Medien ausgesetzt sind.

Es wäre auch das piezo-resistive Verfahren möglich, jedoch sind Halbleiterdehnungsmessstreifen sehr stark temperaturabhängig und auch nicht für den gesamten Druckbereich gut geeignet. Dehnungsmessstreifen können bis zu Frequenzen von 5kHz eingesetzt werden. Über diesen Bereich hinaus wird es problematisch, da die Elastizität der Dehnungsmessstreifen nicht mehr ausreichend ist. In den



letzten Jahren hat sich das piezo-elektrische Verfahren durchgesetzt. Das Besondere an dem Verfahren ist, dass das elektrische Signal eine Ladung ist und wir Ladungsverstärker einsetzen müssen. Spezielle Verstärker sind somit notwendig und die Verkabelung vom Sensor zum Verstärker muss extrem verlustfrei sein. Jeder noch so geringe Stromfluss über einen parasitären Leitungsquerschnitt, vermindert unsere Ladung und verändert somit das Messergebnis. Aus diesem Grund ist es notwendig, die Ladungsverstärker in der Nähe des Prüflings zu platzieren.

Abb. [9] Dynamischer Druckaufnehmer mit Wasserkühlungsanschlüssen

- C_L – parasitäre Leitungskapazität
- C_{in} – parasitäre Kapazität des Verstärkereinganges
- C_R – kapazitive Rückkopplung
- R_R – Potentialstabilisierung durch Gegenkopplung
- Q – Ladungsmenge des Aufnehmers
- Q_c – Ladungsanteil gespeichert in der Leitungskapazität
- Q_{in} – Ladungsanteil gespeichert in der Verstärkereingangsstufe
- Q_R – Ladung in der kapazitiven Rückkopplung gespeichert

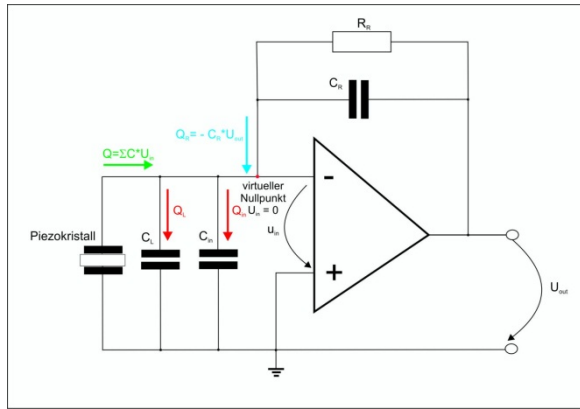


Abb. [10] Ladungsverstärkerschaltung

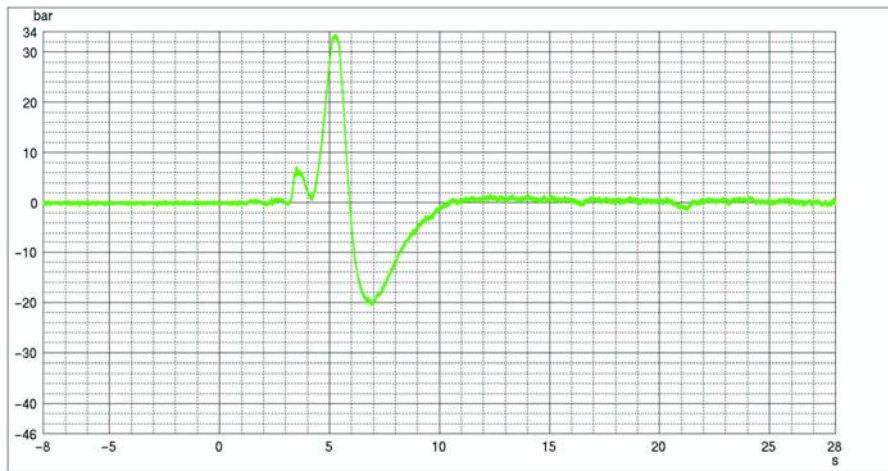
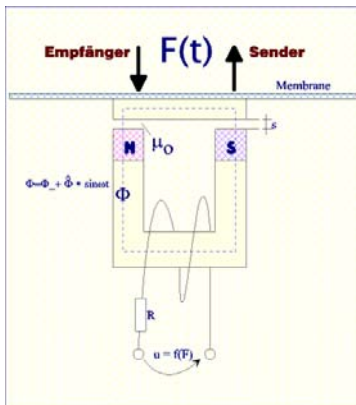


Abb. [11] Messung eines dynamischen Drucks

In diesem Verlauf ist gut erkennbar, dass kein statischer Signalanteil vorhanden ist. Die Ursache liegt in der kapazitiven Entkopplung der elektrischen Gleichspannung vor dem Verstärker.

2.5 Schalldruckmessung

Elektroakustische Wandler sind oft reversible Wandler. Sie können Schall in elektrische Energie wandeln, aber auch elektrische Energie in Schallenergie. Als Zwischenstufe der klassischen Wandlung werden schwingfähige mechanische Systeme z.B. beim elektromagnetischen Prinzip eingesetzt. In nahezu allen Fällen ist eine Membrane Hauptbestandteil eines solchen Systems.



Für das Mikrofon - als Empfänger - gelten folgende Beziehungen:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{ds}{dt}$$

$$|u| = n \frac{d\Phi}{dt} = 2n \frac{d\Phi}{ds} v$$

$$|u| = 2n \frac{\Phi_{ges}}{s + \frac{l}{\mu_{Fe}}} * v$$

Die Membrane wird durch die Kraft F mit der Geschwindigkeit v bewegt. Die Größe l entspricht einem Mittelwert des Weges l_{ges} des magnetischen Flusses Φ durch das Eisenmaterial mit der Permeabilität μ .

Irreversible Wandler sind vom Grundprinzip nur als Sender oder als Empfänger verwendbar. Das zu wandelnde Signal dient bei irreversiblen Systemen oft zur Steuerung eines zusätzlichen aktiven elektronischen Systems.

Schallempfänger (Mikrofone) können die Kraftwirkung entweder durch den Schalldruck oder durch das Druckgefälle (Druckgradient) verarbeiten. Weiterhin können Empfänger dahingehend beurteilt werden, ob sie den Schallausschlag oder die Geschwindigkeit verwenden. Ein praktisches Beispiel wären die Elongationsmikrofone [Geschwindigkeitsmikrofone].

Die gravierenden Besonderheiten zu den dynamischen Druckmessungen bestehen in zwei Fakten:

- Der Frequenzbereich ist auf den Hörbereich des Menschen begrenzt – 16Hz bis 20kHz.
- Der Druckbereich übersteigt selten 200mbar.

Damit ist der Messbereich vorgegeben. Schalldruckmessungen finden im Unterdruckbereich statt – relativ zum atmosphärischen Druck. Elektrisch kann dieser Messvorgang recht einfach realisiert werden, da der quasi-statische Anteil des atmosphärischen Drucks durch eine kapazitive Trennung am Verstärkereingang getrennt werden kann.

2.5.1 Technische Druckpegel

Die Bestimmung von der Pegelgröße a in dezi Bell (dB) erfolgt nach folgender Formel:

$$a_{dB} = 20 \log_{10} \left[\frac{x_a}{x_e} \right]$$

x_e ist die Eingangsgröße einer „black box“

x_a ist die Ausgangsgröße einer „black box“

Bei einem Bezugsdruck von $2 \cdot 10^{-10}$ bar (Hör-grenze des Menschen) erhalten wir für $p=200$ mbar einen Pegel von:

$$a_{dB} = 20 * \lg \left[\frac{0,2bar}{2 \cdot 10^{-10}bar} \right] = 180$$



Abb. [12] Piezo-elektrisches Mikrophon

Ein Schallpegel von 180dB ist außergewöhnlich hoch. Raketentriebwerke, die an Prüfständen des DLR in Lampoldshausen getestet werden, produzieren maximal 156dB.

Auch bei Schalldruckmessungen werden Druckaufnehmer als Mikrofone eingesetzt. Diese Druckaufnehmer arbeiten nach dem piezo-elektrischen Prinzip. Die Membrane muss außerdem sehr resistent gegenüber Oxidation und hohen Temperaturen sein, da der Einsatz von solchen Aufnehmern nah am Prüfling und somit nah an der Schallquelle sein muss.

Die in Abb. [12] rechts neben dem Aufnehmer abgebildete Kappe dient nicht nur zum Schutz der Membrane, sondern ist außerdem ein akustisches Bauelement – ein Helmholtz-Resonator. Der Helmholtz-Resonator hebt das Signal bei einer charakteristischen Frequenz an. Die Abstimmung der Resonanzfrequenz erfolgt nach der Thomsonschen Schwingungsgleichung:

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V[L + \Delta L]}}$$

A Querschnittsfläche des Resonatorhalses

V Volumen der eingeschlossenen Luft

c Schallgeschwindigkeit (bitte die Temperaturabhängigkeit beachten)

L+ΔL Länge des Resonatorhalses; Die Ursachen der notwendigen Korrektur der geometrischen Länge sind die Mündungsform und die veränderte Strömungsgeschwindigkeit im Mündungsbereich.

Der Aufbau des Mikrofons muss so gestaltet werden, dass kein Körperschall erfasst werden kann. Hierzu gibt es federnde Aufhängungen innerhalb eines Rahmens, die auf ein Stativ aufgeschraubt werden können.

