

Nichtlinearer Reglerentwurf auf der Grundlage exakter Linearisierungstechniken

Nonlinear Controller Design by Exact Linearization Techniques

Dipl.-Ing. F. Allgöwer VDI und Prof. Dr.-Ing. E. D. Gilles VDI, Stuttgart

Zusammenfassung

Dem nichtlinearen Reglerentwurf mittels exakter Linearisierung liegt eine Zweischritt-Philosophie zugrunde: zuerst wird die nichtlineare Regelstrecke durch eine nichtlineare Rückführung exakt in ein lineares System überführt. Das exakt linearisierte System kann im zweiten Schritt mit linearen Reglerentwurfsverfahren so geregelt werden, daß Stabilität und gutes Regelverhalten erreicht werden.

In diesem Übersichtsbeitrag wird eine Einführung und ein Überblick über das Gebiet der exakten Linearisierung gegeben. Anhand von Beispielen werden die Vorteile und Grenzen der Verfahren diskutiert.

1. Einleitung

Nichtlinearitäten spielen eine zentrale Rolle für das dynamische Verhalten vieler technischer Systeme. Dennoch werden modellbasierte Regler zumeist auf der Grundlage vereinfachter linearer Modelle ausgelegt, die nur in der unmittelbaren Umgebung des Arbeitspunktes ausreichende Genauigkeit besitzen. Die Folge davon sind in vielen Fällen ein nicht prädzitierbares dynamisches Regelverhalten, schlechte Regelgüte bei Störungen und Sollwertänderungen und Stabilitätsprobleme. In den letzten Jahren wurden deswegen Methoden zum Entwurf von Reglern auf der Basis von nichtlinearen Modellen entwickelt (siehe z.B. /53, 20, 31, 43/). Der Nachteil der meisten Verfahren ist ein hoher Entwurfsaufwand. Um zu einem Regler mit den gewünschten Eigenschaften zu kommen muß dieser Aufwand meist iterativ wiederholt werden. Der Entwurf nichtlinearer Regler ist damit in vielen Fällen zu aufwendig, um als Alternative zu linearen (robusten) Reglerentwürfen dienen zu können.

In diesem Artikel soll eine Einführung und ein Überblick über den Entwurf nichtlinearer Regler auf der Grundlage der Methode der exakten Linearisierung gegeben werden. Im Gegensatz zur üblichen Arbeitspunktlinearisierung, bei der Terme höherer Ordnung in der Taylor-Reihenentwicklung vernachlässigt werden, wird bei der exakten Linearisierung kein Approximationsfehler gemacht. Das nichtlineare System wird mittels einer nichtlinearen Koordinatentransformation und eines nichtlinearen Rückführgesetzes *exakt* in ein lineares System überführt. Für dieses exakt lineare System kann dann, in einem zweiten Schritt, ein linearer Regler mit den bekannten Methoden der linearen Regelungstheorie entworfen werden, so daß Stabilität und Anforderungen an die Regelgüte erfüllt werden. Ein großer Entwurfsaufwand ist nur für den ersten Schritt, die exakte Linearisierung, notwendig. Dieser Schritt muß bei jedem Entwurf nur einmal durchgeführt werden. Die zum Erreichen der gewünschten Regelgüte notwendigen Iterationen betreffen nur den zweiten

Schritt, die Auslegung eines geeigneten linearen Reglers. Dadurch ist der Gesamtaufwand bei der exakten Linearisierung im allgemeinen kleiner als bei anderen nichtlinearen Reglerentwurfsverfahren.

Das der Entwicklung der exakten Linearisierungstechniken zugrunde liegende mathematische Werkzeug ist in erster Linie die Differentialgeometrie. Aus diesem Grunde wird die exakte Linearisierung zur nichtlinearen geometrischen Regelungstheorie gerechnet, die eine Erweiterung der linearen geometrischen Regelungstheorie (z.B. /61/) auf nichtlineare Systeme darstellt. Die meisten Veröffentlichungen zur Theorie der exakten Linearisierung sind in der Sprache der Differentialgeometrie verfaßt, die eine genaue und elegante Darstellung der mathematischen Sachverhalte mit abstrakten Begriffen, wie Mannigfaltigkeiten und Distributionen, erlaubt. Da die meisten Ingenieure über keine vertieften Kenntnisse in Differentialgeometrie verfügen, soll in dieser Arbeit gänzlich auf eine geometrische Argumentation und Ausdrucksweise verzichtet werden. Wir wollen in diesem Artikel den Schwerpunkt nicht auf die penible Wiedergabe möglichst vieler mathematischer Sätze legen. Stattdessen wollen wir versuchen, dem Leser in einer verständlichen Sprache die zugrunde liegenden Ideen und die Entwurfsphilosophie der exakten Linearisierung nahezubringen und eine Einschätzung der Methoden vorzunehmen.

Im Rahmen dieses Aufsatzes werden wir uns, aus Gründen der klaren Darstellung, zumeist auf Eingrößensysteme, also Systeme mit einem Eingang und einem Ausgang, beschränken. Die Theorie läßt sich vollständig auf Mehrgrößensysteme übertragen. Dies werden wir bei der Diskussion der Ergebnisse berücksichtigen. Um diesen Sachverhalt zu unterstreichen, werden die zur Veranschaulichung der Theorie gewählten Beispiele zum Teil Mehrgrößensysteme sein.

Prinzipiell werden zwei Arten von exakter Linearisierung unterschieden: die *exakte Zustands-Linearisierung* und die *exakte Eingangs/Ausgangs-Linearisierung*, oft auch nur *Eingangs/Ausgangs-Linearisierung* genannt. Bei der exakten Zustands-Linearisierung wird ein nichtlineares System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (1)$$

mit Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und Eingang $u \in \mathbb{R}$, in ein lineares System gleicher Ordnung, aber mit einem neuen Eingang v

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v \quad , \quad (2)$$

überführt. Die Theorie der exakten Linearisierung setzt voraus, daß der Eingang u affin, d.h. linear, in die rechte Seite der nichtlinearen Differentialgleichung (1) eingeht. Falls das zu regelnde System in allgemeiner nichtlinearer Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \quad (3)$$

vorliegt, kann es durch eine zusätzliche Integration des Eingangs ($\dot{u} = w$) in ein System mit (neuem) affinem Eingang w überführt werden

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad . \quad (4)$$

Bei der exakten Zustands-Linearisierung wird der Einfluß des Eingangs auf die Zustände linearisiert. Bei der exakten Eingangs/Ausgangs-Linearisierung (E/A-Linearisierung) wird ein nichtlineares System mit Ausgang y

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (5)$$

in ein System überführt, das lineares Eingangs/Ausgangs-Verhalten zeigt. Im Frequenzbereich besteht also zwischen dem Laplace-transformierten Ein- bzw. Ausgang ein linearer Zusammenhang über die Übertragungsfunktion $G(s)$

$$y(s) = G(s)v(s) \quad . \quad (6)$$

Es wird nur lineares Eingangs/Ausgangs-Verhalten gefordert. Der Einfluß des Eingangs auf die Zustände darf weiterhin nichtlinear sein.

Gemäß der Unterscheidung in exakte Zustands- und E/A-Linearisierung ist dieser Beitrag in zwei Teile gegliedert. Zuerst wird das Prinzip der exakten Zustands-Linearisierung erläutert und diskutiert. Die Vorgehensweise wird an dem, in diesem Tagungsband vorgestellten Testbeispiel Rührkesselreaktor /42/, veranschaulicht und die Grenzen des Verfahrens werden anhand dieser Anwendung aufgezeigt. Über unterschiedliche Näherungsverfahren zur Zustands-Linearisierung wird ein Überblick gegeben. Im zweiten Teil werden Vorgehensweise und Grundlagen der exakten E/A-Linearisierung vorgestellt. Am Beispiel der Regelung einer Zweistoffdestillationskolonne werden Vor- und Nachteile des Verfahrens erläutert. Abschließend wird ein Überblick über Näherungsverfahren zur E/A-Linearisierung gegeben. Im Anhang werden zwei Differentialoperatoren, die Lie-Ableitung und die Lie-Klammer, definiert, die eine wesentliche Kompaktierung der Schreibweise erlauben.

2. Reglerentwurf mittels exakter Zustands-Linearisierung

Das Hauptziel beim Reglerentwurf durch exakte Zustands-Linearisierung ist die Stabilisierung des nichtlinearen Systems (1) in einer ausreichend großen Umgebung des Arbeitspunktes. Die Untersuchung der Stabilitätseigenschaften und der Entwurf stabilisierender Regler für nichtlineare Systeme ist im allgemeinen keine einfache Aufgabe. Wenn allerdings System (1) in einem ersten Schritt durch exakte Zustands-Linearisierung in ein lineares System (2) überführt wird kann Stabilität einfach durch eine lineare Zustandsrückführung

$$v = -\mathbf{k}^T \mathbf{z} \quad (7)$$

erreicht werden. Die Rückführverstärkung \mathbf{k} kann zum Beispiel mittels Verfahren zur Polvorgabe bestimmt werden.

2.1. Prinzip der exakten Zustands-Linearisierung

Es ist eine wohlbekannte Tatsache, daß manche Nichtlinearitäten ihren Ursprung in einer ungünstigen Wahl des Koordinatensystems haben. So können zum Beispiel viele rotatorische Bewegungen in Polarkoordinaten durch ein lineares Differentialgleichungssystem beschrieben werden. Wenn die gleiche dynamische Bewegung in kartesischen Koordinaten beschrieben wird, erhält man hochgradig nichtlineare Gleichungen. Diejenigen Koordinaten zu identifizieren, die eine Beschreibung durch lineare Differentialgleichungen erlauben, ist allerdings im allgemeinen eine nichttriviale Aufgabe. In den wenigsten Fällen werden solche Koordinaten überhaupt existieren. Falls das nichtlineare System (1) durch eine nichtlineare glatte und invertierbare Koordinatentransformation¹

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{x}) ; \quad \mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{z}) \quad (8)$$

in ein lineares System (2) überführt werden kann, heißen die beiden Systeme *zustandsäquivalent*. Bedingungen, unter denen eine solche Transformation existiert und wie man diese berechnet, wurden zuerst in /45/ angegeben. Wie man vermuten kann, existiert allerdings fast nie eine solche linearisierende Transformation. Man kann die Klasse der linearisierbaren Systeme wesentlich vergrößern, wenn man außer der Koordinatentransformation (8) noch ein nichtlineares statisches Rückführgesetz

