

IB 515-83/11

ZEITOPTIMALE STEUERUNG EINES FLUGKÖRPERS
UND KONSTRUKTION SUBOPTIMALER RÜCKKOPP-
LUNGSSTEUERUNGEN

K. SCHNEPPER *)

Freigabe:

Die Bearbeiter:

Unterschriften:

Klaus Schnepfer
Cand. Math.

Klaus Schnepfer

Der Abteilungsleiter:
Dr. K.H. Well
~~Der stellv. Institutsdirektor~~

Klaus H. Well

Der Institutsdirektor:
Dr.-Ing. J. Ackermann

J. Ackermann

Dieser Bericht enthält:

101 Blatt davon
57 Bilder
 Diagramme

*) Diese Arbeit wurde als Diplomarbeit am Institut für Mathematik der Universität München erstellt.

GLIEDERUNG

Einleitung	1
1. Die optimale Lenkung eines Flugkörpers	3
1.1 Das Modell der Flugkörperbewegung und die Problemstellung	3
1.2 Die optimale Steuerung des Flugkörpers und die Überführung in ein Randwertproblem	7
1.3 Die Verknüpfung von Extremalenbögen mit singulärer und Bang-Bang-Steuerung	13
2. Die Konstruktion suboptimaler Rückkopplungs- steuerungen	37
2.1 Die Vereinfachung des Flugkörpermodells durch Linearisierung um einen Kollisionskurs	37
2.2 Konstruktion einer Rückkopplungssteuerung bei konstanter Normalbeschleunigung des Ziels	46
2.3 Konstruktion von Rückkopplungssteuerungen durch einen spieltheoretischen Ansatz	52
3. Numerische Berechnungen	59
3.1 Numerische Bestimmung optimaler- und suboptimaler Flugbahnen und Steuerungen für das Problem aus Paragraph 1	59
3.2 Numerische Berechnung von Flugbahnen unter Ver- wendung der in Kapitel 2 konstruierten Rück- kopplungssteuerungen	70
Literaturverweis	101

Einleitung

Ein typisches Beispiel, ein manövrierendes Ziel zu treffen, ist das zeitoptimale Abfangmanöver zweier Flugkörper. Dabei soll ein Flugkörper (Missile) einen zweiten Flugkörper (Target) in möglichst kurzer Zeit treffen. Neben den optimalen Steuerungen für dieses Problem interessieren in diesem Zusammenhang besonders suboptimale Rückkopplungssteuerungen. Diese können im Gegensatz zu den optimalen Steuerungen leicht und schnell auch während des Fluges berechnet werden.

Hier wird ein solches Abfangsproblem behandelt, bei dem beide Flugkörper einen kleinen Anfangsabstand haben und fast direkt aufeinanderzuzfliegen. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß sich das Manöver in einer Ebene abspielt, und beide Flugkörper konstante Tangentialgeschwindigkeit haben. Im ersten Abschnitt werden für fest vorgegebene Zielbewegungen Bedingungen für die optimale Steuerung des abfangenden Flugkörpers hergeleitet. Dazu wird angenommen, daß der verfolgende Flugkörper eine idealisierte Steuerdynamik besitzt. Es zeigt sich, daß die Steuerung entweder auf dem Rand des zulässigen Steuerbereichs verläuft (Bang-Bang-Steuerung) oder aber konstant 0 ist (singuläre Steuerung). Eine genauere Untersuchung der Verknüpfung von Extremalenbögen mit Bang-Bang- und singulärer Steuerung zeigt, daß eine solche Verknüpfung für die hier gewählten Parameter der Steuerdynamik nur über einen Häufungspunkt von Schaltpunkten erreicht werden kann, an denen die Steuerung zwischen den Rändern des Steuerbereichs springt.

Im zweiten Abschnitt werden 3 suboptimale Rückkopplungssteuerungen für das Abfangproblem konstruiert. Dazu wird für den Zielflugkörper eine ähnliche Steuerdynamik wie für den verfolgenden Flugkörper angenommen. Anschließend werden die Bewegungsgleichungen der Flugkörper um den Kollisionskurs linearisiert und die Dimension des entstehenden linearen Differentialgleichungssystems reduziert. In diesem reduzierten Flugkörpermodell werden mit Hilfe verschiedener Annahmen über die Steuerstrategie und die Modellparameter des Zieles

analytisch suboptimale Rückkopplungssteuerungen für den abfangenden Flugkörper abgeleitet.

Im dritten Abschnitt werden sodann diese Rückkopplungssteuerungen miteinander und mit den nach Abschnitt 1 berechneten optimalen Steuerungen verglichen.

1. Die optimale Lenkung eines Flugkörpers

1.1 Das Modell der Flugkörperbewegung und die Problemstellung

Es werden zwei Flugkörper M (Missile) und T (Target) betrachtet, die ein zeitoptimales Abfangmanöver durchführen; das heißt, der Flugkörper M soll das Ziel T in möglichst kurzer Zeit treffen. Dabei soll das Ziel manövrierbar sein; insbesondere soll es also die Richtung seines Geschwindigkeitsvektors ändern können.

Zu Beginn des Abfangmanövers sollen beide Flugkörper in Bezug auf ihre Geschwindigkeiten einen kleinen Abstand haben (hier 2 km) und fast direkt aufeinander zufliegen. Nimmt man weiter an, daß beide Flugkörper ihre Tangentialgeschwindigkeit nur "langsam" ändern können, so liegen folgende vereinfachende Annahmen für das mathematische Modell der Flugkörperbewegung nah:

- V1 : Die Flugkörper werden durch Punktmassen repräsentiert.
- V2 : Beide Flugkörper haben konstante Tangentialgeschwindigkeit.

Eine weitere einschneidende Vereinfachung des Modells bewirken noch die Annahmen

- V3 : Das Abfangmanöver findet in einer Ebene statt (Beschränkung auf 2-dimensionale Flugkörperbewegung).
- V4 : Der Einfluß der Schwerkraft wird vernachlässigt.

Mit diesen Annahmen erhält man die in Bild 1.1 dargestellte Flugkörpergeometrie. Ihr liegt ein 2-dimensionales kartesisches Koordinatensystem zugrunde, in dem sich der verfolgende Flugkörper M im Ursprung befindet. Das Koordinatensystem bewege sich mit M, ohne daß sich die Richtungen der Koordinatenachsen ändern.

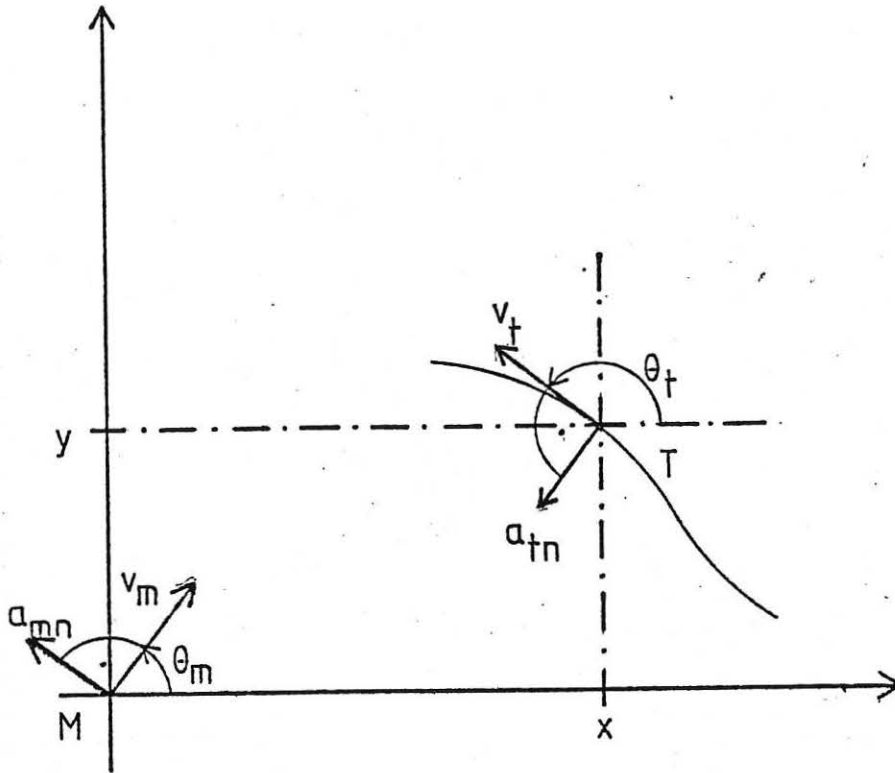


Bild 1.1 : Geometrie der Flugkörperbewegung

Es bezeichnen x und y die zu M relativen Ortskoordinaten des Zieles T , v_m bzw. v_t die Tangentialgeschwindigkeit von M bzw. T , θ_m bzw. θ_t den Flugbahnwinkel von M bzw. T und a_{mn} bzw. a_{tn} die Normalbeschleunigungen von M bzw. T . Wegen V_2 sind v_m und v_t konstant. Für die Normalbeschleunigung a_{mn} von M soll eine vereinfachte Dynamik folgender Form gelten

$$(1.1.1) \quad \ddot{a}_{mn} + 2\xi\omega\dot{a}_{mn} + \omega^2 a_{mn} = \omega^2 a_{mnc}$$

Hier ist a_{mnc} die kommandierte Querschleunigung, ξ die Dämpfung und ω die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung.

Eine zu (1.1.1) äquivalente Formulierung ist

$$(1.1.2) \quad \dot{a}_{mn} = a_{m2}$$

$$\dot{a}_{m2} = -2\xi\omega a_{m2} - \omega^2 a_{mn} + \omega^2 a_{mnc}$$

Im Folgenden sei nun $\xi = 1$ vorausgesetzt. Bild 1.2 zeigt dann die Reaktion dieses Systems auf eine konstante kommandierte Querbeschleunigung a_{mnc} bei Anfangswerten $a_{mn}(0) = 0$, $a_{m2}(0) = 0$ und $\omega = 10 \frac{1}{\text{sec}}$

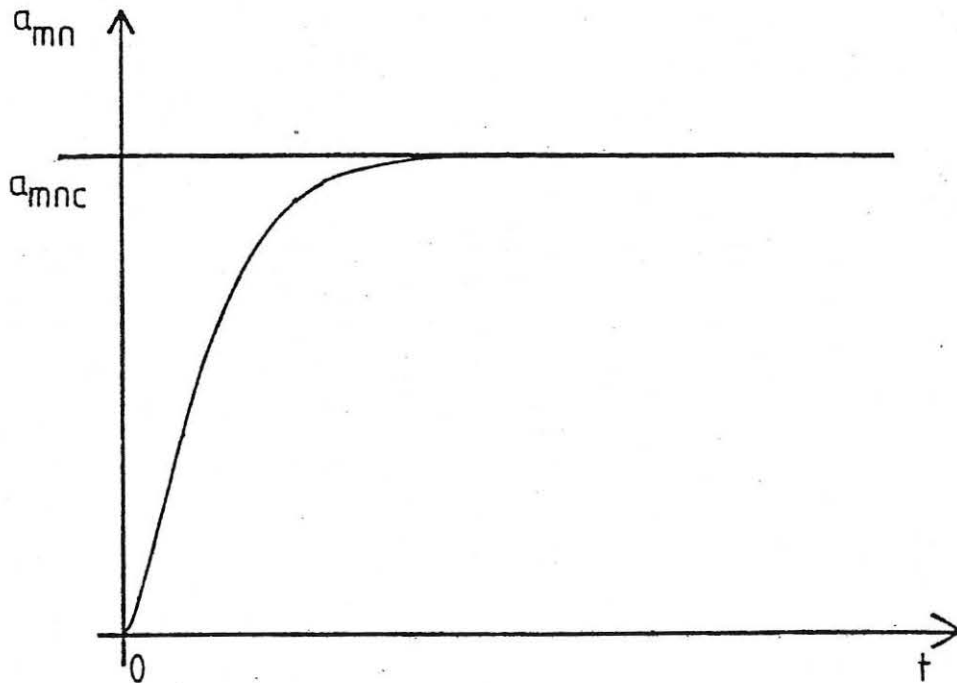


Bild 1.2 : Reaktion auf kommandierte Normalbeschleunigung

Aus der Geometrie der Flugkörperbewegung nach Bild 1.1 und der Dynamik (1.1.2) ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_t \cos \theta_t - v_m \cos \theta_m \\
 \dot{y} &= v_t \sin \theta_t - v_m \sin \theta_m \\
 \dot{\theta}_t &= \frac{a_{tn}}{v_t} \\
 \dot{\theta}_m &= \frac{a_{mn}}{v_m} \\
 \dot{a}_{mn} &= a_{m2} \\
 \dot{a}_{m2} &= -2\omega a_{m2} - \omega^2 a_{mn} + \omega^2 a_{mnc}
 \end{aligned}
 \tag{1.1.3}$$

Sei nun weiterhin vorausgesetzt, daß $a_{tn}(t)$ eine fest vorgegebene Funktion der Zeit ist, dann kann das hier behandelte Steuerungsproblem folgendermaßen formuliert werden.

Problem 1.1: Man bestimme die Steuerung $a_{mnc}(t)$ so, daß das Funktional

$$(1.1.4) \quad J(a_{mnc}) = t_f$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen (1.1.3) zu den Randvorgaben

$$\begin{aligned}
 x(t_0) &= x_0 = 2000 \text{ m} \\
 y(t_0) &= y_0 = 0 \text{ m} \\
 \text{a) } \theta_t(t_0) &= \theta_{t_0} = \pi \\
 \theta_m(t_0) &= \theta_{m_0} \\
 a_{mn}(t) &= a_{mn_0} = 0 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}
 \end{aligned}
 \tag{1.1.5}$$

$$a_{m2}(t_0) = a_{m20} = 0 \frac{m}{sec^3}$$

$$b) \quad x(t_f) = 0 \text{ m}$$

$$y(t_f) = 0 \text{ m}$$

sowie der Steuerbeschränkung

$$(1.1.6) \quad |a_{mnc}(t)| \leq a_{mnc}^{\max} = 20 \text{ g}$$

Dabei bezeichnet t_f die Endzeit, das heißt die Zeit, zu der das Ziel getroffen wird und g die Erdbeschleunigung.

Für die restlichen Modellparameter wird gewählt

$$v_m = 750 \frac{m}{sec} \quad , \quad \omega = 10 \frac{1}{sec}$$

(1.1.7)

$$v_t = 250 \frac{m}{sec}$$

Für die Normalbeschleunigung a_{tn} des Zieles T soll gelten:

$$(1.1.8) \quad 2g \leq |a_{tn}(t)| \leq 8g.$$

1.2 Die optimale Steuerung des Flugkörpers und die Überführung in ein Randwertproblem

Setzt man die Existenz einer Lösung des Steuerungsproblems (1.1.3) - (1.1.6) voraus, so folgt aus der Variationsrechnung und der Theorie der optimalen Steuerungen (Bryson, Ho [1], Hestenes [2]) die Existenz von Lagrangemultiplikatoren $\lambda: [t_0, t_f] \rightarrow R^6$, $v \in R^2$, so daß mit der Hamiltonfunktion

$$(1.2.1) \quad H(t, a_{mnc}) := \lambda_x \cdot (v_t \cos \theta_t - v_m \cos \theta_m) + \lambda_y \cdot (v_t \sin \theta_t - v_m \sin \theta_m) + \lambda_{\theta_t} \cdot \frac{a_{tn}(t)}{v_t} + \lambda_{\theta_m} \cdot \frac{a_{mn}}{v_m} + \lambda_{a_{mn}} \cdot a_{m2} + \lambda_{a_2} \cdot (-2\omega a_{m2} - \omega^2 a_{mn} + \omega^2 a_{mnc})$$

folgende notwendigen Bedingungen erfüllt sein müssen

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_x} = v_t \cos \theta_t - v_m \cos \theta_m \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_y} = v_t \sin \theta_t - v_m \sin \theta_m \\ \dot{\theta}_t &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_{\theta_t}} = \frac{a_{tn}}{v_t} \\ \dot{\theta}_m &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_{\theta_m}} = \frac{a_{mn}}{v_m} \\ \dot{a}_{mn} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_{a_{mn}}} = a_{m2} \\ \dot{a}_{m2} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_{a_2}} = -2\omega a_{m2} - \omega^2 a_{mn} + \omega^2 a_{mnc} \\ \dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ \dot{\lambda}_{\theta_t} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_t} = v_t (\lambda_x \sin \theta_t - \lambda_y \cos \theta_t) \\ \dot{\lambda}_{\theta_m} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_m} = v_m (-\lambda_x \sin \theta_m + \lambda_y \cos \theta_m) \\ \dot{\lambda}_{a_{mn}} &= -\frac{\partial H}{\partial a_{mn}} = \omega^2 \lambda_{a_2} - \frac{1}{v_m} \cdot \lambda_{\theta_m} \\ \dot{\lambda}_{a_2} &= -\frac{\partial H}{\partial a_2} = 2\omega \lambda_{a_2} - \lambda_{a_{mn}} \end{aligned}$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$y(t_0) = y_0$$

$$\theta_t(t_0) = \theta_{t_0}$$

(1.2.4)

$$\theta_m(t_0) = \theta_{m_0}$$

$$a_{mn}(t_0) = a_{mn_0}$$

$$a_{m_2}(t_0) = a_{m_2_0}$$

(1.2.5) $x(t_f) = 0$

$$y(t_f) = 0$$

(1.2.6.a) $\lambda_x(t_f) = v_1$

$$\lambda_y(t_f) = v_2$$

(1.2.6.b) $\lambda_{\theta_t}(t_f) = 0$

$$\lambda_{\theta_m}(t_f) = 0$$

$$\lambda_{a_{mn}}(t_f) = 0$$

$$\lambda_{a_2}(t_f) = 0$$

(1.2.7) $H(t_f) + 1 = 0$

und

(1.2.8) $H(t, a_{mnc}) = \min_{|a_{mnc}'| \leq a_{mnc}^{\max}} H(t, a_{mnc}')$

(1.2.2) und (1.2.3) sind die kanonischen Differentialgleichungen, (1.2.4) und (1.2.5) die vorgeschriebenen Randbedingungen. (1.2.6) und (1.2.7) sind die sogenannten Transversalitätsbedingungen. (1.2.8) stellt das Minimumprinzip dar. (1.2.7) legt

die in diesem Problem freie Endzeit fest. Da (1.2.2) autonom ist, d.h. die unabhängige Variable t tritt nicht explizit auf, folgt aus (1.2.7) sogar

$$(1.2.7') \quad H(t, a_{\text{mnc}}) + 1 \equiv 0 \quad \text{für } t \in [t_0, t_f]$$

Weil die Zustandsgrößen als stetig vorausgesetzt werden und nur eine Steuerbeschränkung vorliegt, sind die Lagrangemultiplikatoren stetig auf $[t_0, t_f]$. Wegen der Linearität von (1.2.1) und (1.2.2) bezüglich der Steuerung a_{mnc} liefert das Minimumprinzip (1.2.8) [1]

$$(1.2.9) \quad a_{\text{mnc}} = -\text{sign}(\lambda_{a_2}) \cdot a_{\text{mnc}}^{\text{max}} \quad \text{für } \lambda_{a_2} \neq 0 \text{ und}$$

$$(1.2.10) \quad |a_{\text{mnc}}| \leq a_{\text{mnc}}^{\text{max}} \quad \text{für } \lambda_{a_2} = 0$$

Ist nun $\lambda_{a_2}(t) \equiv 0$ auf einem Zeitintervall $[t_1, t_2]$, so tritt ein sogenannter singulärer Extremalenbogen auf. Auf einem solchen singulären Extremalenbogen ist

$$(1.2.11) \quad \frac{\partial H}{\partial a_{\text{mnc}}} = \omega^2 \lambda_{a_2} \equiv 0 \quad \text{und}$$

$$\text{somit } \frac{\partial^2 H}{\partial a_{\text{mnc}}^2} \equiv 0 \quad \text{auf } [t_1, t_2]$$

Da die Steuerung a_{mnc} linear in (1.2.1) und (1.2.2) vorkommt, kann die optimale Steuerung auf einem singulären Stück nicht aus dem Minimumprinzip abgeleitet werden. Wegen (1.2.11) müssen aber auf $[t_1, t_2]$ sämtliche Zeitableitungen von $\frac{\partial H}{\partial a_{\text{mnc}}}$ verschwinden.

Diese Tatsache kann man ausnützen, um die Steuerung auf einem singulären Extremalenbogen zu bestimmen. 6-malige Differentiation von (1.2.11) und einsetzen liefert nämlich

$$(1.2.12) \quad -\lambda_{a_{\text{mn}}} \equiv 0$$

$$(1.2.13) \quad \frac{1}{v_m} \lambda_{\theta_m} \equiv 0$$

$$(1.2.14) \quad -\lambda_x \sin \theta_m + \lambda_y \cos \theta_m \equiv 0$$

$$(1.2.15) \quad -\frac{a_{mn}}{v_m} (\lambda_y \sin \theta_m + \lambda_x \cos \theta_m) \equiv 0$$

$$(1.2.16) \quad -a_{m2} (\lambda_y \sin \theta_m + \lambda_x \cos \theta_m) \equiv 0$$

und

$$(1.2.17) \quad -\omega^2 a_{mnc} (\lambda_y \sin \theta_m + \lambda_x \cos \theta_m) \equiv 0$$

Es liegt also eine singuläre Steuerung der Ordnung $m = 6$ vor [1]. Mit dem folgenden Hilfssatz läßt sich die singuläre Steuerung ermitteln.

Hilfssatz 1.2.1: Auf einem singulären Extremalenbogen gilt

$$\lambda_y \sin \theta_m + \lambda_x \cos \theta_m \neq 0$$

Beweis: Der Beweis wird indirekt geführt: Es sei also die Extremale auf dem Intervall $[t_1, t_2]$ singulär. Dann muß folgende Annahme zum Widerspruch geführt werden

$$(H.1.2.1.1) \quad \lambda_y \sin \theta_m + \lambda_x \cos \theta_m \equiv 0 \quad \text{für ein } t' \in [t_1, t_2]$$

(1.2.14) liefert für dieses t' :

$$(H.1.2.1.2) \quad \lambda_y \cos \theta_m - \lambda_x \sin \theta_m = 0$$

1. Fall: Sei $\sin \theta_m = 0$.

Dann gilt $\cos \theta_m \neq 0$ und aus

$$(H.1.2.1.1) \quad \text{und} \quad (H.1.2.1.2) \quad \text{folgt} \\ \lambda_x = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_y = 0$$

2. Fall: Sei $\cos \theta_m = 0$.

Dann gilt $\sin \theta_m \neq 0$ und aus

$$(H.1.2.1.1) \quad \text{und} \quad (H.1.2.1.2) \quad \text{folgt wieder} \\ \lambda_x = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_y = 0$$

3. Fall: Sei $\sin\theta_m \neq 0$ und $\cos\theta_m \neq 0$.

Multipliziert man (H.1.2.1.1) mit $\sin\theta_m$ und (H.1.2.1.2) mit $\cos\theta_m$, so erhält man

$$\lambda_y \sin^2\theta_m + \lambda_x \sin\theta_m \cos\theta_m = 0$$

$$\lambda_y \cos^2\theta_m - \lambda_x \sin\theta_m \cos\theta_m = 0$$

Daraus folgt durch Addition der beiden Gleichungen und Vereinfachung sofort

$$\lambda_y = 0.$$

Wegen der Voraussetzung $\cos\theta_m \neq 0$ und (H.1.2.1.1) erhält man daraus aber unmittelbar

$$\lambda_x = 0.$$

Insgesamt folgt also in jedem Fall

$$\lambda_x(t') = \lambda_y(t') = 0.$$

Da die Lagrangemultiplikatoren stetig sind, folgt damit aus

(1.2.3)

$$(H.1.2.1.3) \quad \begin{array}{l} \lambda_x \equiv 0 \\ \lambda_y \equiv 0 \end{array} \quad \text{auf } [t_0, t_f].$$

Setzt man das in (1.2.3) ein und berücksichtigt man (1.2.11), (1.2.12), (1.2.13) und (1.2.6.b), so erhält man

$$(H.1.2.1.4) \quad \begin{array}{l} \lambda_{\theta_m} \equiv 0 \\ \lambda_{\theta_x} \equiv 0 \\ \lambda_{a_{mn}} \equiv 0 \\ \lambda_{a^2} \equiv 0 \end{array} \quad \text{auf } [t_1, t_f]$$

Aus (H.1.2.3) und (H.1.2.4) folgt dann insbesondere

$$H(t', a_{mnc}) = 0 \quad \text{im Widerspruch zu (1.2.7').}$$

Mit dem Hilfssatz 1.2.1 folgt somit aus (1.2.15) - (1.2.17)

$$(1.2.15') \quad a_{mn} \equiv 0$$

$$(1.2.16') \quad a_{m2} \equiv 0 \quad \text{und}$$

$$(1.2.17') \quad a_{mnc} \equiv 0 \quad \text{auf } [t_1, t_2].$$

Also erhält man für die Steuerung a_{mnc} auf einem singulären Extremalenbogen $a_{mnc} \equiv 0$. Zusätzlich müssen auf dem singulären Teilstück noch die Bedingungen (1.2.11) - (1.2.14) sowie (1.2.15') und (1.2.16') gelten.

Insgesamt erhält man als Ergebnis:

Jede Extremale des Steuerungsproblems (1.1.3) - (1.1.6) muß notwendig dem Randwertproblem mit den Differentialgleichungen (1.2.2), (1.2.3) und den Randwerten (1.2.4), (1.2.5) und (1.2.6.b) genügen. Die freie Endzeit t_f wird durch (1.2.7) festgelegt. Die Steuerung a_{mnc} auf einer Extremalen wird für $\lambda_{a_2} \neq 0$ durch (1.2.9) bestimmt (Bang-Bang-Steuerung). Auf einem singulären Extremalenbogen, wo der Schalter $\lambda_{a_2} \equiv 0$ ist, gilt $a_{mnc} \equiv 0$. Darüberhinaus müssen an einer Verknüpfungsstelle t_s von Bang-Bang-Steuerung und singulärer Steuerung die Bedingungen (1.2.11) - (1.2.14) und die Bedingung (1.2.15') und (1.2.16') erfüllt sein.

1.3 Die Verknüpfung von Extremalenbögen mit Bang-Bang- und singulärer Steuerung

In diesem Abschnitt wird die Verknüpfung von Extremalenbögen mit Bang-Bang- und singulärer Steuerung näher untersucht. Für eine große Klasse von Parameterwerten ω , a_{mnc}^{\max} und v_m wird gezeigt, daß ein singulärer Extremalenbogen von einem Zeitpunkt t_0 aus, in dem $a_{mn}(t_0) = \dot{a}_{mn}(t_0) = 0$ gilt, nicht mit endlich vielen Schaltpunkten erreicht werden kann, in denen die Steuerung a_{mnc} zwischen $+a_{mnc}^{\max}$ und $-a_{mnc}^{\max}$ wechselt. Daraus ergibt sich insbesondere, daß ein singuläres Stück

entweder ab dem Startzeitpunkt t_0 vorliegen muß, oder nur über einen Häufungspunkt von Bang-Bang-Schaltpunkten erreicht werden kann ("chattering-control").

Der Beweis dieser Tatsache erfolgt über die Diskussion der Trajektorie entlang eines Extremalenbogens mit Bang-Bang-Steuerung "links" von einem singulären Teilbogen. Es wird dazu eine Folge von Hilfssätzen bewiesen, die speziell das Verhalten des Flugbahnwinkels θ_m , der Normalbeschleunigung a_{mn} und deren Ableitung \dot{a}_{mn} beleuchten.

Zuerst wird für λ_{a_2} eine Lösung angegeben. Aus (1.2.3) entnimmt man folgendes Differentialgleichungssystem, dem λ_{a_2} genügen muß:

$$(1.3.1) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_{a_{mn}} &= \omega^2 \lambda_{a_2} - \frac{1}{v_m} \cdot \lambda_{\theta_m} \\ \dot{\lambda}_{a_2} &= 2\omega \lambda_{a_2} - \lambda_{a_{mn}} \end{aligned}$$

(1.3.1) ist äquivalent zu

$$(1.3.1') \quad \ddot{\lambda}_{a_2} - 2\omega \dot{\lambda}_{a_2} + \omega^2 \lambda_{a_2} = \frac{1}{v_m} \lambda_{\theta_m}$$

(1.3.1') hat als Lösung:

$$(1.3.2) \quad \lambda_{a_2}(t) = \left\{ (c_1 + c_2 \cdot t) + t \cdot \int_{t_0}^t \frac{\lambda_{\theta_m}(s)}{v_m} \cdot e^{-\omega s} ds - \int_{t_0}^t \frac{\lambda_{\theta_m}(s)}{v_m} e^{-\omega s} ds \right\} \cdot e^{\omega t}$$

Die Integrationskonstanten c_1 und c_2 bestimmen sich zu:

$$(1.3.3) \quad \begin{aligned} c_1 &= (\lambda_{a_2}(t_0)(1 - \omega t_0) + \lambda_{a_{mn}}(t_0)t_0) e^{-\omega t_0} \\ c_2 &= (\omega \lambda_{a_2}(t_0) - \lambda_{a_{mn}}(t_0)) e^{-\omega t_0} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus (1.3.2)

$$(1.3.2') \quad \lambda_{a_2}(t) = \left\{ [(1-\omega t_0)\lambda_{a_2}(t_0) + \lambda_{a_{mn}}(t_0) \cdot t_0] + (\omega \lambda_{a_2}(t_0) - \lambda_{a_{mn}}(t_0))t \right\} e^{-\omega t_0} + t \cdot \int_{t_0}^t \frac{\lambda_{\theta_m}(s)}{v_m} e^{-\omega s} ds - \int_{t_0}^t s \cdot \frac{\lambda_{\theta_m}(s)}{v_m} e^{-\omega s} ds \cdot e^{\omega t}$$

und weiter durch Differentiation

$$(1.3.4) \quad \dot{\lambda}_{a_2}(t) = \omega \lambda_{a_2}(t) + [(\omega \lambda_{a_2}(t_0) - \lambda_{a_{mn}}(t_0))e^{-\omega t_0} + \int_{t_0}^t \frac{\lambda_{\theta_m}(s)}{v_m} e^{-\omega s} ds] \cdot e^{\omega t}$$

Im weiteren benötigt man noch eine Lösung $a_{mn}(t)$ der Differentialgleichung (1.1.2). Es werden hier 2 Lösungsformen angegeben. Die erste lautet:

$$(1.3.5) \quad a_{mn}(t) = \left\{ (c_1 + c_2 t) + \omega^2 \left[t \cdot \int_{t_0}^t a_{mnc}(s) \cdot e^{\omega s} ds - \int_{t_0}^t s \cdot a_{mnc}(s) e^{\omega s} ds \right] \right\} \cdot e^{-\omega t}$$

Für $a_{mn}(t_0) = \dot{a}_{mn}(t_0) = 0$ gilt für die Integrationskonstanten c_1 und c_2

$$(1.3.6) \quad c_1 = c_2 = 0.$$

Somit erhält man aus (1.3.5)

$$(1.3.5') \quad a_{mn}(t) = \omega^2 \cdot \left[t \cdot \int_{t_0}^t a_{mnc}(s) e^{\omega s} ds - \int_{t_0}^t s \cdot a_{mnc}(s) e^{\omega s} ds \right] \cdot e^{-\omega t}.$$

Setzt man voraus, daß a_{mnc} konstant ist, so erhält man als 2. Lösungsform für a_{mn}

$$(1.3.7) \quad a_{mn}(t) = a_{mnc} + (c_1 + c_2 \cdot t) e^{-\omega t}.$$

Die ersten zwei Hilfssätze geben jetzt einige wichtige Eigenschaften der Normalbeschleunigung $a_{mn}(t)$ an.

Hilfssatz 1.3.1: Unter der Voraussetzung

$a_{mn}(t_0) = \dot{a}_{mn}(t_0) = 0$ gilt für alle zulässigen Steuerungen, d.h. $|a_{mnc}| \leq a_{mnc}^{\max}$:

$$|a_{mn}(t)| \leq a_{mnc}^{\max}$$

Beweis: Aus (1.3.5) folgt mit $t > t_0 \geq 0$

$$\begin{aligned} |a_{mn}(t)| &\leq \omega^2 \cdot e^{-\omega t} \cdot \int_{t_0}^t |a_{mnc}(s) \cdot (t-s)| ds \\ &= \omega^2 e^{-\omega t} \cdot \int_{t_0}^t |a_{mnc}(s)| \cdot (t-s) ds \\ &\leq \omega^2 e^{-\omega t} a_{mnc}^{\max} \int_0^t (t-s) ds \\ &= a_{mnc}^{\max} \cdot e^{-\omega t} [e^{\omega t} - 1 - t \cdot \omega]. \end{aligned}$$

Aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion folgt mit $\omega \cdot t > 0$:

$$0 \leq e^{-\omega t} [e^{\omega t} - 1 - t \cdot \omega] < 1$$

und damit die Behauptung.

Hilfssatz 1.3.2: Für konstantes $a_{mnc}(t)$ gilt

- i) $\lim_{t \rightarrow \infty} a_{mn}(t) = a_{mnc}$
- ii) $a_{mn}(t)$ hat höchstens ein relatives Extremum
- iii) $a_{mn}(t)$ hat höchstens einen Wendepunkt.

Beweis:

i) ist eine unmittelbare Folge von (1.3.7), da man leicht einsieht, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 + c_2 t) e^{-\omega t} = 0 \quad \text{für beliebige } c_1 \text{ und}$$

c_2 aus \mathbb{R} .

ii) und iii): Notwendige Bedingungen für ein relatives Extremum, bzw. einen Wendepunkt, von a_{mn} im Punkt t sind $\dot{a}_{mn}(t) = 0$, bzw. $\ddot{a}_{mn}(t) = 0$. Wegen (1.3.7) führen diese Bedingungen auf die Gleichungen

$$[-\omega(c_1 + c_2 t) + c_2] e^{-\omega t} = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$[\omega^2(c_1 + c_2 t) - 2\omega c_2] e^{-\omega t} = 0.$$

Nach Division durch $e^{-\omega t}$ sind beide Gleichungen linear in t , so daß sofort

ii) und iii) folgen.

Der Hilfssatz 1.3.2. ist nun insbesondere anwendbar, um auf einem Extremalenbogen mit reiner Bang-Bang-Steuerung, den Verlauf der Normalbeschleunigung im Intervall zwischen zwei Schaltpunkten zu beschreiben. Das wird im Hilfssatz 1.3.7 zusammen mit Hilfssatz 1.3.1 verwendet, um den zeitlichen Abstand zweier Schaltpunkte abzuschätzen.

Doch zunächst soll gezeigt werden, daß ein singulärer Extremalenbogen von einem Zeitpunkt t_0 , am dem $a_{mn}(t_0) = \dot{a}_{mn}(t_0) = 0$ gilt, mit einer Bang-Bang-Steuerung nur erreicht werden kann, wenn mindestens 3 Schaltpunkte vorliegen, an denen sich a_{mnc} ändert.

Hilfssatz 1.3.3: Wird im Intervall $[t_0, t_s]$ eine reine Bang-Bang-Steuerung verwendet, d.h. $|a_{mnc}| = a_{mnc}^{\max}$ auf $]t_0, t_s[$, und ist $a_{mn}(t_0) = a_{mn}(t_s) = \dot{a}_{mn}(t_0) = \dot{a}_{mn}(t_s) = 0$, so gilt:

Im Intervall $]t_0, t_s[$ liegen mindestens zwei Schaltpunkte t_1, t_2 , an denen a_{mnc} zwischen $+ a_{mnc}^{\max}$ und $- a_{mnc}^{\max}$ wechselt.

Beweis: Es wird nur der Fall betrachtet, daß in einer kleinen Umgebung "rechts" von t_0 $a_{mnc} = + a_{mnc}^{\max}$ gilt.

Für $a_{mnc} = - a_{mnc}^{\max}$ in der Nähe von t_0 kann dann ganz analog geschlossen werden.

Da $a_{mn}(t_0) = \dot{a}_{mn}(t_0)$ folgt wegen Hilfssatz 1.3.2 die Existenz eines Schaltpunktes $t_1 \in]t_0, t_s[$, in dem a_{mnc} nach $-a_{mnc}^{\max}$ springt.

Aus Hilfssatz 1.3.2 folgt weiterhin $a_{mn}(t_1) > 0$ und $\dot{a}_{mn}(t_1) > 0$

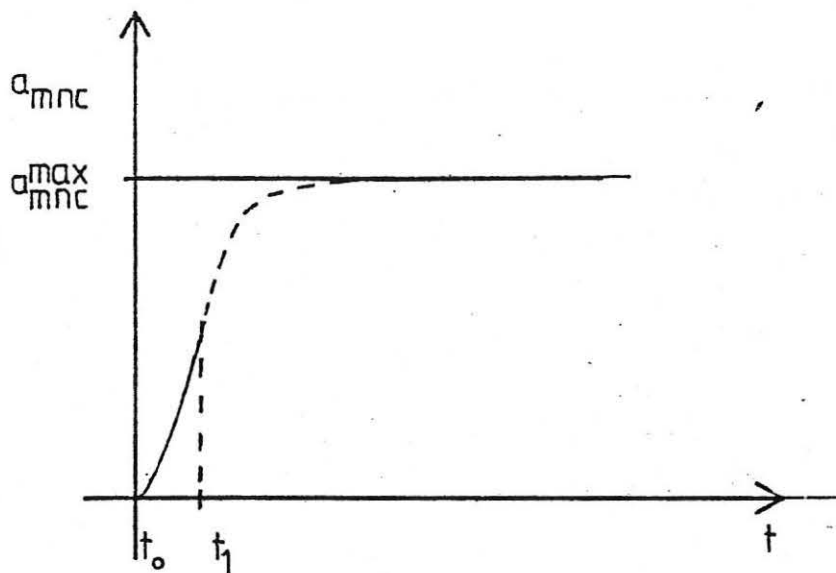


Bild 1.3.1 : Skizze von $a_{mn}(t)$ zwischen t_0 und t_1

Es wird nun angenommen, es gäbe keinen weiteren Schaltpunkt $t_2 \in]t_1, t_s[$.