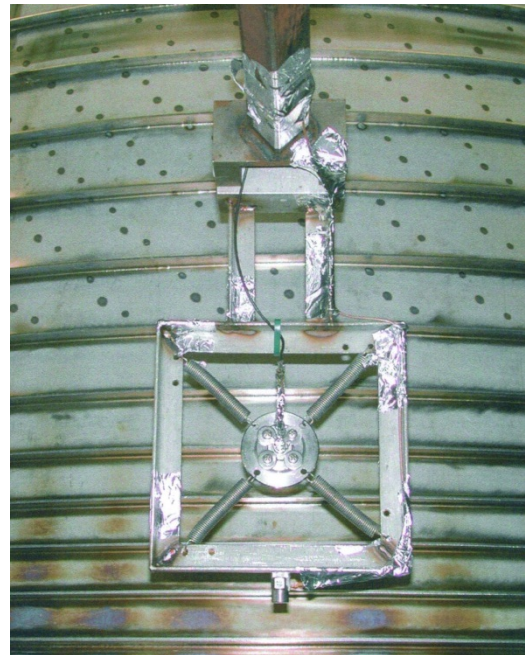
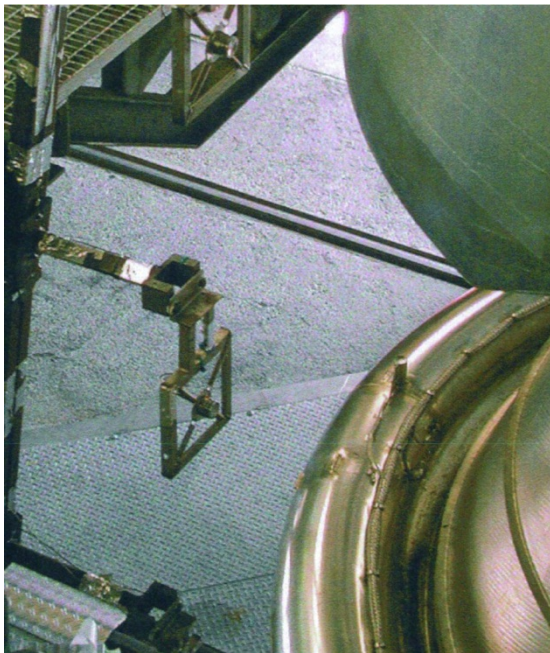


Abb. [13] Mikrofonmontage für Schallmessungen am Raketentriebwerk

2.5.2 Mikrofontypen

2.5.2.1 Druckempfänger

Bei einem Druckempfänger ist die schallaufnehmende Membrane vor einem nach hinten geschlossenen Hohlraum angebracht. Die Kapselung durch den Hohlraum verhindert, dass der Schall die Membran umwandert und sich an der Membranrückseite auswirkt. Der einfallende Schall wird unabhängig von der Einfallrichtung immer in gleicher Polarität wiedergegeben. Die Richtcharakteristik hat eine Kugelform. Besondere Empfindlichkeit ist bei tiefen Frequenzen feststellbar. Hohe Frequenzen wer-

den dagegen verzerrt, so dass für qualitativ hochwertige Aufnahmen (Musik) der Empfängertyp nicht geeignet ist.

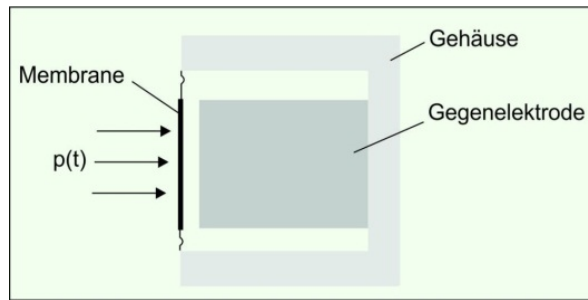


Abb. [14] Prinzip eines Druckempfängers mit Kugelcharakteristik

2.5.2.2 Druckgradientenempfänger

Sind beide Membranseiten dem Schalldruck ausgesetzt, so spricht man vom Druckgradientenempfänger. Auf die Vorderseite der Membrane wirkt der direkt einfallende Druck p und auf die Rückseite der Membrane (durch Schlitze, d.h. die wirksame Fläche ist kleiner) der Druck $p + \frac{dp}{dx} \Delta x$. Typisch für diese Empfängerart ist - je nach Bauvariante - die resultierende Richtcharakteristik eine Niere oder Acht.

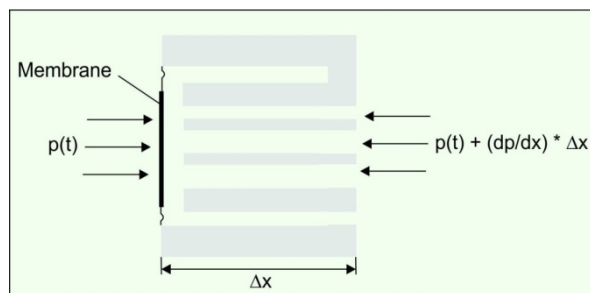


Abb. [15] Prinzip des Grundgradientenaufnehmers

Druckgradientenmikrofone sind nicht für die Aufnahme sehr tiefer Frequenzen (Infraschall) geeignet. Die tiefste messbare Frequenz hängt vom Umweg Δx ab, den der Schall in der Zeit Δt zurücklegen muss, um den Druckgradienten an der Membranrückseite auszugleichen. Ein typischer Vertreter des Druckgradientenmikrofons ist das Bändchenmikrofon.

Die Membran des Bändchenmikrofons ist ein zickzack-gefalteter Aluminiumstreifen von zwei bis vier Millimetern Breite und wenigen Zentimetern Länge. Es hat eine Dicke von einigen Mikrometern. Bei Erregung durch den einfallenden Schall, induziert die Membranbewegung - in einem statischen Magnetfeld - eine der Bewegungsgeschwindigkeit proportionale Spannung, die an den Enden der Aluminiumstreifen abgegriffen werden. Bändchenmikrofone besitzen einen im Arbeitsbereich nahezu linearen Frequenzgang; ihre extrem leichte Membrane verleiht den Mikrofonen ein sehr gutes Impulsverhalten. Durch die Bauweise kann die Membran von beiden Seiten vom Schall erreicht werden. Daraus folgt die Richtcharakteristik einer „8“.

2.5.2.3 Druck- und Druckgradienten Empfänger

Diese Empfängertypen besitzen zwei Membranen und werden wie ein Druckgradientenempfänger behandelt, d.h. die Quelle wirkt mit dem Schalldruck p auf die vorderseitige Membrane und nach der Zeit Δt - bedingt durch den längeren Weg Δx - mit der Größe $p + \frac{dp}{dx} \Delta x$ auf die Membrane, die an der Rückseite befestigt ist. Resultierend erhalten wir eine Nierencharakteristik.

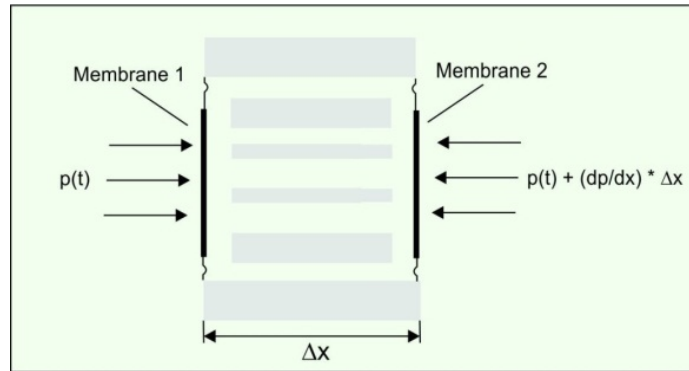


Abb. [16] Prinzip des Druck- und Druckgradienten Mikrofons

2.5.2.4 Besondere Mikrofontypen

Elongationsmikrofone

Als Elongationsmikrofon bzw.-empfänger, wird ein Mikrofontyp bezeichnet, bei dem die erzeugte elektrische Größe (elektrische Spannung) der Auslenkung des mechanischen Systems – der Mikrofonmembrane - proportional ist. Zu den Elongationsempfängern gehören alle Aufnehmer, die nach dem elektrostatischen Wandlerprinzip (Kondensatormikrofone) oder dem piezoelektrischen Wandlerprinzip (Schallplattentonabnehmer) arbeiten. Wird die elektrische Größe proportional der Membrangeschwindigkeit generiert, so spricht man von einem Geschwindigkeitsempfänger. Alle Kondensatormikrofone sind Elongationsempfänger und alle dynamischen Mikrofone Geschwindigkeitsempfänger.

Dynamische Mikrofone

Das Tauchspulenmikrofon ist eine typische Bauform des dynamischen Mikrofons. Der Begriff bezieht sich auf den Aufbau des Wandlers: Beim Tauchspulmikrofon ist die Membran fest mit einer Spule (der Tauchspule) verbunden, die durch die Membranbewegung in einem dauermagnetischen Feld (magnetischer Grundstromkreis mit Luftspalt) bewegt wird. Die relative Bewegung von Spule und Magnetfeld erzeugt durch Induktion die Signalspannung.

Die Vorteile dieses Mikrofontyps sind:

- robust gegenüber mechanischen Beanspruchungen
- ausgelegt für hohe Schalldrücke
- benötigt keine Spannungsversorgung
- preisgünstig

3 Die Druckwandlerelemente

Das komplexe Feld der elektrischen Druckmessung hat zur Entwicklung unterschiedlicher Druckaufnehmer geführt. Dabei wurden und werden verschiedenste physikalische Prinzipien angewendet und eine Vielzahl von konstruktiven Lösungen realisiert. Alle Druckaufnehmer haben ihre Vor- und Nachteile. Es gibt keinen Aufnehmer, der alle Anforderungen in idealer Weise erfüllt. Für den Anwender ist es wichtig, die Vor- und Nachteile der Druckaufnehmerprinzipien zu kennen, damit er den für seinen Einzelfall am besten geeigneten Typ aufnehmen kann.

Das Sensorelement eines Druckaufnehmers beträgt etwa 10-20% der Herstellungskosten. Der weit-aus größte Teil der Kosten entsteht durch:

- Montage vor Ort
- Prüf- und Kalibrieraufwand
- Kompensation von Störgrößen (Temperatureinflüsse)
- Gehäuseaufbau
- Interne Elektronik
- Dichtung und mechanische Flansche

3.1 Prinzipien und Ausführungsbeispiele für Druckwandler

Für die elektrische Druckmessung gibt es eine Reihe recht verschiedener Prinzipien mit Hilfe von Dehnungsmessstreifen (DMS):

- Metallfolien-DMS
- Metall-Dünnschicht-DMS
- Dickschicht-DMS
- Halbleiter-DMS

Die Alternativprinzipien wären:

- Das induktive Prinzip
- Das kapazitive Prinzip
- Das piezoelektrische Prinzip

Die oben aufgeführten sieben verschiedenen Prinzipien sollen im Folgenden detaillierter betrachtet werden.

Folien-, Dünnschicht-, Dickschicht- und Halbleiter-DMS arbeiten alle nach dem Prinzip der Änderung eines elektrischen Widerstandes infolge einer mechanischen Dehnung. Über eine entsprechende Konstruktion des Sensorelements muss also der zu messende Druck in eine Materialdehnung umgewandelt werden. Diese wird mit den darauf befindlichen Dehnungsmessstreifen erfasst und die Widerstandsänderung über eine Wheatstone'sche Brückenschaltung in ein elektrisches Signal umgewandelt, das somit eine Funktion des Druckes darstellt.

3.2 Druckaufnehmer mit Metallfolien-DMS

Hierbei handelt es sich um eine erprobte und ausgefeilte Technik, die bereits seit vielen Jahrzehnten im Aufnehmerbau Verwendung findet. Ein meanderförmiger Metallfolienwiderstand wird mit Hilfe der Fotoätztechnik hergestellt und in ein Trägermaterial aus z.B. Phenolharz eingebettet.