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{z})\mathbf{v} \quad (9)$$

zuläßt. Dieses Rückführgesetz besteht aus einem reinen Feedback-Anteil $\alpha(\mathbf{z})$ und einem Term $\beta(\mathbf{z})\mathbf{v}$, der eine Art Eingangstransformation darstellt. Wenn das nichtlineare System (1) durch eine Transformation (8) und ein Rückführgesetz (9) in ein lineares System (2) mit neuem Eingang \mathbf{v} überführt werden kann, heißt System (1) *rückführ- oder feedback-äquivalent* zum linearen System (2). Die Linearisierung mittels Rückführung und Transformation wird als *exakte Zustands-Linearisierung* bezeichnet. Bedingungen, unter welchen ein nichtlineares System feedback-äquivalent zu einem linearen ist, und eine Vorgehensweise wie die linearisierende Transformation und Rückführgesetz berechnet werden können, wurden in allgemeinsten Form zuerst unabhängig voneinander in /33/ und /38/ angegeben. Die exakte Linearisierung wird in zwei Schritten erreicht: zuerst wird System (1) in nichtlineare Regelungsnormform /44, 63/

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \gamma(\mathbf{z}) + \delta(\mathbf{z})\mathbf{u} \end{aligned} \quad (10)$$

transformiert. Diese Normalform zeichnet sich dadurch aus, daß die ersten (n-1) Koordinaten in Form einer Integratorkette zusammenhängen und Nichtlinearitäten nur in der n-ten Koordinate auftreten. Die Nichtlinearitäten in System (10) können dann in einem zweiten Schritt durch die Rückführung

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\delta(\mathbf{z})} (-\gamma(\mathbf{z}) + \mathbf{v}) \quad (11)$$

1. Eine solche Transformation wird als Diffeomorphismus bezeichnet.

kompensiert werden. Das exakt linearisierte System liegt anschließend in Brunovsky-Form /6/

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= v \end{aligned} \tag{12}$$

vor. Durch ein lineares Rückführgesetz der Form (7) können die Pole von (12) beliebig festgelegt werden. Der folgende Satz /33/ gibt Bedingungen, unter denen ein nichtlineares System in Brunovsky-Form überführt werden kann.

Satz (exakte Zustands-Linearisierung):

Genau dann, wenn

- (i) $\text{rang} [g(x), \text{ad}_f^1 g(x), \dots, \text{ad}_f^{n-1} g(x)] = n$
- (ii) die Menge $\{g(x), \text{ad}_f^1 g(x), \dots, \text{ad}_f^{n-2} g(x)\}$ involutiv ist

kann das nichtlineare System (1) durch die Koordinatentransformation

$$z = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ L_f T_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} T_1(x) \end{bmatrix} \tag{13}$$

in nichtlineare Regelungsnormalform (10) überführt werden. Die Funktion $T_1(x)$ ist dabei die Lösung des linearen homogenen partiellen Differentialgleichungssystems erster Ordnung

$$\begin{aligned} L_g T_1(x) &= 0 \\ L_{\text{ad}_f^1 g} T_1(x) &= 0 \\ &\vdots \\ L_{\text{ad}_f^{n-2} g} T_1(x) &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Das statische Rückführgesetz

$$u = \frac{v - L_f^n T_1(x)}{L_g L_f^{n-1} T_1(x)} \tag{15}$$

kompensiert die Nichtlinearitäten und überführt System (10) in Brunovsky-Form (12).

Die Differentialoperatoren L und ad beschreiben die Lie-Ableitung, bzw. Lie-Klammer-Operation, und sind im Anhang definiert. Bedingung (ii) bedeutet, daß die Lie-Klammer von je zwei beliebigen Elementen der Menge, eine Linearkombination der Elemente der betrachteten Menge selbst sein muß:

$$[\text{ad}_f^i g(x), \text{ad}_f^j g(x)] = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(x) \text{ad}_f^k g(x) \quad \text{für jedes } i, j \tag{16}$$

Neben den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen ein nichtlineares System exakt zustandslinearisiert werden kann, gibt dieser Satz eine Berechnungsvorschrift für die linearisierende Transformation und Rückführung: um die nichtlineare

Koordinatentransformation zu berechnen, muß ein System von n linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen (PDGLn) erster Ordnung analytisch gelöst werden. Obwohl die Gleichungen, zum Beispiel mit dem Charakteristikenverfahren, theoretisch gelöst werden können, ist es dennoch in den meisten Fällen nicht möglich oder zu aufwendig eine Lösung zu finden. Die Lösbarkeit der PDGLn (14) ist durch Bedingungen (i) und (ii) garantiert. Speziell die Involutivitätsbedingung ist sehr restriktiv. Nur eine kleine Klasse von dynamischen System kann demzufolge exakt zustandslinearisiert werden. Die Überprüfung der beiden Bedingungen und die Lösung der PDGLn wird man im allgemeinen rechnergestützt, mit Hilfe sogenannter Computer-Algebra-Systeme, wie z.B. Macsyma oder Maple, durchführen (z.B. /16, 5, 55/).

2.2. Regelung eines Rührkesselreaktors mittels exakter Zustands-Linearisierung

Am Beispiel der Regelung des in diesem Tagungsband beschriebenen Rührkesselreaktors zur Cyclopentenol-Synthese /42/, soll ein Gefühl für die Einschränkungen durch Bedingungen (i) und (ii) und für den notwendigen Aufwand zur Reglerberechnung vermittelt werden. Der Rührkesselreaktor wird durch ein nichtlineares System von vier Differentialgleichungen beschrieben. Als Stellgrößen stehen die Raumgeschwindigkeit $\frac{\dot{V}}{V_R}$ und die Kühlleistung \dot{Q}_K zur Verfügung. Der Rührkesselreaktor ist folglich ein Mehrgrößensystem. Die Berechnung von Lie-Ableitungen und Lie-Klammern mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen ist prinzipiell kein Problem. Die Berechnung der zustandsabhängigen 4x4 Matrix in Bedingung (i) und die Berechnung der Menge in Bedingung (ii) ist deshalb problemlos. Die Untersuchung der Rang- und der Involutivitätsbedingung in der für das dynamische Verhalten relevanten Umgebung des Arbeitspunktes ist hingegen wesentlich aufwendiger. Im Falle des vollständigen Rührkesselreaktormodells, ist eine Untersuchung auf Involutivität mit vernünftigen Rechenaufwand, auch nicht unter Zuhilfenahme von Computer-Algebra-Systemen, möglich. Daraus kann man bereits auf die Hoffnungslosigkeit schließen, eine Lösung des PDGL-Systems (14) zu berechnen. Dies ist durchaus als typisch für ein nichtlineares System vierter oder höherer Ordnung anzusehen. Im Falle des Rührkesselreaktors kann jedoch durch eine schnelle unterlagerte Temperaturregelung über die Kühlleistung erreicht werden, daß die Reaktortemperatur im gesamten Arbeitsbereich des Reaktors praktisch konstant gehalten wird. Auf diese Weise kann die wesentliche Konzentrationsdynamik auf ein nichtlineares System zweiter Ordnung

$$\dot{c}_A = \frac{\dot{V}}{V_R} (c_{A0} - c_A) - k_1 c_A - k_3 c_A^2 \quad (17)$$

$$\dot{c}_B = -\frac{\dot{V}}{V_R} c_B + k_1 c_A - k_2 c_B \quad (18)$$

reduziert werden (siehe z.B. /15/). Für Systeme zweiter Ordnung ist die Involutivitätsbedingung praktisch immer erfüllt und die Lösung der PDGLn (14) kann nun leicht zu

$$T_1(\mathbf{x}) = \frac{c_B}{c_{A0} - c_A} \quad (19)$$

berechnet werden.

2.3. Einschätzung der exakten Zustands-Linearisierung

Wie bereits aus der obigen Diskussion folgt, ist eine exakte Zustands-Linearisierung nur in den wenigsten Fällen möglich. Speziell die Involutivitätsbedingung ist nur für eine sehr kleine Klasse von Systemen erfüllt. Selbst wenn für eine Anwendung die Bedingungen erfüllt sind, ist es im allgemeinen für Systeme der Ordnung vier und höher extrem aufwendig, oder sogar unmöglich, eine analytische Lösung zu finden. Die Unterstützung durch Computer-Algebra-Systeme ist dabei zumeist unverzichtbar. In Spezialfällen können auch Systeme höherer Ordnung exakt zustands-linearisiert werden (z.B. /22/). Die Transformationsbeziehungen und das Rückführgesetz werden dann aber zumeist extrem komplex. Die Implementierung der Rückführgleichungen kann leicht (wie in /22/) mehrere tausend Seiten Computercode erfordern.

Das statische Rückführgesetz (15) setzt die Meßbarkeit des gesamten Zustands voraus. Nur in wenigen Fällen wird dies möglich sein, so daß im allgemeinen ein Beobachter zur Rekonstruktion der Zustände eingesetzt werden muß. Die Berechnung von Beobachtern für nichtlineare Systeme ist ein nichttriviales Problem, und aus der Stabilität von Zustandsrückführung und Beobachter kann für nichtlineare Systeme auch nicht auf die Stabilität des Gesamtsystems geschlossen werden.

Für praktische Anwendungen nichtlinearer Reglerentwurfstechniken sind Robusttheitseigenschaften von zentraler Bedeutung. Im allgemeinen kann bei Vorhandensein von Modellunsicherheiten, zum Beispiel in Form unsicherer Parameter, keine Garantie dafür gegeben werden, daß das exakt zustands-linearisierte fehlerhafte System zumindest näherungsweise linear ist. Auch robuste Stabilität kann im allgemeinen nicht garantiert werden. Für bestimmte Fehlerklassen können zum Teil Stabilitätsaussagen gemacht werden. In /10/ wird z.B. ein linearer Reglerentwurf für das exakt linearisierte System vorgeschlagen, der Stabilität trotz normbeschränkter Modellfehler garantiert.

Um die Darstellung kompakt zu halten, wurde die exakte Zustands-Linearisierung nur für Eingrößensysteme vorgestellt. Die Theorie ist leicht auf Systeme mit mehreren Eingängen zu übertragen /35, 51, 57/. Im Falle von Mehrgrößensystemen kann durch zusätzliche dynamische Anteile im linearisierenden Rückführgesetz die Klasse der linearisierbaren Systeme vergrößert werden /34/.

In vielen praktischen Fällen ist man außer an der Stabilität des Regelsystems, zusätzlich am Regelverhalten ausgewählter Regelgrößen interessiert. Am Beispiel der Regelung des Rührkesselreaktors ist speziell das dynamische Verhalten der Konzentration von Cyclopentenol von Bedeutung. Im transformierten Koordinatensystem ist die interessierende Regelgröße i.a. eine nichtlineare Funktion der transformierten Zustände. Deshalb ist der Entwurf von Reglern, die eine gewünschte Regelgüte garantieren, trotz der Linearität der Zustände nicht einfach.

Zusammenfassend kommt der exakten Zustands-Linearisierung, wegen der restriktiven Voraussetzungen für ihre Anwendbarkeit und dem hohen Aufwand zur Berechnung der Transformation und des Rückführgesetzes, keine große praktische Bedeutung zu. Die im allgemeinen hohe Komplexität des Rückführgesetzes und das beschränkte Ziel der ausschließlichen Stabilisierung des Systems sind weitere Nachteile dieses Verfahrens. Die theoretische Bedeutung der exakten Zustands-Linearisierung sollte aber nicht unterschätzt

werden. So erlaubt die zugrundeliegende Theorie z.B. eine Klassifizierung nichtlinearer Systeme und hat zur Definition wichtiger Systemeigenschaften für nichtlineare Systeme geführt.