Dann folgt aus $a_{mn}(t_1) > 0$, $a_{mn}(t_s) = 0$, $\dot{a}_{mn}(t_1) > 0$ die Existenz eines Punktes $t' \in]t_1, t_s[$ mit $\dot{a}_{mn}(t') = 0$. Da weiter $\dot{a}_{mn}(t_s) = 0$ gilt, hat man einen Widerspruch zu Hilfssatz 1.3.2 ii). Damit ist die obige Annahme falsch und die Behauptung gezeigt.

Durch eine eingehendere Betrachtung des Verlaufs von $a_{mn}(t)$ sieht man weiterhin, daß es möglich ist, t_1 und t_2 so in $]t_0, t_s[$ zu wählen, daß $a_{mn}(t_0) = \dot{a}_{mn}(t_s) = \dot{a}_{mn}(t_0) = a_{mn}(t_s)$ gilt.

Damit ist es nicht möglich, allein aus dem Verlauf von $a_{mn}(t)$ zu schließen, daß ein singulärer Extremalenbogen nicht mit endlich vielen Schaltpunkten erreicht werden kann. Man muß vielmehr den Verlauf des Schalters λ_{a_2} untersuchen.

(1.3.2) legt nun nahe, sich als erstes mit dem Lagrange-multiplikator λ_{θ_m} zu beschäftigen. Hilfssatz 1.3.8 wird später einen Zusammenhang zwischen Nullstellen λ_{a_2} und λ_{θ_m} auf Extremalenbögen mit Bang-Bang-Steuerung herstellen.

Vorerst soll nur der Verlauf von $\dot{\lambda}_{\theta_m}$ studiert werden.

Auf einem singulären Extremalenbogen ist wegen (1.2.15') der Flugbahnwinkel θ_m konstant. Im Rest dieses Abschnitts bezeichne θ_m^0 den Flugbahnwinkel auf einem singulären Stück. Mit dieser Bezeichnung gilt:

Hilfssatz 1.3.4: Für eine Extremale mit singulärem Teilbogen gilt

$$i) \quad \text{sign } \lambda_x = \text{sign } (\cos \theta_m^0)$$

$$ii) \quad \dot{\lambda}_{\theta_m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_m \in [-\frac{\pi}{2}, \theta_m^0] \vee [\pi + \theta_m^0, \frac{3}{2}\pi] \text{ falls } \lambda_x \geq 0 \\ \theta_m \in [\theta_m^0 - \pi, \theta_m^0] \text{ falls } \lambda_x < 0. \end{cases}$$

Beweis: Zu i):

Die verallgemeinerte Bedingung von Legendre-Clebsch auf einem singulären Stück lautet: ([1], Kelley, Kopp, Moyer [3])

$$(H.1.3.4.1) \quad (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial a_{mnc}} \left[\frac{d^m}{dt^m} H_{a_{mnc}} \right] \geq 0.$$

Dabei ist m die Ordnung der singulären Steuerung; in diesem Fall also $m = 6$ (siehe 1.2!).

$\frac{d^6}{dt^6} H_{a_{mnc}}$ ist in (1.2.17) angegeben, so daß sich

insgesamt ergibt

$$(-1)^3 \frac{\partial}{\partial a_{mnc}} \left[\frac{d^6}{dt^6} H_{a_{mnc}} \right] = \omega^2 (\lambda_y \sin \theta_m^0 + \lambda_x \cos \theta_m^0) \geq 0.$$

Wegen Hilfssatz 1.2.1 ist das äquivalent zu

$$(H.1.3.4.2) \quad \lambda_Y \sin \theta_m^0 + \lambda_X \cos \theta_m^0 > 0$$

Aus (1.2.14) folgt:

$$-\lambda_X \sin \theta_m^0 + \lambda_Y \cos \theta_m^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda_Y}{\lambda_X} = \tan \theta_m^0 & \text{falls } \lambda_X, \cos \theta_m^0 \neq 0 \\ \lambda_Y \cos \theta_m^0 = 0 & \text{falls } \lambda_X = 0 \\ \lambda_X \sin \theta_m^0 = 0 & \text{falls } \cos \theta_m^0 = 0 \end{cases} \quad (H.1.3.4.3)$$

Mit (H.1.3.4.2) und dem Beweis von Hilfssatz 1.2.1 folgt daraus

$$\begin{cases} \lambda_X \cdot \frac{1}{\cos \theta_m^0} > 0 & \text{falls } \cos \theta_m^0, \lambda_X \neq 0 \\ \lambda_X = \cos \theta_m^0 = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist aber äquivalent mit

$$\begin{cases} \lambda_X \cdot \cos \theta_m^0 > 0 & \text{falls } \cos \theta_m^0, \lambda_X \neq 0 \\ \lambda_X = \cos \theta_m^0 = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist i) bewiesen. Zu ii):

Aus (1.2.3) folgt:

$$\dot{\lambda}_{\theta_m} = v_m (\lambda_Y \cos \theta_m - \lambda_X \sin \theta_m) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_X \cos \theta_m \geq \lambda_X \sin \theta_m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_Y \cos \theta_m \geq 0 & \text{falls } \lambda_X = 0 \\ \frac{\lambda_Y}{\lambda_X} \geq \tan \theta_m & \text{falls } \lambda_X \cos \theta_m \geq 0 \\ \frac{\lambda_Y}{\lambda_X} \leq \tan \theta_m & \text{falls } \lambda_X \cos \theta_m < 0 \\ \lambda_X \sin \theta_m \leq 0 & \text{falls } \cos \theta_m = 0 \end{cases} \quad (H.1.3.4.4)$$

Um das weiter zu behandeln, werden zwei Fälle unterschieden.

1. Fall: Sei $\lambda_x = \cos\theta_m^0 = 0$, d.h. $\theta_m^0 = \pm \frac{\pi}{2}$:

Aus (H.1.3.4.2) folgt)

$$\lambda_y \sin\theta_m^0 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_y > 0 & \text{falls } \theta_m^0 = \frac{\pi}{2} \\ \lambda_y < 0 & \text{falls } \theta_m^0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Aus (H.1.3.4.4) folgt damit

$$\dot{\lambda}_{\theta_m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_m \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \text{falls } \theta_m^0 = \frac{\pi}{2} \\ \theta_m \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] & \text{falls } \theta_m^0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2. Fall: Sei $\cos\theta_m^0 \neq 0$:

Wegen Teil i) des Beweises folgt sofort $\lambda_x \neq 0$.
Wieder werden zwei Fälle unterschieden.

I) : Sei $\lambda_x > 0$:

Wegen i) dieses Satzes folgt $\cos\theta_m^0 > 0$, d.h.

$$\theta_m^0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

a) Sei $\theta_m \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

Dann ist $\lambda_x \cdot \cos\theta_m \geq 0$

Aus (H.1.3.4.4) und (H.1.3.4.3) folgt

$$\dot{\lambda}_{\theta_m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \theta_m^0 \geq \tan \theta_m & \text{falls } \theta_m \neq -\frac{\pi}{2} \\ \lambda_x \geq 0 & \text{falls } \theta_m = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \theta_m \in \left[-\frac{\pi}{2}, \theta_m^0\right]$$

b) Sei $\theta_m \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right[$

Dann ist $\lambda_x \cos \theta_m \leq 0$.

Aus (H.1.3.4.4) und (H.1.3.4.3) folgt

$$\dot{\lambda}_{\theta_m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \theta_m^0 \leq \tan \theta_m & \text{falls } \theta_m \neq \frac{\pi}{2} \\ \lambda_x \leq 0 & \text{falls } \theta_m = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_m \in \left[\pi + \theta_m^0, \frac{3}{2}\pi\right[$$

a) und b) liefern insgesamt

$$\dot{\lambda}_{\theta_m} \geq 0 \Leftrightarrow \theta_m \in \left[\pi + \theta_m^0, \frac{3}{2}\pi\right[\cup \left[-\frac{\pi}{2}, \theta_m^0\right], \text{ falls } \lambda_x > 0$$

II) : Sei $\lambda_x < 0$:

Wegen Teil i) dieses Satzes ist dann $\cos \theta_m^0 < 0$, d.h.

$$\theta_m^0 \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right[.$$

Analog zu I) zeigt man

$$\dot{\lambda}_{\theta_m} \geq 0 \Leftrightarrow \theta_m \in \left[\theta_m^0 - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \theta_m^0\right], \text{ falls } \lambda_x < 0$$

Die beiden Fälle 1) und 2) liefern aber sofort die Behauptung.

Für $\lambda_x > 0$ zeigt Bild 1.3.2 die verschiedenen Vorzeichenbereiche von $\dot{\lambda}_{\theta_m}$. Für Flugbahnwinkel θ_m , für die der Geschwindigkeitsvektor des Flugkörpers M in den schraffierten Bereich zeigt, ist $\dot{\lambda}_{\theta_m}$ positiv, sonst negativ.

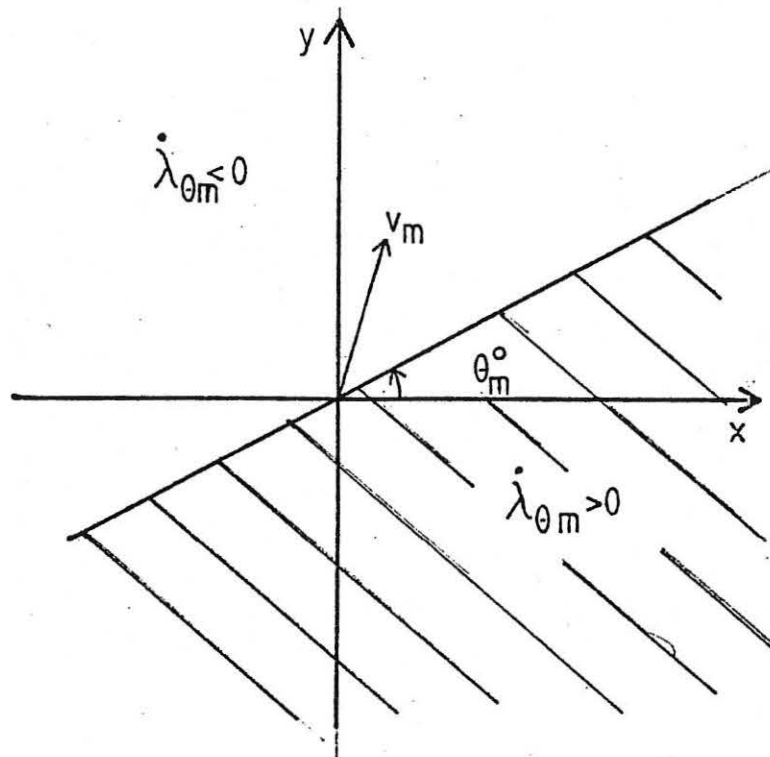


Bild 1.3.2 : Vorzeichenbereiche von $\dot{\lambda}_{\theta_m}$

Mit diesem Hilfssatz wird es im Hilfssatz 1.3.9 gelingen, den Verlauf von a_{mn} und λ_{θ_m} auf einem Extremalenbogen mit Bang-Bang-Steuerung, der zeitlich direkt vor einem singulären Flugbahnstück liegt, zu beschreiben. Es wird sich dabei ergeben, daß der Flugbahnwinkel vor einem singulären Stück um den Flugbahnwinkel θ_m^0 auf dem singulären Extremalenbogen "schwingt".

Um das zu zeigen, muß aber noch die Zeit zwischen zwei Schaltpunkten auf einem Flugbahnstück mit Bang-Bang-Steuerung abgeschätzt werden. Diese Zeitabschätzung gelingt durch eine Betrachtung der Normalbeschleunigung und deren Ableitung. Wegen Hilfssatz 1.3.1 muß dazu die Normalbeschleunigung "links" von einem Schaltpunkt betrachtet werden.

Hilfssatz 1.3.5: Für die Normalbeschleunigung "links" von einem Schaltpunkt t_s mit $a_{mn}(t_s) = a^0$ und $\dot{a}_{mn}(t_s) = \dot{a}^0$ und der kommandierten Normalbeschleunigung $a_{mnc}^- = \text{const}$ gilt für $t < t_s$:

$$i) \quad a_{mn}(t) = a_{mnc}^- + [(a^0 - a_{mnc}^-)(1 + \omega(t - t_s) + \dot{a}^0(t - t_s))] \cdot e^{\omega(t_s - t)}$$

$$ii) \quad \dot{a}_{mn}(t) = [\omega^2(t_s - t)(a^0 - a_{mnc}^-) + \omega \cdot \dot{a}^0(t_s - t) + \dot{a}^0] \cdot e^{\omega(t_s - t)}$$

Beweis: Aus (1.3.7) folgt

$$a^0 = a_{mnc}^- + (c_1 + c_2 t_s) e^{-\omega t_s} \quad (H.1.3.5.1)$$

$$\dot{a}^0 = [-\omega c_1 + c_2(1 - \omega t_s)] \cdot e^{-\omega t_s}$$

Auflösen nach c_1 und c_2 ergibt:

$$c_1 = [(a^0 - a_{mnc}^-)(1 - \omega t_s) - \dot{a}^0 t_s] e^{\omega t_s} \quad (H.1.3.5.2)$$

$$c_2 = [\omega(a^0 - a_{mnc}^-) + \dot{a}^0] e^{\omega t_s}$$

Schreibt man in (H.1.3.5.1) t anstatt t_s , $a_{mn}(t)$ statt a^0 , $\dot{a}_{mn}(t)$ statt \dot{a}^0 und setzt man (H.1.3.5.2) ein, so erhält man sofort die Behauptung.

Speziell für den Hilfssatz 1.3.7 wird noch folgender Hilfssatz gebraucht.

Hilfssatz 1.3.6: Für die Normalbeschleunigung gilt "links" von einem Schaltpunkt t_s :

Ist $a^\circ(t_s) = \tilde{a}^\circ(t_s)$, sowie $\dot{a}^\circ(t_s) < \dot{\tilde{a}}^\circ(t_s)$,
 so folgt bei gleicher kommandierter Normalbeschleunigung $a_{mnc}^-(t) = \tilde{a}_{mnc}^-(t)$ für $t < t_s$:

$$a_{mn}(t) > \tilde{a}_{mn}(t)$$

Beweis: Hilfssatz 1.3.5 i) liefert für $t < t_s$:

$$\begin{aligned} a_{mn}(t) > \tilde{a}_{mn}(t) &\Leftrightarrow \dot{a}^\circ \cdot (t-t_s) > \dot{\tilde{a}}^\circ \cdot (t-t_s) \\ &\Leftrightarrow \dot{a}^\circ < \dot{\tilde{a}}^\circ \end{aligned}$$

Bild 1.3.3 veranschaulicht dieses Ergebnis.

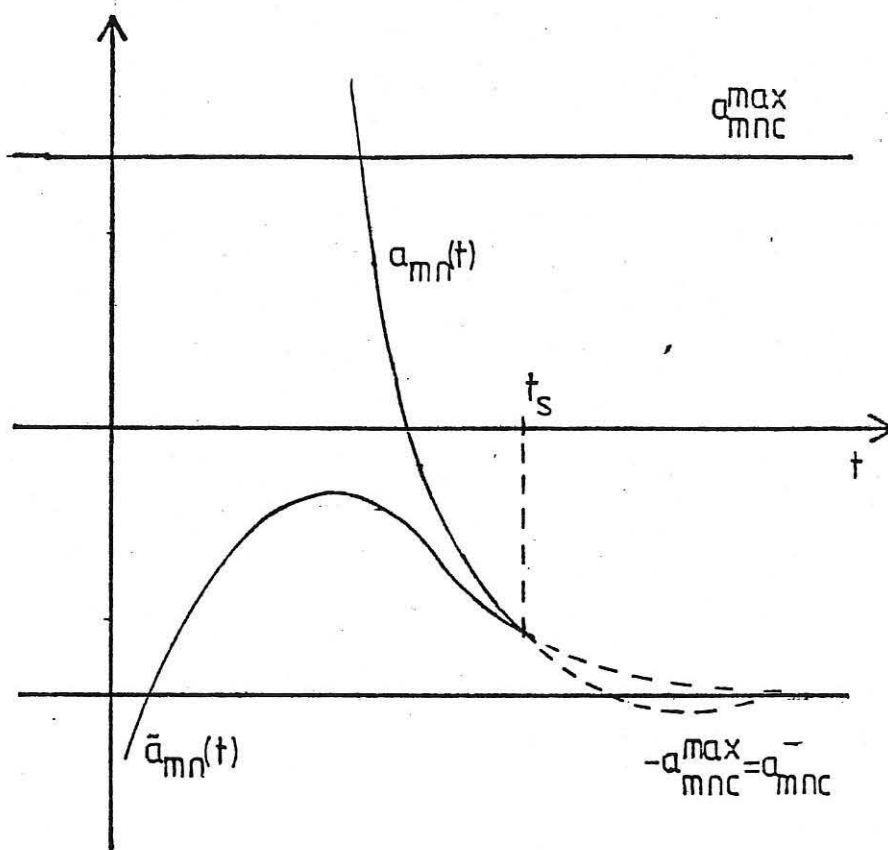


Bild 1.3.3 : Verlauf von $a_{mn}(t)$ und $\tilde{a}_{mn}(t)$
 nach Hilfssatz 1.3.6

Man ist jetzt in der Lage, eine Abschätzung für den zeitlichen Abstand zweier Schaltpunkte anzugeben. Dabei spielt eine untere Schranke t_H für den Zeitraum, den der Flugkörper M benötigt, um seinen Flugbahnwinkel um $\frac{\pi}{2}$ zu ändern, eine wesentliche Rolle. Diese untere Schranke erhält man, wenn man die Dynamik der Normalbeschleunigung außer acht läßt und die Querschleunigung durch a_{mnc}^{\max} abschätzt.

t_H bestimmt sich dann einfach zu

$$t_H = \frac{\pi \cdot v_m}{2 \cdot a_{mnc}^{\max}}$$

Hilfssatz 1.3.7: Für einen Extremalenbogen "links" von einem Schaltpunkt t_s , auf dem mit der kommandierten Normalbeschleunigung $a_{mnc}^-(t)$; $t < t_s$ mit $|a_{mnc}^-(t)| = a_{mnc}^{\max}$ gesteuert wird, gilt unter den Voraussetzungen

$$|a_{mn}(t_s)| < a_{mnc}^{\max}, \quad a_{mn}(t_s) \cdot a_{mnc}^- \leq 0$$

$$\dot{a}_{mn}(t_s) \cdot a_{mnc}^- \geq 0 \quad \text{und} \quad \omega > \frac{6 \cdot a_{mnc}^{\max}}{\pi \cdot v_m} :$$

$$|a_{mn}(t)| > a_{mnc}^{\max}, \quad \text{falls} \quad t_s - t \geq \frac{\pi \cdot v_m}{2 a_{mnc}^{\max}} = t_H$$

Beweis: o.B.d.A kann $a_{mnc}^-(t) = -a_{mnc}^{\max}$ angenommen werden; andernfalls verläuft die Argumentation ganz analog. Wegen Hilfssatz 1.3.2 ergeben sich dann für den Verlauf von $a_{mn}(t)$ für $t < t_s$ drei Möglichkeiten, die in Bild 1.3.4 skizziert sind.

- i) $a_{mn}(t)$ hat für $t < t_s$ ein relatives Maximum und strebt für $t \rightarrow -\infty$ gegen $-\infty$, hat also bei $t' < t_s$ einen Punkt mit $a_{mn}(t') = -a_{mnc}^{\max}$.
- ii) $a_{mn}(t)$ hat für $t < t_s$ bei t^* ein relatives Extremum mit $a_{mn}(t^*) > +a_{mnc}^{\max}$ und strebt für $t \rightarrow -\infty$ gegen $-\infty$, so daß wieder bei einem Zeitpunkt $t' < t^* < t_s$ gilt $a_{mn}(t') = -a_{mnc}^{\max}$.

iii) $a_{mn}(t)$ hat für $t < t_s$ kein relatives Extremum, sondern strebt für $t \rightarrow -\infty$ gegen $+\infty$ so, daß ein $t' < t_s$ existiert mit $a_{mn}(t') = +a_{mnc}^{\max}$.

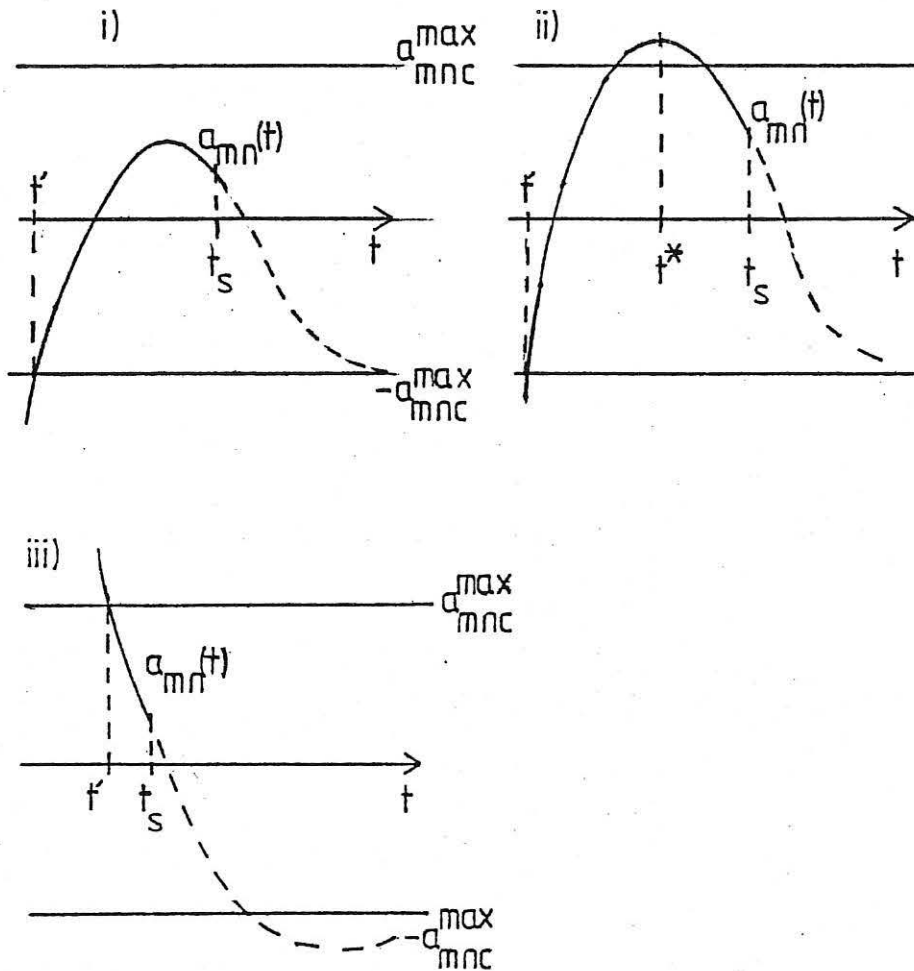


Bild 1.3.4 : Möglicher Verlauf von $a_{mn}(t)$ für $t < t_s$

Wegen Hilfssatz 1.3.6 gilt bei gegebenem $a_{mn}(t_s)$ für $t < t_s$, daß alle Kurven im Fall i) "unter" den Kurven des Falls ii) verlaufen, wogegen alle Kurven des Falles iii) "oberhalb" von denen des Falles ii) verlaufen. Es ist daher das im Fall ii) ermittelte t' immer kleiner als t' aus Fall i) und Fall iii). Da weiter im Fall ii) alle Kurven mit $a_{mn}(t^*) > a_{mnc}^{\max}$

"oberhalb" von der Kurve mit $a_{mn}(t^*) = a_{mnc}^{\max}$ verlaufen, genügt es, für diese spezielle Kurve zu zeigen, daß

$$t_s - t' \leq t_H \quad \text{gilt.}$$

Dazu wird zuerst allgemein $t_s - t'$ berechnet.

Hilfssatz 1.3.5 liefert für t' mit der Bezeichnung

$$a^0 := a_{mn}(t_s); \quad \dot{a}^0 := \dot{a}_{mn}(t_s):$$

$$-a_{mnc}^{\max} = -a_{mnc}^{\max} + [(a^0 + a_{mnc}^{\max})(1 + \omega(t' - t_s)) + \dot{a}^0(t' - t_s)] \cdot e^{\omega(t_s - t')}$$

Für $\dot{a}^0 \neq -\omega(a^0 + a_{mnc}^{\max})$ ist das äquivalent zu

$$(H.1.3.7.1) \quad (t' - t_s) = \frac{-(a^0 + a_{mnc}^{\max})}{\omega(a^0 + a_{mnc}^{\max}) + \dot{a}^0}$$

Mit der Nebenbedingung $t' - t_s < 0$ ist für $|a^0| < a_{mnc}^{\max}$ (H.1.3.7.1) äquivalent zu

$$(H.1.3.7.2) \quad \dot{a}^0 > -\omega(a^0 + a_{mnc}^{\max}).$$

(H.1.3.7.2) rechtfertigt die Herleitung von (H.1.3.7.1) und gibt den Bereich für \dot{a}^0 an, in denen Kurven entsprechend Fall i) und ii) auftreten. Für t^* folgt aus der notwendigen Bedingung für ein Extremum, $\dot{a}_{mn}(t^*) = 0$, und Hilfssatz 1.3.5.ii):

$$0 = \omega^2(t_s - t^*)(a^0 + a_{mnc}^{\max}) + \omega \dot{a}^0(t_s - t^*) + \dot{a}^0.$$

Wegen (H.1.3.7.2) ist das äquivalent zu

$$(H.1.3.7.3) \quad t^* - t_s = \frac{\dot{a}^0}{\omega[\omega(a^0 + a_{mnc}^{\max}) + \dot{a}^0]}.$$

Da wegen $a_{mnc}^- = -a_{mnc}^{\max}$ $\dot{a}^0 \leq 0$ ist legt (H.1.3.7.2) nahe, \dot{a}^0 folgendermaßen zu parametrisieren:

$$(H.1.3.7.4) \quad \dot{a}^0(k) := k \cdot (-1) \cdot \omega(a_{mnc}^{\max} + a^0), \quad k \in [0, 1[$$

(H.1.3.7.4) in (H.1.3.7.3) eingesetzt liefert

$$(H.1.3.7.5) \quad t^* - t_s = \frac{k}{\omega(k-1)}$$

Dann gilt folgende Behauptung:

Es existiert $k_0 \in [0, 1[$, so daß $a_{mn}(t^*) = a_{mnc}^{\max}$.

Beweis: Setzt man (H.1.3.7.4) und (H.1.3.7.5) in Hilfssatz 1.3.5 i) ein, so erhält man nach einer einfachen Umformung:

$$(H.1.3.7.6) \quad 2a_{mnc}^{\max} - (a^0 + a_{mnc}^{\max})(1-k) e^{\frac{k}{1-k}} = 0$$

(H.1.3.7.6) ist nach k auflösbar, denn:

$$i) \quad \text{für } k=0 \text{ gilt: } 2a_{mnc}^{\max} - (a^0 + a_{mnc}^{\max})(1-0) e^0 \\ = 2a_{mnc}^{\max} - (a^0 + a_{mnc}^{\max}) \geq 0$$

$$ii) \quad \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{k}{1-k}}}{\frac{k}{1-k}} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow 1^-} (1-k) e^{\frac{k}{1-k}} = \infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow 1^-} 2a_{mnc}^{\max} - (a^0 + a_{mnc}^{\max})(1-k) e^{\frac{k}{1-k}} = -\infty$$

Setzt man dieses k_0 und (H.1.3.7.4) in (H.1.3.7.1) ein, so erhält man

$$(H.1.3.7.1.1) \quad t_s - t' = \frac{1}{\omega(1-k_0)}$$

Es wird nun gezeigt, daß $k_0 \leq \frac{2}{3}$ und daß für $k = \frac{2}{3}$ gilt:

$$t_s - t' \leq t_H.$$

Wegen $k_0 < \frac{2}{3}$ gilt dann $\dot{a}^0(k_0) > \dot{a}^0(\frac{2}{3})$, so daß aus Hilfssatz 1.3.6 folgt, daß die Flugbahn zu $a^0(k_0)$ "unterhalb" der Flugbahn zu $\dot{a}^0(\frac{2}{3})$ liegt. Damit ist aber dann die Behauptung gezeigt. Sei also jetzt $k := \frac{2}{3}$.

Als erstes wird gezeigt, daß $k_0 < \frac{2}{3}$ ist. Es wird dazu die

Annahme $a_{mn}(t^*) \leq a_{mnc}^{\max}$ für $k = \frac{2}{3}$ zum Widerspruch geführt.

Nach (H.1.3.7.5) und Hilfssatz 1.3.5 i) folgt nach einer kurzen Nebenrechnung:

$$a_{mn}(t^*) < a_{mnc}^{\max} \Leftrightarrow 2a_{mnc}^{\max} > (a^0 + a_{mnc}^{\max}) \left(1 - \frac{2}{3}\right) \exp\left(\frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a_{mnc}^{\max} > (a^0 + a_{mnc}^{\max}) \frac{1}{3} \cdot e^2$$

Da $a_{mnc}^{\max} > a^0 \geq 0$ gilt, folgt aus der letzten Ungleichung

$$2a_{mnc}^{\max} > a_{mnc}^{\max} \cdot \frac{1}{3} e^2$$

$$\Leftrightarrow 2 > \frac{1}{3} e^2.$$

Das ist aber offenbar falsch. Also gilt $k_0 < \frac{2}{3}$.

Weiterhin gilt:

$$k_0 < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 - k_0 > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - k_0} < 3$$

Mit (H.1.3.7.1') folgt daraus:

$$t_s - t' = \frac{1}{\omega(1 - k_0)} < \frac{3}{\omega}$$

Nach der Voraussetzung zu diesem Hilfssatz gilt nun aber:

$$\omega > \frac{6 a_{mnc}^{\max}}{\pi \cdot v_m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\omega} < \frac{\pi \cdot v_m}{2 a_{mnc}^{\max}} = t_H.$$

Wegen Hilfssatz 1.3.1 liefert dieser Hilfssatz für die hier betrachteten Probleme als obere Schranke für den Abstand

zweier Schaltpunkte auf einem Extremalenbogen mit Bang-Bang-Steuerung gerade die Zeit t_H . Um den Verlauf von $a_{mn}(t)$, $\dot{a}_{mn}(t)$ und $\lambda_{\theta_m}(t)$ auf einem Extremalenbogen mit Bang-Bang-Steuerung "links" von einem singulären Teilbogen abzuschätzen, benötigt man nur noch den jetzt folgenden Zusammenhang zwischen den Nullstellen von λ_{a_2} und den Nullstellen von λ_{θ_m} .

Hilfssatz 1.3.8: Zwischen je 3 Nullstellen $t_1 < t_2 < t_3$ von λ_{a_2} liegt mindestens eine Nullstelle \tilde{t} von λ_{θ_m} und es gilt:

$$\text{sign}(\dot{\lambda}_{a_2}(t_1)) = \text{sign}(\dot{\lambda}_{\theta_m}(\tilde{t}))$$

Beweis: Wegen der Symmetrie der Argumentation kann ohne Einschränkung $\dot{\lambda}_{a_2}(t_1) > 0$ angenommen werden.

Es folgt dann sofort $\dot{\lambda}_{a_2}(t_2) < 0$ und $\dot{\lambda}_{a_2}(t_3) > 0$.

Dann folgt aus (1.3.4) mit $c_2 := (\omega \lambda_{a_2}(t_0) - \lambda_{a_{mn}}(t_0)) e^{-\omega t_0}$

$$e^{\omega t_1} (c_2 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\lambda_{\theta_m}(s)}{v_m} e^{-\omega s} ds) > 0$$

$$e^{\omega t_2} (c_2 + \int_{t_0}^{t_2} \frac{\lambda_{\theta_m}(s)}{v_m} e^{-\omega s} ds) < 0$$

$$e^{\omega t_3} (c_2 + \int_{t_0}^{t_3} \frac{\lambda_{\theta_m}(s)}{v_m} e^{-\omega s} ds) > 0$$

Berücksichtigt man $e^{\omega t} > 0$, so folgt durch Subtraktion:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda_{\theta_m}(s)}{v_m} e^{-\omega s} ds < 0$$

$$\int_{t_2}^{t_3} \frac{\lambda_{\theta_m}(s)}{v_m} e^{-\omega s} ds > 0$$

Daraus folgt aber sofort die Existenz eines Punktes

$$\tilde{t} \in]t_1, t_3[\quad \text{mit} \quad \lambda_{\theta_m}(\tilde{t}) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\lambda}_{\theta_m}(\tilde{t}) > 0.$$

Im folgenden wird von einer Extremalen ausgegangen, die einen singulären Teilbogen $[t_s, t_K]$ besitzt. Weiter liege "links" von diesen singulären Extremalenbogen ein Flugbahnstück mit reiner Bang-Bang-Steuerung, sowie ein Punkt $t_0 < t_s$ mit $a_{mn}(t_0) = \dot{a}_{mn}(t_0) = 0$.

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich dann insbesondere die Hilfssätze 1.3.1 bis 1.3.6 anwenden. Ausgehend von t_s kann jetzt mit diesen Hilfssätzen und den Hilfssätzen 1.3.7 und 1.3.8 der Verlauf von $a_{mn}(t)$, $\dot{a}_{mn}(t)$ und $\lambda_{\theta_m}(t)$ für endlich viele Schaltpunkte bestimmt werden.

Für den Rest dieses Abschnittes wird angenommen, daß

$$\omega > \frac{6 \cdot a_{mnc}^{\max}}{\Pi \cdot v_m} \quad \text{ist.}$$

Hilfssatz 1.3.9: Bei "Aufsprung" auf einen singulären Extremalenbogen $[t_s, t_K]$ mit endlich vielen Schaltpunkten $t_n < t_{n-1} < \dots < t_2 < t_1 = t_s$ gelten unter den Voraussetzungen, daß ein Punkt $t_0 < t_n$ mit $a_{mn}(t_0) = \dot{a}_{mn}(t_0) = 0$ existiert und daß

$$|a_{mnc}(t)| = a_{mnc}^{\max} \quad \text{für} \quad t \in]t_n, t_1[\quad \text{ist, folgende}$$

Aussagen:

- i) $\text{sign}(a_{mn}(t_i)) = -\text{sign}(\dot{a}_{mn}(t_i))$ für $i=2, 3, \dots, n$
- ii) $\text{sign}(a_{mn}(t_i)) = \text{sign}(a_{mnc}^+(t_i))$ für $i=2, 3, \dots, n$,
wobei $a_{mnc}^+(t_i)$ die kommandierte Normalbeschleunigung im Intervall $]t_i, t_{i-1}[$ bezeichnet.
- iii) Es existiert genau ein $t_i^+ \in]t_i, t_{i-1}[$ mit

$$\lambda_{\theta_m}(t_i^+) = 0 \quad \text{für } i=3,4,\dots,n$$

$$\text{iv) } \text{sign}(\lambda_{\theta_m}^\bullet(t_i)) = \text{sign}(a_{mn}(t_i) \cdot \lambda_x) \quad \text{für } i=2,3,\dots,n.$$

Beweis: Wegen Hilfssatz 1.3.3 ist auf jeden Fall die Existenz der Punkte t_2 und t_3 gesichert.

Es wird hier nur der Fall $a_{mnc}^+(t_2) = +a_{mnc}^{\max}$ und $\lambda_x > 0$ bewiesen. Für die restlichen drei Fälle kann man die Argumentation analog zu dem hier bewiesenen Fall führen.

Es wird zusätzlich noch bewiesen

$$\begin{aligned} \text{v) } \lambda_{\theta_m}^\bullet(t_i^+) (-1)^i &> 0 \\ \lambda_{a_2}^\bullet(t_i) (-1)^i &> 0 \quad \text{für } i=3,4,\dots,n. \end{aligned}$$

$$t_{i-1} - t_i < t_H = \frac{\Pi \cdot v_m}{2a_{mnc}^{\max}}$$

i) - v) werden durch Induktion gezeigt.

1. Induktionsanfang

Es ist zu zeigen: i), ii), iv) für $i = 2$ und $i = 3$, sowie iii) und v) für $i = 3$.