Die Streifen werden mit einem heiß aushärtenden Kleber auf dem Sensorelement befestigt und verschaltet. Aus Kostengründen ist man bei neueren Druckaufnehmertypen dazu übergegangen, die Verschaltung der DMS und bestimmte Abgleichelemente zu einer großen DMS-Rosette zusammenzufassen. Dies ist insbesondere dann möglich, wenn das Sensorelement aus einer Kreismembran besteht. Mit Folien-Dehnungsmessstreifen kann eine sehr hohe Genauigkeit erreicht werden, die bis heute bei Kraftaufnehmern und Wägezellen in unübertroffener Präzision zu sehen ist. Leider lässt sich auf die hohe Präzision der Wägezellen und Kraftaufnehmer nicht ohne weiteres auf die Druckaufnehmer übertragen. Dies liegt nicht an der Folien-Dehnungsmessstreifentechnik an sich, sondern an der konstruktiven Gestaltung des Sensorelementes. Wegen der geforderten kleinen Abmessungen müssen bei Druckaufnehmern Messkörpergeometrien gewählt werden, die zwar sehr einfach sind, wie z.B. eine Membran, jedoch in sich bereits ein nichtlineares Verhalten besitzen. Durch andere Geometrieformen, wie z.B. flache Rohre oder Rohrkörper mit unterschiedlicher Wandstärke können weitere Verbesserungen von Linearität und Umkehrspanne erzielt werden.

3.2.1 Vorteile der Druckaufnehmer mit Folien-DMS

- Hohe Genauigkeit (Linearität, Temperaturgang, Drift, Reproduzierbarkeit)
- Für hohe Nenndrücke realisierbar
- Hohe Überlastbarkeit infolge Überlastsicherungen (bis zum 10-fachen des Nenndruckes)
- Sehr robust (Rütteln, Schockbeschleunigung)
- Gutes mechanisches Kriechverhalten
- Hohe Korrosionsbeständigkeit gegenüber reaktionsfreudigen Medien
- unempfindlich gegenüber Druckstößen
- gute Langzeitstabilität
- direkter Kontakt mit dem Druckmedium möglich
- einfache Reinigung von Verschmutzungen durch robuste außenliegende Membranen
- hohe Eigenfrequenz
- auch für kleine Fertigungsserien geeignet.

3.2.2 Nachteile der Druckaufnehmer mit Folien-DMS

- Relativ teuer infolge der engen Toleranzen und des dazu notwendigen Prüfaufwandes
- eingeschränkter Temperaturbereich (bis 120°C)
- für Druckbereiche unterhalb 5 bar schlecht realisierbar
- Miniaturisierung begrenzt.

3.3 Druckaufnehmer mit Dünnschicht-DMS

Während Folien-Dehnungsmessstreifen bereits seit mehr als 5 Jahrzehnten im Druckaufnehmerbau verwendet werden, hat die Dünnschicht Technologie erst vor etwa 25 Jahren den industriellen Durchbruch erreicht. Die Gründe hierfür liegen in der Komplexität des Verfahrens, so dass eine hohe Fertigungssicherheit nur mit entsprechendem „know how“ erreicht werden kann. Weiterhin sind zunächst hohe Investitionen erforderlich, da der gerätetechnische Aufwand beträchtlich ist und schließlich ist die Dünnschichttechnik für die Herstellung großer Stückzahlen prädestiniert, da sonst eine wirtschaftliche Fertigung von Sensorelementen nicht gegeben ist.

Der in den letzten 25 Jahren stark gewachsene Bedarf an Drucksensoren hat jedoch dazu geführt, dass die Dünnschichttechnik wirtschaftlich eingesetzt werden kann. Dadurch konnten insbesondere kleinere Nenndruckbereiche erschlossen werden, da die Rückwirkungen des Dünnschicht-DMS auf das Sensorelement sehr gering sind. Außerdem ist eine Miniaturisierung möglich, da die Abmessungen eines Dünnschicht-DMS sehr klein sind, bei gleichzeitig höherem Ohmschen Widerstand, als bei Folien-DMS. Dieser kommt wiederum den Ausführungen mit integrierter Elektronik sehr entgegen.

Man unterscheidet grundsätzlich drei Verfahren:

- das thermische Aufdampfen
- die Kathodenzerstäubung (sputten)
- und das CVD-Verfahren (Chemical Vapour Deposition)

Bei allen drei Verfahren geht es darum, auf der hochglanzpolierten Oberfläche des Sensorelementes zunächst eine Isolationsschicht von einigen Mikrometern Dicke, die niederohmigen Leiterbahnen zur Verschaltung und Kontaktierung der DMS und anschließend die DMS selbst aufzubringen. Mit der Dünnschichttechnik ergeben sich für das Sensorelement Möglichkeiten der Formgebung, wie sie bei Metallfolien-DMS nicht anwendbar sind. So können vor allem kleinere Elemente wie z.B. dünne Membranen, Biegebalken mit dünnen Stegen usw. verwendet werden.

3.3.1 Vorteile von Dünnschicht-Druckaufnehmern

- für kleine Nenndrücke realisierbar
- eine Miniaturisierung der Sensoren ist möglich
- hochohmige Brückenwiderstände sind realisierbar
- ein sehr gutes mechanisches Kriechverhalten
- für große Losgrößen ökonomisch
- gute Langzeitstabilität durch künstliche Alterung erreichbar
- hohe Genauigkeit
- geringe Temperaturabhängigkeit von Nullpunkt und Kennwert
- geringe Feuchteempfindlichkeit durch Abdecken der DMS

3.3.2 Nachteile von Dünnschicht-Druckaufnehmern

- komplexe Technologie, die ein spezifisches „know how“ erfordert
- die sichere Beherrschung der Fertigungsprozesse in der Produktion ist schwierig
- hohe Investitionskosten erforderlich
- nur bei großen Stückzahlen rentabel
- umfangreicher Vorrichtungsaufwand für Handhabung und Montage der Sensorelemente.

3.4 Druckaufnehmer in der Dickschichttechnik

Bei der Dickschichttechnik wird meist Keramik als Grundmaterial für das Sensorelement verwendet. Die Strukturierung erfolgt wie bei den Dünnschicht-DMS durch Maskentechnik, wobei zunächst die Leiterbahnen aufgebracht werden, die aus einer niederohmigen, leitfähigen Flüssigkeit bestehen. Dann werden mit einer zweiten Maske die Dickschicht-DMS als leitfähige Paste im sogenannten Siebdruckverfahren aufgebracht und, falls erforderlich, ein integriertes Abgleichnetzwerk darüber gelegt. Das Sensorelement wird mit den aufgetragenen DMS und Leiterbahnen nach dem Trocknen einem „Backprozess“ unterworfen, wobei nacheinander unterschiedliche Temperaturen durchfahren werden. Bedingt durch das Herstellverfahren der Keramikelemente in Sintertechnik, ist die Vielfalt der Sensorgeometrien eingeschränkt. Hinzu kommt, dass die Siebdrucktechnik ebene Flächen verlangt, wenn in großen Stückzahlen gefertigt werden soll. Ein nachträgliches Ätzen ist bei Keramik zur Formgebung

ebenfalls kaum einsetzbar, so dass lediglich der Prozessvorgang zur Keramikherstellung gewisse Variationsmöglichkeiten erlaubt. Eine nachträgliche mechanische Bearbeitung der Sensorelemente scheidet wegen der hohen Härte ebenfalls aus.

In der Praxis findet man daher überwiegend ebene Sensorelemente gleicher Dicke, wie z.B. Biegebalken oder Kreismembranen, die allerdings wiederum über dünne Glasschichten mit anderen Keramiktteilen verpresst und verbacken werden müssen. Die elektrischen Anschlüsse werden durch die Trägerscheibe hindurch zu deren Rückseite geführt und dort bei Bedarf gleich mit einer Hybridelektronik verbunden.

3.4.1 Vorteile von Dickschicht-Druckaufnehmern

- gute Korrosionsbeständigkeit gegenüber reaktionsfreudigen Medien
- gute Temperaturstabilität
- geringe Feuchteempfindlichkeit
- gute Langzeitstabilität
- geringes mechanisches Kriechen
- die Kombination mit Hybridelektronik ist durch die gleiche Technologie möglich

3.4.2 Nachteile von Dickschicht-Druckaufnehmern

- geringe Überlastbarkeit
- die Verbindung zwischen Keramik und dem Gehäuse kann problematisch sein
- Dichtheitsprobleme infolge unterschiedlicher Ausdehnungskoeffizienten Keramik/Metall
- Sensorelement relativ groß
- Der E-Modul von Keramik ist etwa doppelt so groß wie bei Stahl. Daher wirkt sich das auf die Verringerung des Brückenausgangssignals aus.
- Die thermische Hysterese ist größer als bei Folien- und Dünnschicht-DMS.

3.5 Druckaufnehmer mit Halbleiter-DMS

Die Idee, die piezoresistiven Eigenschaften von Halbleitern zur Dehnungsmessung zu nutzen und damit die Herstellung von Sensoren zur Kraft- und Druckmessung zu realisieren, ist bereits einige Jahrzehnte alt. Da der größte Anteil der Widerstandsänderung nicht wie bei den Metallfolien-DMS durch die Verringerung des Querschnitts bei Dehnung erfolgt, sondern entweder durch die Beweglichkeitsänderung der Ladungsträger oder durch die Änderung der Anzahl der beweglichen Ladungsträger, kann mit einem wesentlich höheren k-Faktor gerechnet werden. Inwieweit dieser allerdings in der Praxis auch genutzt werden kann, ist eine andere Frage.

Das Sensorelement wird aus Silizium hergestellt. Die DMS werden in einem zweiten Schritt durch gezieltes Dotieren in das Verformungselement integriert. Dadurch kann eine wesentliche Miniaturisierung des eigentlichen Sensorelementes erreicht werden. Für seine Herstellung werden bei den einzelnen Firmen und Forschungsinstituten Verfahren angewendet, die sich im Detail voneinander unterscheiden. Hier hat jeder sein eigenes Rezept.

Die maximalen Betriebstemperaturen liegen bei etwa 120°C, weil bei höheren Temperaturen die Isolation zwischen den „p“ und „n“ Bereichen schlecht wird und parasitäre „p, n“ Übergänge erfolgen. Des Weiteren ist die Temperaturabhängigkeit des Halbleiter-DMS-Widerstandes grundsätzlich groß.