2.4. Näherungsverfahren zur Zustands-Linearisierung

In den vergangenen Jahren wurden Näherungsverfahren zur Zustands-Linearisierung vorgeschlagen, die die Praktikabilität dieser Methode erhöhen sollen. Durch die Aufgabe des Exaktheitsanspruches soll in erster Linie die Klasse der linearisierbaren Systeme vergrößert werden. Zusätzlich wird eine Vereinfachung der Reglerberechnung angestrebt. Über vier Verfahren zur näherungsweise Zustands-Linearisierung, die Poincaré-Linearisierung, Extended Linearization², Pseudo-Linearisierung und die Uniform System Approximation², wird im folgenden ein Überblick gegeben.

Poincaré-Linearisierung

Die Poincaré-Linearisierung geht auf /46/ zurück. Der Namen wurde dem Verfahren in Anlehnung an Arbeiten von H. Poincaré gegeben, der sich zu Beginn dieses Jahrhunderts mit Normalformen für dynamische Systeme beschäftigt hat. Bei der exakten Zustands-Linearisierung werden die Nichtlinearitäten vollständig kompensiert. Wenn man sich das System als in einer Taylor-Reihe entwickelt vorstellt, werden folglich alle nichtlinearen Terme ab dem quadratischen Glied durch Transformation und Rückführung zu null gemacht. Bei der Poincaré-Linearisierung werden dagegen nicht alle Terme höherer Ordnung kompensiert, sondern nur die ersten nichtlinearen Glieder der Taylor-Reihe. Die Arbeiten zu diesem Gebiet (z.B. /48, 41, 47/) beschränken sich darauf, die quadratischen und kubischen Terme zu kompensieren.

Wir betrachten System (1), das in einer Taylorreihe entwickelt wird

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + b\mathbf{u} + \mathbf{f}^{[2]}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}^{[1]}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} + O^{[3+]}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (20)$$

Die Entwicklung wird nach dem Glied zweiter oder dritter Ordnung abgebrochen, je nachdem, ob eine Kompensation der quadratischen oder auch der kubischen Terme erreicht werden soll. Die in Klammern hochgestellten Indices geben die Ordnung der entsprechenden Terme an. So ist z.B. der Ausdruck $\mathbf{f}^{[2]}(\mathbf{x})$ eine quadratische Form

$$\mathbf{f}^{[2]}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \quad (21)$$

Im ersten Schritt wird auf der Basis des Systems (A, b) ein linearer Regler

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k}^T \cdot \mathbf{x} \quad (22)$$

entworfen, so daß der um den Arbeitspunkt linearisierte geschlossene Kreis mit $F = A - b\mathbf{k}^T$ die gewünschten Eigenschaften besitzt. In den weiteren Schritten werden sukzessive die Terme zweiter bzw. dritter Ordnung kompensiert. Dazu wird das System durch die Transformation

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x} - \phi^{[2]}(\mathbf{x}) \quad (23)$$

2. Für "Extended Linearization" und "Uniform System Approximation" haben sich keine deutschen Begriffe durchgesetzt.

in ein System überführt, dessen linearer Anteil durch die spezielle Form von (23) unverändert bleibt. Die quadratische Funktion $\phi^{[2]}(\mathbf{x})$ wird dabei so gewählt, daß das transformierte System Regelungsnormalform besitzt, wenn nur Terme zweiter Ordnung berücksichtigt werden. Man kann einfach zeigen, daß mit einem Rückführgesetz der Form

$$u = \frac{b_n v - \tilde{\gamma}^{[2]}(\mathbf{x})}{b_n + \tilde{\delta}^{[1]}(\mathbf{x})}, \quad (24)$$

die nichtlinearen Terme zweiter Ordnung kompensiert werden, ohne den linearen Anteil zu verändern. Dabei ist b_n die n-te Komponente des Eingangsvektors \mathbf{b} . Transformation (23) und Rückführung (24) führen folglich auf ein System ohne Nichtlinearitäten zweiter Ordnung

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{F}\mathbf{z}_1 + \mathbf{b}v + O^{[3+]}(\mathbf{z}_1, v) \quad (25)$$

Falls gewünscht, kann dieses System in einem weiteren Schritt durch eine Transformation

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 - \phi^{[3]}(\mathbf{z}_1) \quad (26)$$

und ein entsprechendes Rückführgesetz in ein System ohne quadratische und ohne kubische Terme überführt werden. Diese Vorgehensweise läßt sich bis zur gewünschten Genauigkeit fortführen.

Die exakte Zustands-Linearisierung ist in einem gewissen Sinn ein globales Resultat. Bei der Poincaré-Linearisierung betrachtet man die Taylorreihe um *einen* Arbeitspunkt. Die Linearisierung ist also zwangsläufig lokaler Natur und nur in der Umgebung dieses Arbeitspunktes gültig. Bei Änderungen der Führungsgröße oder bei Störungen, die das System weit aus seinem Arbeitspunkt auslenken, kann man keine näherungsweise Linearisierung des dynamischen Verhaltens erwarten.

Die Bedingungen, unter denen eine näherungsweise Linearisierung durch Kompensation von Gliedern höherer Ordnung möglich ist, sind wesentlich weniger restriktiv als bei der exakten Linearisierung. Die Rang- und Involutivitätsbedingungen der exakten Linearisierung müssen nur näherungsweise erfüllt sein, d.h. nur für Terme in der Taylor-Entwicklung bis zu der Ordnung, die kompensiert werden soll. Für das vollständige Rührkesselreaktormodell vierter Ordnung, für das die Bedingungen zur exakten Linearisierung nicht mehr einfach überprüft werden konnten, ist eine näherungsweise Linearisierung zweiter bzw. dritter Ordnung möglich. Falls die Rang- und Involutivitätsbedingungen auch näherungsweise nicht erfüllt sind, kann trotzdem eine näherungsweise linearisierende Lösung gefunden werden, die das Problem (im Sinne einer bestimmten Metrik) bestmöglich löst /47/.

Die Berechnung der Transformationen (23), (26) usw. und der Rückführungen (24) usw. ist unkompliziert. Da für alle Terme $\phi^{[i]}(\mathbf{x})$, usw. die Struktur vorgegeben ist, müssen nur die Polynom-Koeffizienten berechnet werden. Außer der Berechnung der Taylor-Reihe werden nur algebraische Operationen benötigt, die mit numerischen Programmen schnell und zuverlässig ausgeführt werden können. Von Krener und Mitarbeitern wurde ein Programm auf der Basis von MATLAB entwickelt /47/, das diese Berechnungen bis zur Kompensation von Gliedern dritter Ordnung durchführt. Der Aufwand für Approximationen höherer Ordnung steigt kombinatorisch mit der Zahl der Polynomkoeffizienten in ϕ , $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$ usw. Den

Autoren ist keine Anwendung mit Näherungen höherer als dritter Ordnung bekannt. Eine große Stärke der Poincaré-Linearisierung ist, daß der Zustand des kompensierten Systems in linearer Näherung mit dem physikalischen Zustand des Originalsystems übereinstimmt. Dadurch kann das kompensierte System ebenfalls physikalisch interpretiert werden.

Für Systeme mit gleichbleibendem Arbeitspunkt bietet die Poincaré-Linearisierung eine attraktive Alternative zur exakten Linearisierung. Durch Kompensation von quadratischen, kubischen usw. Termen ist eine wesentliche Verbesserung des Regelverhaltens gegenüber rein linearen Entwürfen zu beobachten, ohne daß die einschränkenden Bedingungen der exakten Linearisierung erfüllt sein müssen.

Extended Linearization

Durch Veränderung des stationären Eingangs u_s verändert sich die Ruhelage des Systems. Für ein nichtlineares System ist i.a. die Arbeitspunktlinearisierung um jede dieser Ruhelagen verschieden. Bei der Extended Linearization /4, 56/ wird das nichtlineare System so geregelt, daß die Arbeitspunktlinearisierung um jede, durch Variation des stationären Eingangs, erreichbare Ruhelage, dieselben Pole ergibt. Die charakteristische Gleichung des Systems ist demnach unabhängig vom gewählten Arbeitspunkt. In der Umgebung jeder möglicher Ruhelage ergibt sich demzufolge ein durch dieselben Pole bestimmtes dynamisches Verhalten.

Die Berechnung des Regelgesetzes erfordert die Parametrisierung aller möglicher Ruhelagen. Üblicherweise werden die Ruhelagen als Funktion des stationären Eingangs u_s berechnet. Aus

$$0 = f(x_s) + g(x_s) \cdot u_s \quad (27)$$

ergibt sich

$$x_s = \tilde{f}(u_s) \quad (28)$$

Die Arbeitspunktlinearisierung des nichtlinearen Systems um jede Ruhelage wird in analoger Weise mit $x = x_s + \Delta x$ usw. parametrisiert

$$\Delta \dot{x} = A(u_s) \Delta x + b(u_s) \Delta u \quad (29)$$

Mit Hilfe der Ackermann-Formel, oder anderer Polvorgabeverfahren, kann dann ein lineares Rückführgesetz

$$\Delta u = -q^T(u_s) \cdot \Delta x \quad (30)$$

berechnet werden, für das die Pole des so geschlossenen linearisierten Kreises vorgegebene Werte annehmen

$$\det \left(\lambda I - A(u_s) + b(u_s) q^T(u_s) \right) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 \quad (31)$$

Die Rückführverstärkung $q(u_s)$ ist natürlich abhängig von u_s . Durch Integration kann ein nichtlineares Rückführgesetz $k(x)$ gefunden werden, dessen Linearisierung um jeden Arbeitspunkt gerade der Rückführverstärkung $q(u_s)$ entspricht

$$\left. \frac{\partial k^T(x)}{\partial x} \right|_{x=\tilde{f}(u_s)} = q^T(u_s) \quad (32)$$

Man berechnet also eine Art kontinuierliches gain-scheduling Regelgesetz. Baumann und Rugh /4/ haben gezeigt, daß die Integration von (32) genau dann möglich ist, wenn das linearisierte System (29) für alle Ruhelagen, d.h. für alle Parameterwerte u_0 , steuerbar ist. Diese Bedingung stellt keine große Einschränkung dar. Die stärkste Einschränkung der praktischen Anwendbarkeit ergibt sich durch die notwendige Parametrisierung der Ruhelagen. Nur in wenigen Fällen wird die Funktion \bar{f} in (28) berechnet werden können. Für den Rührkesselreaktor vierter Ordnung ist dies wegen der in den Differentialgleichungen auftretenden Exponentialfunktionen nicht möglich. Allerdings kann in vielen Fällen die Parametrisierung für die interessierende Betriebsumgebung näherungsweise berechnet werden. Im Beispiel Rührkesselreaktor ist eine lineare Approximation der Exponentialfunktion ausreichend. Eine Parametrisierung durch die Temperatur T im Reaktor, anstelle des stationären Eingangs u_0 , ist ebenfalls denkbar. Die weiteren Berechnungen, also die Lösung des Polvorgabeproblems und die Integration von (32), sind zwar aufwendig aber zumeist unkritisch. In /4/ wird zur Vereinfachung der Berechnungen ein Näherungsverfahren auf Grundlage der Taylor-Entwicklung vorgeschlagen.