Bild 1.3.5 skizziert den Verlauf von $a_{mn}(t)$ im Intervall $[t_3, t_1]$:

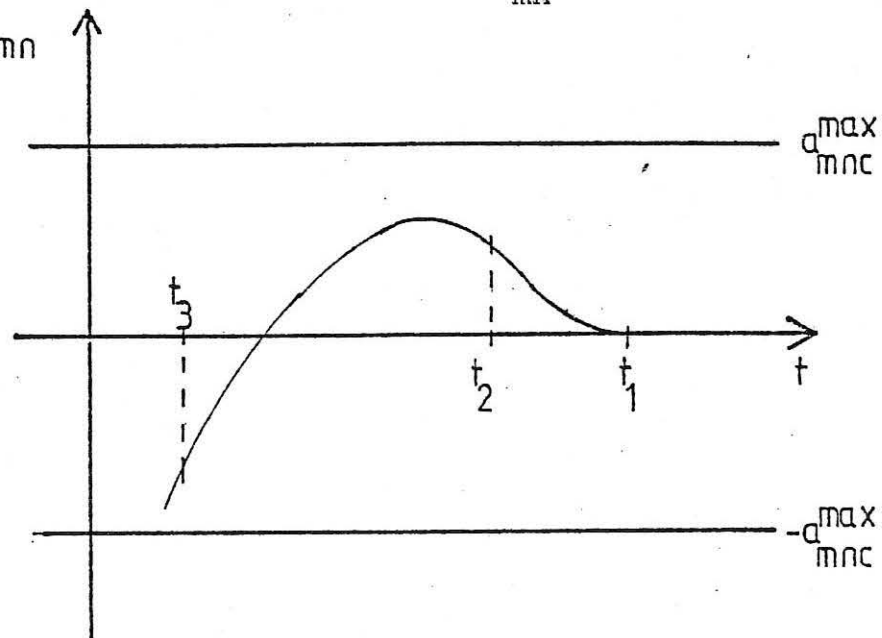


Bild 1.3.5 : Skizze von $a_{mn}(t)$ in $[t_3, t_1]$

Wegen $a_{mn}(t_1) = \dot{a}_{mn}(t_1) = 0$ und Hilfssatz 1.3.2 gilt $a_{mn}(t_2) > 0$; $\dot{a}_{mn}(t_2) < 0$ und $a_{mn}(t) > 0$ für $t \in [t_2, t_1[$. Mit $a_{mnc}^+(t_2) = a_{mnc}^{\max}$ folgt sofort i) und ii) für $i = 2$. Wegen Hilfssatz 1.3.1 und Hilfssatz 1.3.7 gilt weiterhin $t_1 - t_2 < t_H$. Da die Steuerung ab t_1 singularär ist, gilt wegen (1.2.13) $\lambda_{\theta_m}(t_1) = 0$. Es bezeichne wieder θ_m^0 den Flugbahnwinkel auf dem singularären Extremalenbogen, d.h. $\theta_m(t_1) = \theta_m^0$. Dann folgt wegen $a_{mn}(t) > 0$ auf $[t_2, t_1[$ und Hilfssatz 1.3.4, sowie $t_1 - t_2 < t_H$:

$$\dot{\lambda}_{\theta_m}(t) > 0 \quad \text{für} \quad t \in [t_2, t_1[$$

und damit insbesondere $\lambda_{\theta_m}^{\dot{}}(t_2) > 0$, also wegen $\lambda_x > 0$ iv) für $i=2$.

Damit gilt aber (H.1.3.9.1): $\lambda_{\theta_m}(t) < 0$ für $t \in [t_2, t_1[$.

Aus Hilfssatz 1.3.1 und Hilfssatz 1.3.7 folgt weiter

$$t_2 - t_3 = t_H.$$

Damit gilt

$$(H.1.3.9.2) \quad t_1 - t_3 < 2t_H.$$

Man beachte, daß $2t_H$ eine untere Schranke für die Zeit ist, die der Flugkörper M benötigt, um einen Halbkreis zu fliegen, d.h. den Flugbahnwinkel um π zu ändern. Aus Hilfssatz 1.3.8 folgt nun die Existenz eines Punktes $t_3^+ \in]t_3, t_1[$ mit $\lambda_{\theta_m}(t_3^+) = 0$. Wegen (H.1.3.9.1) gilt sogar $t_3^+ \in]t_3, t_2[$.

Wegen (H.1.3.9.1) hat man weiter $\dot{\lambda}_{\theta_m}(t_3^+) < 0$. Daraus folgt

mit Hilfssatz 1.3.8 $\lambda_{a_2}(t_3) < 0$, wenn man die Eindeutigkeit von t_3^+ gezeigt hat.

Da $\lambda_{\theta_m}(t_1) = 0$ folgt, daß ein Punkt $\tilde{t}_3 \in]t_3^+, t_1[$ existiert

mit $\dot{\lambda}_{\theta_m}(\tilde{t}_3) = 0$. Wegen $\lambda_{\theta_m}^{\dot{}}(t) > 0$ für $t \in [t_2, t_1[$ gilt sogar $\tilde{t}_3 \in]t_3^+, t_2[$. Wegen $a_{mn}(t) > 0$ auf $[t_2, t_1[$, (H.1.3.9.2) und Hilfssatz 1.3.4 folgt damit die Existenz einer Nullstelle $t_3^0 \in [\tilde{t}_3, t_2[$ von $a_n(t)$. Nach Hilfssatz 1.3.2 und Hilfssatz 1.3.4 läßt sich aber zusammen mit (H.1.3.9.2) auf die Eindeutigkeit des Punktes t_3^+ schließen. Zusätzlich erhält man noch

$a_{mn}(t_3) < 0$ und $\dot{a}_{mn}(t_3) > 0$, sowie $\dot{\lambda}_{\theta_m}(t_3) < 0$. Insgesamt hat man damit i) - v) für $i = 3$.

Induktionsschritt $(k \rightarrow k + 1)$

Induktionsvoraussetzung: Es gelten für $i = k$ die Behauptungen i), ii), iii), iv) und v).

Es sind i) - v) für $i = k + 1$ zu zeigen.

Da offensichtlich $\text{sign}(\lambda_{a_2}(t_{k+1})) = -\text{sign}(\lambda_{a_2}(t_k))$

gilt, folgt aus Hilfssatz 1.3.8 die Existenz eines Punktes $t_{k+1}^+ \in]t_{k+1}, t_{k-1}[$ mit $\lambda_{\theta_m}(t_{k+1}^+) = 0$ und $\text{sign}(\lambda_{\theta_m}^\cdot(t_{k+1}^+)) = \text{sign}(\lambda_{a_2}^\cdot(t_{k+1}))$.

Daraus folgt sofort $\lambda_{a_2}^\cdot(t_{k+1})(-1)^{k+1} > 0$

$$\lambda_{\theta_m}^\cdot(t_{k+1})(-1)^{k+1} > 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es in $]t_k, t_{k-1}[$

genau ein t_k^+ mit $\lambda_{\theta_m}(t_k^+) = 0$ und $\lambda_{\theta_m}^\cdot(t_k^+)(-1)^k > 0$

Somit gilt:

$$(H.1.3.9.3) \quad t_{k+1}^+ \in]t_{k+1}, t_k[.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung, Hilfssatz 1.3.1 und Hilfssatz 1.3.7 folgt

$$(H.1.3.9.4) \quad t_k - t_{k+1} < t_H \quad \text{und damit}$$

$$(H.1.3.9.5) \quad t_{k-1} - t_{k+1} < 2t_H.$$

Da λ_{θ_m} eine Nullstelle \tilde{t}_{k+1} zwischen t_{k+1}^+ und t_k^+ besitzen und nach einer Argumentation ähnlich zu der im Induktionsanfang $\text{sign}(\lambda_{\theta_m}(t_k)) = \text{sign}(a_{mn}(t_k)) = \text{sign}(\lambda_{\theta_m}^\cdot(t_k^+))$ gelten muß, folgt mit Hilfssatz 1.3.4 und (H.1.3.9.5) die Existenz einer Nullstelle t_{k+1}^0 von $a_{mn}(t)$ in $] \tilde{t}_{k+1}, t_k[$. Weiter folgt aus (H.1.3.9.5), Hilfssatz 1.3.2 und Hilfssatz 1.3.4 die Eindeutigkeit von t_{k+1}^+ , sowie $\text{sign}(a_{mn}(t_{k+1})) = -\text{sign}(a_{mn}(t_k))$, $\text{sign}(a_{mn}^\cdot(t_{k+1})) = -\text{sign}(a_{mn}^\cdot(t_k))$ und $\text{sign}(\lambda_{\theta_m}(t_{k+1})) = \text{sign}(a_{mn}(t_{k+1}))$. Beachtet man noch $a_{mnc}^+(t_{k+1}) =$

$= -a_{mnc}^+(t_k)$, so sind alle 5 Behauptungen gezeigt.

Als Folge dieses Hilfssatzes erhält man den

Satz 1.3.1:

Für $\omega > \frac{6 \cdot a_{mnc}^{\max}}{\Pi \cdot v_m}$ kann ein Extremalenbogen mit

singulärer Steuerung von einem Zeitpunkt t_0 , für den $a_{mn}(t_0) = \dot{a}_{mn}(t_0) \stackrel{!}{=} 0$ gilt, nicht mit endlich vielen Schaltpunkten erreicht werden, in denen die Steuerung zwischen $-a_{mnc}^{\max}$ und $+a_{mnc}^{\max}$ wechselt.

Beweis: Nimmt man an, ein solches singuläres Flugbahnstück könnte mit $n < \infty$ Schaltpunkten erreicht werden, so folgt aus Hilfssatz 1.3.9.ii) und $t_0 = t_n$ sofort $a_{mn}(t_n) = a_{mn}(t_0) \neq 0$. Das steht aber im Widerspruch zu $a_{mn}(t_0) = 0$. Damit ist die hier gemachte Annahme falsch und der Satz bewiesen.

2. Die Konstruktion suboptimaler Rückkopplungssteuerungen

In diesem Paragraphen werden drei verschiedene Rückkopplungssteuerungen für das Problem (1.1.3) - (1.1.6) konstruiert. Dazu werden die Bewegungsgleichungen (1.1.3) um den Kollisionskurs linearisiert. Dadurch erhält man ein lineares Differentialgleichungssystem für die Abweichungen der Zustandsgrößen vom Kollisionskurs. Da für die Endbedingungen, die zu erfüllen sind, nur die beiden Ortskoordinaten von Bedeutung sind, gelingt es, die Dimension dieses linearen Differentialgleichungssystems durch eine geeignete Transformation auf 2 zu reduzieren (Shinar [4]).

In diesem reduzierten Modell werden dann durch zwei verschiedene Ansätze Rückkopplungssteuerungen analytisch berechnet. Das Resultat sind Rückkopplungssteuerungen, die unterschiedliche Informationen über die Zustandsgrößen und Modellparameter des Ziels T verwenden.

2.1 Vereinfachung des Flugkörpermodells durch Linearisierung um den Kollisionskurs

In Bild 2.1.1 wird die Geometrie des Kollisionskurses zum Flugbahnwinkel θ_t^0 des Ziels T dargestellt. Es bezeichnen $r(t_0)$ den Abstand der Flugkörper M und T, σ den Sichtlinienwinkel, und θ_m^0 bzw. θ_t^0 den Flugbahnwinkel von M bzw. T auf dem Kollisionskurs.

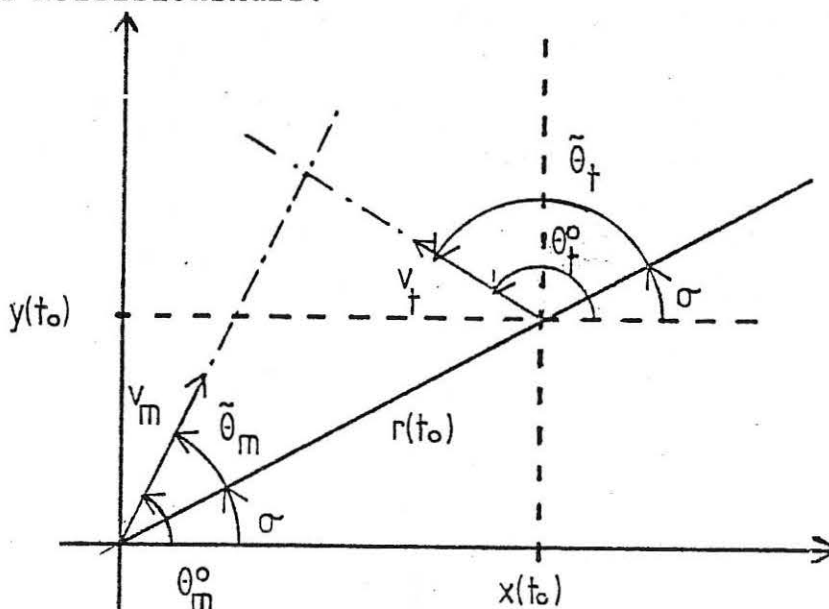


Bild 2.1.1: Geometrie des Kollisionskurses

Wie in Paragraph 1 wird wieder angenommen, daß v_m und v_t konstant sind.

Man entnimmt Bild 2.1.1:

$$\tilde{\theta}_m = \theta_m^0 - \sigma$$

$$\tilde{\theta}_t = \theta_t^0 - \sigma.$$

Bei vorgegebenem $\tilde{\theta}_t$ bestimmen sich dann $\tilde{\theta}_m$ und die Treffzeit $t_f^0 - t_0$ auf dem Kollisionskurs aus den Gleichungen:

$$(2.1.1) \quad \sin \tilde{\theta}_m = \frac{v_t}{v_m} \sin \tilde{\theta}_t$$

$$(2.1.2) \quad \cos \tilde{\theta}_m \geq 0 \quad \text{für } v_m > v_t$$

$$(2.1.3) \quad t_f^0 - t_0 = \frac{r(t_0)}{v_m \cos \tilde{\theta}_m - v_t \cdot \cos \tilde{\theta}_t}$$

Dabei ist offensichtlich:

$$r(t_0) = \sqrt{x(t_0)^2 + y(t_0)^2}$$

und

$$\tan \sigma = \frac{y(t_0)}{x(t_0)}.$$

Für die Konstruktion der Rückkopplungssteuerung wird im Folgenden zusätzlich noch vorausgesetzt, daß das Ziel T eine Dynamik nach Gleichung (1.1.2) hat.

Es wird weiter vorausgesetzt, daß - wie für M - die Dämpfung $\xi = 1$ ist. T darf allerdings eine andere Eigenfrequenz μ der ungedämpften Schwingung besitzen als M. Gleichung (1.1.2) wird damit zu

$$(2.1.4) \quad \dot{a}_{tn} = a_{t2}$$

$$\dot{a}_{t2} = -2\mu a_{t2} - \mu^2 a_{tn} + \mu^2 a_{tnc}$$

Dabei ist a_{tnc} die kommandierte Normalbeschleunigung des Ziels T. Sie soll betragsmäßig durch a_{tnc}^{\max} nach oben beschränkt sein.

Aus (1.1.3), (1.1.5) und (1.1.6) werden damit:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_t \cos \theta_t - v_m \cdot \cos \theta_m \\
 \dot{y} &= v_t \cdot \sin \theta_t - v_m \cdot \sin \theta_m \\
 \dot{\theta}_t &= \frac{a_{tn}}{v_t} \\
 (2.1.5) \quad \dot{\theta}_m &= \frac{a_{mn}}{v_m} \\
 \dot{a}_{tn} &= a_{t2} \\
 \dot{a}_{t2} &= -2\mu \cdot a_{t2} - \mu^2 a_{tn} + \mu^2 a_{tnc} \\
 \dot{a}_{mn} &= a_{m2} \\
 \dot{a}_{m2} &= -2\omega a_{m2} - \omega^2 a_{mn} + \omega^2 a_{mnc} \\
 x(t_0) &= x_0 \quad x(t_f) = 0 \\
 y(t_0) &= y_0 \quad y(t_f) = 0 \\
 \theta_t(t_0) &= \theta_{t_0} \\
 (2.1.6) \quad \theta_m(t_0) &= \theta_{m_0} \\
 a_{tn}(t_0) &= a_{tn_0} \\
 a_{t2}(t_0) &= a_{t2_0} \\
 a_{mn}(t_0) &= a_{mn_0} \\
 a_{m2}(t_0) &= a_{m2_0} \\
 (2.1.7) \quad |a_{mnc}(t)| &\leq a_{mnc}^{\max} \\
 |a_{tnc}(t)| &\leq a_{tnc}^{\max}
 \end{aligned}$$

Das Subskript 0 bezeichnet hier die Anfangswerte zum Zeitpunkt t_0 .

Die Zustandsgrößen auf dem Kollisionskurs, - sie werden mit dem Superskript $^{\circ}$ gekennzeichnet -, genügen nun offenbar folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 x^{\circ}(t) &= (v_t \cos \theta_t^{\circ} - v_m \cos \theta_m^{\circ})(t-t_0) + x_0 \\
 y^{\circ}(t) &= (v_t \sin \theta_t^{\circ} - v_m \sin \theta_m^{\circ})(t-t_0) + y_0 \\
 \theta_m^{\circ}(t) &= \theta_m^{\circ} \\
 \theta_t^{\circ}(t) &= \theta_t^{\circ} \\
 a_{tn}^{\circ}(t) &= 0 \\
 a_{t2}^{\circ}(t) &= 0 \\
 a_{mn}^{\circ}(t) &= 0 \\
 a_{m2}^{\circ}(t) &= 0
 \end{aligned}$$

(2.1.8)

Die kommandierten Normalbeschleunigungen auf dem Kollisionskurs sind dann

$$\begin{aligned}
 a_{mnc}^{\circ}(t) &= 0 \\
 a_{tnc}^{\circ}(t) &= 0
 \end{aligned}$$

(2.1.9)

Für den Kollisionskurs gilt noch folgende Endbedingung

$$\begin{aligned}
 x^{\circ}(t_f^{\circ}) &= 0 \\
 y^{\circ}(t_f^{\circ}) &= 0
 \end{aligned}$$

(2.1.10)

Linearisierung der Bewegungsgleichungen (2.1.5) um den Kollisionskurs (2.1.8), (2.1.9) liefert mit den Bezeichnungen

$$w := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta_t(t) \\ \theta_m(t) \\ a_{tn}(t) \\ a_{t2}(t) \\ a_{mn}(t) \\ a_{m2}(t) \end{bmatrix}$$

sowie w^0 für den Kollisionskurs und

$$\begin{aligned} \delta w &= w - w^0 & a_{mnc}(t) &= a_{mnc}^0(t) - \delta a_{mnc}(t) \\ & & a_{tnc}(t) &= a_{tnc}^0(t) + \delta a_{tnc}(t) \end{aligned}$$

in erster Näherung:

$$(2.1.11) \quad \dot{\delta w}(t) \doteq A \delta w(t) + B \delta a_{tnc}(t) + C \delta a_{mnc}(t), \text{ wobei}$$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_t \sin \theta_t^0 & v_m \sin \theta_m^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_t \cos \theta_t^0 & -v_m \cos \theta_m^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{v_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu^2 & -2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & -2\omega \end{bmatrix}$$

$$\text{und } B = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu^2 \ 0 \ 0)^T$$

$$C = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \omega^2)^T$$

Für den Kollisionskurs mit $\theta_t^0(t) = \theta_{t0}$ gelten die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
(2.1.12) \quad & \delta x(t_0) = 0 \\
& \delta y(t_0) = 0 \\
& \delta \theta_t(t_0) = 0 \\
& \delta \theta_m(t_0) = \theta_{m0} - \theta_m^0 \\
& \delta a_{tn}(t_0) = a_{tn0} \\
& \delta a_{t2}(t_0) = a_{t20} \\
& \delta a_{mn}(t_0) = a_{mno} \\
& \delta a_{m2}(t_0) = a_{m20}
\end{aligned}$$

sowie die Beschränkungen:

$$\begin{aligned}
(2.1.13) \quad & a) \quad |\delta a_{mnc}(t)| \leq a_{mnc}^{\max} \\
& b) \quad |\delta a_{tnc}(t)| \leq a_{tnc}^{\max}
\end{aligned}$$

Um später die Rückkopplungssteuerungen analytisch berechnen zu können, werden noch die "Endzustände" $x(t_f)$ und $y(t_f)$ um t_f^0 , $x^0(t_f^0)$ und $y^0(t_f^0)$ linearisiert.

Mit (2.1.10) ergibt das in erster Näherung:

$$\begin{aligned}
(2.1.14) \quad & x(t_f) \doteq \delta x(t_f^0) + \dot{x}^0(t_f^0) \cdot (t_f - t_f^0) \\
& y(t_f) \doteq \delta y(t_f^0) + \dot{y}^0(t_f^0) \cdot (t_f - t_f^0)
\end{aligned}$$

Für das Problem (1.1.3) - (1.1.6) werden zur Endzeit t_f nur die beiden Ortszustände $x(t_f)$ und $y(t_f)$ fest vorgeschrieben. Als Folge davon ist man auch nur an den linearisierten Zuständen $\delta x(t_f)$ und $\delta y(t_f)$, bzw. wegen (2.1.14) $\delta x(t_f^0)$ und $\delta y(t_f^0)$ interessiert. Das ermöglicht es nun, die Dimension des zu behandelnden Differentialgleichungssystems auf 2 zu reduzieren [4].

Man bestimmt dazu die Transitionsmatrix $\phi(t, t_f^0)$ zur Endzeit t_f^0 und zur Matrix A. Sie genügt folgendem Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}
(2.1.15) \quad & \dot{\phi}(t, t_f^0) = -\phi(t, t_f^0) \cdot A, \quad \phi(t_f^0, t_f^0) = \text{Id} \\
& \text{für } t \leq t_f^0.
\end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \rho &:= t - t_f^0 \\ k_1(\ell, \sigma) &:= \left(-\frac{3}{\ell} + \rho\right) e^{\ell\rho} + \frac{3}{\ell} + 2\rho \\ k_2(\ell, \sigma) &:= \left(-\frac{2}{\ell} + \rho\right) e^{\ell\rho} + \frac{2}{\ell} + \rho \\ k_3(\ell, \sigma) &:= \left(-\frac{2}{\ell} + \rho\right) e^{\ell\rho} + \frac{2}{\ell} \\ k_4(\ell, \sigma) &:= \left(-\frac{1}{\ell} + \rho\right) e^{\ell\rho} + \frac{1}{\ell} \quad (\ell \stackrel{\Delta}{=} \omega \text{ bzw. } \mu) \end{aligned}$$

lautet die Lösung von (2.1.15): (s. S. 44)

Mit der Projektionsmatrix

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \text{-----} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \text{-----} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 8} \quad \text{und der Bezeichnung}$$

$$z := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

kann man die Transformation

$$\begin{aligned} (2.1.17) \quad z(t) &:= D \cdot \phi(t, t_f^0) \delta w \\ B(t) &:= D \cdot \phi(f, t_f^0) B \\ C(t) &:= D \cdot \phi(t, t_f^0) C \end{aligned}$$

definieren. Dann gilt mit den Bezeichnungen

$$\rho := t - t_f^0, \quad M_t = \begin{pmatrix} \sin \theta_t^0 \\ -\cos \theta_t^0 \end{pmatrix}, \quad M_m = \begin{pmatrix} \sin \theta_m^0 \\ -\cos \theta_m^0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad k_2(\ell, \rho) := \left(-\frac{2}{\ell} + \rho\right) e^{\ell\rho} + \frac{2}{\ell} + \rho :$$

$$\begin{aligned} (2.1.19) \quad B(t) &= k_2(\mu, \rho) \cdot M_t \\ C(t) &= -k_2(\omega, \rho) \cdot M_m \end{aligned}$$

sowie

$$(2.1.19) \quad z(t_f^0) = \begin{pmatrix} \delta x(t_f^0) \\ \delta y(t_f^0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & (2.1.16) \quad \phi(t, t_f^0) = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & v_t \sin \theta_t^0 \cdot \rho & -v_m \sin \theta_m^0 \cdot \rho & \frac{\sin \theta_t^0}{\mu} k_1(\mu, \rho) & \frac{\sin \theta_t^0}{\mu^2} k_2(\mu, \rho) & -\frac{\sin \theta_m^0}{\omega} k_1(\omega, \rho) & -\frac{\sin \theta_m^0}{\omega^2} k_2(\omega, \rho) \\
 0 & 1 & -v_t \cos \theta_t^0 \cdot \rho & v_m \cos \theta_m^0 \cdot \rho & -\frac{\cos \theta_t^0}{\mu} k_1(\mu, \rho) & -\frac{\cos \theta_t^0}{\mu^2} k_2(\mu, \rho) & \frac{\cos \theta_m^0}{\omega} k_1(\omega, \rho) & \frac{\cos \theta_m^0}{\omega^2} k_2(\omega, \rho) \\
 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{v_t} k_3(\mu, \rho) & \frac{1}{v_t \cdot \mu} k_4(\mu, \rho) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{v_m} k_3(\omega, \rho) & \frac{1}{v_m \omega} k_4(\omega, \rho) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\mu\rho) e^{\mu\rho} & -\rho \cdot e^{\mu\rho} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^2 \rho e^{\mu\rho} & (1+\mu\rho) e^{\mu\rho} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\omega\rho) e^{\omega\rho} & -\rho e^{\omega\rho} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \rho e^{\omega\rho} & (1+\omega\rho) e^{\omega\rho}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Durch Differentiation von $z(t)$ nach t erhält man die Differentialgleichung

$$(2.1.20) \quad \dot{z}(t) = B(t) \delta a_{tnc} + C(t) \delta a_{mnc}$$

Durch die Transformation $t \rightarrow \rho := t - t_f^0$, d.h. t_f^0 geht über in $\rho = 0$ und t_0 geht über in $\rho_0 := t_0 - t_f^0$, und der Bezeichnung $(\cdot)'$:= $\frac{d}{d\rho}$ wird aus (2.1.18), (2.1.19) und (2.1.20):

$$(2.1.18') \quad \begin{aligned} B(\rho) &= k_2(\mu, \rho) M_t \\ C(\rho) &= -k_2(\omega, \rho) M_m \end{aligned}$$

$$(2.1.19') \quad z(0) = \begin{aligned} &\delta x(t_f^0) \\ &\delta y(t_f^0) \end{aligned}$$

$$(2.1.20') \quad z'(\rho) = B(\rho) \cdot \delta a_{tnc}(\rho) + C(\rho) \cdot \delta a_{mnc}(\rho)$$

Der zugehörige Anfangswert bei $\rho_0 = t_0 - t_f^0$ (das entspricht $t_0!$) ergibt sich aus (2.1.16), (2.1.17) und (2.1.12) zu

$$(2.1.21) \quad \begin{aligned} z(\rho_0) &= \frac{1}{\mu} [k_1(\mu, \rho_0) \delta a_{tn}(t_0) + \frac{1}{\mu} k_2(\mu, \rho_0) \delta a_{t2}(t_0)] M_t \\ &- \left\{ v_m \cdot \rho_0 \cdot \delta \theta_m(t_0) + \frac{1}{\omega} [k_1(\omega, \rho_0) \delta a_{mn}(t_0) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\omega} k(\omega, \rho_0) \cdot \delta a_{m2}(t_0)] \right\} M_m \end{aligned}$$

Man beachte, daß $\rho_0 < 0$ gilt. Aus der Steuerung a_{mnc} bzw. a_{tnc} im ursprünglichen Problem werden jetzt die Steuerungen $\delta a_{mnc}(\rho)$ und $\delta a_{tnc}(\rho)$. Für sie gelten nach wie vor die Beschränkungen (2.1.13).

Es sei noch bemerkt, daß der Fall, daß T keine Dynamik hat, d.h. $a_{tnc} = a_{tn}$, aus den angegebenen Formeln durch den Grenzübergang $\mu \rightarrow \infty$ erhalten werden kann. Praktisch bedeutet das, daß in (2.1.18') $B(\rho) = \rho \cdot M_t$ steht und in (2.1.21) alle Terme mit $\delta a_{tn}(t_0)$ und $\delta a_{t2}(t_0)$ wegfallen.

2.2 Konstruktion einer Rückkopplungssteuerung bei konstanter Normalbeschleunigung des Zieles

Es liegt nun nahe, das Variationsproblem (1.1.3) - (1.1.6) auf das linearisierte Flugkörpermodell, das in Abschnitt 2.1 entwickelt wurde zu übertragen.

Dazu wird angenommen, daß das Ziel vom Zeitpunkt $t_0 \triangleq \rho_0$ ab mit konstanter Normalbeschleunigung fliegt. Im linearisierten Flugkörpermodell bedeutet das:

$$(2.2.1) \quad \delta a_{tnc} = \delta a_{tn} = \text{const} \quad , \quad \delta a_{t2} \equiv 0 \quad \text{auf} [\rho_0, 0]$$

Die Endbedingung $x(t_f) = y(t_f) = 0$ wird mit der Linearisierung (2.1.14) und mit (2.1.19') zu der Bedingung:

$$(2.2.2) \quad z(0) - \Delta \cdot (t_f - t_f^0) = 0, \quad \text{wobei}$$

$$\Delta := \begin{pmatrix} v_m \cos \theta_m^0 - v_t \cos \theta_t^0 \\ v_m \sin \theta_m^0 - v_t \sin \theta_t^0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \delta \dot{x}^0(t_f^0) \\ \delta \dot{y}^0(t_f^0) \end{pmatrix}$$

Aus dem Zielfunktional $J(a_{mnc}) = t_f$ wird hier wegen des festen Integrationsintervalls $[\delta_0, 0]$ das Zielfunktional

$$(2.2.3) \quad J(\delta a_{mnc}) := t_f - t_f^0$$

Damit läßt sich das übertragene Steuerungsproblem so formulieren:

Problem 2.1: Man bestimme $\delta a_{mnc}(\rho)$ so, daß das Zielfunktional $J(\delta a_{mnc}) = t_f - t_f^0$ minimal wird unter den Nebenbedingungen (2.1.20'), sowie den Anfangsbedingungen (2.1.21), den Endbedingungen (2.2.2) und der Steuerbeschränkung (2.1.13.a).

Aus Gleichung (2.2.20) folgt später jedoch, daß dieses Problem nur in Einzelfällen gelöst werden kann, da im Allgemeinen die Endbedingung (2.2.2) nicht erfüllt werden kann. Es wird deshalb statt des Zielfunktional (2.2.3) folgendes Zielfunktional minimiert:

$$(2.2.3') \quad J(\delta a_{mnc}) := \left\| z(0) - \Delta \cdot (t_f - t_f^0) \right\|_2$$

Gleichzeitig wird die Endbedingung (2.2.2) fallengelassen. Das Funktional (2.2.3') gibt den linearisierten Treffabstand von M und T an. Es wird somit statt der Endzeit der Treffabstand minimiert.

Nach den notwendigen Bedingungen der Variationsrechnung ([1],[2]) muß die optimale Steuerung δa_{mnc}^* die Hamiltonfunktion minimieren. Dieses lautet hier:

$$(2.2.4) \quad H(\rho, \delta a_{mnc}) := \lambda^T [k_2(\mu, \rho) M_t \delta a_{tnc} - k_2(\omega, \rho) M_m \delta a_{mnc}]$$

$$\text{mit: } \lambda: [\rho_0 \ 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Für λ gelten die adjungierten Differentialgleichungen

$$(2.2.5) \quad \lambda' = - \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

Im Folgenden sei nun vorausgesetzt, daß $z(0) - \Delta \cdot (t_f - t_f^0) \neq 0$ auf der Extremalen gilt. Dann hat man als Transversalitätsbedingung für $\rho = 0$:

$$(2.2.6) \quad \lambda(0) = \frac{z(0) - \Delta(t_f - t_f^0)}{\left\| z(0) - \Delta(t_f - t_f^0) \right\|_2}$$

und da $z(\rho)$ stetig auf $[\rho_0, 0]$ ist, gilt sogar

$$\lambda(\rho) \equiv \lambda(0) \quad \text{für } \rho \in [\rho_0, 0].$$

Das Minimumprinzip liefert für die optimale Steuerung δa_{mnc}^* :

$$(2.2.7) \quad \delta a_{mnc}^* = \text{sign}(k_2(\omega, \rho) \cdot \lambda^T(0) \cdot M_m) a_{mnc}^{\max}$$

Für $k_2(\ell, \rho)$ gilt aber:

$$\alpha) \quad k_2(\ell, 0) = 0$$

$$\beta) \quad \frac{d}{d\rho} k_2(\ell, \rho) = 1 + \ell \rho e^{\ell \rho} - e^{\ell \rho} > 0 \quad \text{für } \rho < 0, \ell > 0$$

und damit insgesamt

$$(2.2.11') \quad z(\rho) = z(\rho_0) + (N(\mu, \rho) - N(\mu, \rho_0)) M_t \delta a_{tnc} \\ + (N(\omega, \rho) - N(\omega, \rho_0)) M_m \frac{M_m^T \lambda(0)}{|M_m^T \lambda(0)|} a_{mnc}^{\max}$$

Speziell für $\rho = 0$ ergibt sich mit (2.2.10)

$$(2.2.12') \quad z(0) = z(\rho_0) - \left(\frac{3}{\mu^2} + N(\mu, \rho_0)\right) M_t \delta a_{tnc} \\ - \left(\frac{3}{\omega^2} + N(\omega, \rho_0)\right) M_m \frac{M_m^T \lambda(0)}{|M_m^T \lambda(0)|} a_{mnc}^{\max}$$

$(t_f - t_f^0)$ wird nun so bestimmt, daß $\|z(0) - \Delta \cdot (t_f - t_f^0)\|_2$ bei $(t_f - t_f^0)$ ein Minimum annimmt. Die notwendigen Bedingungen für ein Extremum liefert für $(t_f - t_f^0)$ die Beziehung:

$$\frac{-\Delta^T (z(0) - \Delta (t_f - t_f^0))}{\|z(0) - \Delta (t_f - t_f^0)\|_2} = 0$$

Das ist wegen $\|z(0) - \Delta (t_f - t_f^0)\|_2 \neq 0$ äquivalent zu:

$$(2.2.13) \quad \Delta^T (z(0) - \Delta (t_f - t_f^0)) = 0, \quad \text{bzw.}$$

$$(2.2.13') \quad t_f - t_f^0 = \frac{\Delta^T z(0)}{\Delta^T \Delta}$$

Aus (2.2.13) und (2.2.6) erhält man mit der Bezeichnung

$$\Delta^\perp := \begin{pmatrix} v_m \sin \theta_m^0 - v_t \sin \theta_t^0 \\ -v_m \cos \theta_m^0 + v_t \cos \theta_t^0 \end{pmatrix} = v_m M_m - v_t M_t$$

und der Beziehung $\Delta^{\perp T} \Delta = 0$:

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{(-\ell\rho)^n}_{> 0} > 0$$

Somit erhält man

$$(2.2.8) \quad k_2(\ell, \rho) < 0 \quad \text{für } \rho < 0, \ell > 0$$

$$k_2(\ell, 0) = 0$$

Mit (2.2.8) ergibt sich aus (2.2.7)

$$(2.2.7') \quad \text{a) } \delta a_{\text{mnc}}^* = - \text{sign}(\lambda^T(o) \cdot M_m) \cdot a_{\text{mnc}}^{\text{max}}$$

$$\text{b) } \delta a_{\text{mnc}}^* = - \frac{M_m^T \lambda(o)}{|M_m^T \lambda(o)|} \cdot a_{\text{mnc}}^{\text{max}}$$

Setzt man (2.2.7'b) in (2.1.20) ein, so erhält man

$$(2.2.9) \quad z' = k_2(\mu, \rho) M_t \cdot \delta a_{\text{tnc}} + k_2(\omega, \rho) M_m \frac{M_m^T \lambda(o)}{|M_m^T \lambda(o)|} a_{\text{mnc}}^{\text{max}}$$

Eine einfache Nebenrechnung liefert nun

$$(2.2.10) \quad N(\ell, \rho) := \int k_2(\ell, \rho) d\rho = \frac{\rho}{\ell} e^{\ell\rho} - \frac{3}{\ell^2} e^{\ell\rho} + \frac{2}{\ell} \rho + \frac{1}{2} \rho^2$$

Mit (2.2.10) läßt sich (2.2.9) integrieren und man erhält:

$$(2.2.11) \quad z(\rho) = \text{const} + N(\mu, \rho) M_t \delta a_{\text{tnc}} + N(\omega, \rho) M_m \frac{M_m^T \lambda(o)}{|M_m^T \lambda(o)|} a_{\text{mnc}}^{\text{max}}$$

Für den Anfangswert $z(\rho_0)$ bei $\rho_0 := t_0 - t_f^0$ ergibt sich die Integrationskonstante zu:

$$(2.2.12) \quad \text{const} = z(\rho_0) - N(\mu, \rho_0) M_t \delta a_{\text{tnc}} - N(\omega, \rho_0) M_m \frac{M_m^T \lambda(o)}{|M_m^T \lambda(o)|} a_{\text{mnc}}^{\text{max}}$$

$$(2.2.14) \quad \lambda(o) = \pm \frac{\Delta^\perp}{\|\Delta^\perp\|_2}$$

Wegen $M_t^T M_m = \cos(\theta_m^o - \theta_t^o)$ gilt weiterhin

$$(2.2.15) \quad M_t^T \Delta^\perp = v_m - v_t \cos(\theta_m^o - \theta_t^o) \quad \text{und}$$

$$(2.2.16) \quad M_t^T \Delta^\perp = v_m \cos(\theta_m^o - \theta_t^o) - v_t$$

Mit (2.2.14), (2.2.15) und (2.2.7') erhält man für die optimale Steuerung δa_{mnc}^* :

$$(2.2.17'') \quad \delta a_{mnc}^* = \mp \text{sign}[v_m - v_t \cos(\theta_m^o - \theta_t^o)] \cdot a_{mnc}^{\max}$$

Damit ist die optimale Steuerung bis auf das Vorzeichen bekannt. Das richtige Vorzeichen in (2.2.7'') wird jetzt gleichzeitig mit dem optimalen Zielfunktional $J^*(\delta a_{mnc}^*)$ bestimmt.