Durch den Ätzprozess, der zur Herstellung des Sensorelementes notwendig ist, ist die Auswahl der geometrischen Formen stark eingegrenzt. Man findet daher ausschließlich Membranen, die entweder eine Kreis- oder Ringform besitzen oder als quadratische Membran ausgebildet sind. Das Sensorele-

ment ist das Kernstück des Druckaufnehmers, stellt aber nur einen Teil des Ganzen dar. Um den Anforderungen der Druckmesstechnik zu genügen, muss eine entsprechende Kapselung vorgenommen werden. So muss insbesondere das Siliziumsubstrat vor reaktionsfreudigen Medien geschützt werden. Die Druckvorlage schützt zwar das Sensorelement vor aggressiven Medien, ist aber, infolge der geringen Wandstärke der außen liegenden Membran, gegenüber mechanischen Einwirkungen empfindlich.

Ein wesentlicher Vorteil der Verwendung von Halbleiter-DMS zur Sensorherstellung ist die Fertigung in Großserien. Dadurch lassen sich die Herstellkosten des Sensorelementes niedrig halten. Sie machen 10 bis 25 % der Gesamtkosten aus. Ein weiterer Vorteil ist die Miniaturisierung des Sensorelementes. Dieser Vorteil kann aber bei den meisten Anwendungen der industriellen Druckmessung leider nicht genutzt werden, da für bestimmte Drücke auch genormte Druckanschlüsse vorgesehen sind, die wiederum eine bestimmte Gehäusegröße erfordern. Hinzukommt, dass eine integrierte Elektronik auch einen gewissen Platz erfordert, so dass komplette Halbleiter-Druckaufnehmer letztlich die gleiche Baugröße besitzen, wie die anderen bereits beschriebenen Druckaufnehmerprinzipien auch.

3.5.1 Vorteile der Halbleiterdruckaufnehmer

- preisgünstige Herstellung des Sensorelementes durch Massentechnik
- hoher k-Faktor
- kleine Abmessungen des Sensorelementes.

3.5.2 Nachteile der Halbleiterdruckaufnehmer

- nicht für kleine Serien geeignet
- große Temperaturabhängigkeit des k-Faktors
- ohne Druckvorlage empfindlich gegenüber reaktionsfreudigen Medien
- mit Druckvorlage empfindlich gegen mechanische Einwirkungen
- Zerbrechlichkeit (spröde) des Sensorelementes, dadurch nicht geeignet für dynamischen Einsatz (Stöße, Vibrationen, Schock)
- erhöhter Vorrichtungsbedarf für Handhabung und Montage des Sensorelementes
- Nenndruck nach oben begrenzt durch Festigkeit der Verbindung Silizium/Metall
- Die konstruktive Gestaltung des Sensorelementes ist begrenzt durch die eingesetzte Ätztechnik, daher resultiert auch eine eingeschränkte Genauigkeit.
- Die maximale Einsatztemperatur ist durch Isolationsprobleme zwischen p-dotiertem DMS und n-dotiertem Membranelement begrenzt (120°C).
- Der Linearitätsfehler und die Umkehrspanne sind, insbesondere bei hohen Drücken, 2-5 mal größer als bei vergleichbaren Druckaufnehmertypen mit anderen Verfahren.
- komplexe Technologie, die ein spezielles „know how“ erfordert
- hohe Investitionskosten zur Herstellung des Sensorelementtyps

3.6 Induktive Druckaufnehmer

Die hier verwendete Technik ist bereits mehr als 60 Jahre alt. Während bei den Druckaufnehmern mit Dehnungsmessstreifen der Druck in eine Materialdehnung umgesetzt werden muss, der dann mit Hilfe von Dehnungsmessstreifen in ein elektrisches Signal umgewandelt wird, arbeitet der induktive Druckaufnehmer mit einer Wegänderung. Diese wird z.B. durch eine Druckmembran erzeugt und über eine Kernstange, die mit der Membranmitte verbunden ist, weitergeleitet. Am anderen Ende trägt sie den Kern eines Wegeaufnehmers, der aus einem Spulenpaar besteht. Wird der Spulenkern als Funktion des Druckes hin und her bewegt, ändert sich der komplexe Widerstand der Spulen gegensinnig und durch eine Wheatston'sche Brückenschaltung kann die Bewegung des Kernes in ein elektrisches Signal umgewandelt werden. Durch die hohe Empfindlichkeit der Wegeaufnehmer können Membranauslenkungen von 1µm Weg bereits zu Vollausschlag führen. Sie sind daher gut zur Messung von kleinen Drücken geeignet bei gleichzeitig hoher Eigenfrequenz. Die konstruktiven Möglichkeiten des Senso-

relementes reduzieren sich auf die Anordnung der beiden Spulen des Wegeaufnehmers, wenn man einmal von der Membran, die den Weg erzeugt, absieht. Das erscheint trivial, wenn man jedoch bedenkt, dass Wege im μm -Bereich bereits deutliche Signale erzeugen, und dass Temperaturänderungen auch Längenänderungen der verwendeten Membranen in der gleichen Größenordnung bewirken, so ist gut feststellbar, dass auch hier in den vergangenen Jahrzehnten intensivste Entwicklungsarbeit geleistet wurde. Heute ist man in der Lage, sehr stabile Wegeaufnehmer zu bauen, so dass bestimmte Typen von induktiven Druckaufnehmern auch sehr gut zu statischen Langzeitmessungen geeignet sind, wie Wasserstandsmessungen in Staubecken.

Obwohl induktive Druckaufnehmer nicht die Genauigkeit der Metallfolien-DMS-Aufnehmer erreichen, haben sie, wegen des einfachen und robusten Aufbaus und der dadurch bedingten kostengünstigeren Fertigung, durchaus ihre speziellen Anwendungen. Da induktive Druckaufnehmer nicht notwendigerweise Elemente enthalten müssen, die nur eine begrenzte Temperatur zulassen, können Aufnehmer für einen Einsatz bis zu 350°C realisiert werden.

3.6.1 Vorteile der induktiven Druckaufnehmer

- Einfacher und robuster Aufbau
- hohe Überlastbarkeit
- gut für dynamischen Einsatz geeignet
- kleinste Nenndrücke realisierbar
- hohes Brückenausgangssignal
- geringe Feuchteempfindlichkeit
- geringe Investitionen für Fertigungseinrichtungen
- Verwendung von Kunststoffen nicht zwingend, daher für höhere Temperaturen realisierbar

3.6.2 Nachteile der induktiven Druckaufnehmer

- begrenzte Genauigkeit durch Temperaturabhängigkeit des Nullpunktes und Kennwertes
- nachträgliche Temperaturkompensation nur mit gewissem Aufwand möglich
- Miniaturisierbarkeit begrenzt
- nicht für Gleichspannung geeignet

3.7 Kapazitive Druckaufnehmer

Dass dieses Verfahren keinen größeren Marktanteil besitzt, liegt nicht so sehr am eigentlichen Messprinzip, sondern mehr an der dazu benötigten Elektronik. Hier kommt nur eine Trägerfrequenzspeisung in Frage. Außerdem müssen Spezialkabel verwendet werden und die Leitungslänge ist stark begrenzt, es sei denn, die gesamte Elektronik wird in den Aufnehmer mit einbezogen.

Es werden mit diesem Verfahren hohe Genauigkeiten erzielt, daher werden kapazitive Druckaufnehmer gern in Labors zur Kalibrierung eingesetzt. Darüber hinaus finden sie ihren Markt bei der Prozesssteuerung im Bereich der Industrietransmitter bzw. Messumformer, die häufig als Differenzdruckaufnehmer fungieren, was sich mit dem kapazitiven Prinzip leicht verwirklichen lässt.

Das physikalische Prinzip der kapazitiven Druckaufnehmer besteht darin, dass die Kapazitätsänderung zweier paralleler Platten, infolge einer Veränderung ihres Abstandes, genutzt wird. Hierbei kann es sich um einen einfachen Plattenkondensator handeln, oder es wird, ähnlich wie bei induktiven Druckaufnehmern, ein Differentialkondensator gebildet, in dem sich eine mittlere Platte zwischen zwei weiteren parallelen Platten hin und her bewegt.

Wie bei den induktiven Druckaufnehmern ist es auch hier erforderlich, den Druck in einen Weg umzusetzen. Dazu eignet sich am besten eine Membran, vorzugsweise als Kreisfläche, die auch gleichzeitig die kapazitive Elektrode darstellen kann. Da für das Grundmaterial ein nicht leitender Werkstoff,

z.B. Keramik verwendet wird, ist der Aufwand zur Herstellung des eigentlichen Sensorelementes gering. Die Kondensatorplatten müssen ebenso wie die Zuleitungen gegenüber dem Gehäuse sehr gut isoliert sein. Das Messmedium darf mit den Kondensatorplatten natürlich nicht in Berührung kommen, da sich sonst das Dielektrikum entsprechend extrem ändern würde.

3.7.1 Vorteile der kapazitiven Druckaufnehmer

- Einsatz bei hohen Temperaturen möglich (bis 350°C)
- hohe Genauigkeit
- hohe Empfindlichkeit
- hohe Überlastbarkeit, wenn Überlastsicherung vorhanden ist
- einfacher und robuster Aufbau
- keine Verwendung von Kunststoffen zwingend notwendig
- geringe Investitionen für den Fertigungsprozess
- gut für dynamische Messungen geeignet
- kleinste Drücke realisierbar

3.7.2 Nachteile der kapazitiven Druckaufnehmer

- nur mit hoher Trägerfrequenz zu betreiben
- Spezialkabel erforderlich
- Die Elektronik muss in der Nähe des Aufnehmers liegen.
- Das Sensorelement ist feuchte- und staubempfindlich, daher ist die Kapselung oder die Druckvorlage notwendig.
- keine Miniaturisierung möglich
- schlechte Langzeitstabilität, wenn die Elektronik und der Sensor örtlich getrennt sind

Die aus der Elektronik herrührenden Nachteile wurden von einigen Firmen dadurch behoben, indem diese in den Druckaufnehmer integriert wurden. Das verbessert zwar die Langzeitstabilität, verringert aber die an sich hohe Genauigkeit des Messprinzips und steht einer Miniaturisierung entgegen. Hinzu kommt, dass der Aufnehmer dann im Vergleich zu anderen Prinzipien relativ teuer wird.

3.8 Piezoelektrische Druckaufnehmer

Bei diesem Typ von Aufnehmer wird ein physikalischer Effekt genutzt, den bestimmte Materialien mit kristalliner Materialstruktur zeigen, wenn sie einer mechanischen Druckkraft ausgesetzt werden. Quarz ist dabei an erster Stelle zu nennen. Bei Druckbelastung treten in seinem Inneren Ladungsverchiebungen auf, die an bestimmten Oberflächen Ladungsunterschiede bewirken, deren Größe der aufgebrachten Kraft direkt proportional ist. Treten die Ladungen an Flächen auf, an denen auch die mechanische Druckkraft einwirkt, so spricht man von einem Longitudinaleffekt, treten sie dagegen an den Seitenflächen auf, bezeichnet man das Prinzip als Transversaleffekt.