Das Ziel der Extended Linearization ist wesentlich weniger ambitioniert als das der exakten Linearisierung oder auch anderer Näherungsverfahren: durch Vorgabe der Pole kann das dynamische Verhalten des geschlossenen Kreises nur in beschränktem Umfang geformt werden. Die Pole des linearisierten Systems sind auch nur dann aussagekräftig, wenn sich das System in der Umgebung einer (wenn auch beliebigen) Ruhelage befindet und wenn die dynamischen Übergänge zwischen unterschiedlichen Ruhelagen langsam genug erfolgen. Die Stabilität des geschlossenen Kreises sollte stets getrennt untersucht werden. Der Vorteil gegenüber der Poincaré-Linearisierung, die nur Aussagen in der Umgebung eines Arbeitspunktes zuläßt, ist die globalere Betrachtungsweise.

Pseudolinearisierung

Die Pseudo-Linearisierung, die unabhängig zur Extended Linearization von Champetier, Reboulet und Mitarbeitern /54, 12, 60/ entwickelt wurde, ist vom Prinzip her eine Verallgemeinerung der Extended Linearization. Das zu berechnende Rückführgesetz soll nicht nur bewirken, daß die Pole des um jede Ruhelage linearisierten Systems immer dieselben sind, sondern das linearisierte System selbst soll das gleiche sein. Anders als bei der Extended Linearization wird das Ziel durch eine nichtlineare Koordinatentransformation und ein nichtlineares Rückführgesetz erreicht. Im ersten Schritt muß auch hier eine Parametrisierung der Ruhelagen, z.B. analog (28), berechnet werden. Die Transformation

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{x}) \quad (33)$$

und das kompensierende Rückführgesetz

$$\mathbf{v} = T_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (34)$$

werden hier durch Integration der Vektor-Funktionen α_i berechnet

$$dT_i|_0 = \alpha_i \quad (35)$$

Die Funktion α_1 ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\alpha_i^T \cdot A^{i-1} \mathbf{b} = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (36)$$

für jede Ruhelage. Das Paar (A, b) ist dabei analog (29) definiert. Die weiteren Funktionen α_i werden sukzessive aus

$$\alpha_i = \alpha_1^T \cdot A^{i-1} \quad i = 2, \dots, n \quad (37)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n^T \cdot [A \ b] \quad (38)$$

berechnet. Transformation (33) überführt das nichtlineare System in eine Form, deren Linearisierung, unabhängig vom Arbeitspunkt, Brunovsky-Form ergibt.

Gleichung (36) ist mit $(n-1)$ Gleichungen für n Unbekannte unterbestimmt. Demzufolge existieren unendlich viele Lösungen für das Pseudo-Linearisierungsproblem. Falls das betrachtete System z.B. exakt zustandslinearisiert werden kann, gibt es eine Lösung α_1 von (36), die das exakte Linearisierungsproblem löst. Theoretisch kann diese Freiheit dazu genutzt werden, um z.B. ein möglichst einfaches Regelgesetz zu finden. In der Praxis ist jedoch in den meisten Fällen nicht offensichtlich, welche Wahl von α_1 zu einer vereinfachten Berechnung oder zu einem vorteilhaften Regelgesetz führt.

Die Bedingungen für die Existenz einer pseudo-linearisierenden Transformation und Rückführung sind wenig restriktiv. Für Eingrößensysteme muß das Paar (A, b) steuerbar in der Umgebung jeder Ruhelage sein. Bei Mehrgrößensystemen müssen zusätzlich die Steuerbarkeitsindices des linearisierten Systems (A, b) für jeden Arbeitspunkt gleich sein. Gegenüber der Extended Linearization kommt, zusätzlich zu den Schwierigkeiten bei der Parametrisierung der Ruhelagen, der durch die Integration (35) bedingte Aufwand hinzu. Die Zielsetzung ist jedoch wesentlich anspruchsvoller, da hier die gesamte linearisierte Dynamik, und nicht nur die Pole, betrachtet wird.

Die Pseudo-Linearisierung ist damit besonders interessant, wenn häufige Wechsel der Betriebsbedingungen und somit des Arbeitspunktes erfolgen. Rein lineare Entwürfe führen hier in den meisten Fällen zu unbefriedigendem Verhalten. Da keine Terme höherer Ordnung kompensiert werden, ist die Güte der Regelung i.a. nur in der Nähe eines (wenn auch beliebigen) Arbeitspunktes zufriedenstellend.

Uniform System Approximation

Die von Hauser /23, 24/ begründete Uniform System Approximation verbindet Ideen der Poincaré-Linearisierung und der Extended bzw. Pseudo-Linearisierung. Wie bei der Poincaré-Linearisierung werden Terme höherer Ordnung des in einer Taylor-Reihe entwickelten geschlossenen Kreises kompensiert. Jedoch nicht nur, wie bei der Poincaré-Linearisierung, in der Umgebung *einer* Ruhelage, sondern in der Umgebung *aller* Ruhelagen. Die näherungsweise Linearisierung wird durch eine Transformation und ein Rückführungsgesetz erreicht, und zwar so, daß das kompensierte System näherungsweise linear in der Umgebung aller Ruhelagen ist

$$\dot{z} = Az + bv + O^{(\rho+)}(z, v) \quad \forall u_s = \bar{f}(x_s) \quad (39)$$

und zusätzlich maximale Ordnung ρ der Fehlerterme $O^{(\rho+)}$ garantiert wird. Falls die Bedingungen für exakte Linearisierung erfüllt sind, ist die Lösung der Uniform System Approximation identisch mit der Lösung der exakten Linearisierung.

Die Berechnung der näherungsweise linearisierenden Rückführung und der Transformation ist bei diesem Verfahren i.a. ähnlich aufwendig wie bei der exakten Zustands-Linearisierung. Die Berechnung erfordert die Lösung eines nichtlinearen (konzentrierten) Differentialgleichungssystems und die Invertierung nichtlinearer algebraischer Gleichungen. Zusätzlich muß, wie bei der Extended Linearization und der Pseudo-Linearisierung, eine Parametrisierung der Ruhelagen gefunden werden. Theoretisch ist die Klasse der so näherungsweise linearisierbaren Systeme maximal. In der Praxis scheitert dieser Entwurf aber zumeist an der auch mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen nicht möglichen Berechnung. Die Uniform System Approximation ist darüber hinaus nur für Systeme mit einer skalaren Eingangsgröße möglich.

3. Reglerentwurf mittels exakter Eingangs/Ausgangs-Linearisierung

Für die meisten praktischen Regelprobleme ist das Regelziel nicht nur eine Stabilisierung der Strecke. Vielmehr hat der Anwender üblicherweise eine relativ komplexe Vorstellung davon, wie sich der geschlossene Kreis dynamisch verhalten soll. Mathematisch wird dies im allgemeinen durch Anforderungen an spezielle Ausgänge (den Regelgrößen) ausgedrückt. Beim Reglerentwurf durch exakte Linearisierung des Eingangs/Ausgangs-Verhaltens können solche Anforderungen an die gewünschte Regelgüte in einfacher Weise berücksichtigt werden: wird zuerst das Eingangs/Ausgangs-Verhalten exakt linearisiert, kann mit Hilfe der sehr gut entwickelten linearen Regelungstheorie in einem zweiten Schritt ein Regler

$$v(s) = -K(s)y(s) \quad (40)$$

entworfen werden, der die Anforderungen an die Regelgüte erfüllt. Sich widersprechende Entwurfsanforderungen und die Notwendigkeit, die physikalischen Zielsetzungen in mathematische Entwurfsvorgaben zu übersetzen, bedingen, daß die meisten Reglerentwürfe iterativ erfolgen. Wenn die Regelstrecke zuerst E/A-linearisiert wird, können diese Iterationen vollständig im Linearen durchgeführt werden. Für Systeme mit linearem E/A-Verhalten sind die Entwurfsschritte mit relativ geringem Aufwand verbunden und es existiert eine Vielzahl von Methoden, um eine bestimmte Regelgüte zu erreichen. Der aufwendige Linearisierungsschritt ist nur einmal durchzuführen. Dies stellt den größten Vorteil des Reglerentwurfs durch exakte E/A-Linearisierung gegenüber anderen nichtlinearen Verfahren dar.

3.1. Prinzip der exakten Eingangs/Ausgangs-Linearisierung

Die exakte Linearisierung des Eingangs/Ausgangs-Verhaltens dynamischer Systeme kann mit unterschiedlichen Ansätzen erreicht werden. Neben der Linearisierung durch Immersion /13/ und auf der Basis von Volterra-Reihen /37/, spielt vor allem der geometrische Ansatz eine zentrale Rolle /43/. Für eine spezielle Klasse von Systemen wird die Methode der E/A-Linearisierung bereits in /17/ beschrieben. In diesem Aufsatz werden wir uns auf die Darstellung und Diskussion des geometrischen Ansatzes beschränken.

Um die Lösung des exakten E/A-Linearisierungsproblems angeben zu können, brauchen wir die Definition des relativen Grades eines nichtlinearen dynamischen Systems /28/.

Definition: Der relative Grad eines Systems der Form (5) ist die kleinste natürliche Zahl r , für die

$$L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (41)$$

gilt.

Diese formale Definition kann einfach interpretiert werden: Der relative Grad r ist diejenige zeitliche Ableitung des Ausgangs y , die erstmals vom Eingang u explizit abhängt:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= L_f h(\mathbf{x}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{r-1}y}{dt^{r-1}} &= L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \\ \frac{d^r y}{dt^r} &= L_f^r h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) u \quad . \end{aligned} \quad (43)$$

Für lineare Systeme entspricht der relative Grad der Differenzordnung zwischen Nenner- und Zählerpolynom der Übertragungsfunktion. Bei nichtlinearen Systemen ist der Ausdruck (41) eine Funktion des Zustands \mathbf{x} und muß in einer Umgebung des stationären Punktes verschieden von null sein. Wenn $L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})$ ungleich null in der Umgebung des Arbeitspunktes, aber gleich null am Arbeitspunkt ist, spricht man von einem *nicht wohl-definierten* relativen Grad.