Aus (2.2.3') und (2.2.6) folgt für das optimale Zielfunktional

$$(2.2.17) \quad J^*(\delta a_{mnc}^*) = \lambda(o)^T (z(o) - \Delta(t_f - t_o)) \geq 0$$

Setzt man (2.2.14) in (2.2.17) ein und beachtet $\Delta^{\perp T} \Delta = 0$, so erhält man:

$$(2.2.17') \quad J^*(\delta a_{mnc}^*) = \pm \frac{\Delta^{\perp T}}{\|\Delta^\perp\|_2} z(o) = \lambda(o)^T z(o)$$

Zusammen mit (2.2.12') und (2.2.16) folgt daraus nach einer Umformung:

$$(2.2.18) \quad J^*(a_{mnc}^*) = \pm \left[\frac{1}{\|\Delta^\perp\|_2} \cdot \Delta^{\perp T} z(\rho_o) - \frac{1}{\|\Delta^\perp\|_2} \left(\frac{3}{\mu^2 + N(\mu, \rho_o)} \right) \right. \\ \left. (v_m \cos(\theta_m^o - \theta_t^o) - v_t) \delta a_{tn}^*(t_o) - \left(\frac{3}{\omega^2} N(\omega, \rho_o) \right) \right. \\ \left. \frac{|M_m^T \Delta^\perp|}{\|\Delta^\perp\|_2} a_{mnc}^{\max} \right]$$

Bezeichnet nun: $s(\rho_o, \delta a_{tnc}) := \Delta^{1T} z(\rho_o) - \left(\frac{3}{\mu^2} + N(\mu, \rho_o)\right) \cdot$

$$(v_m \cdot \cos(\theta_n^o - \theta_t^o) - v_t) \cdot \delta a_{tn}(t_o)$$

dann gilt mit (2.1.21), (2.2.1), (2.2.15) und (2.2.16), sowie einer kurzen Rechnung:

$$(2.2.19) \quad s(\rho_o, \delta a_{tnc}) = -\frac{1}{2\rho_o^2} \cdot (v_m \cos(\theta_m^o - \theta_t^o) - v_t) \cdot \delta a_{tn}(t_o) \\ - [v_m \rho_o \cdot \delta \theta_m(t_o) + \frac{1}{\omega} (k_1(\omega, \rho_o) \delta a_{mn}(t_o) + \\ \frac{1}{\omega} k_2(\omega, \rho_o) \cdot \delta a_{m2}(t_o))] (v_m - v_t \cdot \cos(\theta_m^o - \theta_t^o))$$

Da $\left(\frac{3}{\omega^2} + N(\omega, \rho_o)\right) \Big|_{\rho_o=0} = 0$ und $\frac{d}{d\rho_o} \left(\frac{3}{\omega^2} + N(\omega, \rho_o)\right) = k_2(\omega, \rho_o) \leq 0$ ist,

folgt aus $J^*(\delta a_{mnc}^*) \geq 0$ mit Gleichungen (2.2.18) und (2.2.19)

die Wahl des Vorzeichens in (2.2.14) und (2.2.7'). Für $v_m > v_t$ erhält man damit

$$(2.2.7^+) \quad \delta a_{mnc} = - \text{sign}[s(\rho_o, \delta a_{tnc})] \cdot a_{mnc}^{\max}$$

Diese Herleitung kann unter der Voraussetzung $(z(o) - \Delta(t_f - t_f^o)) \neq 0$ durchgeführt werden. Falls aber $(z(o) - \Delta \cdot (t_f - t_f^o))$ zu Null gemacht werden kann, so ist es möglich, das Zielfunktional (2.2.3) mit der Endbedingung (2.2.2) zu minimieren. Ganz analog zur obigen Argumentation erhält man auch in diesem Fall die Hamiltonfunktion (2.2.4) und die adjungierte Differentialgleichung (2.2.5). Im Gegensatz zur obigen Herleitung bleibt aber diesmal $\lambda(o)$ unbestimmt. Man erhält allerdings für die optimale Steuerung δa_{mnc}^* wieder die Gleichung (2.2.7') und als Lösung der Differentialgleichung (2.1.20) die Gleichung (2.2.12). Insbesondere gilt ebenfalls (2.2.12'). Mit (2.2.1, (2.2.2) und (2.2.21) folgt daraus:

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot (t_f - t_f^0) &= \left[\frac{1}{\mu} k_1(\mu, \rho_0) - \left(\frac{3}{\mu^2} + N(\mu, \rho_0) \right) \right] M_t \cdot \delta a_{tn}(t_0) \\
&\quad - \left[v_m \rho_0 \delta \theta_m(t_0) + \frac{1}{\omega} (k_1(\omega, \rho_0) \cdot \delta a_{mn}(t_0) \right. \\
(2.2.20) \quad &\quad \left. + \frac{1}{\omega} k_2(\omega, \rho_0) \delta a_{m2}(t_0) \right] \cdot \tilde{I}_1 + \\
&\quad + \left(\frac{3}{\omega^2} + N(\omega, \rho_0) \right) \cdot \text{sign}(\lambda(o)) \cdot M_m^T \cdot a_{mnc}^{\max} \cdot M_m
\end{aligned}$$

Da für $v_m + v_t$, M_t und M_m linear unabhängig sind, bestimmt (2.2.20) $(t_f - t_f^0)$ und $\text{sign}(\lambda(o)) \cdot M_m^T$ eindeutig.

Weiter folgt sofort, daß "Treffen", d.h. Erfüllen der Bedingung (2.2.2) nur in Ausnahmefällen möglich ist. Deshalb wird für die Rückkopplungssteuerung das Lenkgesetz (2.2.7⁺) zusammen mit (2.2.19) vorgeschlagen.

Berechnet man zu jedem Zeitpunkt des Fluges den Kollisionskurs nach (2.1.1) - (2.1.3) und die Steuerung δa_{mnc}^* aus (2.2.7⁺) und (2.2.19), so erhält man eine "stetige" Rückkopplungssteuerung für das Ausgangsproblem. Wie man an Gleichung (2.2.19) sieht, benötigt man zur Berechnung der Rückkopplungssteuerung nur die Zustandsgrößen und den Kollisionskurs, der sich gemäß (2.1.1) - (2.1.3) aus den Zustandsgrößen berechnen läßt.

Es ist dabei bemerkenswert, daß keine Information über die Art der Dynamik des Ziels T verwendet wird. Es wird "lediglich" die Normalbeschleunigung des Ziels T entlang der Flugbahn benötigt.

2.3 Konstruktion von Rückkopplungssteuerungen durch einen spieltheoretischen Ansatz

Im Gegensatz zum Abschnitt 2.2 wird jetzt nichts über die Strategie des Zieles vorausgesetzt; insbesondere entfällt die Annahme der konstanten Normalbeschleunigung des Zieles. Um dennoch zu einem Lenkgesetz für den Flugkörper M zu kommen, wird das Steuerungsproblem Problem 2.1. aus dem Abschnitt 2.2 zu einem 0-Summen-Differentialspiel verallgemeinert. Da man hier an einem Lenkgesetz interessiert ist, wird nur ein Kandidatenpaar $(\delta a_{mnc}^*, \delta a_{tnc}^*)$ für die optimalen Steuerungen der Spiellösung abgeleitet.

Mit dem Kostenfunktional

$$(2.3.1) \quad J(\delta a_{tnc}, \delta a_{mnc}) := (t_f - t_f^0)$$

lautet das Differentialspiel, das sich aus Problem 2.1 ergibt, folgendermaßen.

Man bestimme ein optimales Strategiepaar $(\delta a_{tnc}^*, \delta a_{mnc}^*)$ so, daß die Sattelpunktsbedingung

$$(2.3.2) \quad J(\delta a_{tnc}^*, \delta a_{mnc}) \geq J(\delta a_{tnc}^*, \delta a_{mnc}^*) \geq J(\delta a_{tnc}, \delta a_{mnc}^*)$$

für alle zulässigen Steuerungen $\delta a_{tnc}, \delta a_{mnc}$ erfüllt ist, unter den Nebenbedingungen (2.1.20'), zu den Anfangsbedingungen (2.1.21), sowie den Endbedingungen (2.2.2) und den Steuerungsbeschränkungen (2.1.13).

Wie in Abschnitt 2.2 wird sich zeigen, daß (2.2.2) im allgemeinen nicht erfüllbar ist. Es wird daher wie in 2.2 ein Ersatzproblem betrachtet. Statt des Zielfunktionals (2.3.1) wird das Funktional

$$(2.3.1') \quad J(\delta a_{tnc}, \delta a_{mnc}) := \|z(0) - \Delta \cdot (t_f - t_f^0)\|_2$$

verwendet und die Endbedingung (2.2.2) dafür fallen gelassen, d.h. es wird der linearisierte Treffabstand als Zielfunktional benutzt.

Aus den notwendigen Bedingungen für ein optimales Strategiepaar $(\delta a_{tnc}^*, \delta a_{mnc}^*)$ ([1], Isaacs[4]) folgen nun ganz analog zu der Argumentation in Abschnitt 2.2 die Gleichungen (2.2.5) und (2.2.6).

Für das Strategiepaar gilt weiter die Min-Max-Eigenschaft der Hamiltonfunktion:

$$(2.3.2) \quad H(\delta a_{mnc}^*, \delta a_{tnc}^*) = \min_{\delta a_{mnc}} \max_{\delta a_{tnc}} H(\delta a_{mnc}, \delta a_{tnc}^*),$$

wobei die Hamiltonfunktion H der Gleichung (2.2.4) genügt. Für die optimalen Steuerungen folgt aus (2.3.2) im Zusammenhang mit (2.2.8)

$$(2.3.3) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad \delta a_{mnc}^* &= - \text{sign}(\lambda^T(o)M_m) \cdot a_{mnc}^{\max} \\ \text{b)} \quad \delta a_{tnc}^* &= - \text{sing}(\lambda^T(o)M_t) \cdot a_{tnc}^{\max} \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$(2.3.4) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad \delta a_{mnc}^* &= - \frac{M_m^T \lambda(o)}{|M_m^T \lambda(o)|} \cdot a_{mnc}^{\max} \\ \text{b)} \quad \delta a_{tnc}^* &= - \frac{M_t^T \lambda(o)}{|M_t^T \lambda(o)|} \cdot a_{tnc}^{\max} \end{aligned}$$

Mit (2.2.10) ergibt sich analog zu Abschnitt 2.2:

$$(2.3.5) \quad \begin{aligned} z(\rho) = z(\rho_0) - (N(\mu, \rho) - N(\mu, \rho_0)) M_t \frac{M_t^T \lambda(o)}{|M_t^T \lambda(o)|} a_{tnc}^{\max} \\ + (N(\mu, \rho) - N(\mu, \rho_0)) M_m \frac{M_m^T \lambda(o)}{|M_m^T \lambda(o)|} a_{mnc}^{\max} \end{aligned}$$

sowie für $\rho = 0$

$$(2.3.6) \quad \begin{aligned} z(o) = z(\rho_0) - \left(-\frac{3}{\mu^2} - N(\mu, \rho_0)\right) M_t \frac{M_t^T \lambda(o)}{|M_t^T \lambda(o)|} a_{tnc}^{\max} \\ + \left(-\frac{3}{\omega^2} - N(\omega, \rho_0)\right) M_m \frac{M_m^T \lambda(o)}{|M_m^T \lambda(o)|} a_{mnc}^{\max} \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 2.2 erhält man die Gleichungen (2.2.13), (2.2.13'), (2.2.14), (2.2.15) und (2.2.16). Für das Steuerungspaar folgt damit ($v_m > v_t!$)

$$(2.3.3') \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad \delta a_{mnc}^* &= \mp \text{sign}(v_m - v_t \cos(\theta_m^o - \theta_t^o)) a_{mnc}^{\max} = \mp a_{mnc}^{\max} \\ \text{b)} \quad \delta a_{tnc}^* &= \mp \text{sign}(v_m \cdot \cos(\theta_m^o - \theta_t^o) - v_t) a_{tnc}^{\max} \end{aligned}$$

Es bleibt die Aufgabe, in (2.3.3') das Vorzeichen zu bestimmen. Man geht dazu analog zu 2.2 vor.

(2.2.6) und (2.3.1') ergeben:

$$(2.3.7) \quad J^*(\delta a_{mnc}^*, \delta a_{tnc}^*) = \lambda(o)^T (z(o) - \Delta \cdot (t_f - t_f^0)) \geq 0$$

Wie in 2.2 erhält man

$$(2.3.8) \quad J^*(\delta a_{mnc}^*, \delta a_{tnc}^*) = \frac{1}{\|\Delta^\perp\|_2} \Delta^\perp T \cdot z(o) = \lambda(o)^T z(o)$$

Mit (2.3.6) und (2.2.14) erhält man

$$(2.3.9) \quad J^*(\delta a_{mnc}^*, \delta a_{tnc}^*) = \frac{1}{\|\Delta^\perp\|_2} \Delta^\perp T z(\rho_o) - \\ - \left(\frac{-3}{\mu^2} - N(\mu, \rho_o) \right) \frac{|M_t^T \Delta^\perp|}{\|\Delta^\perp\|_2} a_{tnc}^{\max} \\ + \left(\frac{-3}{\omega^2} - N(\omega, \rho_o) \right) \frac{|M_m^T \Delta^\perp|}{\|\Delta^\perp\|_2} a_{mnc}^{\max}$$

Gilt nun in einem 0-Summen-Differentialspiel für das optimale Strategiepaar p^*, e^*

$$\begin{aligned} p^* &= f_1(\xi^*) \\ e^* &= f_2(\xi^*) \quad \text{mit} \quad \|\xi^*\|_2 = 1, \end{aligned}$$

wie in unserem Fall (siehe (2.3.7), (2.3.4)), so erhält man wegen der Sattelpunktsbedingung für zulässige Steuerungen p, e

$$J(p^*, e) \leq J(p^*, e^*) \leq J(p, e^*):$$

$$J(p^*, e^*) = \sup_{\|\xi\|_2=1} J(f_1(\xi^*), f_2(\xi))$$

Bezeichnet nun $g(\xi) =: \bar{p}(\xi)$ die Steuerung, die bei festem ξ $J(p, f_2(\xi))$ minimiert, so folgt

$$J(p^*, e^*) \geq \sup_{\|\xi\|_2=1} J(g(\xi), f_2(\xi)) = \sup_{\|\xi\|_2=1} J(\bar{p}(\xi), f_2(\xi))$$

Wird weiter vorausgesetzt, daß p^*, e^* existieren und eindeutig bestimmt sind, so erhält man

$$J(p^*, e^*) = \sup_{\|\xi\|_2=1} J(\bar{p}(\xi), f_2(\xi))$$

In unserem Fall bedeutet dies (mit $\xi^* = \lambda(o)$)

$$(2.3.8') \quad J^*(\delta a_{mnc}^*, \delta a_{tnc}^*) = \sup_{\|\xi\|_2=1} \xi^T (z(o, \xi) - \Delta(t_f - t_f^0))$$

Bezeichne nun

$$s(\rho_o) := \Delta^{\perp T} z(\rho_o), \text{ so folgt aus (2.1.21),}$$

(2.2.15), (2.2.16) nach einer einfachen Rechnung

$$s(\rho_o) = \left[\frac{1}{\mu} (k_1(\mu, \rho_o) \delta a_{tn}(t_o) + \frac{1}{\mu} k_2(\mu, \rho_o) \delta a_{t2}(t_o)) \right] \cdot$$

$$(2.3.10) \quad \cdot (v_m \cos(\theta_m^0 - \theta_r^0) - v_t) - \left[v_m \rho_o \delta \theta_m(t_o) + \frac{1}{\omega} (k_1(\omega, \rho_o) \delta a_{mn}(t_o) + \frac{1}{\omega} k_2(\omega, \rho_o) \delta a_{m2}(t_o)) \right] (v_m - v_t \cos(\theta_m^0 - \theta_t^0))$$

Aus (2.3.8'), (2.3.9) und (2.3.10) folgen für $\lambda(o)$ und das Steuerungspaar $(\delta a_{mnc}^*, \delta a_{tnc}^*)$:

$$(2.3.11) \quad \lambda(o) = \frac{1}{\|\Delta^{\perp}\|_2} \cdot \text{sign}(s(\rho_o)) \cdot \Delta^{\perp}$$

sowie

$$a) \quad \delta a_{mnc}^* = - \text{sign}(s(\rho_o)) \cdot a_{mnc}^{\max}$$

(2.3.3⁺)

$$b) \quad \delta a_{tnc}^* = - \text{sign}[s(\rho_o) \cdot (v_m \cos(\theta_m^0 - \theta_t^0) - v_t)] \cdot a_{tnc}^{\max}$$

Ist es nun möglich $z(o) - \Delta \cdot (t_f - t_f^0) = 0$ zu erreichen, so kann versucht werden, die Sattelpunktsbedingung für das Funktional (2.3.1) und die Endbedingung $z(o) - \Delta(t_f - t_f^0) = 0$ zu erfüllen. Ganz analog zur obigen Argumentation und dem Vorgehen in 2.2 erhält man für $z(o)$ in diesem Fall ebenfalls Gleichung (2.3.6). Berücksichtigt man die Äquivalenz der Gleichungen (2.3.3) und (2.3.4) und setzt man (2.3.6) in die Endbedingung $z(o) - \Delta(t_f - t_f^0) = 0$ ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} \cdot (t_f - t_f^0) = & \left[\frac{1}{\mu} k_1(\mu, \rho_0) \delta a_{tnc}(t_0) + \frac{1}{\mu} k_2(\mu, \rho_0) \delta a_{t2}(t_0) \right] \\
& - \left(\frac{-3}{\mu^2} - N(\mu, \rho_0) \right) \cdot \text{sign}(M_t^T \lambda(0)) a_{tnc}^{\max} M_t \\
(2.3.12) \quad & - \left[v_m \rho_0 \delta \theta_m(t_0) + \frac{1}{\omega} (k_1(\omega, \rho_0) \delta a_{mn}(t_0) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\omega} k_1(\omega, \rho_0) \delta a_{mn}(t_0)) + \left(\frac{-3}{\omega^2} - N(\omega, \rho_0) \right) \right. \\
& \left. \cdot \text{sign}(M_m^T \lambda(0)) a_{mnc}^{\max} M_m \right]
\end{aligned}$$

Da nun für $v_m \neq v_t$ M_m und M_t linear unabhängig sind, kann (2.3.12) nur in Ausnahmefällen erfüllt werden.

Deshalb wird vorgeschlagen, das optimale Strategiepaar $(\delta a_{mnc}^*, \delta a_{tnc}^*)$ aus Gleichungen (2.3.3⁺) und (2.3.10) zu bestimmen.

Berechnet man nun zu jedem Zeitpunkt des tatsächlichen Fluges den Kollisionskurs und nach (2.3.3⁺.a) und (2.3.10) die optimale Steuerung δa_{mnc}^* im linearisierten Modell, so erhält man eine Rückkopplungssteuerung für das Ausgangsproblem. Man beachte, daß zur Berechnung dieser Rückkopplungssteuerung der Parameter μ für die Steuerungsdynamik des Zieles, sowie a_{tn} und a_{t2} zu jedem Zeitpunkt des Fluges bekannt sein müssen. In Kapitel 3.2 wird sich allerdings zeigen, daß zumindest die Wahl des Parameters μ verhältnismäßig unkritisch ist, wenn man nur Wert auf das "Treffen" legt, d.h. wenn man $x(t_f) = y(t_f) = 0$ möglichst gut erfüllen will.

Diese ganzen Probleme umgeht man, wenn man annimmt, daß die Normalbeschleunigung des Zieles keine "Dynamik" hat, d.h. das Ziel kann seine Normalbeschleunigung jederzeit und ohne Zeitverzug festlegen.

Eine Rückkopplungssteuerung bekommt man in diesem Fall aus (2.3.3⁺) und (2.3.10), wenn man in (2.3.10) den Grenzübergang $\mu \rightarrow \infty$ durchführt.

(2.3.10) erhält dann die Form

$$\begin{aligned}
(2.3.13) \quad s(\rho_0) = & - \left[v_m \rho_0 \delta \theta_m(t_0) + \frac{1}{\omega} (k_1(\omega, \rho_0) \delta a_{mn}(t_0) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\omega} k_2(\omega, \rho_0) \delta a_{m2}(t_0)) \right] (v_m - v_t \cos(\theta_m^0 - \theta_t^0))
\end{aligned}$$

Die Rückkopplungssteuerung (2.3.3⁺), (2.3.13) macht nun allerdings gar keinen Gebrauch mehr von der Normalbeschleunigung des Zeieles. Betrachtet man die Gleichungen (2.3.10) und (2.3.13), so erkennt man, daß man zur Berechnung der in diesem Abschnitt konstruierten Rückkopplungssteuerungen nur die Zustandsgrößen, einen Modellparameter μ und den Kollisionskurs kennen muß. Wegen (2.1.1)-(2.1.3) kann der Kollisionskurs direkt aus den Zustandsgrößen bestimmt werden. Bis auf den Modellparameter μ , der geschätzt oder berechnet werden muß, verwenden damit beide Rückkopplungssteuerungen nur Zustandsgrößen.

3. Numerische Berechnungen

Im ersten Abschnitt dieses Paragraphen wird die numerische Berechnung optimaler-, bzw. suboptimaler Lösungen des Variationsproblems aus Paragraph 1 für konstante Normalbeschleunigung des Ziels beschrieben. Dabei zwingen Probleme mit der Größenordnung der Schaltfunktion λ_{a2} für die Steuerung dazu, von der Berechnung optimaler Flugbahnen abzugehen und geeignete suboptimale Flugbahnen zu bestimmen. Diese nominellen Trajektorien werden im zweiten Abschnitt dieses Paragraphen benutzt, um die Güte der in Paragraph 2 konstruierten Rückkopplungssteuerungen zu beurteilen. Gütekriterien sind dabei vor allem die Erfüllung der Endbedingungen (1.1.5.b), d.h. $x(t_f) = y(t_f) = 0$, aber auch der Grad der Übereinstimmung der Endzeit t_f mit der der nominellen Trajektorie.

Für alle numerischen Rechnungen wurden die Modellparameter (1.1.6), (1.1.7), (1.1.8) und die Anfangswerte der Zustandsgrößen (1.1.5.a) zugrundegelegt. Weiter wurde $t_0 = 0$ gewählt. Wegen $\theta_t(0) = \pi$ und $a_{mn}(0) = a_2(0) = 0$ genügt es aus Symmetriegründen, nur $a_{tn} < 0$ zu berücksichtigen. Die Rechnungen wurden in FORTRAN IV auf einer CDC 175 des LRZ in einfacher Genauigkeit ausgeführt.

3.1 Numerische Bestimmung optimaler- und suboptimaler Flugbahnen und Steuerungen für das Problem aus § 1

Es wird vorausgesetzt, daß die Normalbeschleunigung a_{tn} des Ziels während der gesamten Flugzeit konstant ist. Bild 3.1 zeigt in Abhängigkeit von der Normalbeschleunigung den Bereich von $\theta_m(0)$, in dem Flugbahnen berechnet wurden (schraffiertes Gebiet).

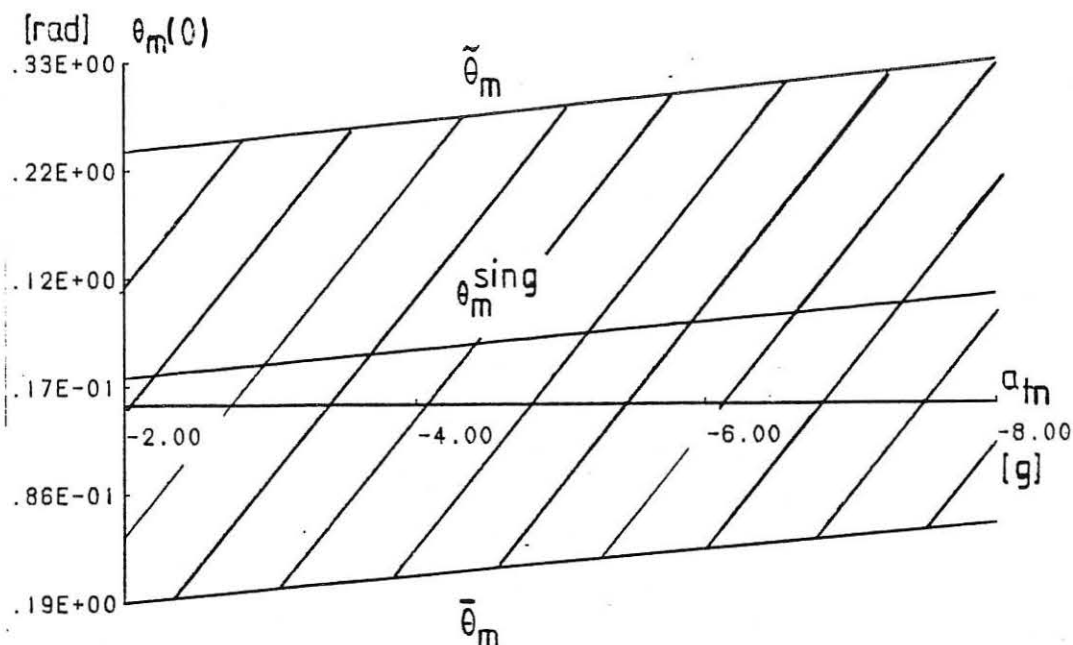


Bild 3.1.1 : Bereich von $\theta_m(o)$, in dem Lösungen berechnet wurden

Dabei bedeuten:

- $\bar{\theta}_m$: Wert von $\theta_m(o)$, für den entlang der ganzen Extremalen $a_{mnc} = +a_{mnc}^{\max}$ gilt
- $\tilde{\theta}_m$: Wert von $\theta_m(o)$, für den entlang der gesamten Extremalen $a_{mnc} = -a_{mnc}^{\max}$ gilt
- θ_m^{sing} : Wert von $\theta_m(o)$, für den die gesamte Extremale singular ist, d.h. $a_{mnc} \equiv 0$

Um nun eine Extremale des optimalen Steuerungsproblems aus Paragraph 1 zu berechnen, muß das Randwertproblem (1.2.2) - (1.2.6.b) gelöst werden, wobei die Steuerung aus (1.2.9) (auf Bang-Bang-Stück) bzw. (1.2.17') (auf singulärem Bogen) bestimmt wird. Die freie Endzeit t_f wird durch die Bedingung (1.2.7) festgelegt.

Für die numerische Berechnung wird das Randwertproblem durch die Substitution

$$(3.1.1) \quad t := \tau \cdot t_f \quad \tau \in [0, 1]$$

auf das feste Intervall $[0, 1]$ transformiert. Damit erhält man eine zusätzliche "Zustandsgröße" t_f , die der Differentialgleichung genügt:

$$(3.1.2) \quad t_f' = 0 \quad ((') := \frac{d}{d\tau})$$

Als Randsbedingung für " t_f " hat man dann gerade Gleichung (1.2.7).

Um die Größenordnungen der in der Differentialgleichungen auftretenden Größen aneinander anzugleichen, wurden die Größen $x, y, v_m, v_t, a_{mn}, a_{m2}, a_{tn}, a_{mnc}$ und a_{mnc}^{\max} mit 10^4 und die Größen $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_{amn}, \lambda_{a2}$ mit 10^{-4} skaliert.

Das zu lösende Randwertproblem kann nun als Mehrpunktrandwertproblem mit Schaltbedingungen aufgefaßt werden. Am Rand, d.h. bei $\tau = 0$ bzw. $\tau = 1$, müssen dabei die Bedingungen (1.2.4), (1.2.5), (1.2.6.b) und (1.2.7) erfüllt werden. An den Punkten τ_s , an denen sich die Steuerung ändert müssen als Schaltbedingung die Gleichung

$$(3.1.3) \quad \lambda_{a2}(\tau_s) = 0$$

erfüllt sein, die aus den Beziehungen (1.2.9) bzw. (1.2.11) folgt.

Dieses Mehrpunktrandwertproblem wurde numerisch mit der Mehrzielmethode gelöst (Stoer, Bulirsch [6], Oberle [7]).

Für die Rechnung stand dazu die Fortran-Routine BDSCO zur Verfügung, die speziell auf diese Art von Randwertproblemen zugeschnitten ist. Bei der Benutzung des Programms besteht im allgemeinen das Problem, die Zahl der Schaltpunkte und die Struktur der Steuerungen (Bang-Bang- oder singular) zu bestimmen. Für die hier behandelte Fragestellung läßt sich dieses Problem folgendermaßen lösen. Die einzelnen Extremalen werden ausgehend von den Flugbahnen mit $\theta_m(0) = \bar{\theta}_m$ bzw. $\theta_m(0) = \tilde{\theta}_m$ durch eine Homotopiekette mit Homotopieparameter $\theta_m(0)$ bestimmt. Dabei wird bei einem neuen Wert des Homotopieparameters als Startnäherung für die Mehrzielmethode die Ex-

tremale zum vorausgehenden Wert des Homotopieparameters verwendet. Wegen (1.1.6), (1.1.7) und (1.1.15.a) sind nun die Voraussetzungen für den Satz 1.3.1 erfüllt. Nach diesem Satz kann ein singulärer Extremalenbogen nicht mit endlich vielen Schaltpunkten erreicht werden, in denen a_{mnc} zwischen $+a_{mnc}^{\max}$ und $-a_{mnc}^{\max}$ wechselt. Deshalb wurde beim Homotopieverfahren davon ausgegangen, daß eine reine Bang-Bang-Steuerung vorliegt. Um nun sicherzustellen, daß die jeweils angenommene Schaltstruktur richtig ist, muß nach jedem Homotopieschritt der Verlauf des Schalters λ_{a2} kontrolliert werden. Immer wenn die Zahl der Nullstellen von λ_{a2} nicht mit der Schaltpunktzahl übereinstimmt, müssen entsprechend der Zahl der Nullstellen und dem Verlauf von λ_{a2} Schaltpunkte hinzugefügt oder entfernt werden. In diesem speziellen Fall zeigte es sich, daß mit $\theta_m(0) \rightarrow \theta_m^{\text{sing}}$ von "hinten", d.h. von der Endzeit her, Schaltpunkte hinzukommen. Für den Homotopiezweig, der von $\bar{\theta}_m$ ausgeht, zeigen die Bilder 3.1.2 - 3.1.6 den Verlauf von θ_m , a_{mn} , a_{m2} und λ_{a2} bei einer Extremale zu $a_{tn} = -2g$ mit 5 Schaltpunkten.