Die Kapselung des Sensorelementes ist unproblematisch, weil Quarzmaterial sehr hart und unempfindlich ist. Da nur kleinste Verformungswege erforderlich sind, können die vorgelegten Membranen direkt auf den Kristall einwirken. Wegen der nahezu weglosen Messung, der damit verknüpften hohen Eigenfrequenz und der kurzen Ansprechzeit sind piezoelektrische Druckaufnehmer zum Messen dynamischer Vorgänge, Stoßwellen und Druckspitzen sehr gut geeignet. Da sie außerdem hohe Temperaturen ertragen können, werden sie z.B. zur Messung des Verbrennungs- und Druckverlaufes an Motoren eingesetzt.

3.8.1 Vorteile der piezoelektrischen Druckaufnehmer

- sehr gut für dynamischen Messgrößen geeignet
- diese Elemente besitzen eine hohe Eigenfrequenz, d.h. Resonanzeffekte treten außerhalb des Messbereiches auf
- kurze Ansprechzeiten
- auch für hohe Temperaturen geeignet
- einfacher und robuster Aufbau
- hohe Überlastbarkeit des Sensorelementes möglich
- eine nahezu weglose Messung
- kleine Abmessungen des Aufnehmers
- auch für hohe Drücke geeignet

3.8.2 Nachteile der piezoelektrischen Druckaufnehmer

- für statische Messungen nicht geeignet
- Verwendung von Ladungsverstärkern notwendig, dadurch Kabeleinflüsse
- Spezielle Verkabelung notwendig
- begrenzte Messgenauigkeit.

4 Das Kalibrieren eines Druckaufnehmers

In diesem Kapitel werden illustriert die wichtigsten Arbeitsschritte beim Kalibrieren eines Druckaufnehmers dargestellt.

4.1 Ausbau des Druckaufnehmers

In Zyklen von zwei Jahren, werden Druckaufnehmer mechanisch und elektrisch überprüft. Die elektrische Prüfung beinhaltet eine Kalibrierung. Anhängig von der Kampagnen- und Versuchsplanung, von den zusätzlich geforderten Genauigkeitsüberprüfungen durch den Kunden und bedingt durch die Belastung der Aufnehmer im Prüfstand, können die Zykluszeiten variieren.

4.2 Empfang des Sensors und Buchführung

Protokollieren von:

- Datum
- Eigentümer
- Hersteller
- Typ
- Sensornummer
- Messbereich
- Kalibriermessbereich
- Elektrische Impedanz (Transmitter oder Spannungsspeisung)
- Messort – Benennung der technischen Anlage
- Messstelle, d.h. der Ort der Messung wird erfasst

The image shows a handwritten table titled 'Daten zur Aufnehmerbuchführung' (Data for sensor bookkeeping). The table has the following columns: Datum (Date), Name (Name), Hersteller (Manufacturer), Typ (Type), Messbereich (Measurement range), Kalib.-Bereich (Calibration range), Impedanz (Impedance), Serien-Nr. (Serial number), Einsatzort (Installation site), and Messstelle (Measurement point). The table contains several rows of handwritten data, including dates like '12.01.2012', '12.01.2013', and '12.01.2014', and various technical details.

4.3 Montage des Sensors

Der Aufnehmer wird an das Stickstoffsystem des Kalibrierlabors angeschlossen. Auf dem linken Bild ist zu sehen, dass mehrere Aufnehmer im gleichen Kalibrierbereich zeitgleich kalibriert werden können. Im rechten Bild erfolgt der elektrische Anschluss und die anschließende Überprüfung der elementaren Funktionalität des Sensors.



Abb. [17] Verbindung mit der Stickstoffleitung - Versorgung mit der Speisespannung

4.4 Vorbereitung der Kalibrierlabor PC-Technik

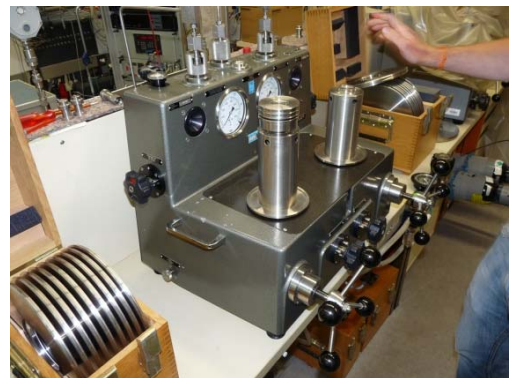
Es erfolgt die Dateneingabe in eine Datenbank über eine Eingabemaske. Dabei werden auch die Eingaben des Schrittmumfangs der Kalibrierung und der Konstanten (z.B. $g = 9,80833 \text{ m/s}^2$, Mess- und Kalibrierbereich) durchgeführt.



Abb. [18] Eine eindeutige und lückenlose Dokumentation ist die Grundlage für das Arbeiten im Kalibrierlabor.

4.5 Kalibriervorgang beginnen

Zur Erzeugung eines definierten Drucks, werden Metallscheiben mit einer konstanten Masse von je $m=2\text{kg}$ auf die Druckwaage gelegt. Mit der Wahl des passenden Kolbenzylinders, wird über die wirksame Fläche im gewünschten Messbereich kalibriert. Um die Masseträgheit und die Reibung der Kolben zu minimieren, werden die Gewichtsscheiben und der Kolben in Rotation versetzt. Bereits kleine Druckänderungen wirken sich auf den Kolben aus, da die



Reibungskräfte vernachlässigt werden können. Eine komplexe Messtechnik misst in Schritten die Spannung, die der Aufnehmer, in Abhängigkeit von der Gewichtskraft der Scheiben, generiert.

4.6 Die Kalibrierzyklen

Ein Kalibrierzyklus besteht aus der schrittweisen Druckerhöhung, basierend auf der proportionalen Erhöhung der Gewichtskraft (2kg Scheiben). Dabei werden die Druckwerte und die dazu gemessenen Spannungen erfasst. Die Notation der Wertepaare erfolgt durch manuelle Betätigung eines Tasters. Ist der maximale Kalibrierdruck erreicht, wird die schrittweise Entlastung durchgeführt. Auch in diesem Fall werden die Wertepaare erfasst. In beiden Fällen werden die Abweichungen zwischen dem gemessenen Wert und dem Normwert vom Computer ermittelt und aufgezeichnet.



4.7 Tabellarische Darstellung der Wertepaare

Notation der Spannung [U] in mV und des Druckes in bar.

Die Gewichtskraft, die durch die Masse [m] der Scheiben erzeugt wird, ist das Produkt aus Masse [m] und der Erdbeschleunigung [g], die gültig für den Ort des Kalibrierlabors ist. Die Verwendung der Größe ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) ist nicht akzeptabel für die geforderte Genauigkeit der Kalibration.

4.8 Berechnung der Koeffizienten

Die Berechnung erfolgt für eine quadratische Gleichung - Stichwort: Quadratische Regressionsrechnung (siehe Kapitel 5). Jede Regressionsrechnung bietet letztendlich ein Ergebnis, dass einen maximal zulässigen Restfehler besitzt. Ob der Restfehler für den praktischen Gebrauch akzeptabel ist, muss der Anwender entscheiden.

X-WERT BAR	Y-WERT mV	RECHWERT BAR	F(ABS) BAR	LFD NR	X-WERT BAR	Y-WERT mV	RECHWERT BAR	F(ABS) BAR
989	568.91	988169	-8.3E-04	12				
2.989	1566.87	2.98707	-1.9E-03	13				
4.989	2567.3	4.98585	-3.1E-03	14				
6.989	3572.3	6.98666	-3.3E-04	15				
8.98988	4578.3	8.98832	-6.7E-04	16				
10.989	5587.3	10.9888	-1.9E-04	17				
8.98988	4578.9	8.98952	5.1E-04	18				
6.989	3573.3	6.99065	1.6E-03	19				
4.989	2569.9	4.99104	2.8E-03	20				
2.989	1568.71	2.99075	1.7E-03	21				
989	569.89	988134	1.1E-03					

4.9 Ausgabe des Protokolls

Inhalt des Dokuments:

- Angabe der Stützpunkte
- Angabe der Koeffizienten
- Absoluter Fehler pro Stützpunkt
- Relativer Fehler pro Stützpunkt
- Maximaler absoluter Fehler der Gesamtmessreihe
- Maximaler relativer Fehler der Gesamtmessreihe

4.10 Ausgabe an den Kunden und erneuter Einbau nach Bedarf

DLR RA-PTE	PRUEFPROTOKOLL - DRUCKMESSWERTAUFNEHMER	31.07.13
------------	--	----------

HERSTELLER.....: ALTHEN
 TYP.....: PR3100
 SER.NR.....: 146587
 MESSBEREICH...: 10 BAR A
 KALIBR.BEREICH: 10 BAR ABS
 IMPEDANZ.....: SPAN.-TRANSMITTER
 SPEISESPANNUNG: 24.00V=
 LUFTDRUCK.....: 0.989
 EIGNER.....: DLR/LA
 MESS-STELLE: **PLR1**
 MESS-ORT...: **P8/LR**

Kalibrierstandards:
 Druckwaage D&H, Typ 5503, S.N.4702, DKD Nr. P183/D-K-15055-2012-09
 Prema DMM, Typ 6040S, S.N.4343, DKD Nr. 8315/DKD-K-15019/11-02
 Arbeitsanweisung\DLR-LA-QM-AA-7/008

AUSGLEICHSPARABEL $Y = A_0 + A_1 \cdot X + A_2 \cdot X^2$				
A0	-.1536111 (BAR)	KOEFFIZ.	ABGL_A0	.988175
A1	2.00840E-03 (BAR/MV)	ABGEGL.	ABGL_A1	2.005511E-03
A2	-2.53501E-09 (BAR/MV ²)	AUFNEHMER	ABGL_A2	-2.53322E-09
WERT (SOLL) (BAR)	SIGNAL (MV)	WERT (IST) (BAR)	FEHLER ABS (BAR)	FEHLER IN(0/00)
.9890000	568.9100	.9881672	-8.328557E-04	-8.32E-02
2.989000	1566.870	2.987067	-1.933336E-03	-.193
4.989000	2567.300	4.985846	-3.154278E-03	-.315
6.989000	3572.300	6.988646	-3.538132E-04	-3.53E-02
8.989000	4578.300	8.988310	-6.904602E-04	-6.90E-02
10.98900	5587.300	10.98878	-2.164841E-04	-2.16E-02
8.989000	4578.900	8.989501	5.006790E-04	.050
6.989000	3573.300	6.990637	1.636505E-03	.163
4.989000	2569.900	4.991033	2.033234E-03	.203
2.989000	1568.710	2.990748	1.747370E-03	.174
.9890000	569.8900	.9901326	1.132608E-03	.113
GRÖSSTE ABWCHG.: 3.154278E-03 BAR .3154278 (0/00)				

5 Das Bestimmen der Koeffizienten

Aus den gewonnenen Stützpunkten müssen, für ein mathematisches Funktionsmodell, die Koeffizienten bestimmt werden. Nachfolgend wird die lineare Funktion und in einem weiteren Schritt die quadratische Funktion betrachtet.