Die Linearisierung des Eingangs/Ausgangs-Verhaltens ist, wie die exakte Zustands-Linearisierung, das Ergebnis eines Zweischrittverfahrens: zuerst wird das System auf eine Normalform transformiert und im zweiten Schritt werden dann die Nichtlinearitäten im E/A-Verhalten kompensiert. Die betrachtete Normalform ist die sogenannte Byrnes-Isidori-Normalform /8/ eines Systems (5) mit relativem Grad r :

$$\begin{aligned} y &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= a(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z})u \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(\mathbf{z}) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(\mathbf{z}) \quad . \end{aligned} \quad (44)$$

Wie bei der Regelungsnormalform sind die ersten r Koordinaten ausschließlich durch Integratoren verknüpft. Der Ausgang entspricht genau der ersten Koordinate z_1 . Der Eingang u beeinflusst nur die r -te Koordinate. Die letzten $(n-r)$ -Koordinaten sind i.a. nichtlineare Funktionen des gesamten transformierten Zustands \mathbf{z} . Anhand dieser Darstellung kann der relative Grad r auch als die Anzahl der Integratoren gedeutet werden, die der Eingang u durchlaufen muß, bevor er den Ausgang y beeinflusst. Der relative Grad r ist somit ein Maß für die Mindestverzögerung im E/A-Verhalten. Für jedes nichtlineare Eingrößensystem

mit relativem Grad r existiert die Transformation auf Byrnes-Isidori-Normalform und ist durch

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_f h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \\ \phi_{r+1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (45)$$

gegeben. Dabei können die Funktionen $\phi_i(\mathbf{x})$ immer so gewählt werden, daß die Linearisierung von (45) um den Arbeitspunkt vollen Rang hat³ und die Funktionen $q_i(\mathbf{z})$ in (44) nicht von \mathbf{u} abhängen. Anhand Normalform (44) kann die Nulldynamik eines nichtlinearen Systems definiert werden [7].

Definition: Für ein nichtlineares System (5), das in Byrnes-Isidori-Normalform (44) transformiert wurde, werden die letzten $(n-r)$ Gleichungen der Normalform (44)

$$\begin{aligned} \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(\mathbf{z})|_{\mathbf{z}=[0, \dots, 0, z_{r+1}, \dots, z_n]^T} \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(\mathbf{z})|_{\mathbf{z}=[0, \dots, 0, z_{r+1}, \dots, z_n]^T} \end{aligned} \quad (46)$$

als Nulldynamik bezeichnet, wenn die ersten r Koordinaten identisch gleich null sind.

Mit den ersten r Koordinaten ist auch der Ausgang identisch gleich null und die Nulldynamik kann folglich als nichtlineares Äquivalent der Nullstellen eines linearen Systems gedeutet werden [39, 8]. In Analogie zur linearen Systemtheorie heißt ein nichtlineares System *minimalphasig*, wenn es eine stabile Nulldynamik besitzt (d.h. das System (46) stabil ist).

Aus Normalform (44) sieht man sofort, daß die Nichtlinearitäten im E/A-Verhalten z.B. mit Hilfe des Rückführgesetzes

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{a}(\mathbf{z})}{\mathbf{b}(\mathbf{z})} \quad (47)$$

kompensiert werden können. Im Kreis verbleibt die nichtlineare Nulldynamik. Sie beeinflußt das E/A-Verhalten jedoch nicht, da sie nicht beobachtbar ist. Interne Stabilität ist somit nur gewährleistet, wenn das nichtlineare System minimalphasig ist.

Satz (exakte Eingangs/Ausgangs-Linearisierung) [43]:

Wenn das nichtlineare System (5)

- (i) einen wohl-definierten relativen Grad besitzt
- (ii) minimalphasig ist

wird das Eingangs/Ausgangs-Verhalten von (5) durch die statische Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} - L_f^r h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})} + \frac{\sum_{k=1}^r \beta_{k-1} L_f^{k-1} h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})} \quad (48)$$

3. Transformation (45) ist folglich ein lokaler Diffeomorphismus.

linearisiert. Das E/A-Verhalten wird dann durch

$$G(s) = \frac{1}{\beta_r s^r + \beta_{r-1} s^{r-1} + \beta_1 s + \beta_0} \quad (49)$$

beschrieben und das exakt linearisierte System ist genau dann stabil, wenn (49) stabil ist.

Der erste Term in (48) entspricht der Rückführung (47) und überführt, für sich allein genommen, das E/A-Verhalten in eine Serienschaltung von r Integratoren. Die Pole des E/A-linearisierten Systems können zusätzlich über den zweiten Term durch Wahl der skalaren Koeffizienten β_i vorgegeben werden.

Die Ordnung von (49) ist gleich dem relativen Grad r und ist damit kleiner als die Ordnung von (5). Dies erklärt sich durch die zusätzlich im Kreis verbleibende nicht beobachtbare Nulldynamik.

Bei Mehrgrößensystemen muß zusätzlich zu Bedingungen (i) und (ii) die sogenannte Entkopplungsmatrix der betrachteten Strecke nichtsingulär sein, um mit der angegebenen Vorgehensweise lineares E/A-Verhalten zu erzielen /35/. Falls diese Bedingung verletzt ist, kann unter Umständen durch ein dynamisches Rückführgesetz Linearität erreicht werden.

Zwischen Zustands- und E/A-Linearisierung besteht eine enge Verwandtschaft: wenn die Ausgangsfunktion $h(\mathbf{x})$ in (5) so beschaffen ist, daß der relative Grad gleich der Ordnung des Systems ist, hat das System keine Nulldynamik. Transformation (45) ist dann identisch mit Transformation (13) und überführt das nichtlineare System in Regelungsnormalform. Als Alternative zur Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems (14) kann folglich auch eine fiktive Ausgangsfunktion $T_1(\mathbf{x})$ gesucht werden, für die der relative Grad r der Systemordnung n entspricht.

Falls die natürliche Ausgangsfunktion $h(\mathbf{x})$ zu einem relativen Grad führt, der gerade der Systemordnung entspricht, können gleichzeitig das Zustands- und das E/A-Verhalten linearisiert werden. Man spricht dann von *totaler* oder *vollständiger exakter Linearisierung* /32, 59/. Die Bedingungen für totale Linearisierung sind extrem einschränkend. Dennoch sind einige praktische Anwendungen bekannt (z.B. /30/).

3.2. Regelung einer Destillationskolonne mittels exakter E/A-Linearisierung

Um einen Eindruck von der Leistungsfähigkeit und vom notwendigen Aufwand für den Entwurf eines Reglers mittels E/A-Linearisierung für eine praxisnahe Anwendung zu geben, soll hier die Regelung einer Zweistoffdestillationskolonne untersucht werden. In einer Zweistoffdestillationskolonne wird ein Gemisch aus zwei flüssigen Stoffen in seine Bestandteile aufgetrennt. Eine Destillationskolonne ist ein Mehrgrößensystem mit zwei Eingängen u_1 und u_2 und zwei zu regelnden Temperaturen T_1 und T_2 . Beispielhaft betrachten wir die Trennung der beiden Alkohole Methanol und Propanol in einer Kolonne mit 40 Böden. Die wichtigsten dynamischen Vorgänge werden durch ein nichtlineares Modell 42ter Ordnung gut erfaßt /3/. Die Berechnung der Lie-Ableitungen in (48) führt

auf das statische Rückführgesetz

$$u_1 = \frac{1}{\Delta_A(x)} \cdot \left((K_{29x}x_{29} - K_{28x}x_{28}) \cdot v_1 + (K_{14x}x_{14} - K_{15x}x_{15}) \cdot v_2 + (x_{27} - x_{28})(K_{15x}x_{15} - K_{14x}x_{14}) \cdot w_1 \right) \quad (50)$$

$$u_2 = \frac{1}{\Delta_A(x)} \cdot \left((x_{28} - x_{27}) \cdot v_1 + (x_{13} - x_{14}) \cdot v_2 + (x_{27} - x_{28})(x_{14} - x_{13}) \cdot w_1 \right) \quad (51)$$

mit

$$\Delta_A(x) = (x_{13} - x_{14})(K_{29x}x_{29} - K_{28x}x_{28}) - (x_{27} - x_{28})(K_{15x}x_{15} - K_{14x}x_{14}) \quad (52)$$

und

$$K_{ix} = \frac{\alpha}{1 + (1 - \alpha)x_i} \quad (53)$$

x_i sind Zustände des Kolonnenmodells (die gemessen werden müssen), w_1 ist die stationäre Zulaufmenge und α ist die, als konstant angenommene, relative Flüchtigkeit von Methanol und Propanol. Das Rückführgesetz überführt das System 42ter Ordnung in zwei entkoppelte (lineare) Integratoren, die das E/A-Verhalten beschreiben. Die nicht beobachtbare Null-dynamik ist stabil und von 40ter Ordnung. Die Komplexität der Rückführung (50)-(53) ist trotz der hohen Systemordnung des Kolonnenmodells nicht sehr groß. Dies ist eine direkte Folge des niederen relativen Grades von eins für jeden der beiden Ausgänge. Nur sechs der 42 Zustände werden in (50)-(53) benötigt. Dies vereinfacht den Meßaufwand wesentlich. Für das E/A-linearisierte System werden zwei dezentrale PI-Regler (Bild 1) entworfen, um die geforderten Spezifikationen an die Regelgüte zu erfüllen.

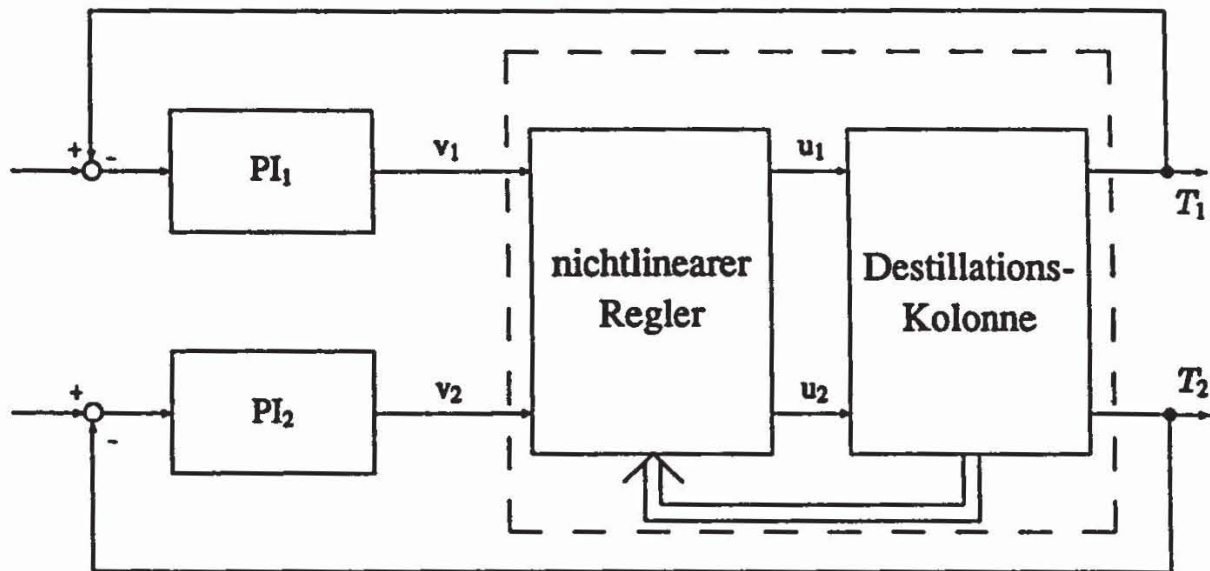


Bild 1: Regelungsstruktur für Destillationskolonnenregelung

Das Regelverhalten des geschlossenen Kreises bei einer sprunghörmigen Zulaufstörung zum Zeitpunkt $t = 2h$ ist in Bild 2 dargestellt. In den Simulationen wird die Kolonne durch ein detailliertes Modell 320ter Ordnung repräsentiert. Dadurch können Aussagen über die Robustheit der Regelung gemacht werden. Die durchgezogene Kurve in Bild 2 zeigt das