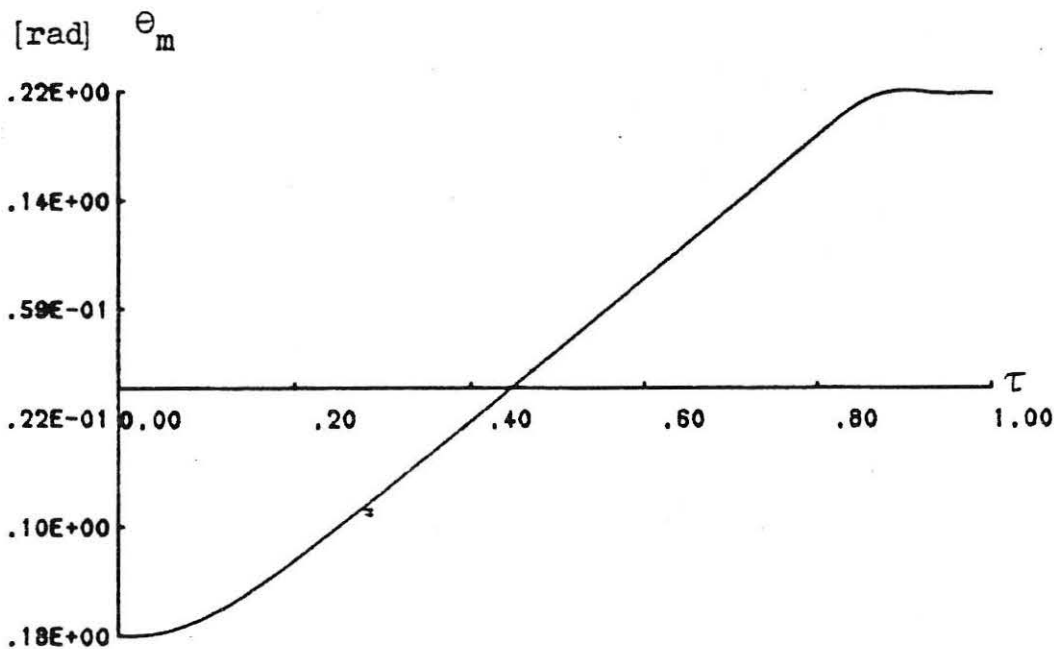


Bild 3.1.2 : $a_{tn} = -2g$, 5 Schaltpunkte

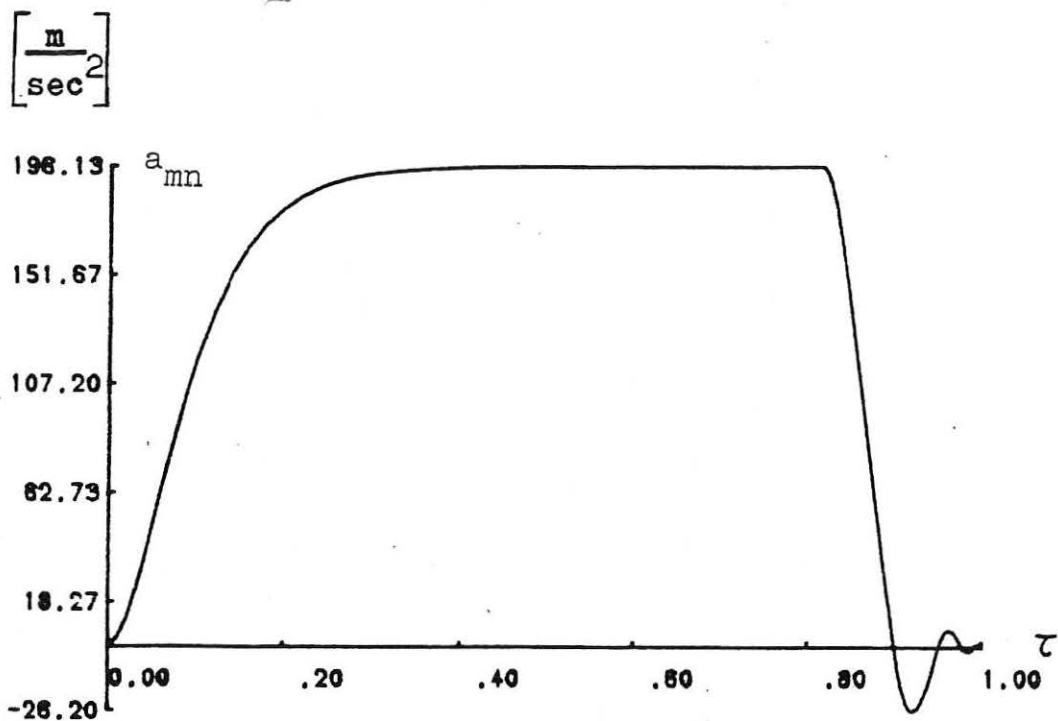


Bild 3.1.3 : $a_{tn} = - 2g$, 5 Schaltpunkte

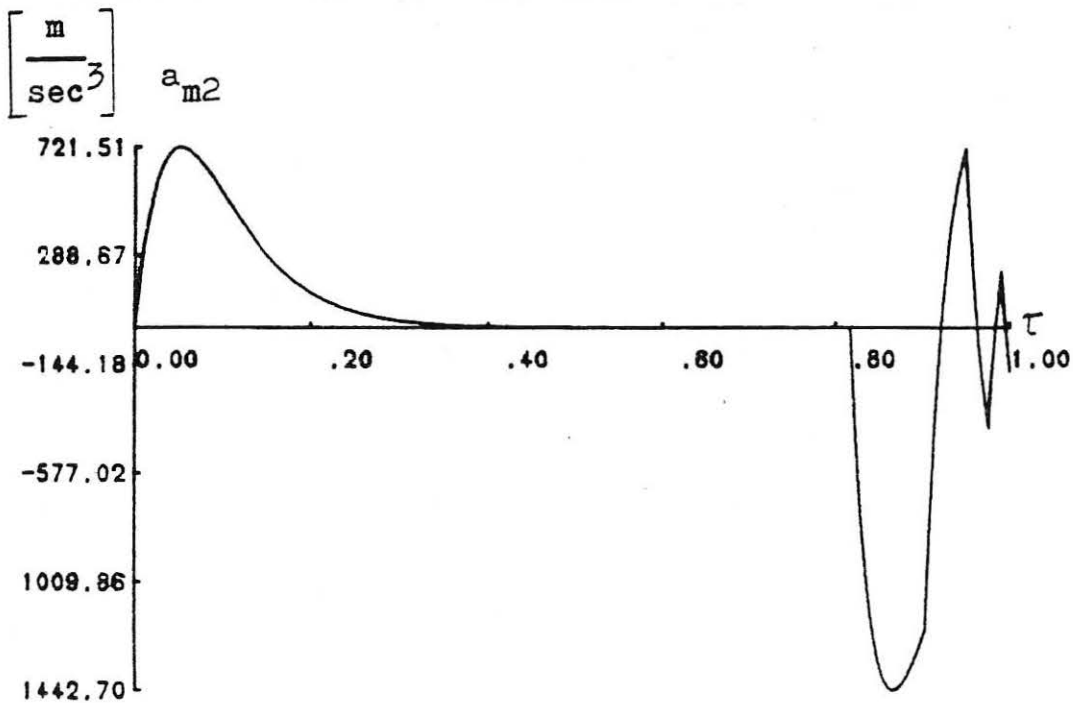


Bild 3.1.4 : $a_{tn} = - 2g$, 5 Schaltpunkte

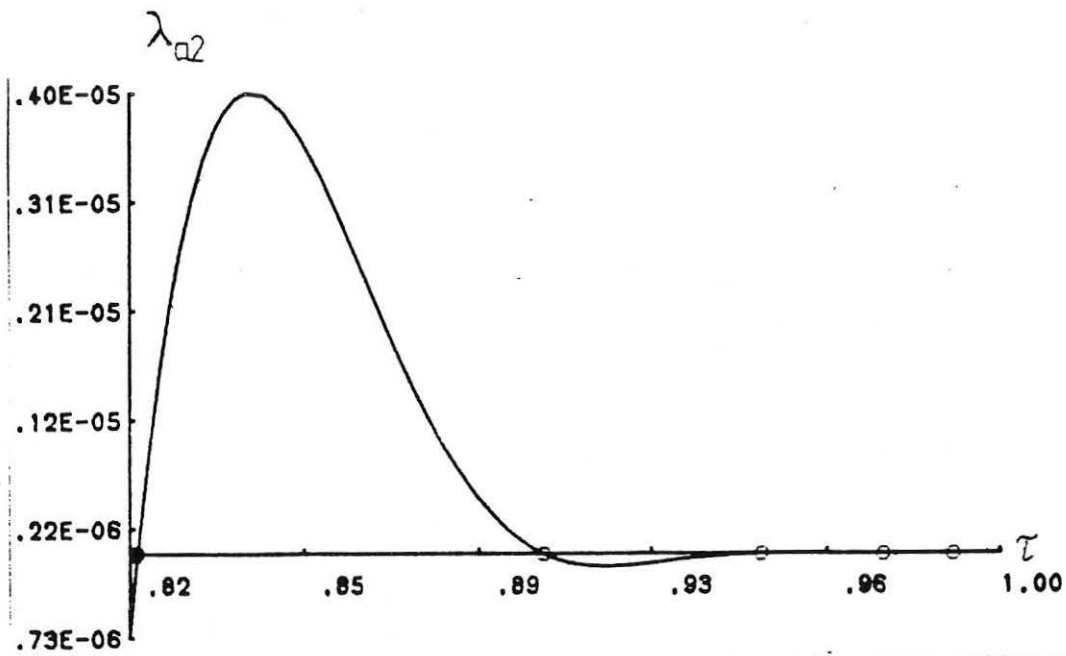


Bild 3.1.5 : $a_{tn} = -0.2g$, 5 Schaltpunkte

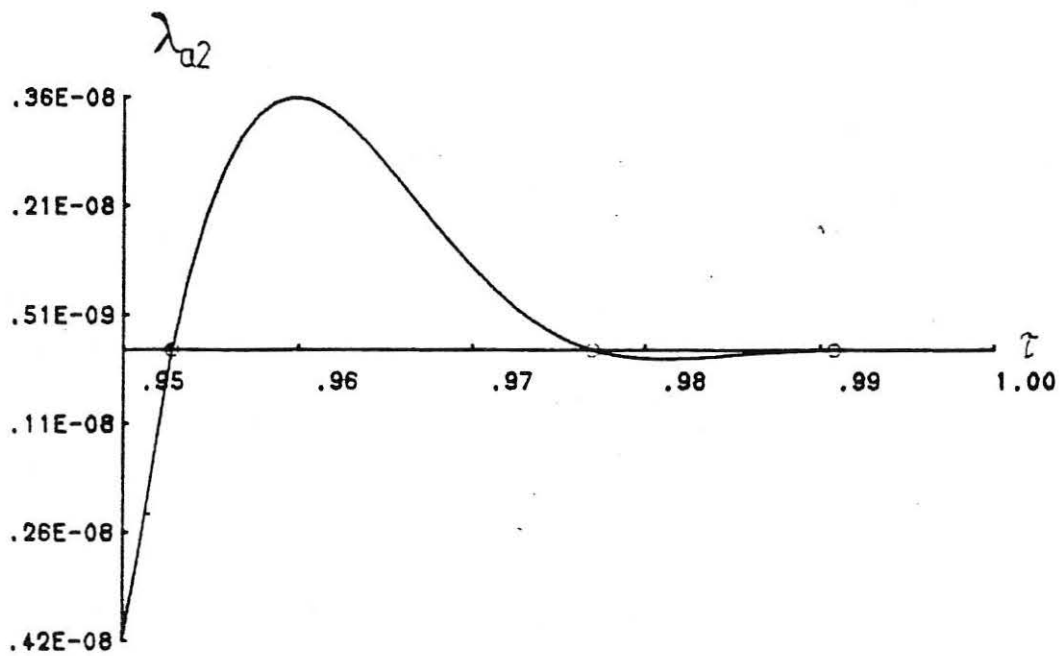


Bild 3.1.6 : $a_{tn} = -2g$, 5 Schaltpunkte

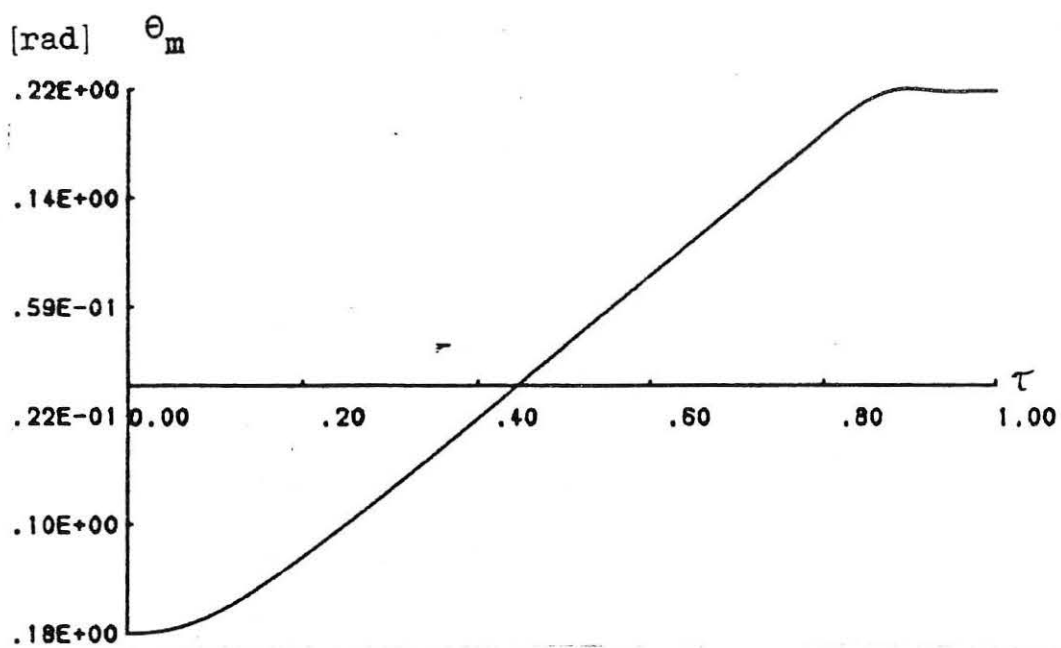


Bild 3.1.7 : $a_{tn} = -2g$, suboptimal

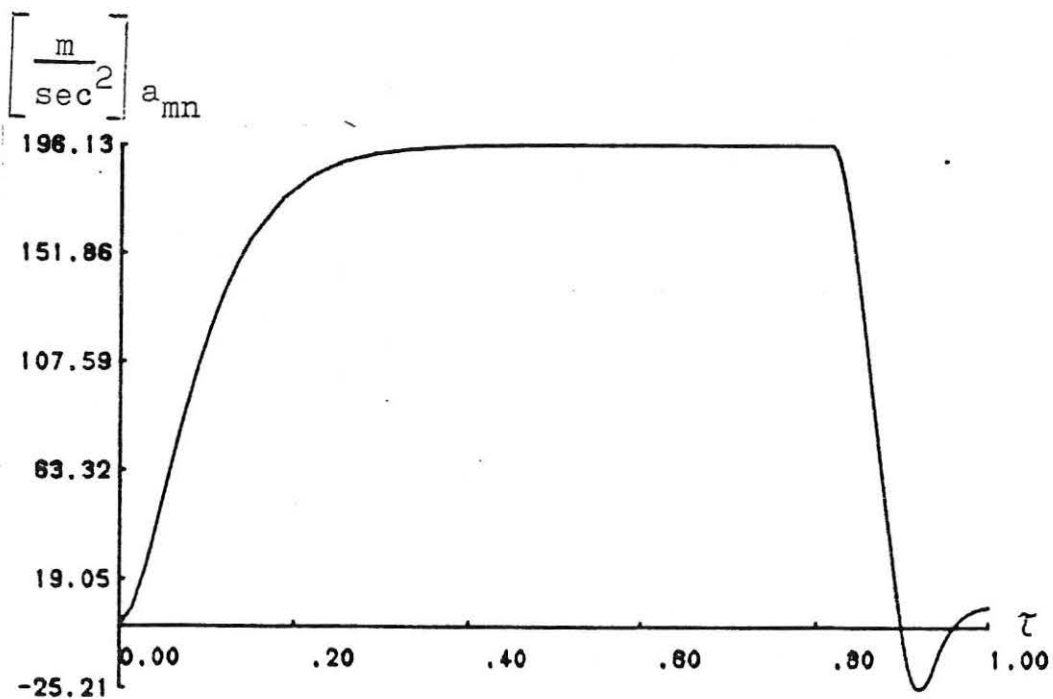


Bild 3.1.8 : $a_{tn} = -2g$, suboptimal

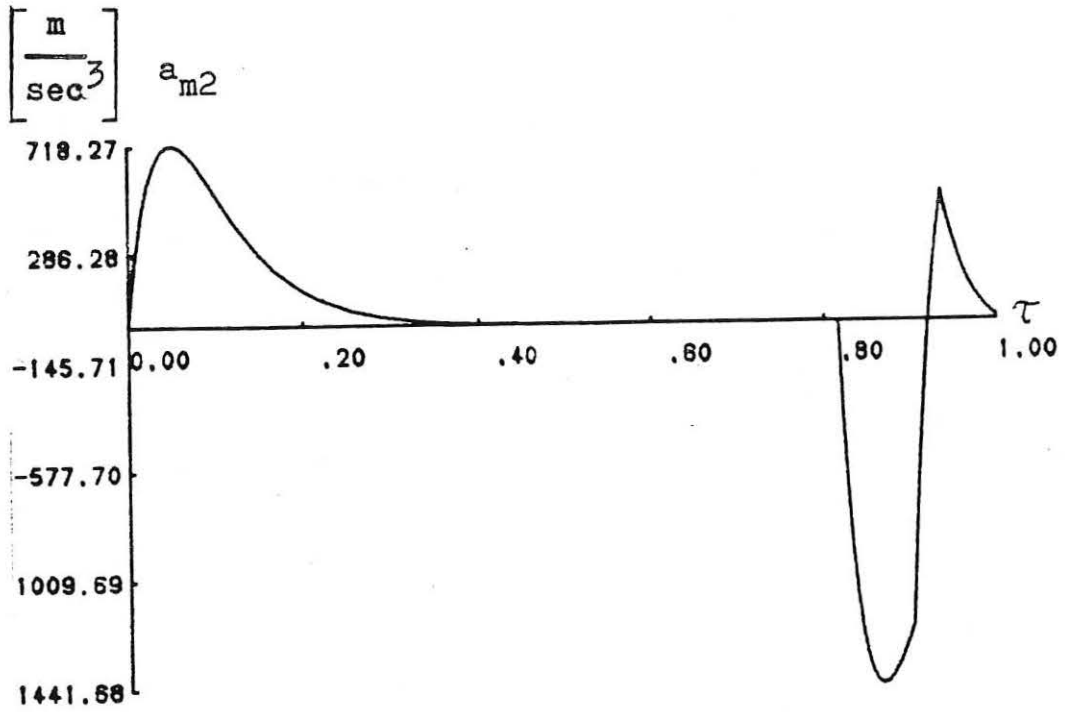


Bild 3.1.9 : $a_{tn} = - 2g$, suboptimal

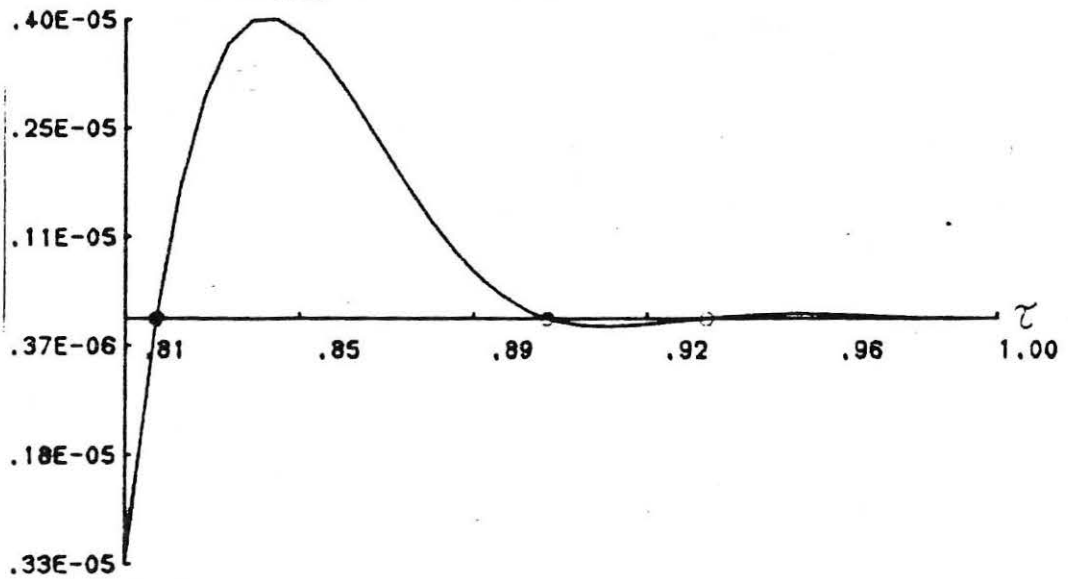


Bild 3.1.10 : $a_{tn} = - 2g$, suboptimal

In Bild 3.1.6 erkennt man, daß sich der Schalter λ_{a2} bei den letzten Schaltpunkten in einer Größenordnung unterhalb von 10^{-8} bewegt. Das liegt schon unterhalb der Genauigkeit des Mehrzielverfahrens, die mit 10^{-7} eingestellt war. Außerdem erkennt man, daß die Größenordnung des Schalters mit wachsender Schaltpunktzahl rapide abnimmt.

Aus Bild 3.1.2 und Bild 3.1.3 entnimmt man noch, daß mit wachsender Schaltpunktzahl $a_{mn}(\tau)$ gegen 0 und $\theta_m(\tau)$ gegen eine Konstante streben. Dieses für die Extremalen typische Verhalten wird verständlich, wenn man (1.2.2) genauer betrachtet.

(1.2.2) stellt ein singular gestörtes Differentialgleichungssystem dar mit Störungsparameter $\frac{1}{\omega}$. Für $\omega \rightarrow \infty$, d.h. $\frac{1}{\omega} \rightarrow 0$ erhält man aus (1.2.2)

$$(3.1.4) \quad a_{mn} = a_{mnc}$$

Aus dem ursprünglich betrachteten Steuerungsproblem wird damit im Grenzfall $\omega \rightarrow \infty$ ein Steuerungsproblem mit der Steuerung a_{mn} , d.h. die letzten beiden Gleichungen in (1.2.2) entfallen. Man sieht nun leicht ein, daß optimale Steuerungen für dieses reduzierte Steuerungsproblem die folgende Form haben:

Bis zu einem Schaltpunkt t_1 gilt $|a_{mn}| = a_{mnc}^{\max}$;

im Intervall $[t_1, t_f]$ gilt $a_{mn} \equiv 0$, und es existiert nur ein Schaltpunkt t_1 .

Die Folge einer solchen Steuerung ist, daß ab t_1 eine "Gerade" geflogen wird, d.h. $a_{mn} = 0$ und $\theta_m(\tau) \equiv \text{const.}$

Diese Lösung ist aber genau die sogenannte "äußere Lösung" des singular gestörten Randwertproblems, von dem ausgegangen wurde. Nach der Theorie der singular gestörten Randwertprobleme (O'Malley [8]) erwartet man, daß sich die exakte Lösung des hier behandelten Randwertproblems für "kleines" ($\frac{1}{\omega}$) approximieren läßt als Summe der "äußeren" Lösung (für $\frac{1}{\omega} = 0$) und von Randschichtkorrekturen bei $t = 0$ und $t = t_1$. Für die Randschichtkorrekturen erwartet man, daß sie für $t \cdot \omega \rightarrow \infty$, bzw. $(t-t_1) \cdot \omega \rightarrow \infty$ gegen 0 streben, d.h. für "große" ω und

"große Zeit" t erhält man $a_{mn} \approx 0$ und $\theta_m \approx \text{const.}$

Es zeigt sich nun, daß man im Homotopieverfahren kaum noch im Stande ist, Extremalen mit mehr als 5 Schaltpunkten zu berechnen. Das liegt hauptsächlich an der Größenordnung von λ_{a2} bei den letzten Schaltpunkten. Deshalb wurde dazu übergegangen, suboptimale Lösungen des Steuerungsproblems zu berechnen. Mit Rücksicht auf das Konvergenzverhalten des Mehrzielverfahrens und der obigen Betrachtung über die singular gestörte Struktur des Randwertproblems, wurde eine Steuerung mit 3 Schaltpunkten und folgender Schaltstruktur gewählt:

- Bis zum 3. Schaltpunkt reine Bang-Bang-Steuerung, d.h.
 $|a_{mnc}| = a_{mnc}^{\max}$
- Ab dem 3. Schaltpunkt $a_{mnc} = 0$

Als Schaltbedingung wurde weiterhin (3.1.3) verwendet. Die Bilder 3.1.7 - 3.1.10 zeigen θ_m , a_{mn} , a_2 und λ_{a2} für die so berechnete suboptimale Flugbahn zum selben Flugbahnwinkel $\theta_m(0)$, zu dem auch die exakte Lösung aus Bild 3.1.2 - 3.1.6 berechnet wurde.

Der relative Fehler im Zielfunktional t_f ist bei dieser suboptimalen Flugbahn kleiner als 10^{-9} . Tests an Extremalen mit weniger Schaltpunkten bestätigen für die relativen Fehler der suboptimalen Zielfunktionale eine Größenordnung von 10^{-8} . Dabei zeigt sich eine Tendenz zu besserer Genauigkeit, wenn $\theta_m(0)$ gegen θ_m^{sing} strebt. Dieses Verhalten erwartet man auch nach der obigen Betrachtung über die Lösung dieses singular gestörten Randwertproblems. Vergleicht man die Bilder 3.1.2 - 3.1.6 mit den Bildern 3.1.7 - 3.1.10, so erkennt man die recht gute Übereinstimmung von $\theta_m(t)$ in beiden Fällen. Diese Übereinstimmung ist typisch für alle suboptimalen Lösungen und schlägt sich natürlich auch in einer exzellenten Übereinstimmung von $x(t)$ und $y(t)$ zwischen optimaler und suboptimaler Lösung nieder.

Die größten Abweichungen beider Lösungstypen ergeben sich naturgemäß in a_{mn} , a_{m2} und λ_{a2} .

Den typischen tatsächlichen Flugbahnverlauf in der Flugebene zeigt Bild 3.1.11 für $\theta_m(o) = 0$; $a_{tn} = -2g$. Dabei startet das Ziel im Punkt $(2000,0)$ und der verfolgende Flugkörper im Ursprung des Koordinatensystems.

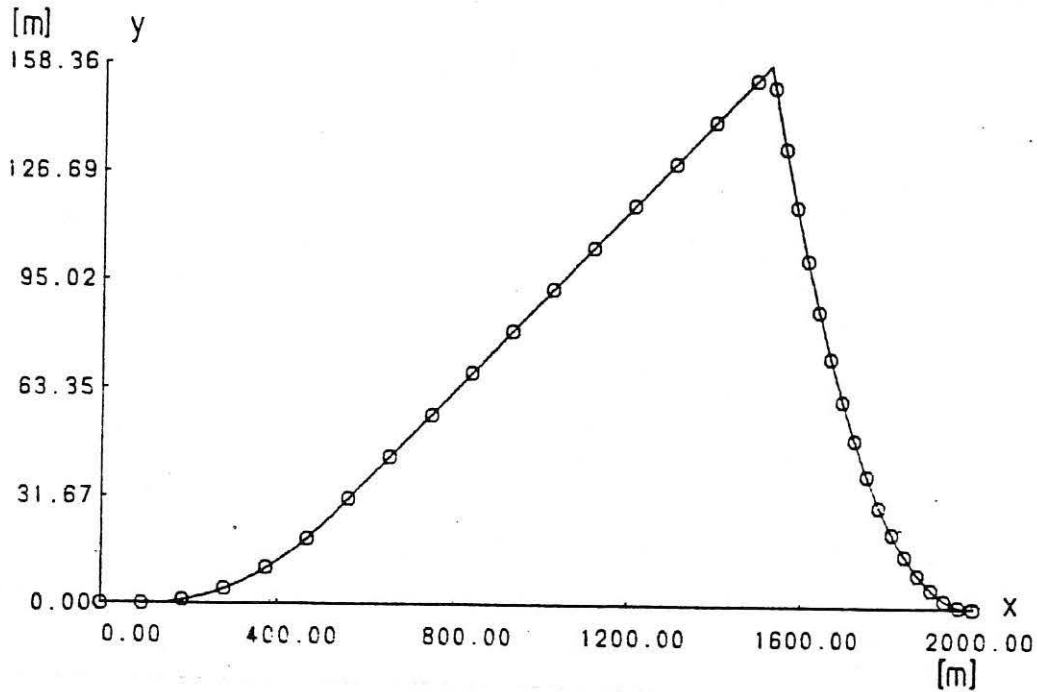


Bild 3.1.11 : Flugbahnverlauf in der Flugebene

Die Flugbahnkurven der beiden Flugkörper sind in gleichen Zeitabständen markiert , um den zeitlichen Verlauf des Fluges zu verdeutlichen.

3.2 Numerische Berechnung von Flugbahnen unter Verwendung der in Kapitel 2 konstruierten Rückkopplungssteuerungen

Für die Berechnung der Flugbahnen mit den Rückkopplungssteuerungen wurden folgende zusätzlichen Annahmen gemacht:

- A1: Sämtliche benötigten Zustandsgrößen sind jederzeit exakt bestimmbar.
- A2: Die Bestimmung der Zustandsgrößen benötigt keine Zeit.
- A3: Die Berechnung der Rückkopplungssteuerung benötigt keine Zeit.
- A4: Die Rückkopplungssteuerung wird kontinuierlich bestimmt, d.h. zu jedem Zeitpunkt während des Fluges wird die Steuerung bestimmt.

Mit diesen Annahmen lassen sich die Flugbahnen bei Verwendung der Rückkopplungssteuerung durch einfache Integration der Bewegungsgleichungen (2.1.5) berechnen. Es werden dabei die Gleichungen (2.1.5) benutzt, da später zur Beurteilung der Rückkopplungssteuerung auch "ausweichende" Zielbewegungen berücksichtigt werden, d.h. später wird die Voraussetzungen $a_{tn} = \text{const.}$ fallengelassen. Bei der Integration der Bewegungsgleichungen führt allerdings die Voraussetzung A4 zu erheblichen numerischen Schwierigkeiten.

Sämtliche Rückkopplungssteuerungen ändern ihren Wert nach Konstruktion nur unstetig. Das führt zu unstetigen Änderungen in den rechten Seiten der Bewegungsgleichungen. Über solche "Unstetigkeitsstellen" in den Bewegungsgleichungen darf aber nicht einfach hinwegintegriert werden, da sonst sofort die Integrationsgenauigkeit leiden würde und außerdem die Rechenzeit für die Integration einer Flugbahn stark ansteige.

Will man nun A4 erfüllen, so ist es deshalb nötig, die Punkte, in denen sich die Steuerung ändert, numerisch zu bestimmen und in diesen Punkten die Integration neu zu starten.

In diesem speziellen Problem ist dieser Weg aber nicht praktikabel, da sich bei Rechnungen gezeigt hat, daß die

Unstetigkeitspunkte der Steuerung sich für eine große Zahl von Flugbahnen häufen, oder doch so dicht liegen, daß das Integrationsintervall durch dieses Vorgehen in extrem viele Teilintervalle unterteilt wird (siehe z.B. Bild 3.2.4). Es ist daher nicht möglich, die Annahme A4 genau zu erfüllen. Stattdessen wird folgendermaßen vorgegangen:

Zu Beginn der Integration wird die Flugzeit geschätzt. Zu dieser Schätzung wird noch ein Sicherheitsbetrag von $1/4$ der Schätzung hinzugefügt und das so erhaltene Zeitintervall in 200 gleichgroße Intervalle unterteilt. Bei der Berechnung wird nun von Teilintervall zu Teilintervall integriert. Um A4 möglichst "gut" zu erfüllen, wird für die Integration ein sogenannter "offener" Integrator verwendet, der nach jedem einzelnen Integrationsschritt ins aufrufende Programm zurückkehrt.

Nach jedem solchen Integrationsschritt wird jetzt die Steuerung neu aus dem jeweils benutzten Rückkopplungsgesetz berechnet und für den nächsten Integrationsschritt konstant gehalten. Die Schrittweitensteuerung des Integrators bleibt dabei unangetastet, da allein schon die vorgenommene Intervalleinteilung die häufige Bestimmung der Steuerung garantiert. Die Verwendung des offenen Integrators bietet zusätzlich die Möglichkeit, die Endzeit t_f des Fluges zu bestimmen. Es ist so möglich zu kontrollieren, wie gut die Endbedingungen $0 = x(t_f) = y(t_f)$ (in relativen Koordinaten) erfüllt sind, und inwieweit die Rückkopplungssteuerung die Endzeit tatsächlich minimiert.

Als Endzeit t_f wurde dann die Zeit t verwendet, zu der der Abstand $r(t)$ der beiden Flugkörper M und T sein erstes Minimum annimmt.

Zur Abkürzung seien für die Darstellung der Resultate der Rechnungen noch folgende Bezeichnungen eingeführt.

- O bezeichnet die nominelle Lösung nach 3.1
- I bezeichnet die Rückkopplungssteuerung nach Gleichung (2.2.7⁺) und (2.2.19)

- II bezeichnet die Rückkopplungssteuerung nach Gleichung (2.3.3⁺a) und (2.3.10)
- III bezeichnet die Rückkopplungssteuerung nach Gleichung (2.3.3⁺a) und (2.3.13)

Für die Durchführung der numerischen Rechnungen wurde als Integrator ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 7 gewählt. Die Integrationsgenauigkeit wurde mit 10^{-8} festgesetzt und für den Modellparameter μ in Gleichung (2.1.5) und in (2.3.10) wurde $10 \frac{1}{\text{sec}}$ gewählt. Damit gilt $\mu = \omega$, d.h. beide Flugkörper haben identische Modellparameter bezüglich der Dynamik der Normalbeschleunigung.

Als erstes wurden die Rückkopplungssteuerungen mit den entsprechend Abschnitt 3.1 berechneten suboptimalen Steuerungen verglichen. Das bedeutet, daß zunächst die Normalbeschleunigung des Zieles konstant ist, d.h. $a_{t2} = 0$. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Einhaltung der "Trefferbedingung" $x(t_f) = y(t_f) = 0$, sowie auf dem relativen Fehler in der Endzeit t_f im Vergleich zu den suboptimalen Lösungen.

Tabelle 3.2.1 gibt für die 3 Rückkopplungssteuerungen an, in welcher Größenordnung sich der Fehler Δt in der Endzeit und Δr im Abstand der beiden Flugkörper zur Endzeit in Bezug auf die nominelle Trajektorie bewegt.

Bemerkenswert ist, daß der Fehler im Abstand Δr bei festem a_{tn} für alle Flugbahnwinkel $\theta_m(0)$, die in Bild 3.1.1 im schraffierten Bereich liegen, die gleiche Größenordnung behält. Für $\theta_m(0) = \tilde{\theta}_m$ bzw. $\theta_m(0) = \bar{\theta}_m$ reproduzieren sogar alle Rückkopplungssteuerungen die exakte Lösung.

Der Tabelle entnimmt man, daß speziell für größere Normalbeschleunigungen des Zieles die Rückkopplungssteuerung nach III deutlich schlechtere Werte für den "Trefferfehler" Δr liefert als Steuerungen I und II. Das ist aber nicht besonders überraschend, wenn man bedenkt, daß III keine Information über die Normalbeschleunigung des Zieles verwendet.

Rückkopplungssteuerung aus

	I	II	III
<hr/>			
$a_{tn} = -2g$			
Δt	$\leq 10^{-5}$	$\leq 10^{-4}$	$\leq 2 \cdot 10^{-4}$
Δr	$\leq 10^{-4} \text{ m}$	$\leq 10^{-4} \text{ m}$	$\leq 10^{-1} \text{ m}$
<hr/>			
$a_{tn} = -8g$			
Δt	$\leq 10^{-5}$	$\leq 5 \cdot 10^{-4}$	$\leq 2 \cdot 10^{-3}$
Δr	$\leq 10^{-4} \text{ m}$	$\leq 10^{-4} \text{ m}$	$\leq 1 \text{ m}$
<hr/>			

Tabelle 3.2.1 : Relative Fehler bzgl. nominelle Trajektorie bei Δt , absolute Fehler bzgl. Steuerung 0 bei Δr

Um die Ergebnisse in Tabelle 3.2.1 besser zu bewerten und zu verstehen, vergleicht man die Flugbahnen, die mit den Rückkopplungssteuerungen berechnet wurden, mit denen der entsprechenden nominellen Trajektorien. Als typisches Beispiel dienen die Flugbahnen, die in Bild 3.2.1(0) bis 3.2.6(III) dargestellt sind.

Für die Flugbahnen ist $\theta_m(0) = 0$ und $a_{tn} = -8g$. Die Bilder 3.2.1(0) bis 3.2.1(III) zeigen die Flugbahnkurven der beiden Flugkörper M und T in der Flugebene. Um den zeitlichen Verlauf der Flugbahnen sichtbar zu machen, wurden die Bahnkurven beider Flugkörper in gleichen Zeitabständen markiert. In den Bildern 3.2.2(I) bis 3.2.6(III) werden der Flugbahnwinkel θ_m , die Normalbeschleunigung a_{mn} , deren Ableitung \dot{a}_{m2} , sowie der Sichtlinienwinkel σ und dessen Ableitung $\dot{\sigma}$ entlang der mit den Rückkopplungssteuerungen I, II und III berechneten Flugbahnen mit den entsprechenden Größen auf der nominellen Trajektorie verglichen.

Die Knicke in den Kurven von \dot{a}_{m2} rühren dabei daher, daß für die Zeichnung nur endlich viele Stützpunkte ausgewertet wurden und daß überdies zwischen diesen Stützpunkten linear

interpoliert wird. Die Stützpunkte liegen dabei weniger als 2/100 sec auseinander. Man erkennt somit, daß die Steuerung in den Bereichen, wo diese Knickte gehäuft auftreten, sehr oft "umgeschaltet" wird.

