Achtdimensionale stabile Ebenen mit quasieinfacher Automorphismengruppe

DISSERTATION

der mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Markus Stroppel
aus Tuttlingen

1990

Tag der mündlichen Prüfung: 22. April 1991

Dekan:	Professor Dr. G. Scheja
1. Berichterstatter:	Professor Dr. H. Salzmann
2. Berichterstatter:	Dozent Dr. T. Grundhöfer

INHALT:

VORWORT

In der vorliegenden Arbeit wird das systematische Studium achtdimensionaler stabiler Ebenen mit großer Automorphismengruppe begonnen. Stabile Ebenen stellen eine Verallgemeinerung kompakter zusammenhängender projektiver Ebenen dar. Viele Methoden und manche Ergebnisse lassen sich übertragen. Die genaue Problemstellung und ihr Hintergrund sind in der Einleitung skizziert, dort werden auch die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit genannt.

Meinem Lehrer, Prof. Dr. H. Salzmann, habe ich nicht nur für die Anregung zu dieser Arbeit, sondern auch für seine stete Bereitschaft zur Diskussion der aufgetretenen Probleme zu danken. Weiter gilt mein Dank den Herren Prof. Dr. R. Löwen in Braunschweig und Doz. Dr. Th. Grundhöfer für ihre Unterstützung. Nicht zuletzt hat die gute Arbeitsatmosphäre unter meinen Mit-Doktoranden Richard Bödi, Michael Hubig und Martin Lüneburg zum Gelingen beigetragen.

1. Einleitung, Grundlagen.

Die gewohnte euklidische, aber auch die elliptische und die hyperbolische Geometrie sind *topologische Geometrien* in dem Sinne, daß Verbinden und Schneiden (soweit definiert) stetige Operationen sind. Betrachtet man diese Geometrien (und ihre Analoga über den Körpern $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder der alternativen Algebra $\mathbb{O}$) als klassische topologische Ebenen, so stellt sich die Frage nach möglichen Charakterisierungen, etwa durch Homogenitätsvoraussetzungen (vgl. [73: p. 2]). Dazu soll zunächst eingegrenzt werden, was unter einer topologischen Ebene zu verstehen ist [73: p. 4]:

Wir betrachten *lineare Räume* (das heißt, es existieren eindeutig bestimmte Verbindungsgeraden zu je zwei Punkten) mit einer Hausdorff-Topologie auf dem Punktraum und einer solchen Hausdorff-Topologie auf dem Geradenraum, daß die Operationen des Verbindens und Schneidens stetig sind.

Um etwa offene Teilmengen des dreidimensionalen reellen affinen Raumes auszuschließen, gelte folgendes *Stabilitätsaxiom*:

Der Definitionsbereich der Schnittoperation ist offen in der Menge der Paare (verschiedener) Geraden.

In [33] heißt eine solche topologische Ebene eine stabile Ebene. In der vorliegenden Arbeit sollen generell stärkere Voraussetzungen an die Topologie des Punktraumes gestellt werden:

a) Auf jedem unendlichen kommutativen Körper gibt es unendlich viele verschiedene nicht diskrete Hausdorff-Körper-Topologien, von denen höchstens eine lokal kompakt ist. Auch im Blick auf die Bedeutung lokaler Kompaktheit für die Strukturtheorie topologischer Gruppen erscheint es vernünftig, einen lokal kompakten Punktraum vorauszusetzen.

b) Ein interessanter topologischer Parameter des Punktraumes ist seine (Überdeckungs-) Dimension (vgl. [59], [58]). Projektive Ebenen mit nulldimensionalem Punktraum sind schwer zugänglich, da unendlich viele nicht isomorphe desarguessche Beispiele existieren (vgl. [25: XI.7.7]). Für lokal kompakte topologische Ebenen mit unendlich-dimensionalem Punktraum ist kein Beispiel bekannt. Sicher ist, daß jede lokal kompakte Translationsebene einen Punktraum endlicher Dimension hat (vgl. [25: XI.5.4]). Aus diesen (und anderen) Gründen erscheint die Beschränkung auf Punkträume von positiver, endlicher Dimension zweckmäßig. Wir übernehmen daher die folgende Definition von Löwen [51]:

(1.1) Definition.

i) Es sei $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M}, \mathrm{I})$ eine Inzidenzgeometrie, in der zu je zwei verschiedenen Punkten aus M eine eindeutige Verbindungsgerade in $\mathcal{M}$ existiert (das heißt, ein linearer Raum), und die ein Viereck enthält.

ii) Auf M und $\mathcal{M}$ seien solche Hausdorff-Topologien gegeben, daß die Operationen des Verbindens und Schneidens auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig sind, der Definitionsbereich der Schnittoperation sei offen in $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.

iii) Der Punktraum M sei lokal kompakt und von positiver, endlicher (Überdeckungs-) Dimension.

Dann heiße $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M}, \mathrm{I})$ (oder einfach $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind) eine *stabile Ebene*.