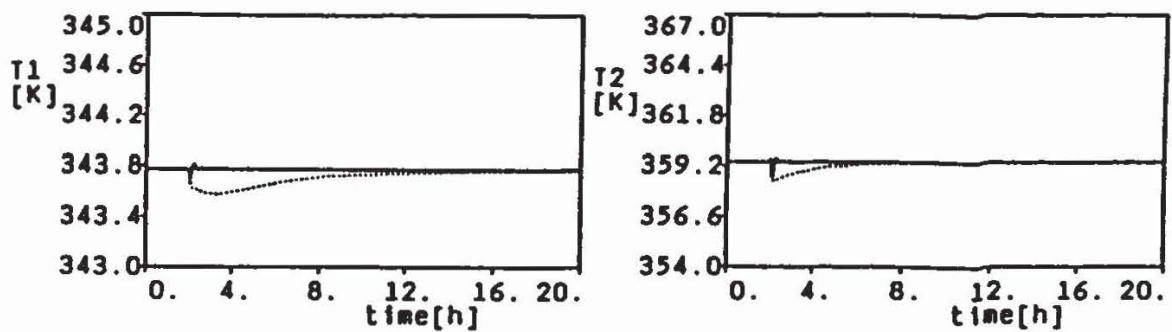


Bild 2: Dynamisches Verhalten der geregelten Destillationskolonne nach einer sprungförmigen Störung in der Kolonnenzulaufkonzentration um 15% ($\omega_B = 50 \frac{1}{h}$)

Verhalten des auf E/A-Linearisierung basierenden Reglers. Die gestrichelte Kurve zeigt das Verhalten eines linearen H_∞ -optimalen Reglers mit gleicher Bandbreite $|2|$. Es ist deutlich das bessere Regelverhalten durch die nichtlineare Kompensation zu erkennen. Die linearen PI-Regler in Bild 1 sind so ausgelegt, daß eine gute lineare Stabilitätsreserve garantiert ist. Man könnte nun folgendermaßen argumentieren: das nichtlineare Modell, auf dem der Reglerentwurf basiert, ist potentiell sehr ungenau. Deshalb müßte eine Vergrößerung der linearen Stabilitätsreserve die Robustheit der Stabilität des nichtlinearen Kreises erhöhen. Bild 3 zeigt das Verhalten des geschlossenen Kreises bei identischem nichtlinearem Regler, aber mit PI-Reglern, die eine größere lineare Stabilitätsreserve besitzen. Die Vergrößerung der *linearen* Stabilitätsreserve bewirkt die Destabilisierung des

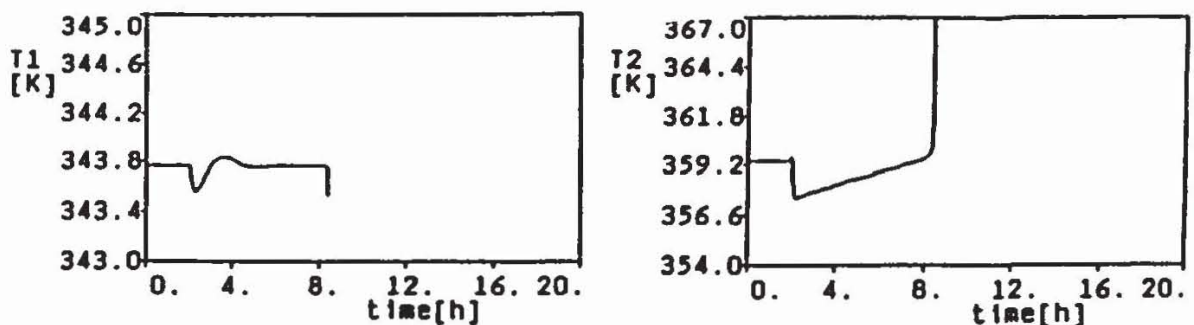


Bild 3: Dynamisches Verhalten der geregelten Destillationskolonne nach einer sprungförmigen Störung in der Kolonnenzulaufkonzentration um 15% ($\omega_B = 5 \frac{1}{h}$)

Kreises. Der Grund für dieses auf den ersten Blick überraschende Verhalten sind die nach der E/A-Linearisierung im Kreis verbleibenden Nichtlinearitäten, die auf Modellfehler zurückzuführen sind. Diese Nichtlinearitäten wirken destabilisierend. Die Vergrößerung der linearen Stabilitätsreserve, die hier eine Reduktion der Bandbreite bewirkt, führt zu einem Überwiegen der nichtlinearen Effekte gegenüber den linearen und verursacht somit die Destabilisierung. Man sieht, daß lineare Robustheitsargumente beim Entwurf der linearen Regler für den E/A-linearisierten Kreis mit Vorsicht gebraucht werden sollten.

3.3. Einschätzung der exakten Eingangs/Ausgangs-Linearisierung

Anders als bei der exakten Zustands-Linearisierung sind die Bedingungen, unter denen das E/A-Verhalten eines dynamischen Systems linearisiert werden kann, für eine große Klasse von Systemen erfüllt. Die Forderung nach Minimalphasigkeit ist dabei die einschränkende Voraussetzung. So hat z.B. der im Kapitel über Zustands-Linearisierung behandelte Rührkesselreaktor eine instabile Nulldynamik und kann damit nicht exakt E/A-linearisiert werden. Die Berechnung des Rückführgesetzes (48) ist unkompliziert (Berechnung von Lie-Ableitungen), aber unter Umständen aufwendig. Im allgemeinen empfiehlt sich die Verwendung von Computer-Algebra-Systemen. Anders als bei der exakten Zustands-Linearisierung ist hier die explizite Berechnung der Transformation (45) jedoch nicht nötig. Das Rückführgesetz (48) setzt die Meßbarkeit des gesamten Zustands voraus. Wie im Falle der Zustands-Linearisierung wird dadurch die Praktikabilität des Verfahrens eingeschränkt. Mit dem Verfahren der asymptotisch exakten Linearisierung /18, 19/ kann das E/A-Verhalten durch eine Ausgangsrückführung asymptotisch exakt linearisiert werden. Die Grundlage dieser Vorgehensweise bildet dabei die exakte Linearisierung eines hinreichend genauen Modells unter Echtzeitbedingungen, dessen Zustände natürlich "gemessen" werden können. In einem zweiten Schritt, der nur die Messung der Prozeßausgänge voraussetzt, wird unabhängig von der exakten Linearisierung des Modells die Konvergenz des realen Prozesses gegen das Prozeßmodell sichergestellt.

Unter Umständen werden zum Erreichen des linearen E/A-Verhaltens große Amplituden der Stellgröße benötigt. Dies ist eine direkte Konsequenz der Forderung nach Linearität: auch in den "Richtungen", in denen das System von Natur aus eine geringe Verstärkung besitzt, zwingt man der Strecke eine lineare Verstärkung des Eingangssignals auf. Exakte Linearisierung kann eine solche "Direktionalität" eines nichtlinearen Systems nie berücksichtigen oder gar ausnutzen. Vielmehr wird, auf Kosten der Stellgröße, ein lineares und damit vollständig gleichförmiges Verhalten erzwungen. Da der Ausgang dieser Regler nur eine reglerinterne Größe (die Eingangsgröße v) ist, können Stellgrößenbeschränkungen (oder eine Gewichtung der Stellgröße) auch beim Entwurf der linearen Regler für das E/A-linearisierte System nicht explizit berücksichtigt werden.

Neben den Stellgrößen wirken i.a. Störungen auf das System, die im Modell berücksichtigt werden können

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u + \mathbf{p}(\mathbf{x})d \quad (54)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (55)$$

Analog zum relativen Grad der Stellgröße d , kann auch der relative Grad der Störgröße u definiert werden. Durch Transformation des um die Störungen erweiterten Systems auf Byrnes-Isidori-Normalform sieht man sofort, daß Störungen mit relativem Grad $r_d > r_u$ durch das linearisierende Rückführgesetz (48) vollständig entkoppelt werden. Falls Störungen mit $r_d = r_u$ gemessen werden können, kann durch eine zusätzliche Störgrößenaufschaltung deren vollständige Entkopplung erreicht werden /29, 36/. Störungen, die nicht automatisch entkoppelt werden, beeinflussen die Dynamik nach der Linearisierung des E/A-Verhaltens im Regelfall in einer nichtlinearen Art und Weise. Das folgende einfache Beispiel zeigt mögliche Probleme.

Beispiel:

Wir betrachten die durch

$$\dot{x} = (1 + x^2)(u + d) \quad (56)$$

beschriebene nichtlineare skalare Strecke. Die Störgröße d greift direkt am Streckeneingang an. Mit Gleichung (48) berechnet man leicht eine linearisierende Rückführung

$$u = -\frac{x}{1 + x^2} \quad (57)$$

die den Pol des geschlossenen Kreises zu $s = -1$ bestimmt. Eine kurze Rechnung zeigt aber, daß der mit (57) geschlossene Kreis für Störungen $|d| > \frac{1}{2}$ instabil ist (sogar in finite escape time). Dies ist eine direkte Folge der E/A-Linearisierung. Wie man leicht zeigt, stabilisiert die einfache lineare Rückführung

$$u = -x \quad (58)$$

die Strecke für alle Störungen d . Das destabilisierende Verhalten der E/A-linearisierenden Rückführung kann als eine Verletzung des Inneren-Modell-Prinzips gedeutet werden: nach der Linearisierung des E/A-Verhaltens verbleibt im Kreis keine Dynamik, die der stärker als linear eingreifenden Störung $((1 + x^2)d)$ entgegenwirken könnte.

Über Robustheitseigenschaften der Methode der exakten E/A-Linearisierung können keine allgemeinen Aussagen gemacht werden. Das ist aber für fast alle nichtlinearen Entwurfstechniken der Fall und liegt vornehmlich an der fehlenden systematischen Beschreibungsmöglichkeit von nichtlinearen dynamischen Unsicherheiten. Unter der Voraussetzung, daß bestimmte Konsistenzbedingungen erfüllt sind, können hinreichende Bedingungen für robuste Stabilität angegeben werden /9/. Die so gefundenen Abschätzungen können aber beliebig konservativ sein. Wie das Beispiel der Kolonnenregelung zeigt, müssen die bekannten Robustheitsaussagen aus der linearen Systemtheorie mit großer Vorsicht beurteilt werden, wenn die betrachteten Systeme nichtlinear sind.