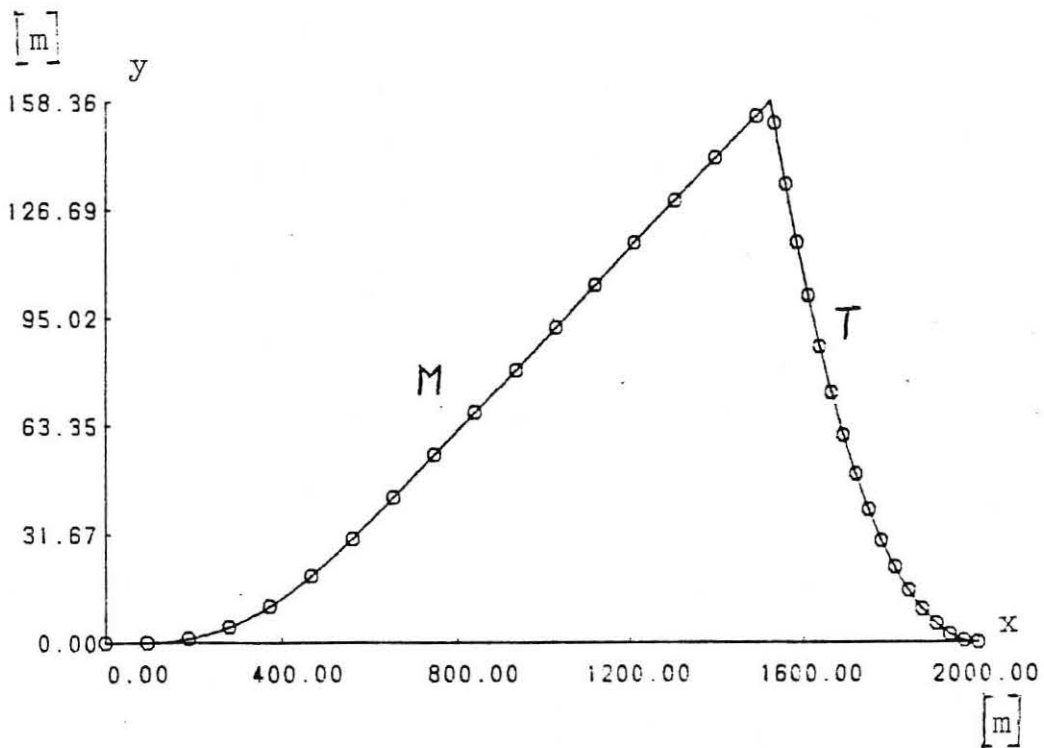


Bild 3.2.1.(0) : Flugkurven auf nomineller Steuerung

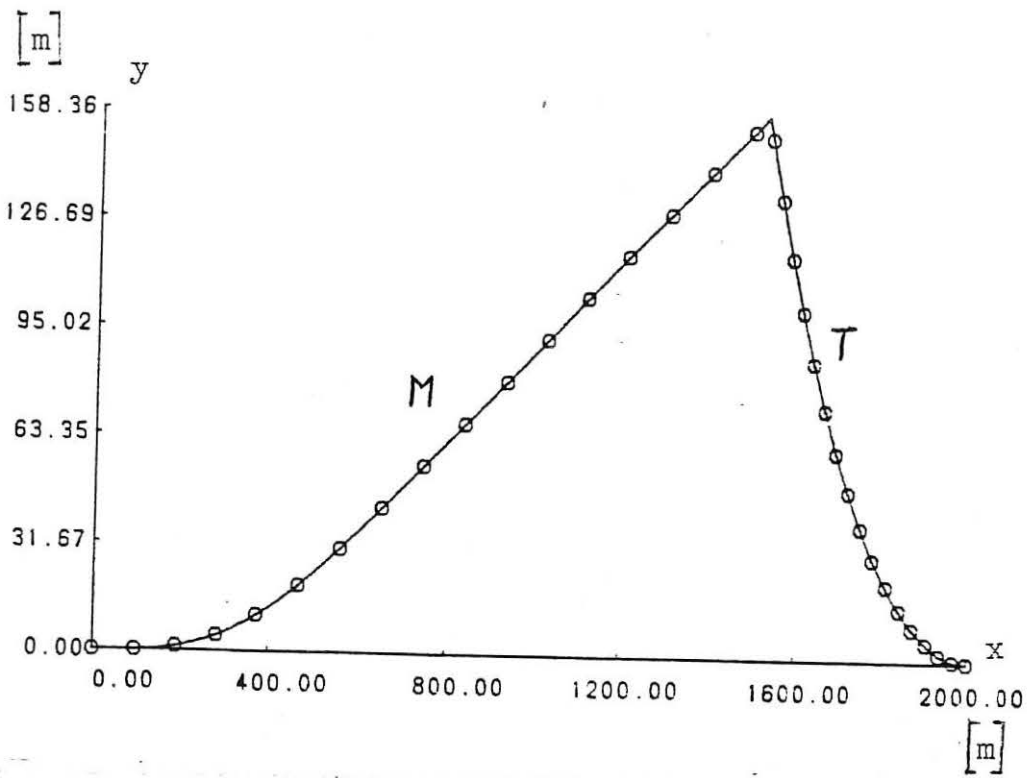


Bild 3.2.1(I) : Flugkurven mit Steuerung I

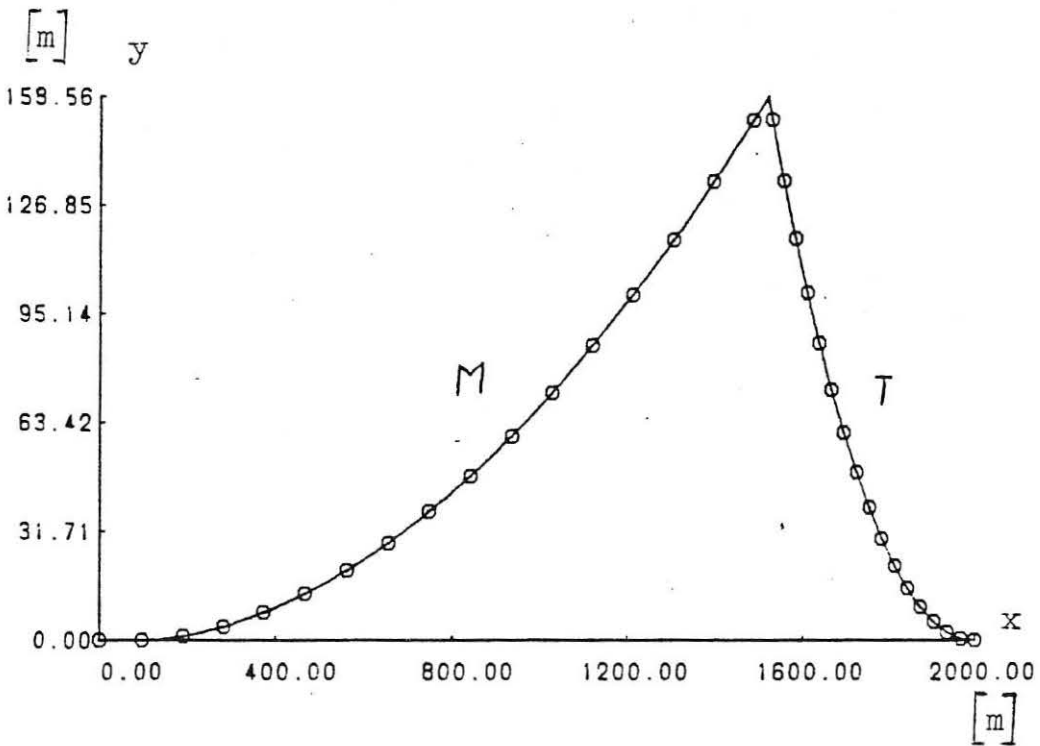


Bild 3.2.1(II) : Flugkurven mit Steuerung II
 $(\mu = 10 \frac{1}{\text{sec}})$

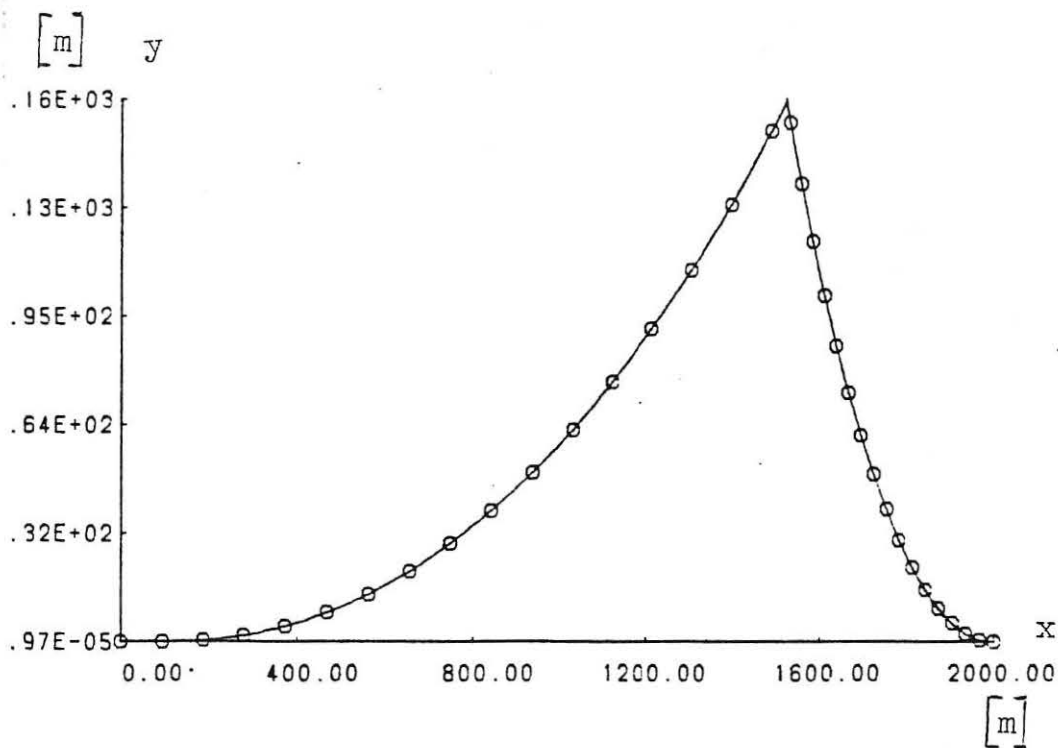


Bild 3.2.1(III) : Flugkurven mit Steuerung III

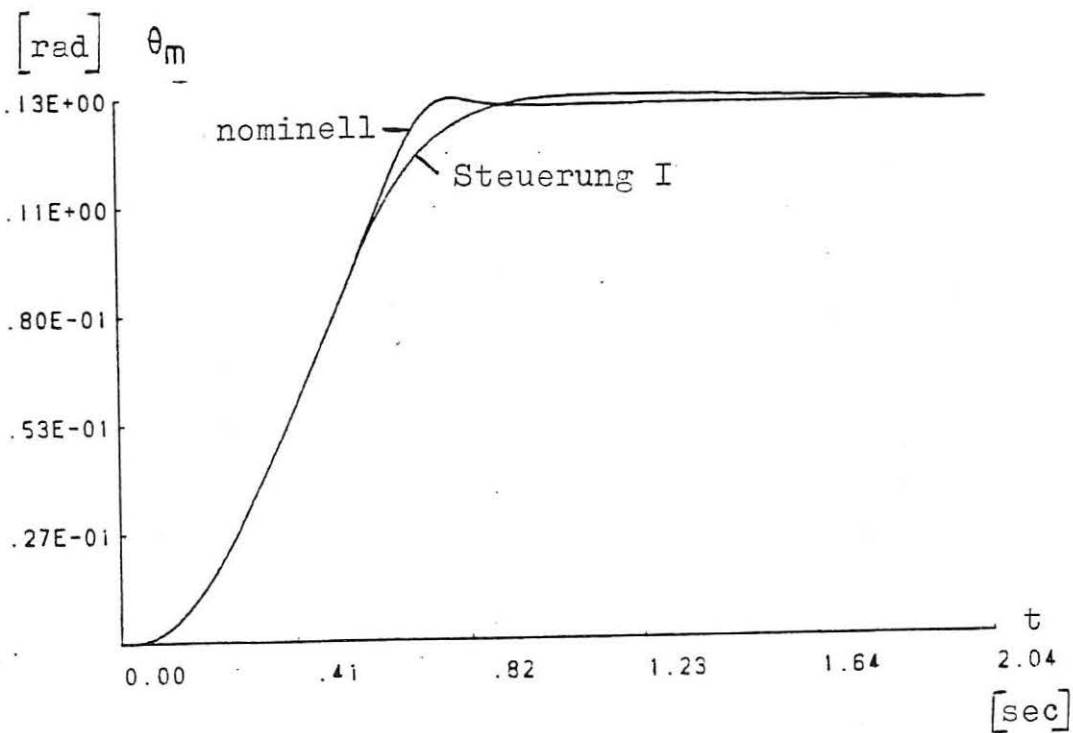


Bild 3.2.2(I) : Vergleich von θ_m : Steuerung I

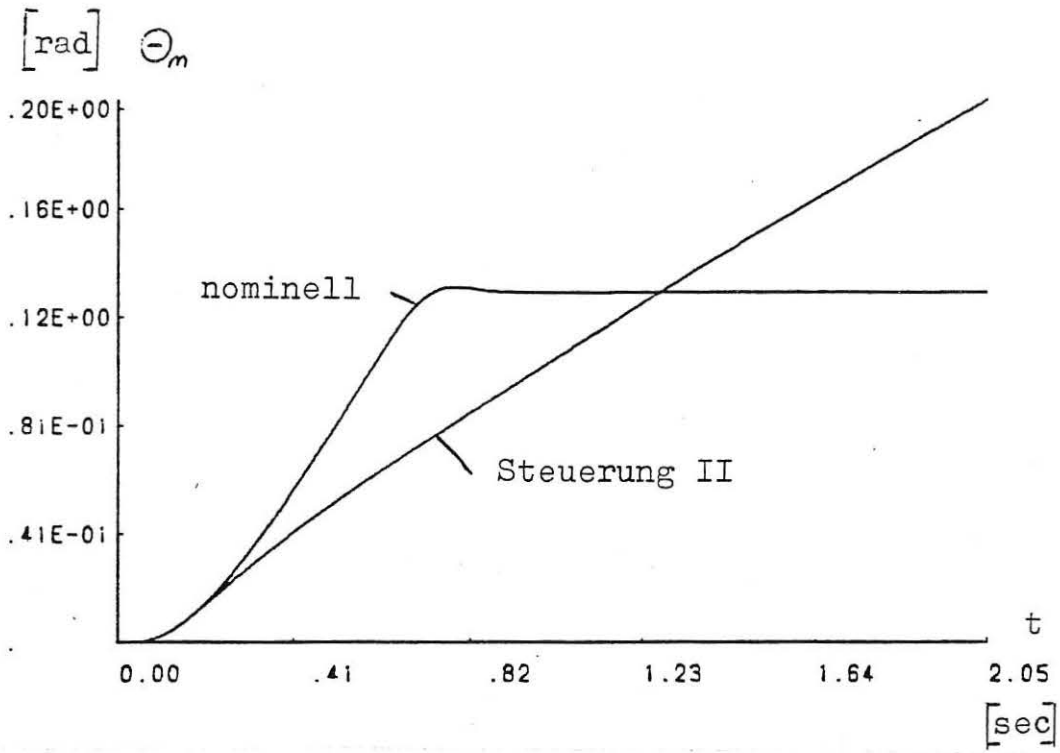


Bild 3.2.2 (II) : Vergleich von θ_m : Steuerung II ($\mu=10 \frac{1}{\text{sec}}$)

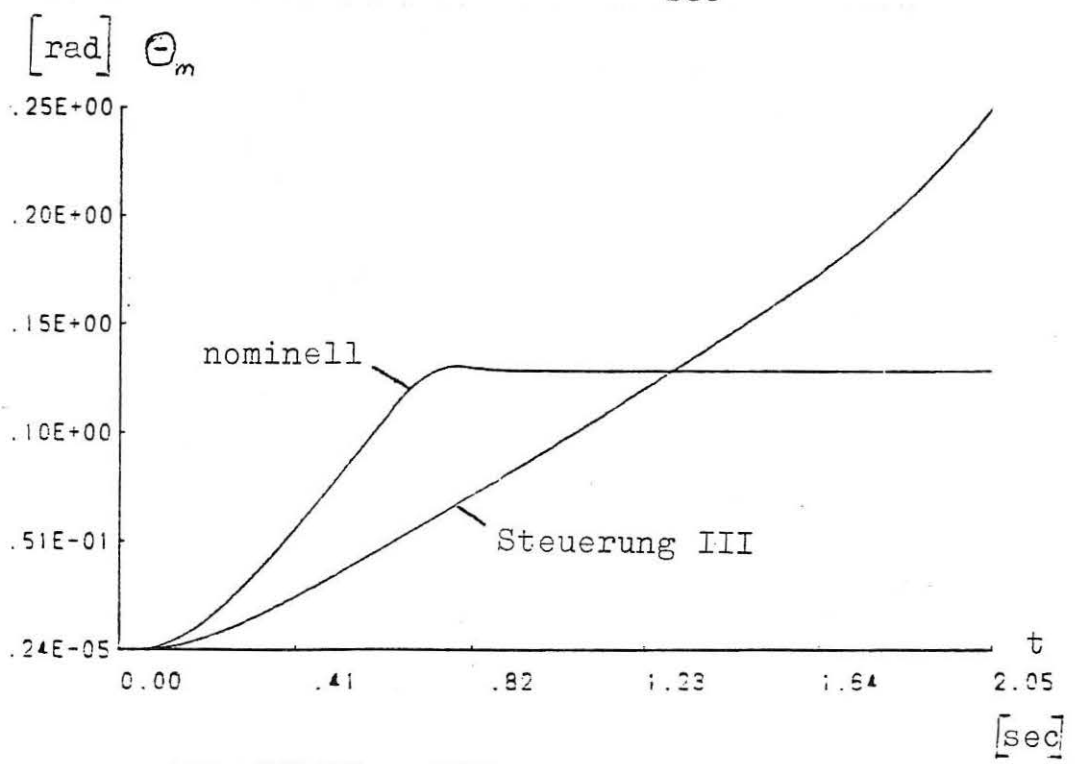


Bild 3.2.2 (III) : Vergleich von θ_m : Steuerung III

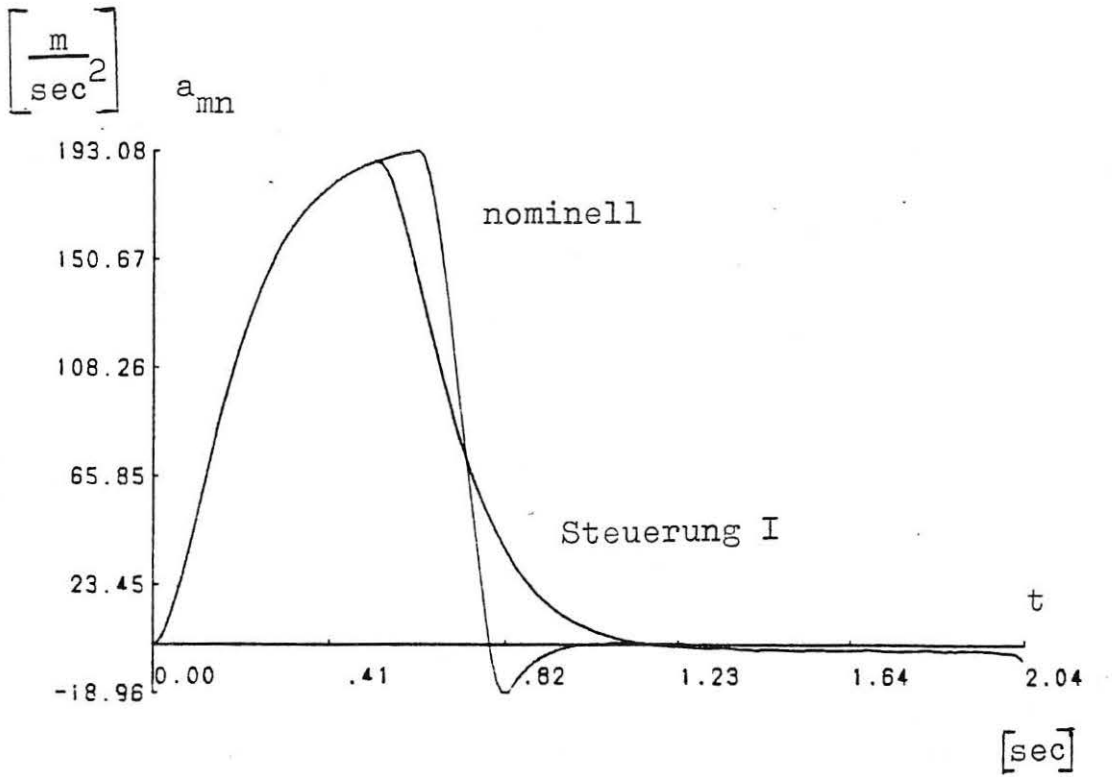


Bild 3.2.3 (I) : Vergleich von a_{mn} : Steuerung I

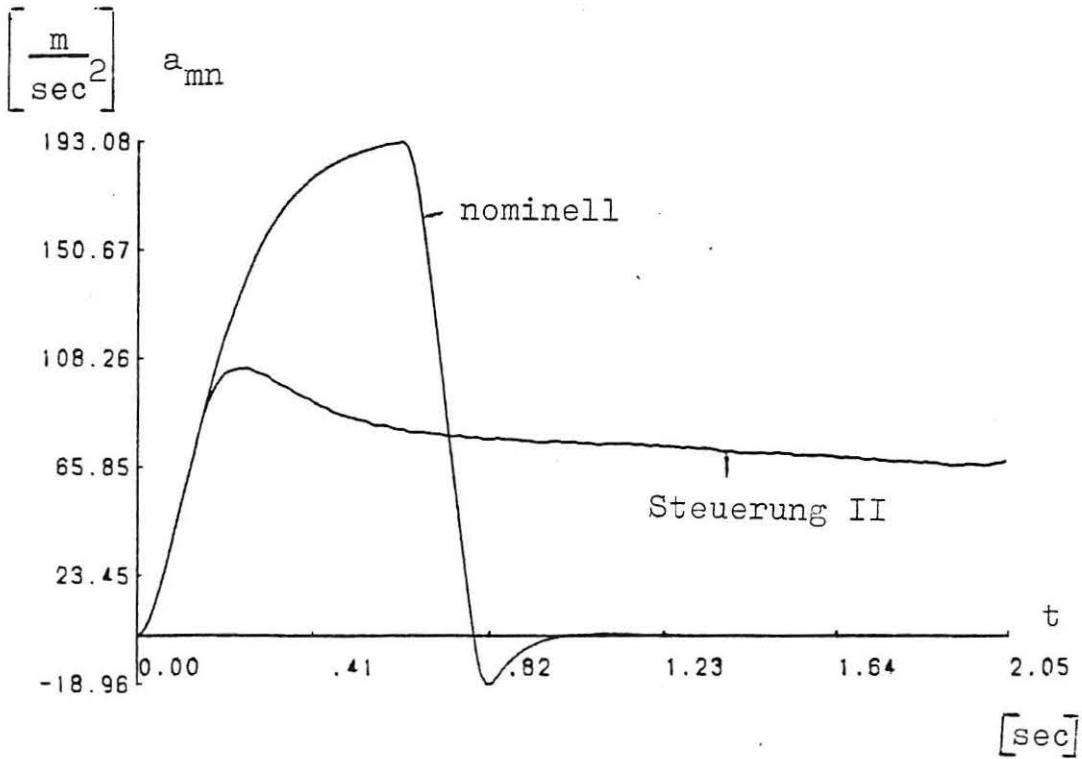


Bild 3.2.3 (II) : Vergleich von a_{mn} : Steuerung II
 $(\mu = 10 \frac{1}{sec})$

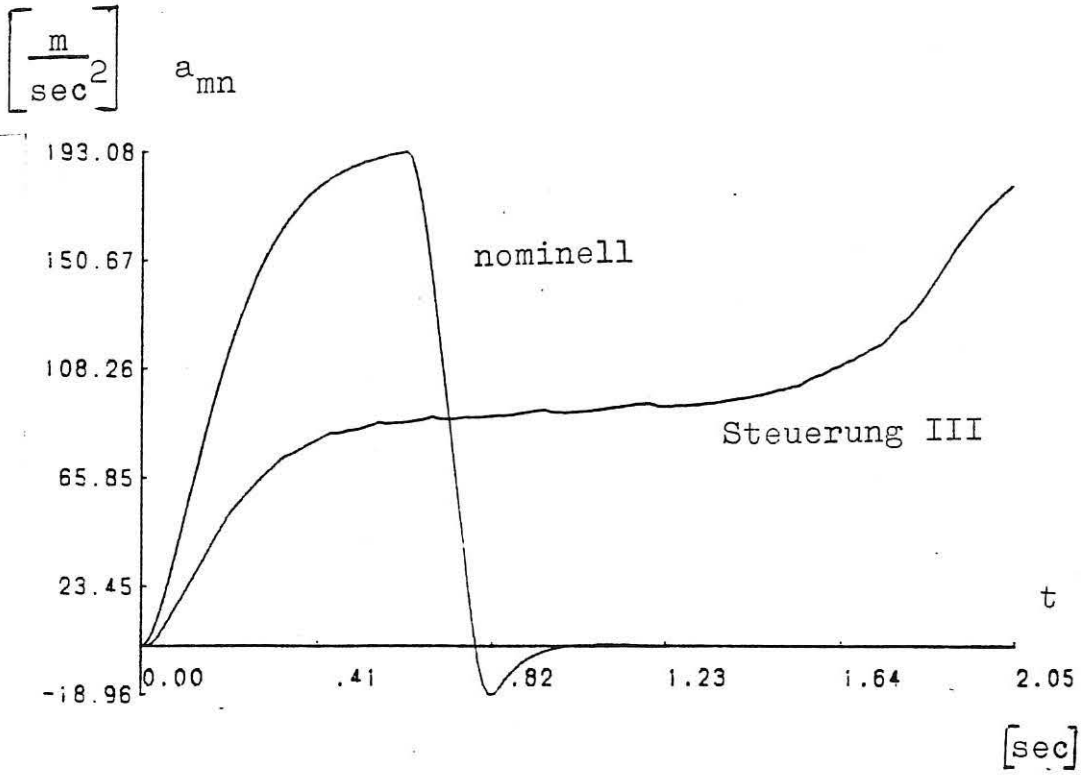


Bild 3.2.3 (III) : Vergleich von a_{mn} : Steuerung III

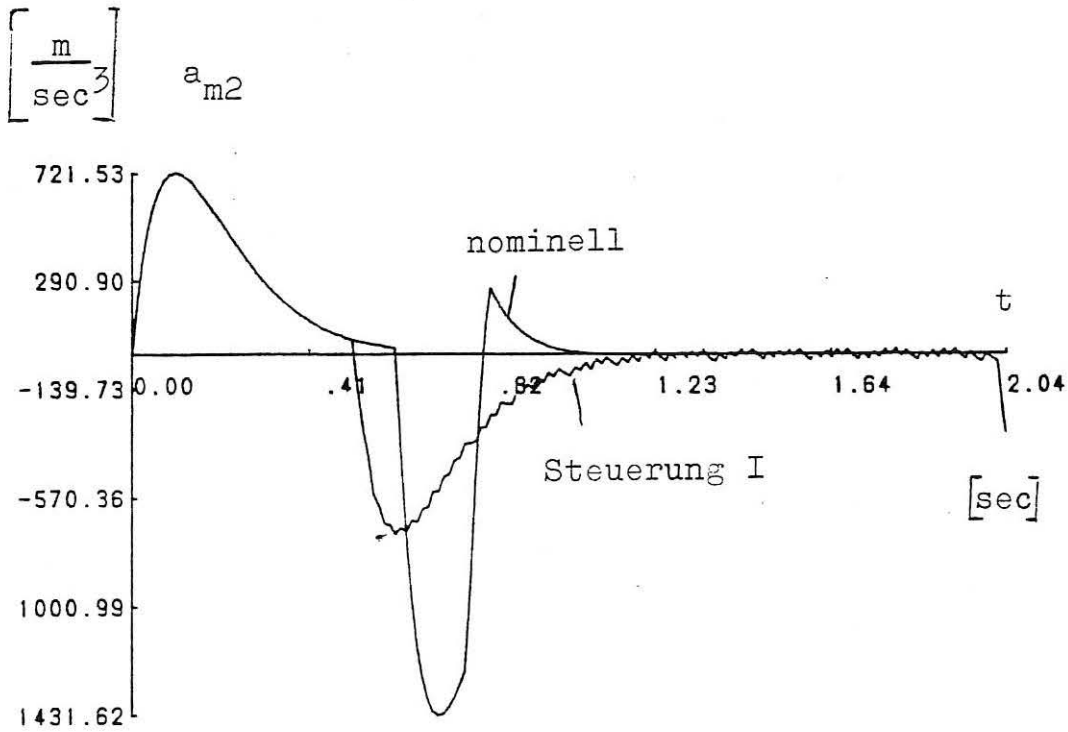


Bild 3.2.4 (I) : Vergleich von a_{m2} : Steuerung I

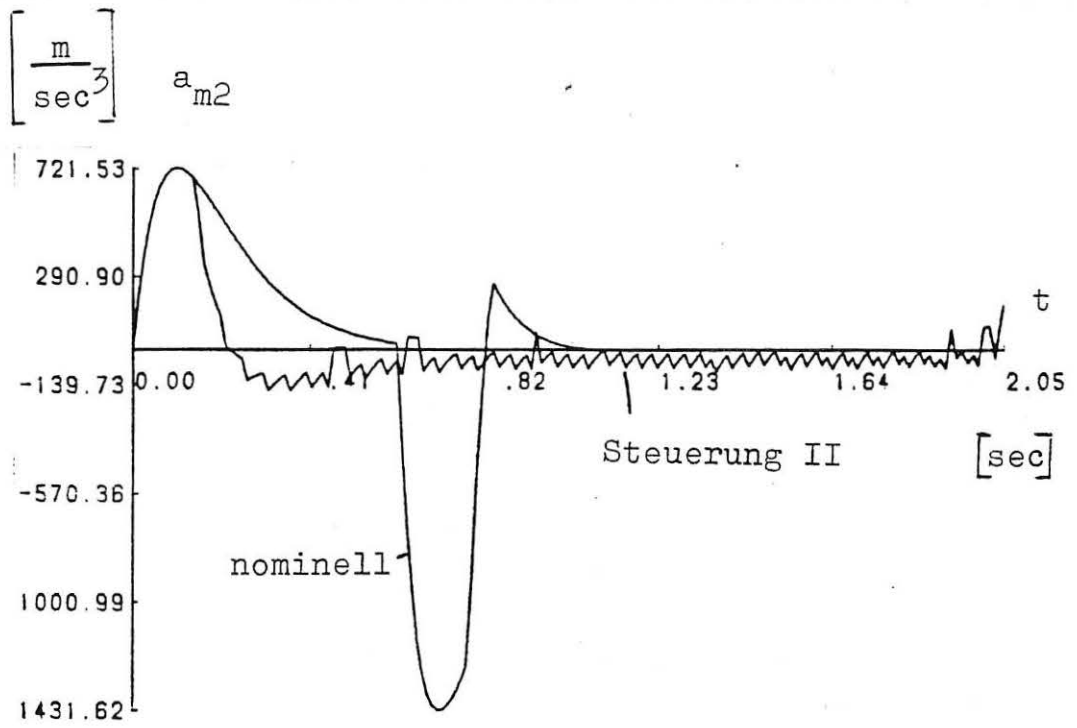


Bild 3.2.4 (II) : Vergleich von a_{m2} : Steuerung II
 ($\mu = 10 \frac{1}{sec}$)

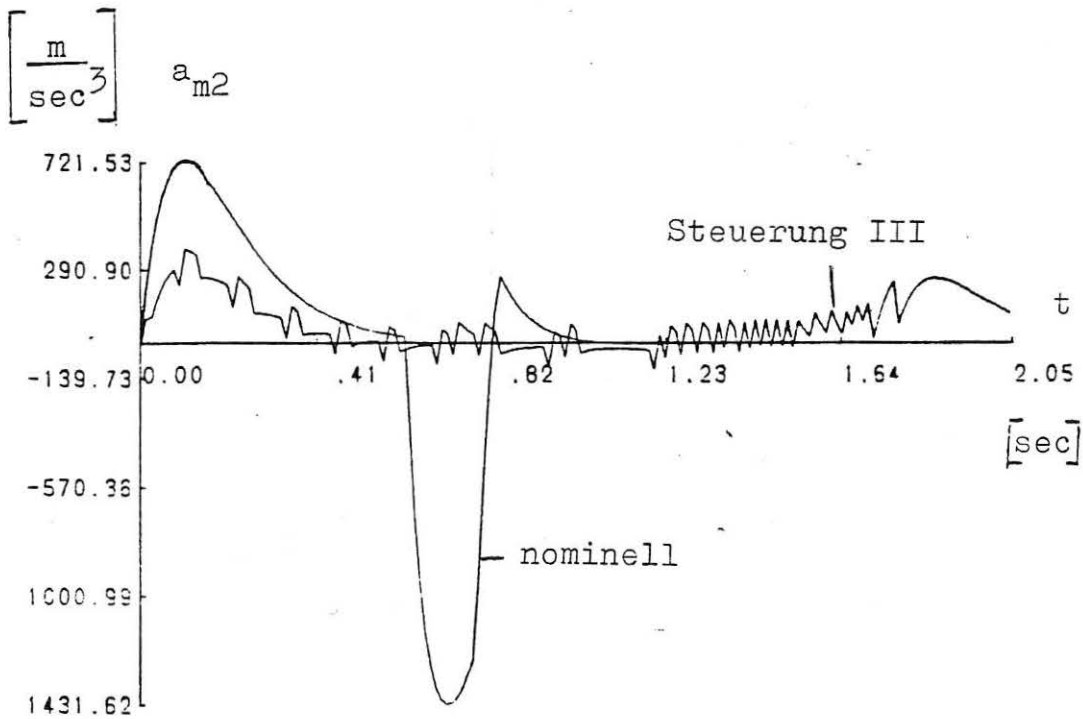


Bild 3.2.4 (III) : Vergleich von a_{m2} : Steuerung III

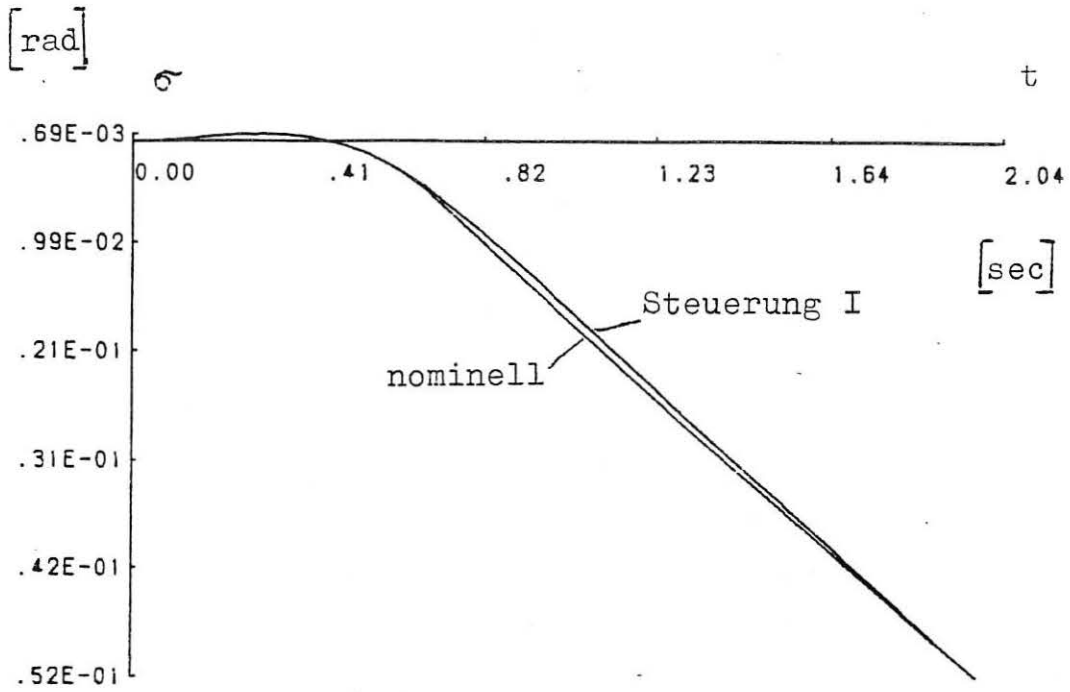


Bild 3.2.5 (I) : Vergleich von σ : Steuerung I

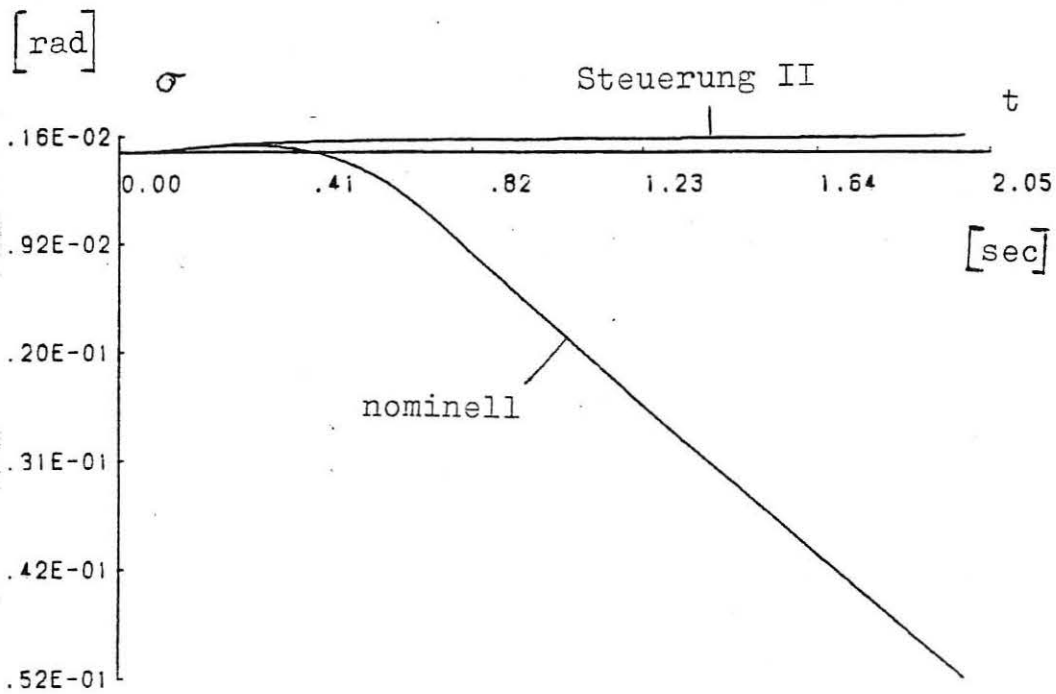


Bild 3.2.5 (II) : Vergleich von σ : Steuerung II
 $(\mu = 10 \frac{1}{\text{sec}})$

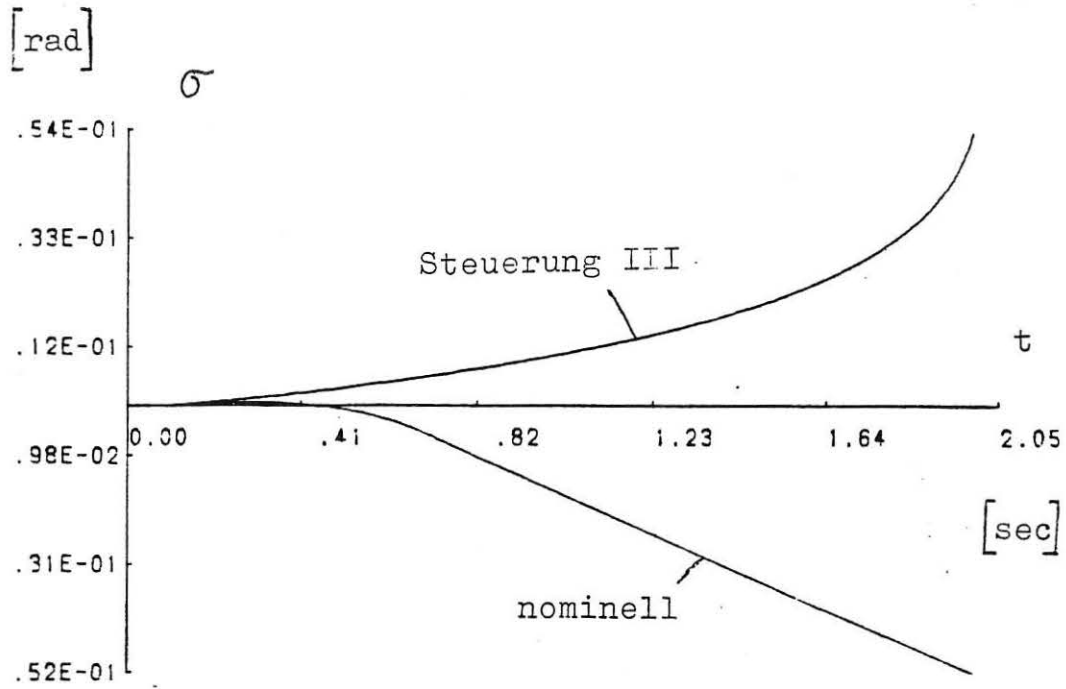


Bild 3.2.5 (III) : Vergleich von σ : Steuerung III

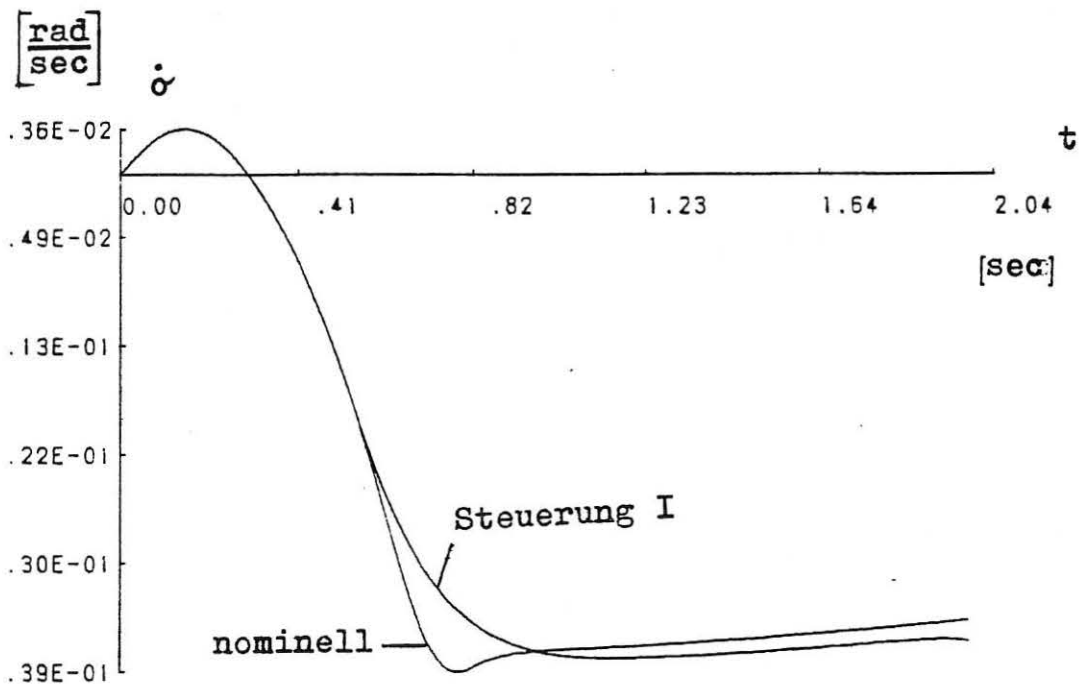


Bild 3.2.6 (I) : Vergleich von $\dot{\sigma}$: Steuerung I

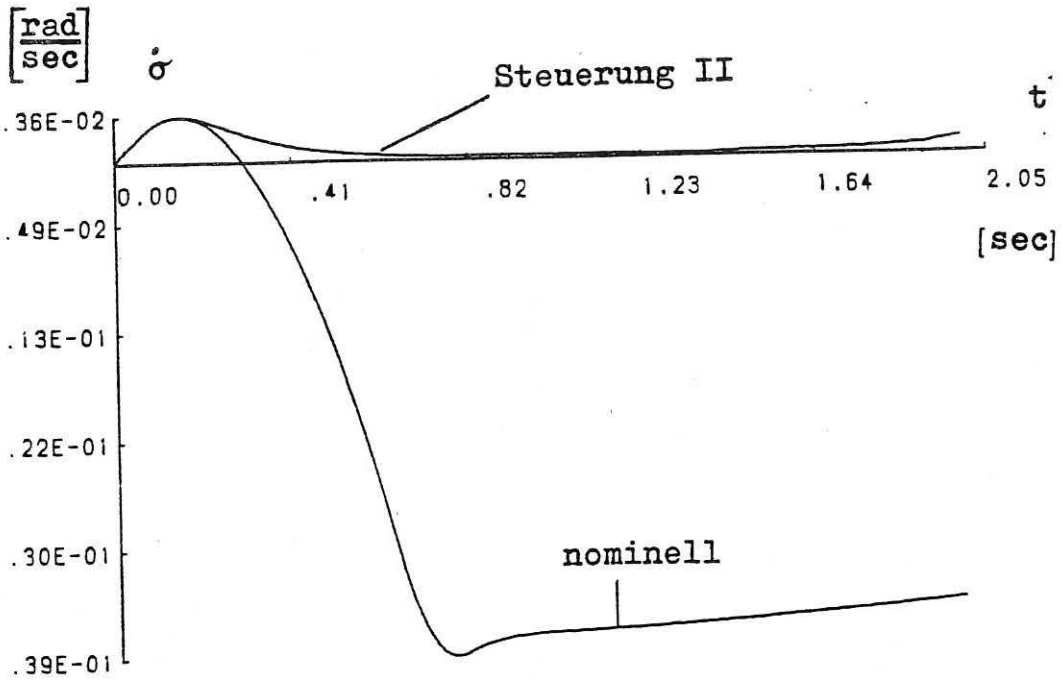


Bild 3.2.6 (II) : Vergleich von $\dot{\sigma}$: Steuerung II
 $(\mu = 10 \frac{1}{\text{sec}})$

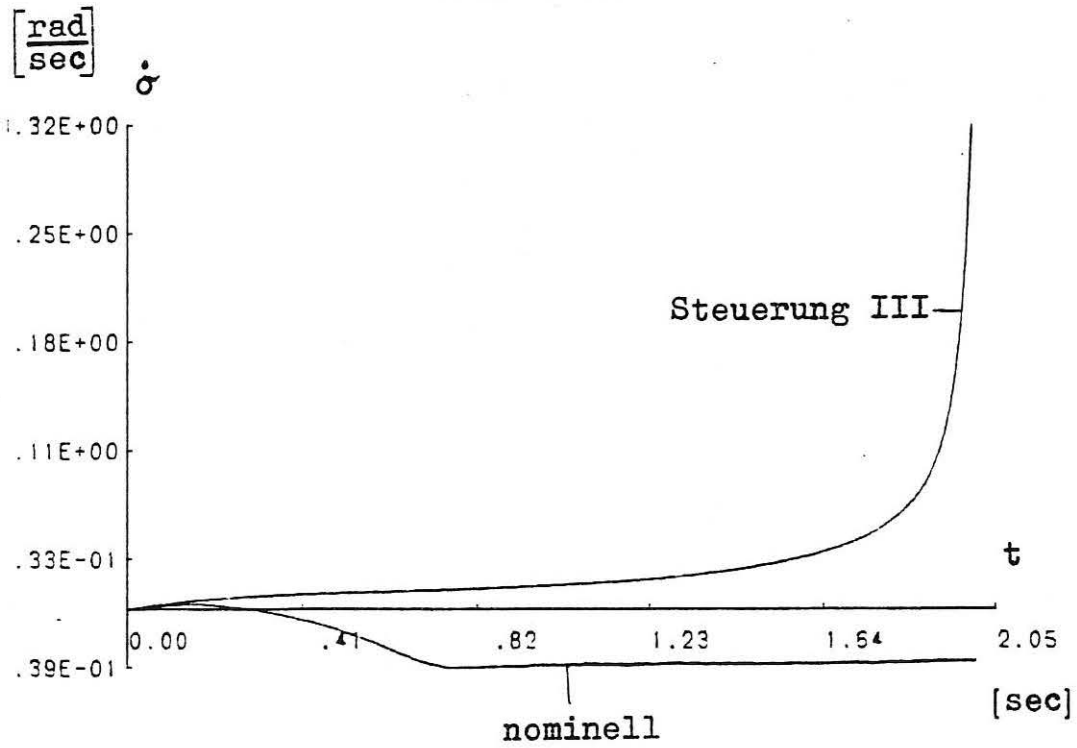


Bild 3.2.6 (III) : Vergleich von $\dot{\sigma}$: Steuerung III

Die Kurven für die Steuerung III bestätigen noch einmal das relativ schlechte Abschneiden dieser Steuerung. Im Gegensatz dazu erkennt man für die Steuerung I eine hervorragende Übereinstimmung der Kurven mit denen der nominellen Steuerung. Lediglich die Kurven für a_{mn} , a_{m2} und $\dot{\sigma}$ weichen etwas stärker von den nominellen Kurven ab. Dagegen kann die Flugbahnkurve des Flugkörpers M bei Steuerung I praktisch nicht von der nominellen Kurve unterschieden werden. Insgesamt sind nach diesen Kurvenverläufen die sehr guten Fehlerwerte für die Steuerung I verständlich.