Die Methode zur Bestimmung der Koeffizienten nennt man lineare bzw. quadratische Regressionsrechnung.

Die früheste Form der Regression war die Methode der kleinsten Quadrate, 1805 von Legendre und 1809 von Gauß veröffentlicht. Beide verwendeten die Methode, um die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne anhand von astronomischen Beobachtungen zu bestimmen. Gauß veröffentlichte eine Weiterentwicklung der Theorie der kleinsten Quadrate im Jahr 1821, die eine Version des Satzes von Gauß-Markow enthielt. Der Begriff Regression wurde im 19. Jahrhundert von Francis Galton geprägt. Er beschrieb damit ein biologisches Phänomen, bekannt als Regression zur Mitte, wonach Nachfahren großer Eltern dazu tendieren, nur durchschnittlich groß zu werden.

5.1 Lineare Regression

Gegeben sei das mathematische Modell der linearen Funktion der Form:

$$y = b + a * x$$
$$y(\text{bar}) = b + a * x(\text{mV})$$

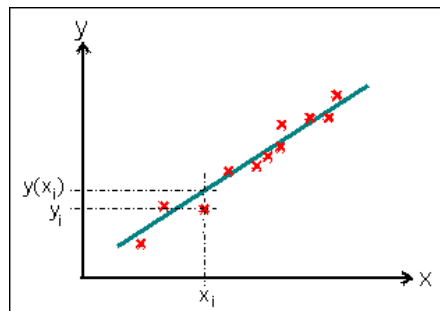


Abb. [19] Die roten Kreuze sind die im Kalibrierlabor gemessenen Werte

Für den Koeffizienten a gilt:

$$a = \frac{\sum(x * y) - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum(x^2) - \frac{(\sum x)^2}{n}}$$

Für den Koeffizienten b gilt:

$$b = \frac{\sum y}{n} - a \frac{\sum x}{n}$$

Für das Bestimmtheitsmaß r^2 gilt:

$$r^2 = \frac{\left[\sum(x * y) - \frac{\sum x \sum y}{n} \right]^2}{\left[\sum(x^2) - \frac{(\sum x)^2}{n} \right] \left[\sum(y^2) - \frac{(\sum y)^2}{n} \right]}$$

Überträgt man die Wertepaare in ein Diagramm, so ist optisch keine Nichtlinearität zu erkennen. Auch wenn mit den berechneten Koeffizienten die Funktion als Referenz bestimmt wird, scheint die gemessene und die berechnete Kurve konvergent zu sein. Diese Abschätzung ist ungenügend in der Messtechnik, daher wird das Bestimmtheitsmaß berechnet. Ist das Bestimmtheitsmaß $r^2 = 1$, so ist die berechnete Kurve eindeutig linear.

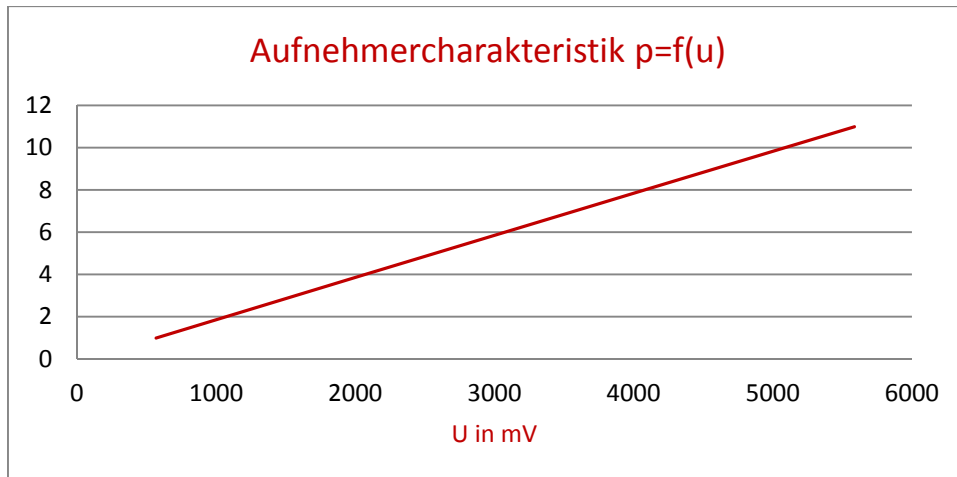


Abb. [20] Das Maß der Linearität der Kurve ist optisch nicht eindeutig bestimmbar, daher muss eine Größe gefunden werden, die ein objektives Resultat liefert.

Tabelle der Wertepaare					
	u in mV	p in bar	u Quadrat	p Quadrat	p mal u
	568,91	0,9881672	323658,5881	0,976474415	562,1782018
	1566,87	2,987067	2455081,597	8,922569262	4680,34567
	2567,3	4,985846	6591029,29	24,85866034	12800,16244
	3572,3	6,988646	12761327,29	48,84117291	24965,54011
	4578,3	8,98831	20960830,89	80,78971666	41151,17967
	5587,3	10,98878	31217921,29	120,7532859	61397,61049
	18440,98	35,9268162	74309848,95	285,1418795	145557,0166
	n	7			
	a	0,001978762			
	b	-0,080498674			
Prüfen der Konvergenz					
	u in mV	p in bar	p in bar gerechnet	Differenz in bar	
	568,91	0,9881672	1,045238706	0,057071506	
	1566,87	2,987067	3,019963839	0,032896839	
	2567,3	4,985846	4,999576515	0,013730515	
	3572,3	6,988646	6,988232131	-0,000413869	
	4578,3	8,98831	8,97886651	-0,00944349	
	5587,3	10,98878	10,97543717	-0,013342827	
	18440,98	35,9268162			
Bestimmtheitsmaß					
	r²	0,999888087			
Nebenrechnung	Zähler	Nenner			
	2591877804	2592167900			

Tab. [2] Mit einem Bestimmtheitsmaß von $r^2 = 0,99988$ ist die Charakteristik des Aufnehmers als linear zu betrachten.

Die Funktion des absoluten Fehlers bei der Druckmessung ist im folgenden Diagramm dargestellt:

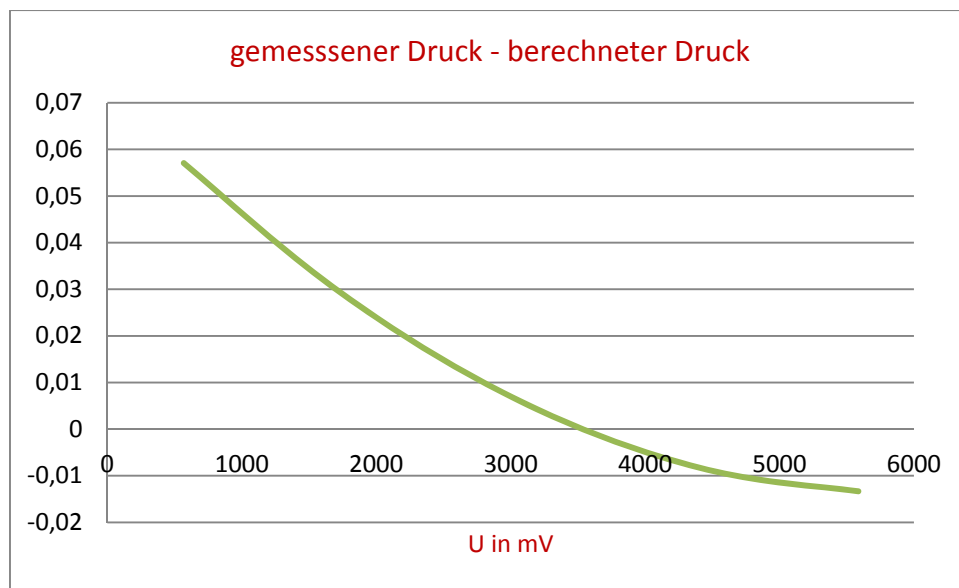


Abb. [21] Die Darstellung der Funktion des absoluten Fehlers.

5.2 Quadratische Regression

Die einfachste Alternative zur linearen Regression ist die „Quadratische Regression“. Alle Polynommodelle höherer Ordnung können nur noch über eine geeignete Software verwendet werden. Eine alternative Methode bzw. ein alternatives Modell ist immer informativ, da mittels eines Referenzergebnisses die Güte eines Ergebnisses objektiv bewertet werden kann. Jede Art von Regression basiert auf einem Näherungsverfahren. Entscheidend ist der Restfehler, der sich ergibt. Nicht immer sind Polynome höherer Ordnung auch die besseren Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten. Viele Statistiksoftwareprodukte können in sehr kurzer Zeit die Ergebnisse der Kalibrierung mit den verschiedensten Methoden durchrechnen. Als Ergebnis werden die maximal zulässigen Restfehler präsentiert, sodass der Anwender das für ihn optimale Verfahren wählen kann.

Die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $p(u) = au^2 + bu + c$ werden wie folgt berechnet.

$$a = \frac{(y_i x_i^2 - y_i \cdot x_i^2) \cdot (x_i^2 - (x_i)^2) - (y_i x_i - y_i \cdot x_i) \cdot (x_i^3 - x_i \cdot x_i^2)}{(x_i^4 - (x_i^2)^2) \cdot (x_i^2 - (x_i)^2) - (x_i^3 - x_i \cdot x_i^2)^2}$$

$$b = \frac{\overline{y_i x_i} - \overline{y_i} \overline{x_i} - a(\overline{x_i^3} - \overline{x_i} \overline{x_i^2})}{\overline{x_i^2} - (\overline{x_i})^2}$$

$$c = \overline{y_i} - a \overline{x_i^2} - b \overline{x_i}$$

Die allgemeinen mathematischen Variablen x und y stehen für die gemessene Spannung u (in der Formel als der gemessener Wert x) bei entsprechendem Druck p (in der Formel als tatsächlicher Wert y). Aus der Formel ist des Weiteren zu ersehen, dass die arithmetischen Mittelwerte aller Variablen, der potenzierten Variablen und deren Produkte für die Bestimmung der Koeffizienten herangezogen werden. Die Herleitung der Formeln basiert auf der partiellen Ableitung nach den Größen a, b und c der Funktion $f(a, b, c) = \sum_{i=1}^k (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^k (y_i - ax_i^2 + bx_i - c)^2$. Die Größen \hat{x} und \hat{y} symbolisieren die berechneten Größen. Ziel der Koeffizientenbestimmung ist es, das die Summe der Quadrate -

der Abstände der tatsächlichen y-Werte von den berechneten \hat{y} –Werten - ein Minimum hat. Die partiellen Ableitungen werden gleich null gesetzt und durch k dividiert.