Trotz der genannten Einschränkungen, kann eine Anwendung der exakten E/A-Linearisierung in vielen Fällen zu hervorragenden Ergebnissen führen (z.B. /3, 49, 58/). Wie bereits erwähnt, liegt der Hauptvorteil darin, daß die zum Erreichen der gewünschten Regelgüte notwendigen Entwurfsiterationen ohne großen Aufwand im Linearen durchgeführt werden können.

3.4. Näherungsweise Eingangs/Ausgangs-Linearisierung

Die Bedingungen, unter denen eine exakte Linearisierung des Eingangs/Ausgangs-Verhaltens erreicht wird, sind wesentlich weniger einschränkend als bei der exakten Zustands-Linearisierung. Dennoch sind eine Vielzahl technisch wichtiger Systeme bekannt, für die der relative Grad nicht wohl-definiert ist, oder die eine instabile Nulldynamik haben. Im Falle eines nicht wohl-definierten relativen Grades ist der Nenner des exakt E/A-linearisierenden Rückführgesetzes (48) am Arbeitspunkt null und folglich das Rückführgesetz singular. Auch für Systeme mit wohl-definiertem relativen Grad, kann es im Arbeitsbereich des Regelungssystems Zustände geben, für die (48) singular wird. Die meisten Ansätze zur näherungsweisen Linearisierung solcher Systeme erweitern den Nenner

heuristisch durch eine Störfunktion $\epsilon(\mathbf{x})$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} - L_f^r h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) + \epsilon(\mathbf{x})} + \frac{\sum_{k=1}^r \beta_{k-1} L_f^{k-1} h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) + \epsilon(\mathbf{x})}, \quad (59)$$

um unbeschränkte Stellamplituden an Singularitäten zu vermeiden. Der Kompromiß zwischen Linearisierung und großer Stellamplitude kann durch unterschiedliche Wahl von $\epsilon(\mathbf{x})$ erreicht werden /50, 27, 11/. Alternative Verfahren, die auf einer Erweiterung der Byrnes-Isidori-Normalform beruhen, werden in /25, 40/ beschrieben.

Für Systeme mit instabiler Nulldynamik ist die Berechnung einer näherungsweise linearisierenden Rückführung meist wesentlich aufwendiger. Ein Ansatz beruht auf einer näherungsweise Aufspaltung des Systems in einen nichtlinearen Allpaßanteil und einen nichtlinearen Phasenminimumanteil, der dem Reglerentwurf zugrunde gelegt wird /14/. Eine zweite in /14/ vorgeschlagene Vorgehensweise basiert auf einer Faktorisierung der Nulldynamik in einen stabilen und einen antistabilen Anteil. Für spezielle Klassen von Systemen sind weitere Verfahren bekannt /26, 62, 21/. Es soll jedoch ausdrücklich erwähnt werden, daß mit den zitierten Ansätzen nicht in allen Fällen ausreichend lineares Verhalten erreicht werden kann.

Auch wenn die Voraussetzungen zur exakten Linearisierung des E/A-Verhaltens erfüllt sind, ist es aus Anwendersicht in vielen Fällen nicht notwendig, eine exakte Linearisierung anzustreben. Durch Beschränkung auf die Kompensation der Hauptnichtlinearitäten wird i.a. die Rückführung weniger komplex und in vielen Fällen kann dadurch eine Verkleinerung der benötigten Stellamplitude erreicht werden. Schwache Nichtlinearitäten, gewünschte Nichtlinearitäten, oder Nichtlinearitäten, deren Beschreibung unsicher ist, verbleiben im Kreis. Die Berechnung der näherungsweise linearisierenden Rückführung kann z.B. auf eine polynomiale Approximation des nichtlinearen Modells gestützt werden /52/, oder auf Näherungen für das exakt linearisierende Rückführgesetz. Alternativ ist eine Lösung durch Approximation von E/A-Operatoren denkbar. In /1/ wird eine Lösung über Minimierung sogenannter Nichtlinearitätsmaße vorgeschlagen. Die Nichtlinearitätsmaße quantifizieren die "Größe" der Nichtlinearität im E/A-Verhalten und erlauben so, neben der Synthese näherungsweise linearisierender Regler, auch deren Analyse.

4. Zusammenfassung

Die exakten Linearisierungstechniken erlauben einen systematischen Entwurf von Reglern für eine allgemeine Klasse von nichtlinearen Systemen.

Prinzipiell werden die exakte Linearisierung des Zustands- und des Eingangs/Ausgangs-Verhaltens unterschieden. Die exakte Zustands-Linearisierung stellt ein elegantes Verfahren zur Stabilisierung nichtlinearer Regelstrecken dar. Darüber hinausgehende Anforderungen an die Regelgüte können allerdings nur schwer berücksichtigt werden. Wegen der eingeschränkten Klasse zustands-linearisierbarer Systeme, und wegen der z.T. aufwendigen Berechnung, kommt den Näherungsverfahren zur Zustands-Linearisierung in der Praxis eine große Bedeutung zu. Diese Methoden versuchen einen Brückenschlag zwischen der relativen Einfachheit rein linearer Entwürfe und der aufwendigen exakten

Linearisierung zu erreichen. Speziell die Poincaré-Linearisierung, die die ersten nichtlinearen Terme in der Taylor-Entwicklung kompensiert, stellt eine attraktive Alternative zur exakten Linearisierung dar, wenn die Regelung um einen festen Arbeitspunkt erfolgt. Ein durch Extended Linearization oder durch Pseudo-Linearisierung kompensiertes System zeigt in linearer Näherung gleiches Verhalten unabhängig von Arbeitspunkt. Dadurch wird i.a. eine Vergrößerung des Stabilitätsgebiets erreicht. Durch die Uniform System Approximation wird eine bestmögliche Kompensation der Nichtlinearitäten in der Umgebung aller Arbeitspunkte erreicht. Dieses Verfahren ist der exakten Linearisierung am nächsten. Dies manifestiert sich jedoch in einem hohen Berechnungsaufwand, so daß dieser Technik hauptsächlich theoretische Bedeutung zukommt.

Die Zustands-Linearisierungstechniken können auch zum Entwurf nichtlinearer Beobachter herangezogen werden. Die Beobachterkorrektur wird dabei so entworfen, daß sich eine exakt bzw. näherungsweise lineare Beobachterfehlerdynamik ergibt, deren Stabilität und Einschwingdynamik leicht beeinflußt werden kann.

Ein gezielter Entwurf auf gute Regelgüte ist mit dem Verfahren der exakten Eingangs-/Ausgangs-Linearisierung möglich. Die besondere Attraktivität dieser Methode erklärt sich aus der Anwendbarkeit auf eine große Klasse nichtlinearer Systeme und aus der eleganten Möglichkeit, Anforderungen an die Regelgüte durch den Entwurf linearer Regler zu erfüllen. Eine *vollständige* Linearisierung des E/A-Verhaltens ist in der Praxis oft nicht notwendig und z.T. auch nicht erwünscht. Die Entwicklung von Verfahren zur näherungsweise Linearisierung des E/A-Verhaltens ist gegenwärtig ein Gebiet intensiver Forschung.

In vielen Fällen ist eine exakte Linearisierung des Zustands- oder E/A-Verhaltens nur unter Inkaufnahme großer Stellamplituden zu erreichen. Falls die benötigte Stellenergie nicht aufgebracht werden kann, oder dies nicht erwünscht ist, kann durch die diskutierten Näherungsverfahren ein Kompromiß zwischen Stellenergie und Linearität erzielt werden.

Obwohl die exakten Linearisierungstechniken mit großem Erfolg an realen Regelungsproblemen getestet wurden, ist ihre Anwendung nicht in allen Fällen möglich und sinnvoll. Neben ihrem Wert als praktikable Entwurfsmethode, stellt die zugrundeliegende Theorie zusätzlich einen wichtigen Schritt auf dem Weg zur Entwicklung einer allgemeinen Regelungstheorie nichtlinearer Systeme dar.

Anhang

Definition: Die Ableitung einer skalaren zustandsabhängigen Funktion $\lambda(\mathbf{x})$ entlang einer zustandsabhängigen Vektorfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})^4$ wird Lie-Ableitung genannt und ist definiert als

$$L_f \lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad . \quad (60)$$

4. Eine zustandsabhängige Vektorfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ wird auch als Vektorfeld bezeichnet.

Die Lie-Ableitung $L_f \lambda(\mathbf{x})$ ist wieder eine skalare Größe. Demzufolge kann dieser Differentialoperator wiederholt angewandt werden: beispielsweise kann zuerst entlang einer Vektorfunktion $f(\mathbf{x})$ und anschließend entlang einer Vektorfunktion $g(\mathbf{x})$ abgeleitet werden

$$L_g L_f \lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial (L_f \lambda)}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \quad . \quad (61)$$

Die mehrfache Ableitung entlang derselben Funktion $f(\mathbf{x})$ ist natürlich ebenfalls möglich und wird in der Notation durch einen hochgestellten Index ausgedrückt:

$$L_f^k \lambda(\mathbf{x}) = \frac{\partial (L_f^{k-1} \lambda)}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad . \quad (62)$$

Definition: Die Lie-Klammer zweier Vektorfunktionen $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ ist definiert durch

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} f - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} g \quad . \quad (63)$$

Die Lie-Klammer $[f, g]$ wird oft auch als $ad_f g$ geschrieben. Das Ergebnis der Lie-Klammer-Operation ist wieder eine Vektorfunktion. Folglich ist eine sukzessive Anwendung möglich. Dies wird durch die folgende Standardnotation ausgedrückt:

$$ad_f^k g = [f, ad_f^{k-1} g] \quad . \quad (64)$$

Zusätzlich wird vereinbart, daß $ad_f^0 g = g$ gilt.

Danksagung

Die Autoren danken J. Schaffner und R. Rothfuß für ihre hilfbereite Unterstützung bei den symbolischen Berechnungen sowie B. Schleh und B. Raichle für ihre Hilfe beim Text-Layout.

Literatur

- /1/ Allgöwer, F. und Gilles, E. D.: Approximate input/output-linearization of nonlinear systems. AIChE Annual Meeting, Miami, FL, 1992.
- /2/ Allgöwer, F. und Raisch, J.: Multivariable controller design for an industrial distillation column. In: The Mathematics of Control Theory, Clarendon Press, Oxford 1992, S. 381–406.
- /3/ Allgöwer, F., Sax, A., und Gilles, E. D.: Nonlinear controller design for a binary distillation column by exact input/output linearization. AIChE Annual Meeting, San Francisco, CA, 1989.
- /4/ Baumann, W. und Rugh, W.: Feedback control of nonlinear systems by extended linearization. IEEE Trans. Automat. Contr. 31(1) (1986), S. 40–46.
- /5/ Birk, J. und Zeitz, M.: Program for symbolic and rule-based analysis and design of nonlinear systems. Proc. First European Conference on Algebraic Computing in Control (Hrsg.: Jacob, G. und Lamnabhi-Lagarrigue, F.), Paris 1991.
- /6/ Brunovsky, P.: A classification of linear controllable systems. Kybernetika 6 (1970), S. 173–188.