Etwas anders sieht es da für die Steuerung II aus. Das schlechtere Einhalten der nominellen Endzeit als bei Steuerung I wird verständlich durch die deutlich sichtbare "Durchbiegung" der Flugbahn von M in Bild 3.2.1 (II). Diese Durchbiegung der Flugbahn kommt daher, daß die Normalbeschleunigung des Flugkörpers M a_{mn} sich auf eine Konstante von etwas unter $8g$ einpendelt. Ganz allgemein hat die Steuerung II die Tendenz, gegen Ende des Fluges die Normalbeschleunigung ungefähr auf den Wert der Normalbeschleunigung des Zieles einzustellen.

Eine gewisse Erklärung dafür liefert die Beobachtung, daß der Sichtlinienwinkel σ von der Steuerung II bei längeren Flugzeiten praktisch konstant gehalten wird. Entsprechend wird $\dot{\sigma}$ für längere Flugzeiten praktisch zu 0 gemacht. $\dot{\sigma}=0$ ist aber das Charakteristikum für den Kollisionskurs. Man kann also sagen, daß die Steuerung II danach strebt, Kollisionskurs einzustellen und dann zu halten.

Durch die Berücksichtigung von a_{tn} und $\dot{a}_{tn} = a_{t2}$ werden die guten "Treff-Abstände" aus Tabelle 3.2.1 erzielt.

Das Verhalten der Steuerung II, - Einstellen des Kollisionskurses -, hat seine Ursache in der Wahl des Modellparameters μ zu $\mu = 10 \frac{1}{\text{sec}} = \omega$. Es zeigt sich nämlich, daß für die Steuerung II, jedoch mit $\mu = 1 \frac{1}{\text{sec}}$, fast die gleichen Ergebnisse wie für Steuerung I erzielt werden. Zur Verdeutlichung dienen hierzu die Bilder 3.2.7 und 3.2.8, die den Flugbahnwinkel θ_m und die Normalbeschleunigung a_{mn} im Vergleich zur nominellen Trajektorie zeigen. Es gilt wieder

$\theta_m(0) = 0$ und $a_{tn} = -8g$. Anders als in der vorausgehenden Bildserie ist diesmal aber $\mu = 1 \frac{1}{\text{sec}}$.

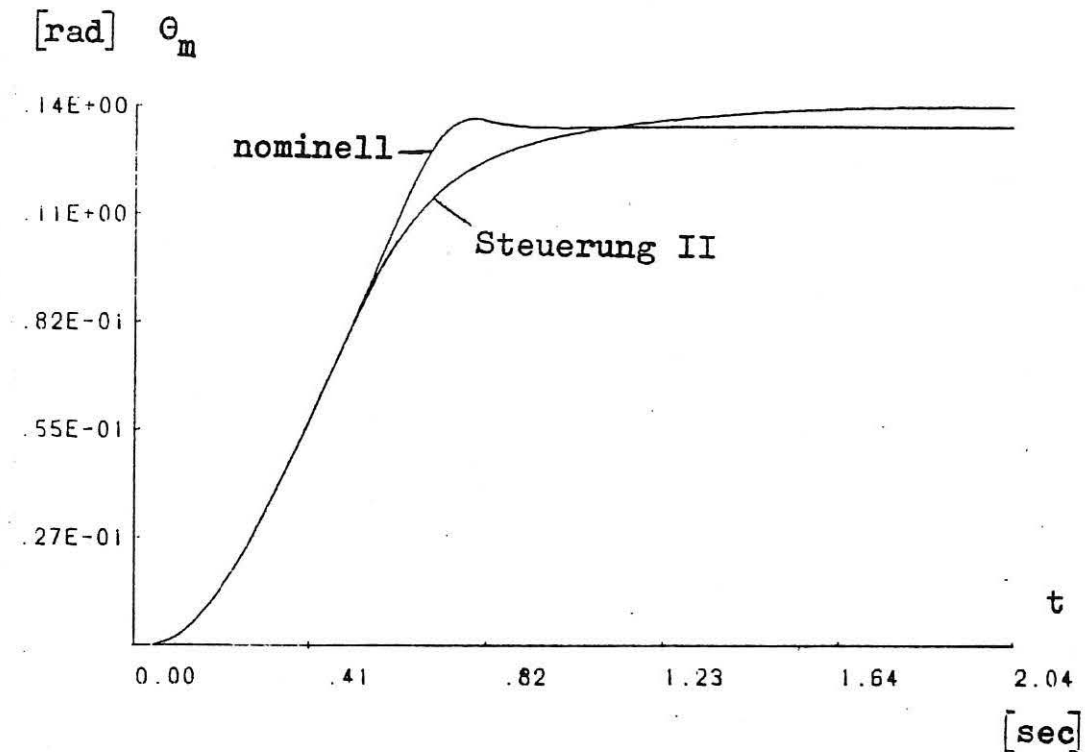


Bild 3.2.7 : Vergleich von θ_m : Steuerung II ($\mu=1 \frac{1}{\text{sec}}$)

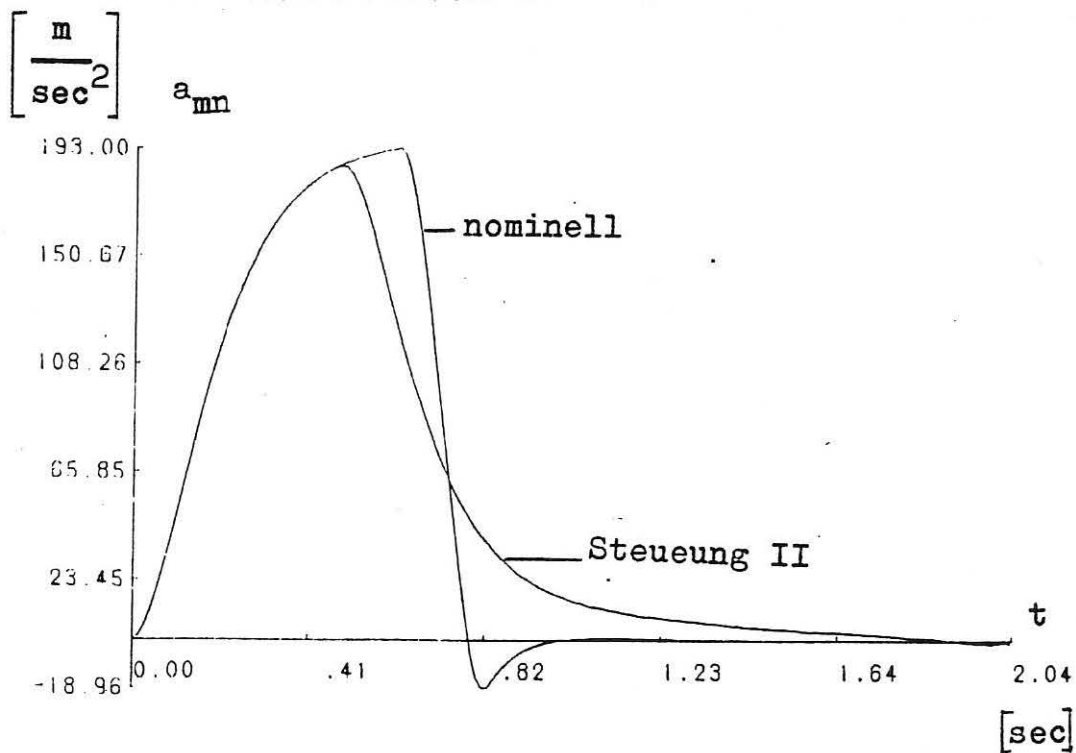


Bild 3.2.8 : Vergleich von a_{mn} : Steuerung II ($\mu=1 \frac{1}{\text{sec}}$)

Die Fehler für Δt und Δr (analog zu Tabelle 3.2.1) bezüglich der nominellen Steuerung liegen wie bei Steuerung I in der Größenordnung von $\Delta t \leq 10^{-5}$, $\Delta r \leq 10^{-4}$ m.

Als nächstes wurde die Annahme der konstanten Querbeschleunigung fallengelassen. Es wurde dabei das Flugkörpermodell (2.1.5) zurgrundegelegt. Der Modellparameter μ wurde als $\mu = 10 \frac{1}{\text{sec}} = \omega$ gewählt, d.h. die Dynamik des Ziels ist genauso "schnell" wie die des verfolgenden Flugkörpers (deshalb wurde in der Untersuchung bei konstantem a_{tn} $\mu = 10$ bei Steuerung II gewählt!).

Für a_{tnc} , die Steuerung des Ziels, wurde folgende einfache Struktur angenommen:

- a_{tnc} ist stückweise konstant
- $|a_{tnc}| = |a_{tnc}(0)|$
- a_{tnc} wird einmal während der Flugzeit umgeschaltet zum Zeitpunkt t_1 .

Diese einfache Struktur der Steuerung des Ziels erlaubt nun schon eine recht gute Abschätzung des Verhaltens der Rückkopplungssteuerungen bei Änderung der Querbeschleunigung des Ziels. Dabei wird durch die Dynamik der Normalbeschleunigung ein einigermaßen realistisches Verhalten des Ziels erreicht.

Da die Steuerung III schon für konstante Normalbeschleunigung des Ziels ziemlich schlechte Werte lieferte, wurden hier nur die Steuerungen I und II getestet. Nominelle Steuerungen und Flugbahnen standen für diesen Test nicht zur Verfügung. Daher wurde zur Bewertung der Rückkopplungssteuerungen hauptsächlich der Abstand Δr des Ziels T vom Flugkörper M benutzt. Generell ist für beide Steuerungen (I, II) und Schaltzeitpunkte $t_1 < 1,6 \text{sec}$ der Treff-Fehler Δr kleiner als 10^{-3} m; typisch sind Werte um oder unter 10^{-4} m. Diese Fehler gelten für alle Werte von $|a_{tnc}|$ zwischen 2g und 8g, sowie für alle Werte von $\theta_m(0)$, die in Bild 3.1.1 schraffiert markiert sind. Für Schaltzeiten über 1,6sec steigt bei Steuerung I der Treff-Fehler bis in eine Größenordnung von

10^{-2} m. Steuerung II behält dagegen seine Treffgenauigkeit von weniger als 10^{-3} m. Das Ansteigen des Treff-Fehlers bei Steuerung I liegt daran, daß Steuerung I wieder die Tendenz zeigt, eine Gerade zu steuern. Dadurch reicht die Manövrierfähigkeit des Flugkörpers M nicht mehr aus, die Vorhaltefehler, die bei sehr spätem Schaltzeitpunkt t_1 des Ziels auftreten, vollständig auszuregeln. Bild 3.2.9 (I) bis 3.2.16 zeigen für beide Steuerungen den Verlauf der Flugbahnen, der Normalbeschleunigung a_{mn} , von a_{m2} und a_{tn} zu den Schaltzeiten von a_{tnc} : $t_1 = 0,8\text{sec}$ und $t_1 = 1,6\text{sec}$.

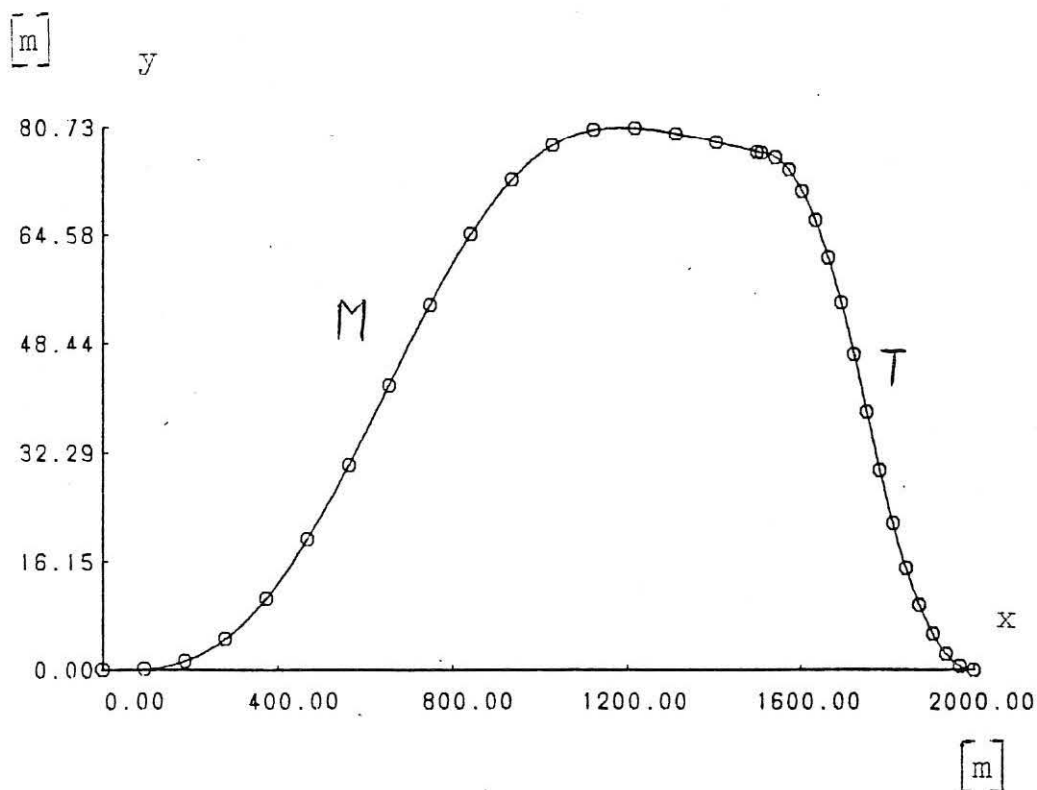


Bild 3.2.9 (I) : Flugbahnkurve mit Steuerung I;
 $t_1 = 0,8\text{sec}$

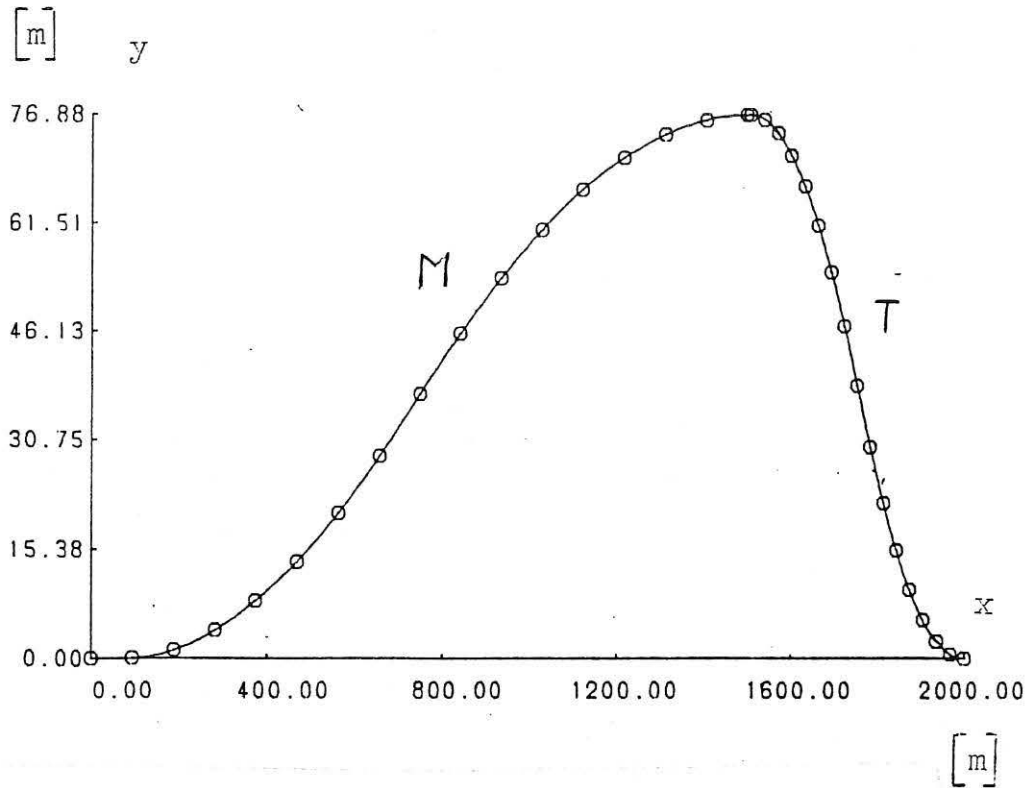


Bild 3.2.9 (II) : Flugbahnkurve mit Steuerung II;
 $t_1 = 0,8\text{sec}$ $\mu = 10 \frac{1}{\text{sec}}$

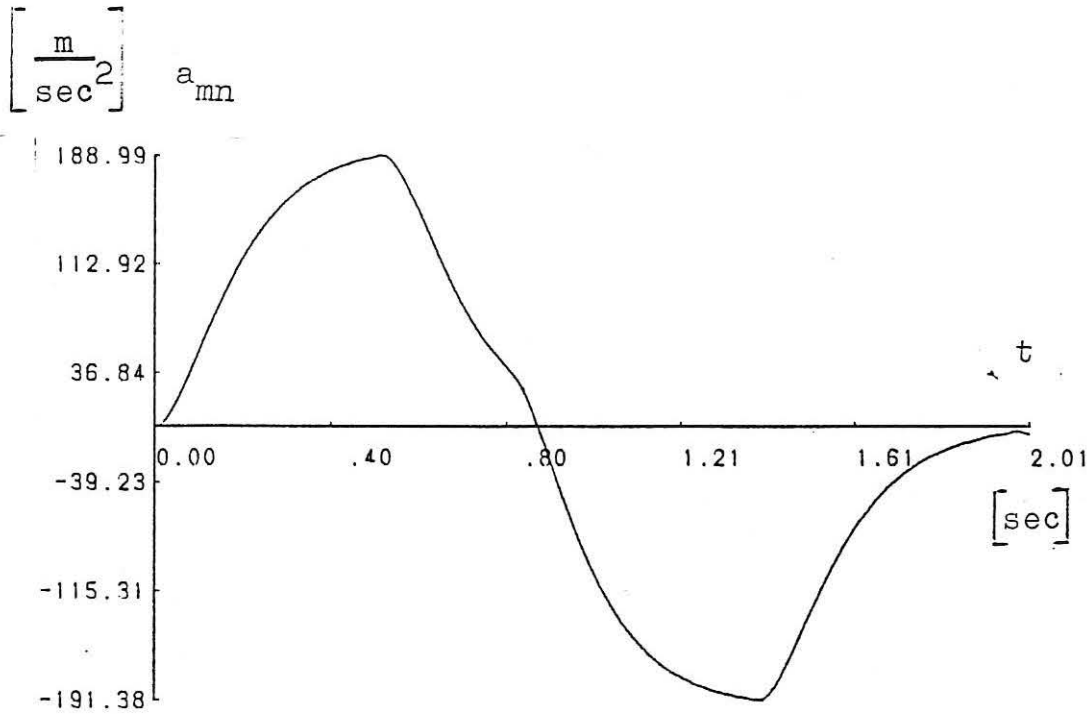


Bild 3.2.10 (I) : a_{mn} mit Steuerung I; $t_1 = 0,8\text{sec}$

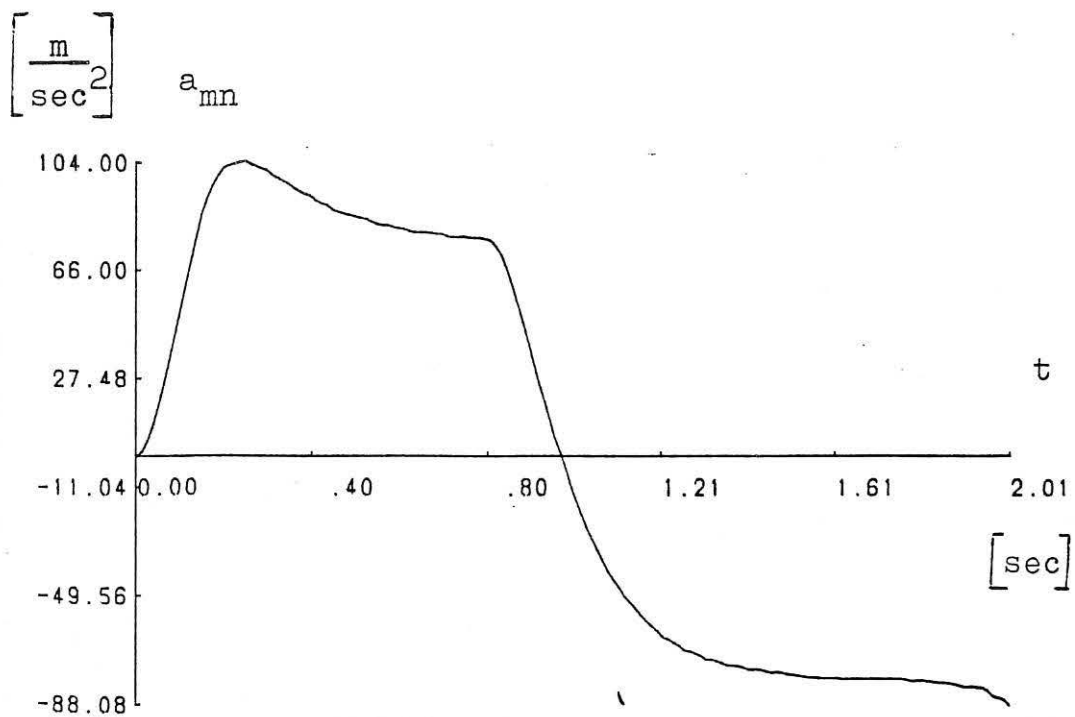


Bild 3.2.10 (II) : a_{mn} mit Steuerung II; $t_1=0,8\text{sec}$
 $\mu=10\frac{1}{\text{sec}}$

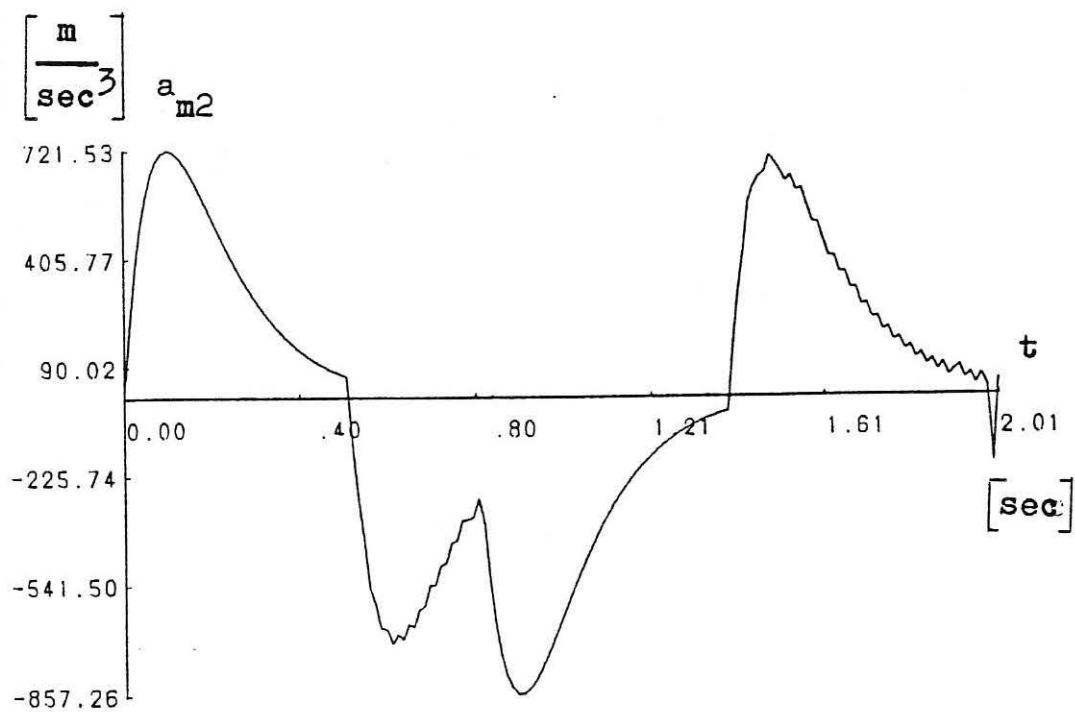


Bild 3.2.11 (I) : a_{m2} bei Steuerung I; $t_1=0,8\text{sec}$

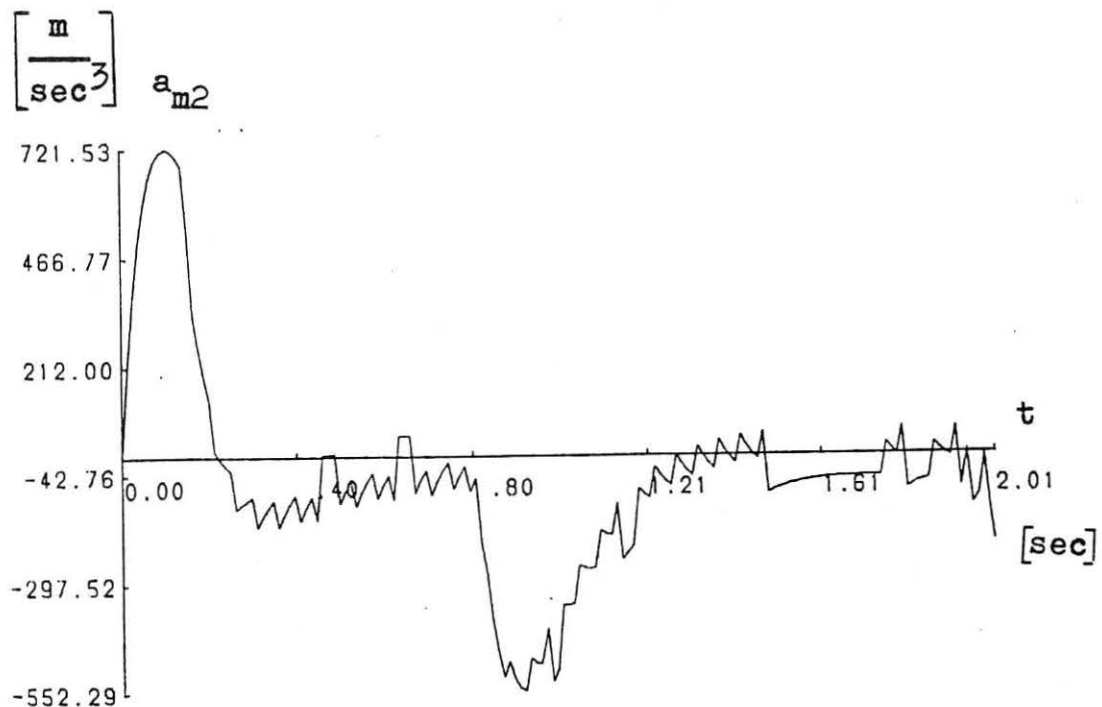


Bild 3.2.11 (II) : a_{m2} bei Steuerung II: $t_1=0,8\text{sec}$
 $\mu = 10 \frac{1}{\text{sec}}$

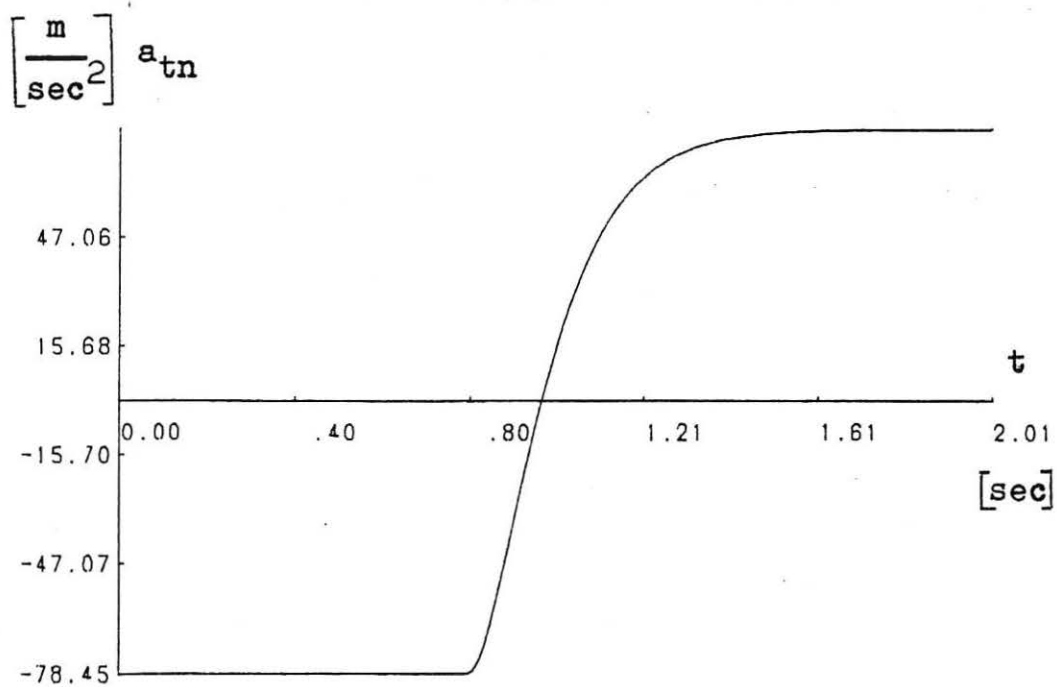


Bild 3.2.12 : a_{tn} bei $t_1 = 0,8\text{sec}$

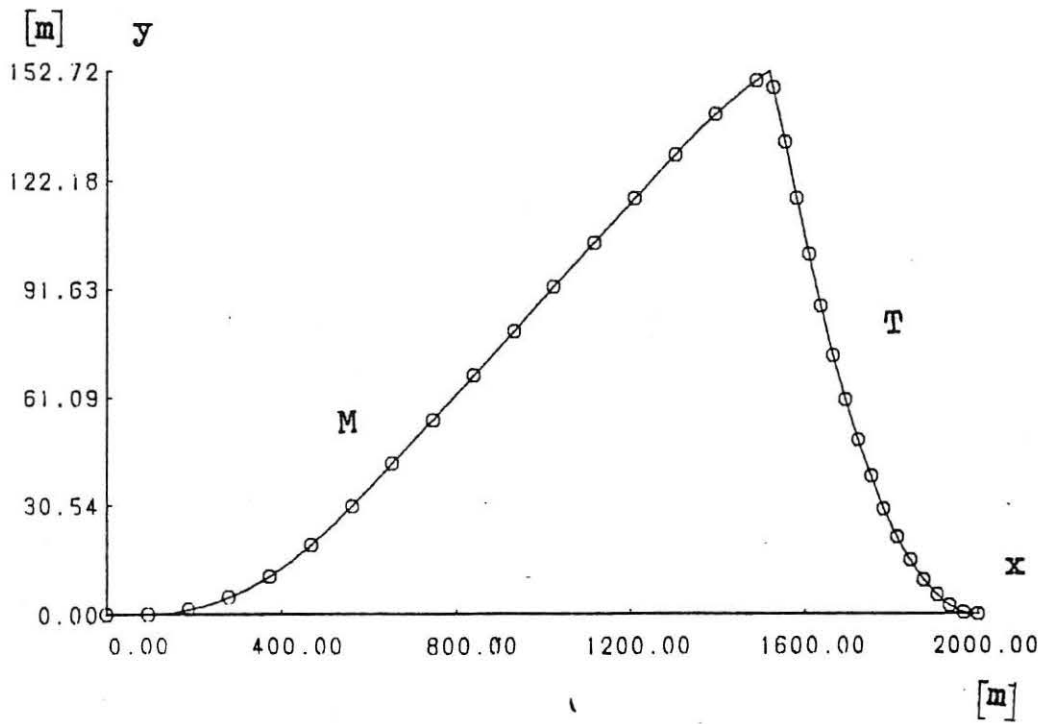


Bild 3.2.13 (I) : Flugbahnkurve mit Steuerung I;
 $t_1 = 1,6\text{sec}$

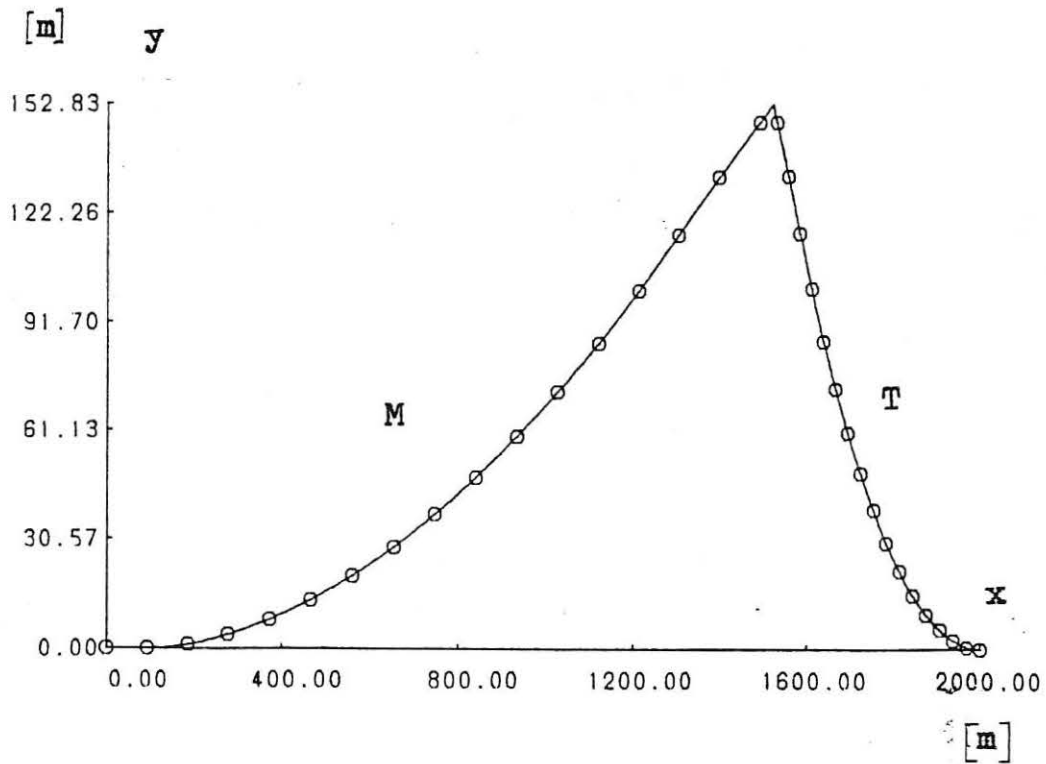


Bild 3.2.13 (II) : Flugbahnkurven bei Steuerung II;
 $t_1 = 1,6\text{sec}$ $\mu = 10 \frac{1}{\text{sec}}$