Für den Druckaufnehmer der Messstelle PLR1 werden, mit den bereits bekannten Stützpunkten, exemplarisch die Koeffizienten berechnet.

Tabelle der Wertepaare							
	x	y	x mal y	x Quadrat	x Kubik	x hoch 4	y mal x Quadrat
	u in mV	p in bar	p mal u	u Quadrat	u Kubik	u hoch 4	p mal u Quadrat
	568,91	0,9881672	562,1782018	323658,5881	184132607,4	1,04755E+11	319828,8008
	1566,87	2,987067	4680,34567	2455081,597	3846793702	6,02743E+12	7333493,22
	2567,3	4,985846	12800,16244	6591029,29	16921149496	4,34417E+13	32861857,02
	3572,3	6,988646	24965,54011	12761327,29	45587289478	1,62851E+14	89184398,92
	4578,3	8,98831	41151,17967	20960830,89	95964972064	4,39356E+14	188402445,9
	5587,3	10,98878	61397,61049	31217921,29	1,74424E+11	9,74559E+14	343046869,1
Mittelwerte	3073,496667	5,9878027	24259,50276	12384974,82	56154704828	2,71057E+14	110191482,2
Summe	18440,98	35,9268162	145557,0166	74309848,95	3,36928E+11	1,62634E+15	661148893
n	7,0000						
a	-2,53540E-09						
b	2,00840E-03						
CC	-1,53612E-01						
Prüfen der Konvergenz							
	u in mV	p in bar	p in bar gerechnet	Differenz in bar	zur Geraden		
	u in mV		pq		pl		
	568,91	0,9881672	0,988166842	-3,57925E-07	1,000529		
	1566,87	2,987067	2,987067391	3,90738E-07	2,896653		
	2567,3	4,985846	4,985846421	4,21179E-07	4,79747		
	3572,3	6,988646	6,988645957	-4,29014E-08	6,70697		
	4578,3	8,98831	8,988309048	-9,51673E-07	8,61837		
	5587,3	10,98878	10,98878054	5,40583E-07	10,53547		
	18440,98	35,9268162					
			max. Fehler	5,40583E-07			

Tab. [3] Die Bestimmung der Koeffizienten mittels Excel.

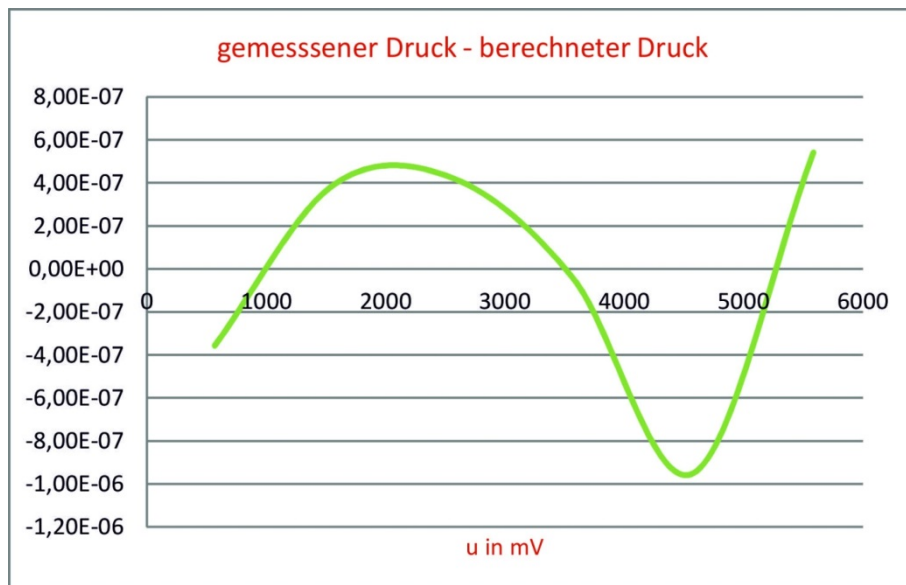


Abb. [22] Die Darstellung der Funktion des absoluten Fehlers.

5.3 Exponentielle Regression

Bei der exponentiellen Regression wird die Funktion: $\hat{y} = f(\hat{x}) = d \cdot e^{k\hat{x}}$

wieder unter der Bedingung gesucht, dass die Summe der Quadrate der Abstände der tatsächlichen y-Werte von den berechneten \hat{y} -Werten ein Minimum hat. Anders als bei der polynomischen Regression wird die Funktion zunächst in eine lineare Funktion umgewandelt, indem die Gleichung logarithmiert wird. Dann erhält sie die Form:

$$\ln \hat{y} = \ln(d \cdot e^{k\hat{x}}) = k \cdot \hat{x} + \ln d$$

Ein Vergleich mit der linearen Regression liefert damit folgende zu minimierende Funktion:

$$V(m, n) = \sum_{i=1}^k (\ln y_i - m \cdot x_i - n)^2 \rightarrow V(k, \ln d) = \sum_{i=1}^k (\ln y_i - k \cdot x_i - \ln d)^2$$

Da das Verfahren mit den partiellen Ableitungen identisch zur linearen Regression ist, wird hier auf die ausführliche Berechnung verzichtet. Es ergeben sich folgende Konstanten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{x_i \ln y_i} = k \cdot \overline{x_i^2} + \ln d \cdot \overline{x_i} \\ \overline{\ln y_i} = k \cdot \overline{x_i} + \ln d \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = \frac{\overline{x_i \ln y_i} - \overline{\ln y_i} \cdot \overline{x_i}}{\overline{x_i^2} - (\overline{x_i})^2} \\ \ln d = \overline{\ln y_i} - k \cdot \overline{x_i} \end{array} \right.$$

Tabelle der Wertepaare						
	x	y	ln y	x mal y	x Quadrat	x mal ln y
	U in mV	p in bar	ln bar	U mal p	U Quadrat	U mal ln p
	568,91	0,9881672	-0,011903365	562,1782018	323658,5881	-6,771943259
	1566,87	2,987067	1,09429197	4680,34567	2455081,597	1714,613258
	2567,3	4,985846	1,606603098	12800,16244	6591029,29	4124,632134
	3572,3	6,988646	1,944286832	24965,54011	12761327,29	6945,575851
	4578,3	8,98831	2,195924844	41151,17967	20960830,89	10053,60271
	5587,3	10,98878	2,396874752	61397,61049	31217921,29	13392,0583
Mittelwerte	3073,496667	5,9878027	1,537679689	24259,50276	12384974,82	6037,285053
Summe	18440,98	35,9268162	9,226078131	145557,0166	74309848,95	36223,71032
	d	1,1809				
	k	4,46211E-04				
Prüfen der Konvergenz						
	u in mV	p in bar	p in bar gerechnet	Differenz in bar	zur Geraden	
	u in mV		pq		pl	
	568,91	0,9881672	1,522123394	0,533956194	1,000529	
	1566,87	2,987067	2,375972329	-0,611094671	2,896653	
	2567,3	4,985846	3,712885443	-1,272960557	4,79747	
	3572,3	6,988646	5,813896912	-1,174749088	6,70697	
	4578,3	8,98831	9,10787142	0,11956142	8,61837	
	5587,3	10,98878	14,28722273	3,298442735	10,53547	
			max. Fehler	3,298442735		

Tab. [4] Die Bestimmung der Koeffizienten mittels Excel.

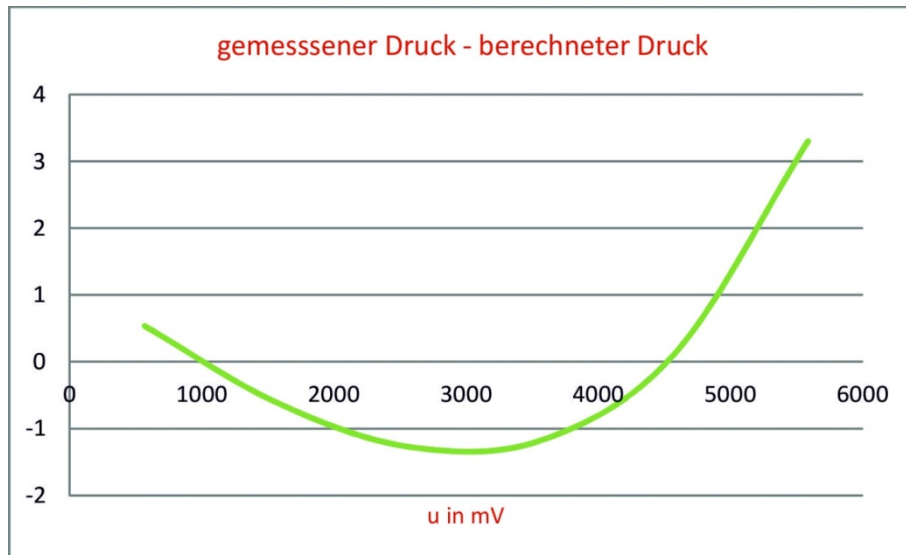


Abb. [23] Die Darstellung der Funktion des absoluten Fehlers.

Aus dieser Funktionsdarstellung ist ersichtlich, dass die exponentielle Regression das schlechteste Ergebnis liefert. Empfehlenswert ist die quadratische Regression und unter gewissen praktischen Einschränkungen auch die lineare Funktion.

5.4 Theorie und Algorithmus

Selbstverständlich lassen sich diese Aufgaben „per Hand“ berechnen, jedoch ist das aus betriebswirtschaftlicher Sicht nicht zu empfehlen. Abhängig von den zur Verfügung stehenden Arbeitsmitteln, wie PC Technik, Compilern und Interpretern, ist eine Programmierung zu empfehlen. Selbst mit den einfachsten Programmiersprachen, wie Basic, werden gute Ergebnisse erzielt. Die mathematische Grundlage für eine Programmierung wird in diesem Kapitel vorgestellt. Letztendlich haben wir ein überbestimmtes System von linearen Gleichungen.