- /7/ *Byrnes, C. I. und Isidori, A.:* A frequency domain philosophy for nonlinear systems. Proc. 23rd IEEE Conf. Decision Contr., 1984, S. 1569–1573.
- /8/ *Byrnes, C. I. und Isidori, A.:* Global feedback stabilization of nonlinear systems. Proc. 24th IEEE Conf. Decision Contr., Ft.Lauderdale, FL. 1985, S. 1031–1037.
- /9/ *Calvet, J.-P.:* A Differential Geometric Approach for the Nominal and Robust Control of Nonlinear Chemical Processes. Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 1989.
- /10/ *Calvet, J.-P. und Arkun, Y.:* Robust control design for uncertain nonlinear systems under feedback linearization. Proc. 28th IEEE Conf. Decision Contr., Tampa, FL. 1989, S. 102–106.
- /11/ *Castillo, B.:* Output tracking through singular points for a class of nonlinear systems. Proc. 1st European Control Conference, Grenoble 1991.
- /12/ *Champetier, C., Mouyon, P., und Reboulet, C.:* Pseudolinearization of multi-input nonlinear systems. Proc. 23rd IEEE Conf. Decision Contr., 1984, S. 96–97.
- /13/ *Claude, D., Fliess, M., und Isidori, A.:* Immersion, directe et par bouclage d'un système non linéaire dans un linéaire. C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris 296 (1983), S. 237–240.
- /14/ *Doyle III., F. J., Allgöwer, F., Oliveira, S., und Morari, M.:* On nonlinear systems with poorly behaved zero dynamics. Proc. Amer. Contr. Conf., Chicago, IL 1992, S. 2571–2575.
- /15/ *Engell, S. und Klatt, K.-U.:* Regelung auf der Grundlage linearer Reglerentwürfe am Beispiel Rührkesselreaktor mit Parallel- und Folgereaktion. In: VDI-Bericht Nr. 1026, VDI-Verlag, Düsseldorf 1993.
- /16/ *Ford, H.:* Numerical and Symbolic Methods for Transforming Control Systems to Canonical Form. Ph.D. Thesis, Texas Tech University, 1983.
- /17/ *Freund, E.:* The structure of decoupled nonlinear systems. Int. J. Contr. 21 (1975), S. 443–450.
- /18/ *Friedrich, M., Storz, M., und Gilles, E. D.:* Asymptotically exact linearization of chemical processes. Proc. DYCORD '92, Univ. of Maryland 1992, S. 369–374.
- /19/ *Friedrich, M., Storz, M., und Gilles, E. D.:* Asymptotisch exakte Linearisierung des Ein-/Ausgangsverhaltens nichtlinearer Systeme, 1993. zur Veröffentlichung eingereicht.
- /20/ *Garcia, C. E. und Morshedi, A. M.:* Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC). Chem. Eng. Commun. 46 (1986), S. 73–87.
- /21/ *Gopalswamy, S. und Hedrich, J. K.:* Asymptotic tracking of non-minimum phase systems. Technical Report UCB-VDL/91/01, University of California, Berkeley, 1991.
- /22/ *Hahn, H., Leimbach, K. D., und Zhang, X.:* Nonlinear control of a spatial multi-axis servo-hydraulic test facility. Proc. 12th IFAC World Congress, Sydney 1993.
- /23/ *Hauser, J.:* Nonlinear control via uniform system approximation. Syst. Contr. Lett. 17 (1991), S. 145–154.
- /24/ *Hauser, J.:* Higher order approximate feedback linearization about a manifold. Proc. IFAC-Symposium Nonlinear Control System Design, Bordeaux 1992, S. 37–42.

- /25/ Hauser, J., Sastry, S., und Kokotović, P.: Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example. Proc. 28th IEEE Conf. Decision Contr., Tampa, FL. 1989, S. 1987–1993.
- /26/ Hauser, J., Sastry, S., und Meyer, G.: Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems - application to V/STOL aircraft. Automatica 28(4) (1992), S. 665–679.
- /27/ Henson, M. A. und Seborg, D. E.: Nonlinear control strategies for continuous fermentors. Proc. Amer. Contr. Conf., 1990, S. 2723–2728.
- /28/ Hirschorn, R. M.: Invertibility of nonlinear control systems. SIAM J. Contr. Optim. 17(2) (1979), S. 289–297.
- /29/ Hirschorn, R. M.: (A,B)-invariant distributions and disturbance decoupling of nonlinear systems. SIAM J. Contr. Optim. 19(2) (1981), S. 1–19.
- /30/ Hoo, K. A. und Kantor, J. C.: Global linearization and control of a mixed culture bioreactor with competition and external inhibition. Math. Biosci. 82 (1986), S. 43–62.
- /31/ Hung, J. Y., Gao, W. B., und Hung, J. C.: Variable structure control - a survey. IEEE Trans. Ind. Electr. 40(1) (1993), S. 2–22.
- /32/ Hunt, L., Luksic, M., und Su, R.: Exact linearizations of input-output systems. Int. J. Contr. 43(1) (1986), S. 247–255.
- /33/ Hunt, L., Su, R., und Meyer, G.: Global transformations of nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Contr. 28(1) (1983), S. 24–31.
- /34/ Isidori, A.: Control of nonlinear systems via dynamic state feedback. In: Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory (Hrsg.: Fliess, M. und Hazewinkel, M.), Reidel, Dordrecht 1986, S. 121–145.
- /35/ Isidori, A.: Nonlinear Control Systems: An Introduction. Springer-Verlag, Berlin, 2. Ausgabe, 1989.
- /36/ Isidori, A., Krener, A. J., Gori Giorgi, C., und Monaco, S.: Nonlinear decoupling via feedback: A differential geometric approach. IEEE Trans. Automat. Contr. 26 (1981), S. 331–345.
- /37/ Isidori, A. und Ruberti, A.: On the synthesis of linear input-output responses for nonlinear systems. Syst. Contr. Lett. 4(1) (1984), S. 17–22.
- /38/ Jacubczyk, B. und Respondek, W.: On linearization of control systems. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 28 (1980), S. 517–522.
- /39/ Kailath, T.: Linear Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.
- /40/ Kappos, E.: A geometrical linearization theory. Proc. 28th IEEE Conf. Decision Contr., Tampa, FL. 1989, S. 77–81.
- /41/ Karahan, S.: Higher Degree Approximations to Nonlinear Systems. Ph.D. Thesis, University of California, Davis, 1988.
- /42/ Klatt, K.-U. und Engell, S.: Rührkesselreaktor mit Parallel- und Folgereaktion. Testbeispiel des GMA FA 1.4 zur nichtlinearen Regelung. In: VDI-Bericht Nr. 1026, VDI-Verlag, Düsseldorf 1993.
- /43/ Kravaris, C. und Chung, C.-B.: Nonlinear state feedback synthesis by global input/output linearization. AIChE J. 33(4) (1987), S. 592–603.

- /44/ Krener, A.: Normal forms for linear and nonlinear systems. In: *Differential Geometry: The Interface between Pure and Applied Mathematics* (Hrsg.: Luksic, M., Martin, C., und Shadwick, W.), American Mathematical Society 1987, S. 157–189.
- /45/ Krener, A. J.: On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems. *SIAM J. Contr.* 11(4) (1973), S. 670–676.
- /46/ Krener, A. J.: Approximate linearization by state feedback and coordinate change. *Syst. Contr. Lett.* 5 (1984), S. 181–185.
- /47/ Krener, A. J.: Nonlinear controller design via approximate normal forms. *Proc. First European Conference on Algebraic Computing in Control* (Hrsg.: Jacob, G. und Lamnabhi-Lagarrigue, F.), Paris 1991.
- /48/ Krener, A. J., Karahan, S., Hubbard, M., und Frezza, R.: Higher order linear approximations to nonlinear control systems. *Proc. 27th IEEE Conf. Decision Contr.*, Athen 1987, S. 519–523.
- /49/ Levine, J. und Rouchon, P.: Quality control of binary distillation columns via nonlinear aggregated models. *Automatica* 27(3) (1991), S. 463–480.
- /50/ Lien, C.-Y. und Wang, T.-W.: Application of feedback linearization to bioreactor control. *Proc. Amer. Contr. Conf.*, 1990, S. 2161–2166.
- /51/ Nijmeijer, H. und van der Schaft, A. J.: *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- /52/ Paolini, E., Romagnoli, J. A., Desages, A. C., und Palazoglu, A.: Approximate models for control of nonlinear systems. *Technical Report UCD-EECS-SCR-91/1*, University of California, Davis, 1991.
- /53/ Patwardhan, A. A., Rawlings, J. B., und Edgar, T. F.: Nonlinear model predictive control. *Chem. Eng. Commun.* 87 (1990), S. 123–141.
- /54/ Reboulet, C. und Champetier, C.: A new method for linearizing non-linear systems: the pseudolinearization. *Int. J. Contr.* 40(4) (1984), S. 631–638.
- /55/ Rothfuß, R., Schaffner, J., und Zeitz, M.: Rechnergestützte Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme. In: *VDI-Bericht Nr. 1026*, VDI-Verlag, Düsseldorf 1993.
- /56/ Rugh, W.: The extended linearization approach for nonlinear system problems. In: *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory* (Hrsg.: Fliess, M. und Hazewinkel, M.), Reidel, Dordrecht 1986, S. 285–309.
- /57/ Schwarz, H.: *Nichtlineare Regelungssysteme*. Oldenbourg Verlag, München, 1991.
- /58/ Soroush, M. und Kravaris, C.: Multivariable nonlinear control of a continuous polymerization reactor. *Amer. Contr. Conf.* (1992), S. 1429–1432.
- /59/ Tarn, T. J., Cheng, D., und Isidori, A.: Pfaffian basis for affine nonlinear systems. *Proc. 26th IEEE Conf. Decision Contr.*, Los Angeles, CA. 1987, S. 493–504.
- /60/ Wang, J. und Rugh, W.: On the pseudo-linearization problem for nonlinear systems. *Syst. Contr. Lett.* 12 (1989), S. 161–167.
- /61/ Wonham, W.: *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- /62/ Wright, R. A. und Kravaris, C.: Nonminimumphase compensation for nonlinear systems. *AIChE Annual Meeting*, Chicago, IL, 1989.
- /63/ Zeitz, M.: Canonical forms for nonlinear systems. *Proc. IFAC-Symposium Nonlinear Control System Design* (Hrsg.: Isidori, A.), Capri 1989.