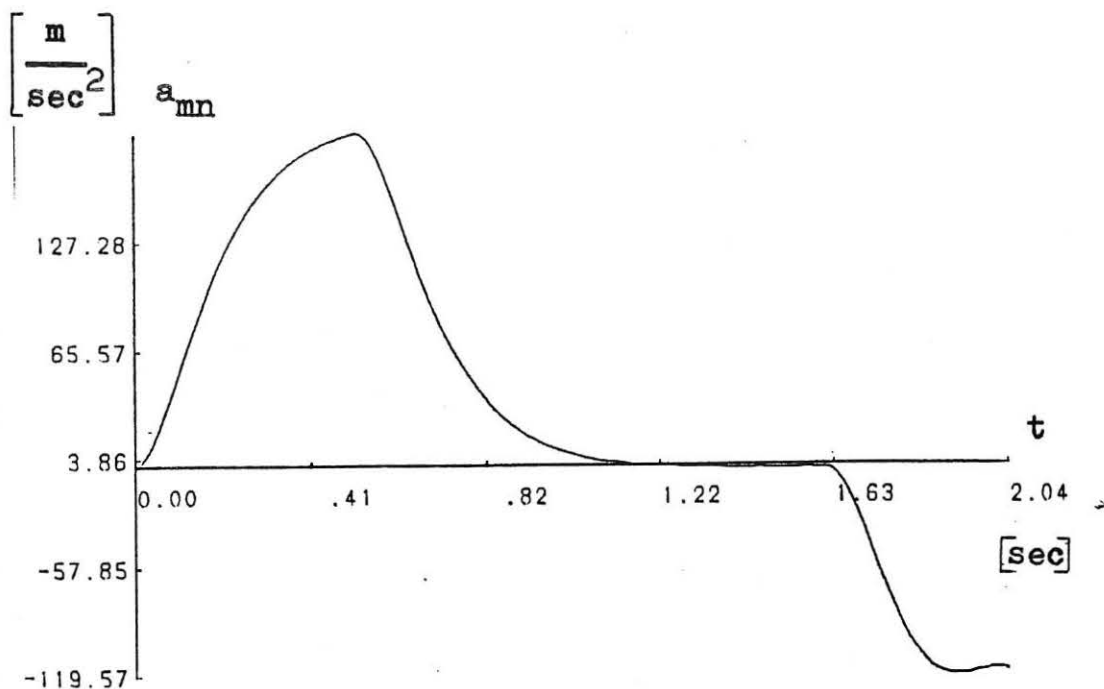


Bild 3.2.14 (I) : a_{mn} mit Steuerung I; $t_1=1,6\text{sec}$

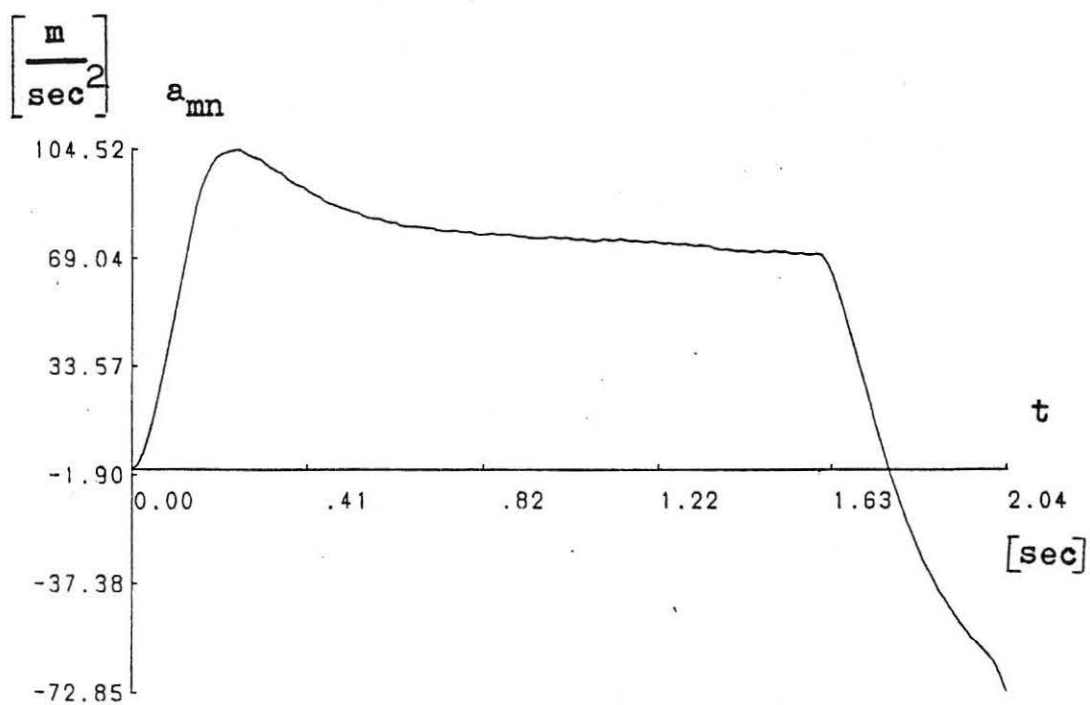


Bild 3.2.14 (II) : a_{mn} mit Steuerung II; $t_1=1,6\text{sec}$
 $\mu=10\frac{1}{\text{sec}}$

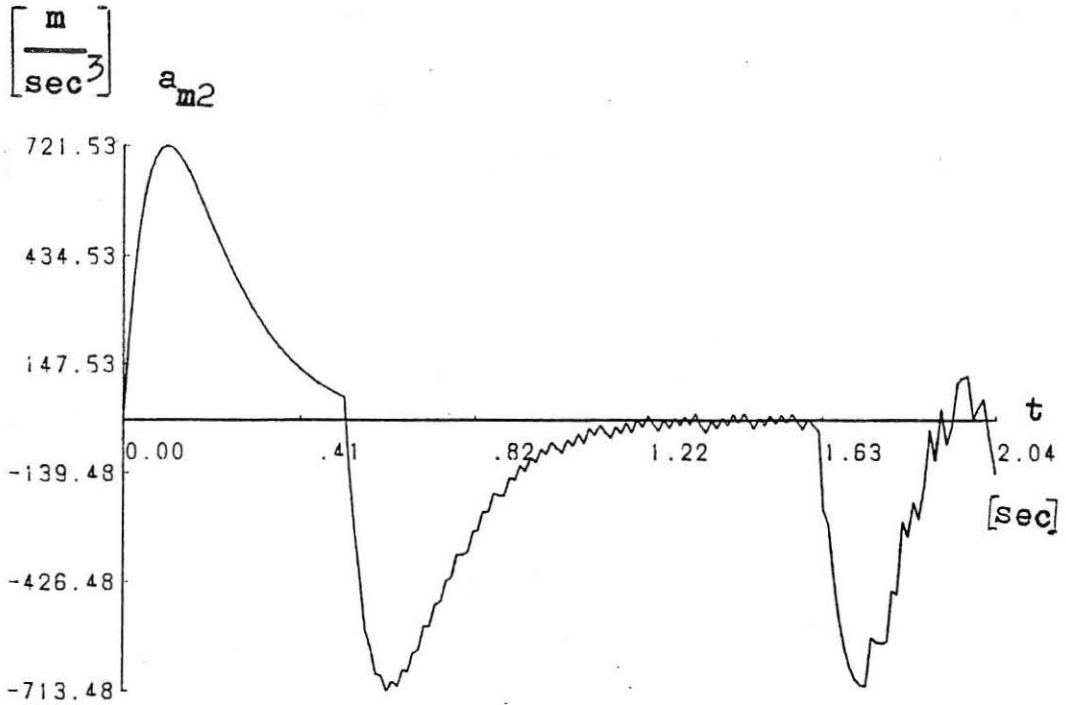


Bild 3.2.15 (I) : a_{m2} mit Steuerung I; $t_1=1,6\text{sec}$

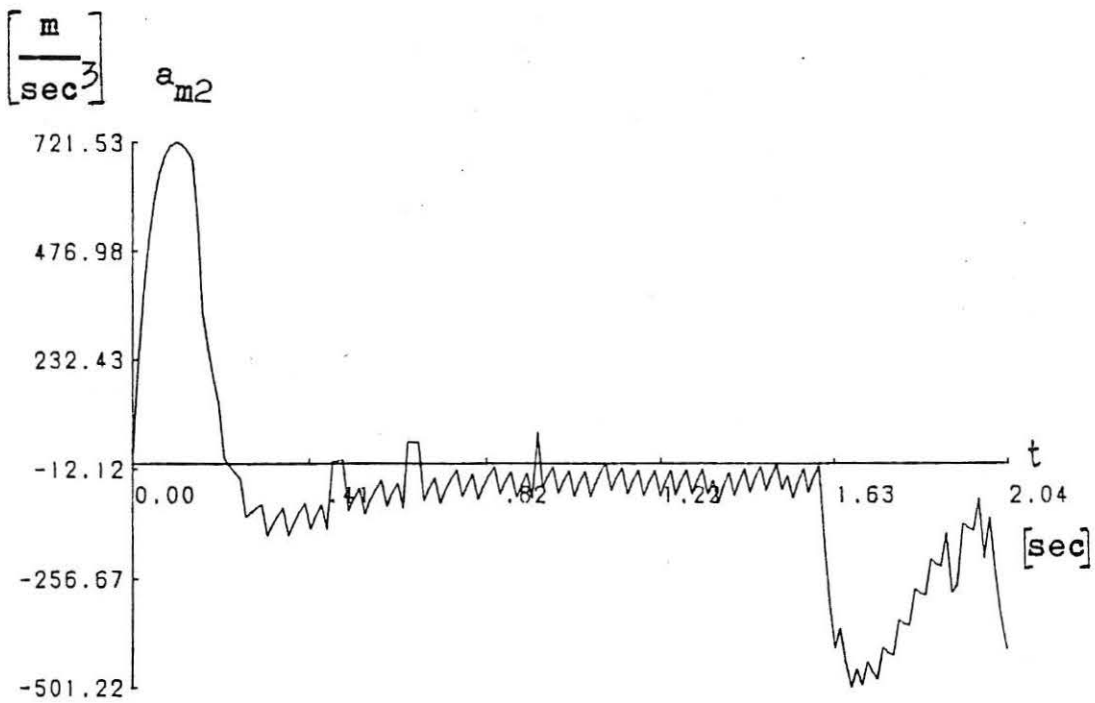


Bild 3.2.15 (II) : a_{m2} mit Steuerung II; $t_1=1,6\text{sec}$
 $\mu = 10 \frac{1}{\text{sec}}$

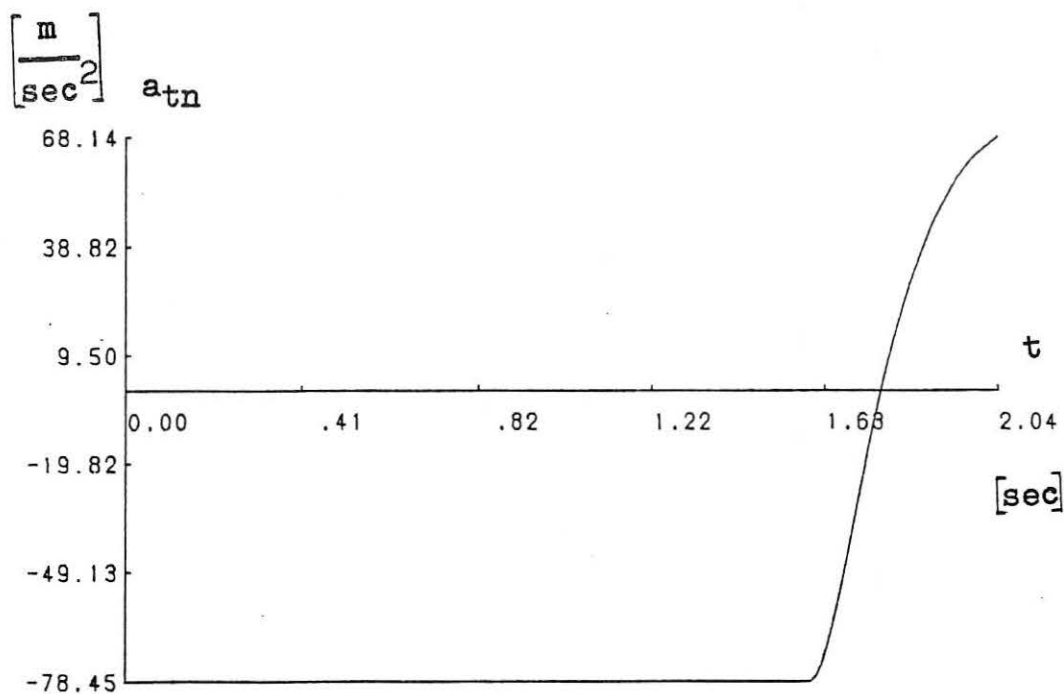


Bild 3.2.16 : a_{tn} bei $t_1 = 1,6 \text{ sec}$

Auffallend ist, daß Steuerung II wieder dazu neigt, Kollisionskurs einzustellen und zu halten. Das Ergebnis ist, daß a_{mn} ungefähr auf den Wert von a_{tn} gesteuert wird. Es sei noch bemerkt, daß die Wahl des Dynamikparameters $\mu = 10 \frac{1}{\text{sec}}$ bei der Berechnung der Rückkopplungssteuerung II auch dann dieselben guten Treff-Fehler bietet, wenn die tatsächliche Dynamik des Ziels "langsamer" ist, d.h. μ tatsächlich kleiner ist.

Außerdem reagiert Steuerung II etwas schneller auf Änderungen von a_{tn} , wie in Bildern 3.2.15 (I) und (II) mit etwas Mühe zu erkennen ist. Dieser Effekt verstärkt sich noch, wenn μ zur Berechnung der Steuerung kleiner gewählt wird (siehe Gleichung (2.2.19) und (2.3.10)!).

Ganz anders sieht das Ergebnis aus, wenn das Ziel eine erheblich "schnellere" Dynamik besitzt als der Flugkörper M, d.h. $\mu \gg \omega$. Als Beispiel soll hier der Grenzfall $\mu \rightarrow \infty$ dienen, d.h. das Ziel kann seine Normalbeschleunigung augenblicklich wählen. Es ist dann z.B.: für $|a_{tn}| = 8g$ bei

einem entsprechenden Flugbahnwinkel $\theta_m(o)$ möglich, durch "geschickte" Strategie des Ziels, Endabstände zur Zeit t_f von mehreren Metern zu erzielen.

In den Bildern 3.2.17 (I) bis 3.2.19 (II) sind die Flugbahnkurven, a_{mn} und a_{tn} , für Steuerung I und Steuerung II bei einem Beispiel für $|a_{tn}|=8g$ dargestellt. Bei diesen Beispielen wird a_{tn} immer dann umgeschaltet, wenn sich die Steuerung a_{mnc} , die nach Vorschrift I oder II berechnet wird, ändert. $\theta_m(o)$ ist dabei beide Male $-0,06$ rad.

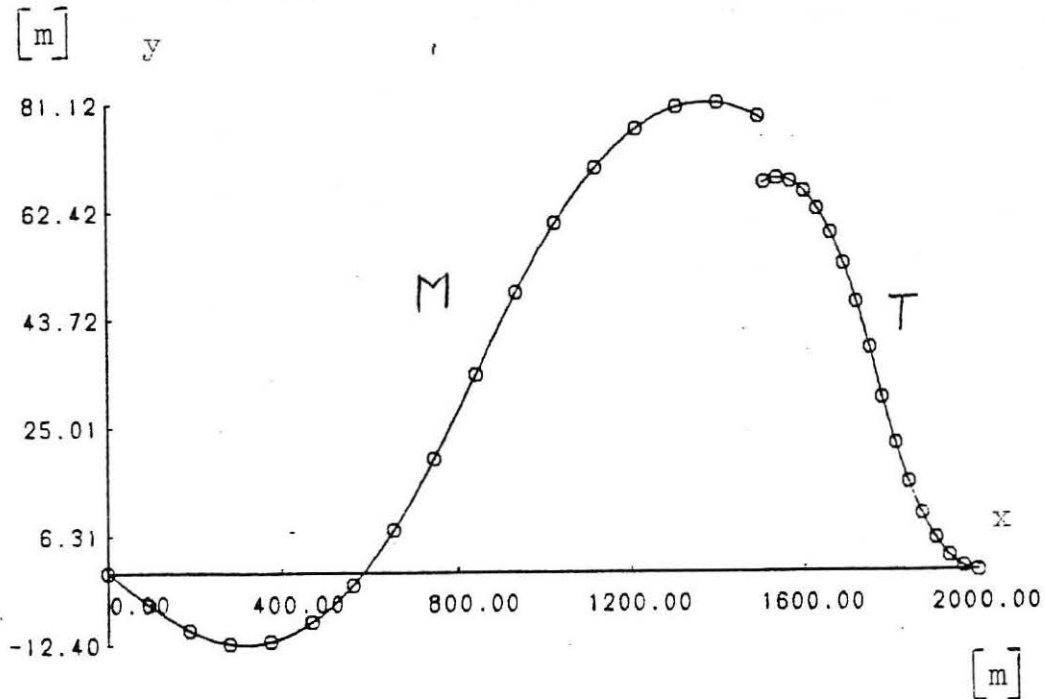


Bild 3.2.17 (I) : Flugbahnkurven mit Steuerung I,
 (a_{tn} schaltet, wenn a_{mnc} schaltet);
 $\mu \rightarrow \infty$

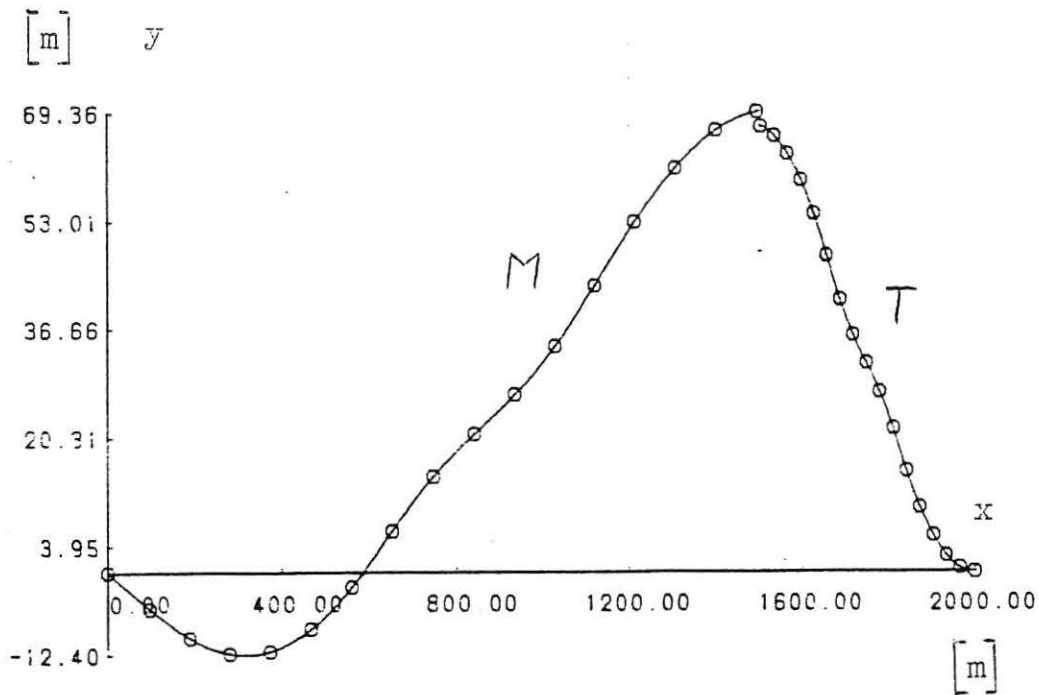


Bild 3.2.17 (II) : Flugbahnkurven mit Steuerung II;
 geschätztes $\mu = 10 \frac{1}{\text{sec}}$; tatsächlich:
 $\mu \rightarrow \infty$ (a_{tn} schaltet, wenn a_{mnc} schaltet)

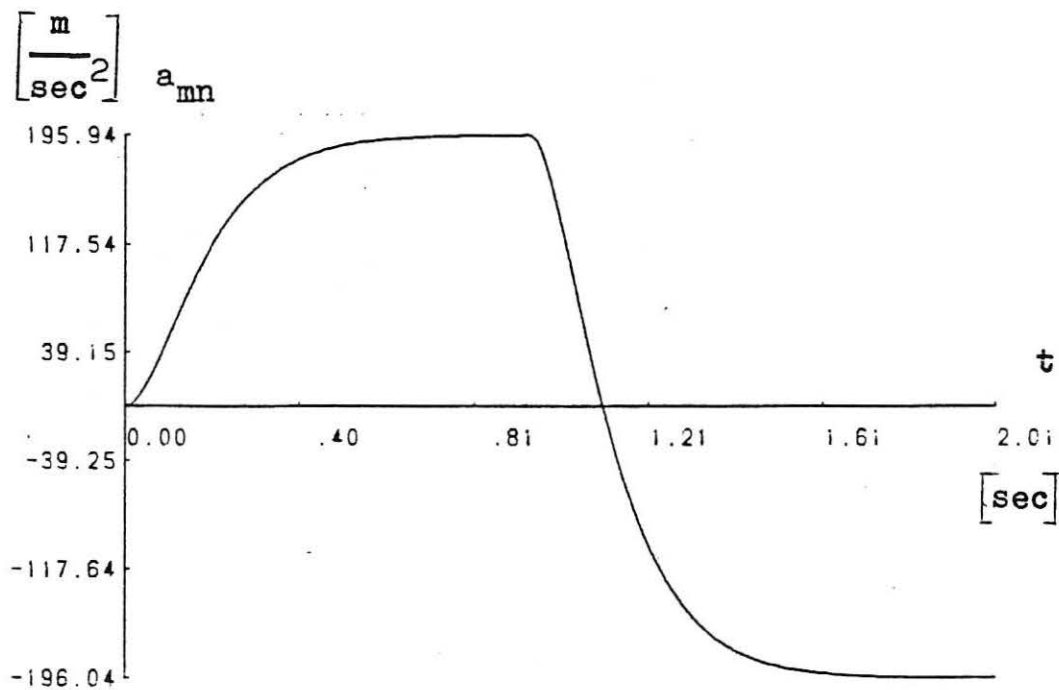


Bild 3.2.18 (I) : a_{mn} aus Steuerung I; $\mu \rightarrow \infty$
 (a_{tn} schaltet, wenn a_{mnc} schaltet)

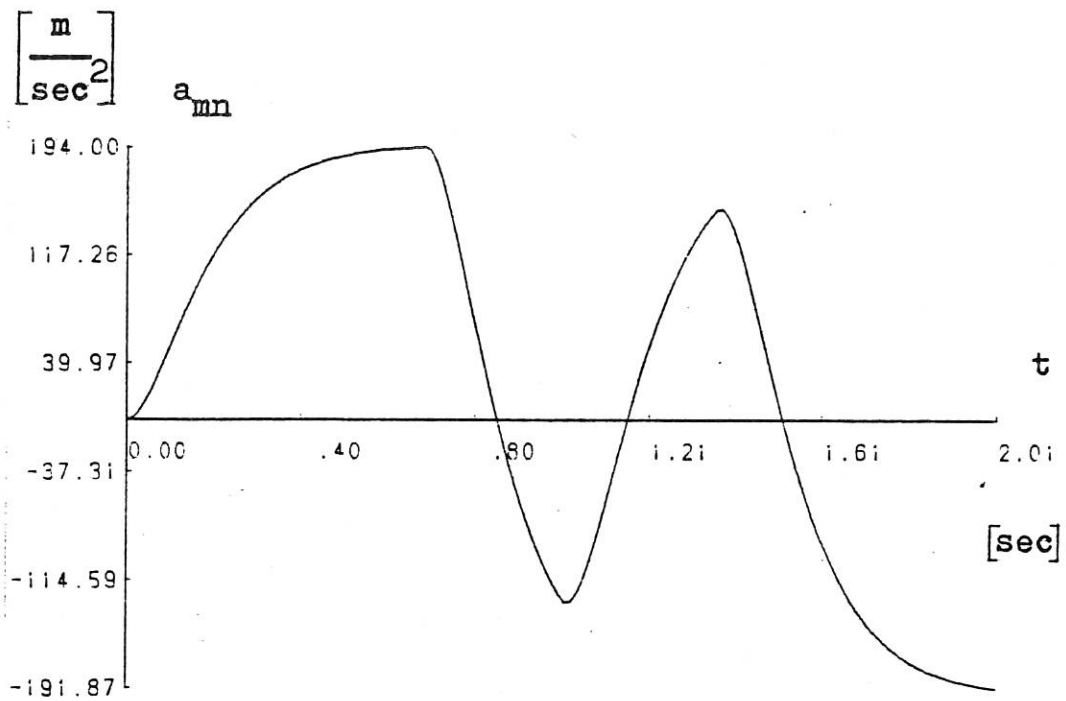


Bild 3.2.18 (II) : a_{mn} aus Steuerung II, geschätztes $\mu=10 \frac{1}{\text{sec}}$; tatsächlich $\mu \rightarrow \infty$ (a_{tn} schaltet, wenn a_{mnc} schaltet)

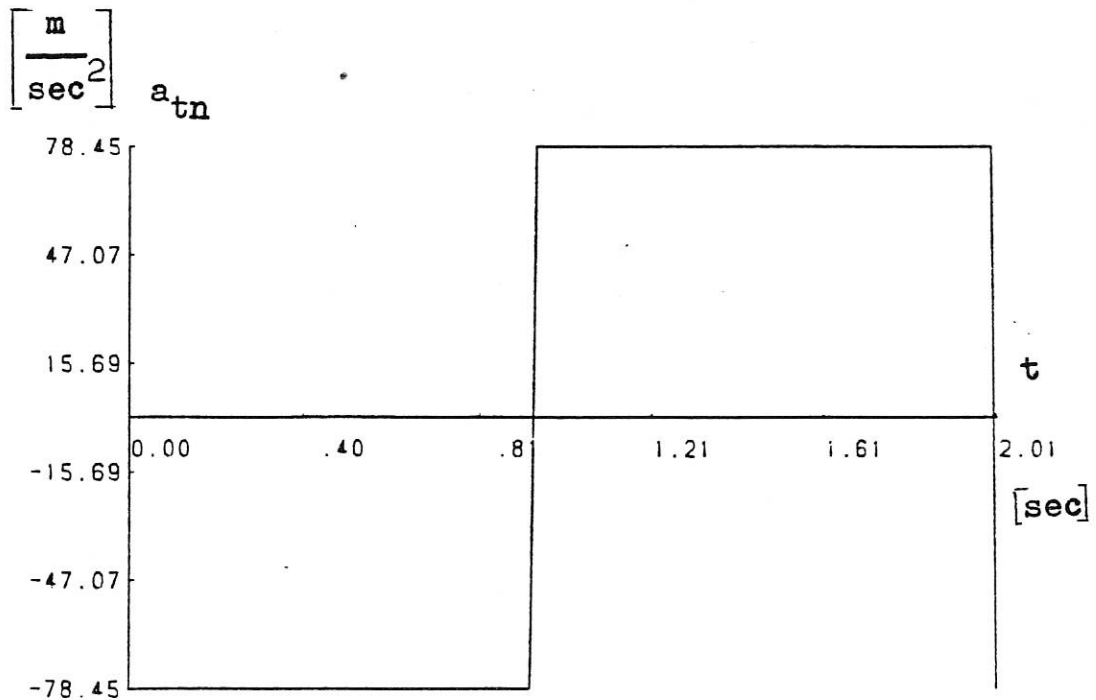


Bild 3.2.19 (I) : a_{tn} , wenn a_{tn} geschaltet wird, sobald a_{mnc} schaltet für Steuerung I, $\mu \rightarrow \infty$

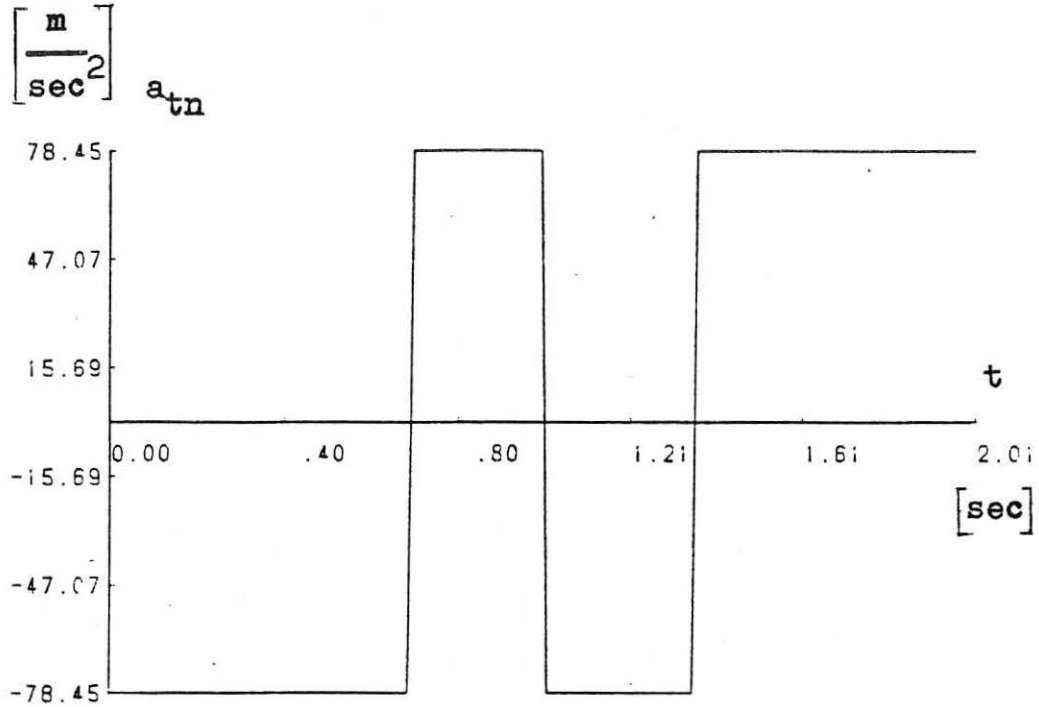


Bild 3.2.19 (II) : a_{tn} , wenn a_{tn} geschaltet wird, sobald a_{mnc} schaltet für Steuerung II, bei geschätztem $\mu=10\frac{1}{\text{sec}}$, tatsächlichem $\mu\rightarrow\infty$

Bei den abgebildeten Beispielen liegt der Treff-Fehler bei Steuerung I bei etwas über 10 m, bei Steuerung II, bei etwa 2 m. Dieser große Unterschied gilt allerdings nicht bei allen Start-Flugbahnwinkeln $\theta_m(0)$. Aber generell sind die Treffabstände für diese Strategie von T bei Steuerung II etwas besser als bei Steuerung I. Es läßt sich daraus schließen, daß die Steuerung II etwas robuster als Steuerung I ist. Dennoch sind beide Steuerungen im Grenzfall $\mu\rightarrow\infty$ unbefriedigend.

Dieses schlechte Ergebnis für $\mu\rightarrow\infty$ spricht aber nicht gegen die Steuerungen. Es ist nämlich in der Praxis unmöglich, diesen Grenzfall für das Ziel T zu realisieren. Man wird sogar normalerweise davon ausgehen können, daß $\mu < \omega$ ist, d.h. die Dynamik der Normalbeschleunigung des Ziels ist "langsamer" als die des Flugkörpers M.

Zusammenfassend hat man mit Steuerung I und II zwei Rückkopplungssteuerungen, die, bei einigermaßen realistischen Annahmen für das Ziel, Treffabsstände unter 1 mm ermöglichen. Bei direktem Vergleich mit den nominellen Lösungen nach Abschnitt 3.1. ergeben sich Fehler in der Treffzeit von weniger als $5 \cdot 10^{-4}$, wobei die Steuerung I einen deutlichen Vorteil hat.

Beide Steuerungen sind robust genug, ein unvorhersehbares Flugverhalten des Ziels, d.h. a_{tn} ist nicht konstant, soweit auszusteuern, daß immer noch Treffabstände in der Nähe von 1 mm erreicht werden. Dabei ist es unmöglich, allein vom Treffabstand zur Zeit t_f eine der beiden Steuerungen der anderen vorzuziehen. Das ist besonders erstaunlich, da Steuerung I zusätzlich zu den Zuständen $x, y, \theta_m, \theta_t, a_{mn}$ und a_{m2} nur noch die Normalbeschleunigung des Ziels a_{tn} verwendet. Dagegen benötigt Steuerung II zusätzlich zu a_{tn} noch $a_{t2} = \dot{a}_{tn}$ und eine Schätzung des Modellparameters μ .

Diese guten Ergebnisse rechtfertigen im Nachhinein die Linearisierung der Flugbahnen um den Kollisionskurs und auch die Annahme der konstanten Normalbeschleunigung des Ziels, die bei der Konstruktion der Steuerung I verwendet wurde.

Erheblich schlechter schneidet dagegen die Steuerung III ab. Das darf jedoch nicht verwundern, da sie keinerlei Information über die Normalbeschleunigung des Ziels oder deren dynamische Struktur macht. Man sollte aber dennoch immer im Auge behalten, daß diese Steuerungen nur in der "Nähe" des Kollisionskurses gelten können. Das liegt daran, daß bei ihrer Konstruktion um eben diesen Kollisionskurs linearisiert wird und die Linearisierung nur dann brauchbare Näherungen für die tatsächliche Flugbahn liefert, wenn man sich nahe beim Kollisionskurs befindet.

Eine genauere Betrachtung der Herleitung der Rückkopplungssteuerungen in den Abschnitten 2.2. und 2.3 zeigt weiter, daß diese Steuerungen nur für "kurze" Flugzeiten gültig sein können. Das ergibt sich aus der Tatsache, daß Gleichung (2.3.7⁺) bzw. (2.3.3⁺a) die Steuerung für die ganze Flugzeit

konstant auf $\pm a_{mnc}^{\max}$ setzen. Für längere Flugzeiten führt das aber zu kreisförmigen Flugbahnen, die in keiner Weise die Realität widerspiegeln können.

Literaturverweis

- [1] A.E. BRYSON, JR; Y.C.HO: 'Applied Optimal Control', (Revised Printing) Wash. (DC): Hemisphere Publishing Corporation, 1975

- [2] M. HESTENES: 'Calculus of Variation and Optimal Control Theory', New York: Wiley, 1967

- [3] H.J. KELLEY; R.E. KOPP; A.G. MOYER: 'Singular Extremals', in Topics in Optimization, G. Leitmann (ed.), Vol.II, Kap. 3, New York: Academic Press, 1966

- [4] J. SHINAR: 'Solution Techniques for Realistic Pursuit-Evasion Games', in Control and Dynamik Systems; C.T. Leondes (ed.), Vol. 17, New York: Academic Press, 1981, p. 64

- [5] R. ISAACS: 'Differential Games'; New York: Wiley, 1965

- [6] J. STOER, R. BULIRSCH: 'Einführung in die numerische Mathematik II', Heidelberger Taschenbücher, Bd. 114, 2. Auflage, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1976

- [7] H.J. OBERLE: 'Numerische Behandlung singulärer Steuerungen mit der Mehrzielmethode am Beispiel der Klimatisierung von Sonnenhäusern', TUM, 1977

- [8] R.E.O'MALLEY, JR: 'Introduction to Singular Perturbations', New York: Academic Press, 1974