Fehlerquadratmethode und Orthogonalisierung

Wir betrachten jetzt lineare Gleichungssysteme $Ax = f$ der Gestalt

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = f_1'$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = f_2'$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = f_m'$$

mit m Gleichungen für die n Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n . Für das folgende wird vorausgesetzt, dass $m \geq n$ gilt, so dass also mindestens so viele Gleichungen wie unbekannte vorliegen. Man erhält einen Einblick in die Lösungsmöglichkeiten der Gleichungssysteme, wenn man die Spalten der Koeffizientenmatrix:

$$(a_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$$

als Vektoren betrachtet.

$$a^{(k)} = (a_{ik})_{i=1, \dots, m}^{k=1, 2, \dots, n}$$

Mit der rechten Seite $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ lautet das obige Gleichungssystem

$$x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_n a^{(n)} = f,$$

woraus ersichtlich ist, dass es nur dann lösbar ist, wenn f als Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ geschrieben werden kann. Ist diese Lösbarkeitsbedingung verletzt, so heißt das Gleichungssystem überbestimmt. In der Regel liegt für $m > n$ diese Situation vor, aber auch im Fall $m = n$ kann dies, zum Beispiel infolge von Messfehlern oder Rundungsfehlern, eintreten.

Für derartige Gleichungssysteme ist es also im Allgemeinen nicht möglich, einen Vektor (x_1, x_2, \dots, x_n) anzugeben, mit dem die obigen m Gleichungen erfüllt sind. Nach der Methode des kleinsten Fehlerquadrates von Gauß ordnen wir stattdessen dem Gleichungssystem eine „Lösung“ $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ zu, die einen minimalen Defekt aufweist.

$$\|f - \sum_{k=1}^n z_k a^{(k)}\| = \min_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \|f - \sum_{k=1}^n x_k a^{(k)}\|$$

Hierbei wird im Folgenden für Vektoren $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ die euklidische Norm,

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^m u_i^2 \right)^{1/2}$$

sowie das euklidische Skalar Produkt verwendet.

$$(u, v) = \sum_{i=1}^m u_i v_i$$

z wird als Minimalstelle der Funktion bestimmt.

$$r(x) = \|f - Ax\|^2$$

Mit der transportierten Matrix

$$A^T = (a_{ik}^T), \quad a_{ik}^T = a_{ki}, \quad k = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n,$$

gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} r(x) &= (f - Ax, f - Ax) = (f, f) - (Ax, f) - (f, Ax) + (Ax, Ax) \\ &= (f, f) - 2(A^T f, x) + (A^T A x, x), \end{aligned}$$

Woraus für den Vektor grad r der partiellen Ableitungen von r die Beziehung

$$\text{grad } r(x) = -2 A^T f + 2 A^T A x$$

folgt. Mit $\text{grad } r(z) = 0$ als notwendige Bedingung für eine Minimalstelle von r erhält man daher für z das lineare Gleichungssystem:

$$A^T A z = A^T f$$

Den Übergang von der Gleichung $Ax = f$ zu dem jetzt erhaltenen Gleichungssystem bezeichnet man als erste Gaußsche Transformation. $A^T A$ ist eine quadratische Matrix mit n Zeilen und Spalten; werden die Spaltenvektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ der Matrix A als linear unabhängig vorausgesetzt, so ist $A^T A$ positiv definiert, folglich nichtsingulär, und z ist eindeutig bestimmt.

Der Vektor z kann mit den bereits bekannten Methoden zu Lösung nichtsingulärer Gleichungssysteme berechnet werden. Im Folgenden wird ein weiteres Verfahren zur Ermittlung von z angegeben, das auf der Orthogonalisierung der Spaltenvektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ beruht: Sind die Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ linear unabhängig, so berechnet man Vektoren $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$ gemäß

$$v^1 = a^1, \quad w^{(1)} = \frac{1}{\|v^{(1)}\|} v^{(1)},$$

$$v^{(j)} = a^{(j)} - \sum_{k=1}^{j-1} (a^{(j)}, w^{(k)}) w^{(k)}, \quad w^{(j)} = \frac{1}{\|v^{(j)}\|} v^{(j)}, j = 2, \dots, n;$$

Damit erhält man die Komponenten z_1, z_2, \dots, z_n von z durch

$$z_n = \frac{1}{\|v^{(n)}\|} (f, w^{(n)}),$$

$$z_j = \frac{1}{\|v^{(j)}\|} \left((f, w^{(j)}) - \sum_{k=j+1}^n z_k (a^{(k)}, w^{(j)}) \right), j = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Bevor der zugehörige Algorithmus aufgestellt wird, wollen wir noch einige Bemerkungen zu diesem Verfahren anfügen.

Die Vektoren $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$ sind paarweise orthogonal,

$$(v^{(j)}, v^{(k)}) = 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

ebenso wie die Vektoren $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}$, die außerdem normiert sind in $\|w^{(j)}\| = 1, j = 1, 2, \dots, n$.

Zur Bildung des Vektors $w^{(j)}$ wird jeweils benötigt, dass $\|w^{(j)}\| \neq 0$. Auf Grund der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ ist dies der Fall; denn aus $v^{(j)} = 0$ würde folgen, dass die Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(j)}$ linear abhängig sind. Es liegt also eine ähnliche Situation wie beim Gauß'schen Eliminationsverfahren vor, wo während der Rechnung überprüft wird, ob die Koeffizientenmatrix eine eindeutige Lösbarkeit zulässt. Ist nun die Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der Spaltenvektoren nicht erfüllt, so zeigt sich dies während der Rechnung daran, dass einer der Vektoren $v^{(j)}$ Null wird. Rechnerisch wird die zugehörige Überprüfung dadurch realisiert, indem man untersucht, ob $\|v^{(j)}\|$ eine passend vorgegebene Schranke $\varepsilon_1 > 0$ nicht überschritten wird. Entsprechend kann mit diesem Vorgehen ein beliebiges System von n gegebenen Vektoren auf lineare Unabhängigkeit untersucht werden. Eine weitere Analogie zum Gauß'schen Eliminationsverfahren zeigt sich bei der Lösung mehrerer Gleichungssysteme zu derselben Koeffizientenmatrix. Die jeweilige rechte Seite f beeinflusst nur die Ermittlung der Lösungskomponenten z_n, z_{n-1}, \dots, z_1 , so dass die Vektoren $v^{(j)}$ und $w^{(j)}$ nur einmal berechnet werden müssen.

Das beschriebene Orthogonalisierungsverfahren erweist sich gleichzeitig als ein direktes Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme $Ax = f$ mit nichtsingulärer quadratischer Koeffizientenmatrix. Die eindeutig bestimmte Lösung erhält man als Vektor z mit dem Fehlerquadrat:

$$r(z) = \|f - Az\|^2 = 0$$

Der Algorithmus zur Ermittlung von z wird zunächst mit Hilfe der Vektorschreibweise aufgestellt. Im ersten Teil werden aus den Spaltenvektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ der gegebenen Koeffizientenmatrix A die orthogonalen Vektoren $v^{(j)}$ und die orthonormierten Vektoren $w^{(j)}$ berechnet, solange $\|v^{(j)}\| > \varepsilon_1$ gilt; war dies für $j = 1, 2, \dots, n$ der Fall, so gelten die Spaltenvektoren der Koeffizienten als linear unabhängig, und es wird $p_1 = 1$ gesetzt. Anschließend werden im zweiten Teil mit der rechten Seite f die Komponenten z_1, z_2, \dots, z_n bestimmt. Erweist sich einer der Vektoren $v^{(j)}$ auf Grund der Beziehung $\|v^{(j)}\| \leq \varepsilon_1$ im Rahmen der Betrachteten Genauigkeit als Nullvektor, so setzen wir $p_1 = 0$ und führen keine weiteren Rechnungen aus.

Ausgleichsparabeln

Gegeben seien natürliche Zahlen m und n mit $m \geq n$, je m Zahlen x_1, x_2, \dots, x_m und y_1, y_2, \dots, y_m sowie n Funktionen u_1, u_2, \dots, u_n .

Gesucht ist eine Funktion,

$$p(x) = \sum_{k=1}^n z_k u_k(x),$$

deren Funktionswerte $p(x_i)$ die Zahlen y_i für $i = 1, 2, \dots, m$ möglichst gut approximieren. In dem Spezialfall, dass $m = n$ ist und die Punkte x_1, x_2, \dots, x_m paarweise verschieden sind, können damit Interpolationsaufgaben gestellt werden.

Zur Lösung dieser Aufgabe nach der Methode des kleinsten Fehlerquadrates minimiert man

$$\sum_{i=1}^m \left| y_i - \sum_{k=1}^n z_k u_k(x_i) \right|^2$$

als Funktion von z_1, z_2, \dots, z_n ; man sucht also z als Lösung des Gleichungssystems,

$$z_1 u_1(x_1) + z_2 u_2(x_1) + \dots + z_n u_n(x_1) = y_1,$$

$$z_1 u_1(x_2) + z_2 u_2(x_2) + \dots + z_n u_n(x_2) = y_2,$$

⋮

$$z_1 u_1(x_m) + z_2 u_2(x_m) + \dots + z_n u_n(x_m) = y_m,$$

das im Allgemeinen überbestimmt ist.

In Hinsicht zu dem vorherigen Abschnitt, ist die Koeffizienten Matrix $A = (a_{ik})$ gegeben durch $a_{ik} = u_k(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Bei geeigneten Voraussetzungen für das Funktionensystem u_1, u_2, \dots, u_n und für die Punkte x_1, x_2, \dots, x_m , sind die Spaltenvektoren von A linear unabhängig, so dass die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts angewandt werden können.

Wählt man das Funktionensystem,

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x, \quad \dots, u_n(x) = x^{n-1}$$

so ist die gesuchte Funktion

$$p(x) = z_1 + z_2x + \dots + z_nx^{n-1}$$

ein Polynom (n-1)-ten Grades, das als Ausgleichspolynom oder auch Ausgleichsparabel bezeichnet wird. Wenn von den gegebenen Punkten x_1, x_2, \dots, x_m mindestens n Punkte paarweise verschieden sind, dann sind die Spalten der Koeffizientenmatrix linear unabhängig.

$$A = (x_i^{k-1})$$
$$i = 1, \dots, m$$
$$k = 1, \dots, n$$

Daher kann das Orthogonalisierungsverfahren für die Ermittlung der Koeffizienten z_1, z_2, \dots, z_n des Ausgleichspolynoms p eingesetzt werden.

Bei Verwendung des Algorithmus und des zugehörigen Programms [aus dem ersten Abschnitt], ist nur zu Beginn aus den gegebenen Punkten x_1, x_2, \dots, x_m die Matrix A aufzustellen und es müssen noch die rechten Seiten $f_i = y_i$ für $i = 1, 2, \dots, m$ bereitgestellt werden.