(1.2) Bemerkung. a) Man kann, wie üblich, jede Gerade $G \in \mathcal{M}$ mit der Menge $[G]$ der mit ihr inzidenten Punkte identifizieren. In diesem Fall ist $\mathrm{I} = \{(p, G) \mid p \in [G]\}$. Die Menge $[G]$ ist stets abgeschlossen in M [33: 1.3].

b) Die Topologie von $\mathcal{M}$ ist durch die von M bestimmt [33: 1.4].

(1.3) Bezeichnungen.

a) Wir werden stabile Ebenen in der vorliegenden Arbeit stets mit $\mathbb{M}, \mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{F} \ldots$, die zugehörigen Punktmengen mit $M, D, E, F \ldots$, und die zugehörigen Geradenmengen mit $\mathcal{M}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \ldots$ bezeichnen.

b) Das *Büschel* durch einen Punkt $p \in M$ ist $\mathcal{M}_p = \{G \in \mathcal{M} \mid p \in G\}$.

c) Mit $G \wedge H$ sei der Schnittpunkt von $G, H \in \mathcal{M}$, mit pq die Verbindungsgerade von $p, q \in M$ bezeichnet.

Die möglichen Topologien für $M, \mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_p$ hat Löwen gekennzeichnet. Wir stellen die in der vorliegenden Arbeit benutzten Ergebnisse zusammen:

(1.4) Satz. *Es sei* $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$ *eine stabile Ebene,* $p \in M, G \in \mathcal{M}$. *Dann gilt:*

a) $l = \dim G = \dim \mathcal{M}_p = 2^k \leq 8$ und $\dim M = \dim \mathcal{M} = 2l$. *Die Dimension des Fahnenraums ist* $3l$ *[46: Th. 1].*

b) *Das Büschel* $\mathcal{M}_p$ *ist kompakt, zusammenhängend und homotopieäquivalent zu* $\mathbb{S}_l$. *Ist* $\mathcal{M}_p$ *eine topologische Mannigfaltigkeit, so ist* $\mathcal{M}_p$ *homöomorph zu* $\mathbb{S}_l$ *[33: 1.17], [33: 1.14], [46: Th. 3], [33: 1.19].*

c) *Zusammenhängende offene Teilmengen von* $G, \mathcal{M}_p, M$ *oder* $\mathcal{M}$ *sind Cantor-Mannigfaltigkeiten (das heißt, keine Teilmenge mit größerer Codimension als 1 kann trennen) [46: Th. 11].*

d) *Eine abgeschlossene Teilmenge von* $G, \mathcal{M}_p, M$ *oder* $\mathcal{M}$ *hat genau dann nicht leeres Inneres, wenn sie die volle Dimension hat [46: Th. 11].*

e) *Die Räume* $G, \mathcal{M}_p, M$ *und* $\mathcal{M}$ *sind separabel, metrisch und lokal kompakt. Insbesondere stimmen Überdeckungsdimension, kleine und große induktive Dimension überein [33: 1.9], [58].*

f) *Der Raum* G *ist lokal bogenzusammenhängend und lokal kontrahierbar [33: 1.12].*

g) *Die Zusammenhangskomponenten von* M *sind offen [33: 1.4, 1.12].*

Über die Gruppe Aut$(\mathbb{M})$ der stetigen Kollineationen von $\mathbb{M}$ ist Folgendes bekannt:

(1.5) Satz.

a) *Mit der kompakt-offenen Topologie ist* Aut$(\mathbb{M})$ *eine lokal kompakte separable metrische Gruppe [33: 2.9].*

b) *Für die Dimension der Punktbahnen einer endlich-dimensionalen, abgeschlossenen Untergruppe* $\Delta \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ *gilt*

$$\dim p^{\Delta} = \dim \Delta - \dim \Delta_p = \dim \Delta/\Delta_p,$$

analog für Geradenbahnen [26].

Wir werden in der vorliegenden Arbeit nur abgeschlossene Untergruppen von Aut$(\mathbb{M})$ betrachten. Dies sind genau die lokal kompakten Untergruppen [31: §26, Cor. 3].

Die eingangs vage gestellte Frage läßt sich nun präzisieren:

Welche Homogenitätsforderungen reichen hin, um die stabilen Ebenen gegebener Dimension zu charakterisieren, die in die kompakte projektive Moufangebene derselben Dimension einbettbar sind?

Folgende Ergebnisse wurden bisher erreicht:

i) Bei jeder solchen Einbettung bleibt die Automorphismengruppe erhalten [44].

ii) Es gibt punkthomogene stabile Ebenen, die nicht im genannten Sinne einbettbar sind (etwa die $SL_2\mathbb{K}$-Ebenen für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, vgl. [88], [51], dagegen [93]).

iii) Fahnenhomogene stabile Ebenen sind stets einbettbar, und man kennt alle vorkommenden Fälle genau [47].

iv) Zwei- und vierdimensionale stabile Ebenen mit vielen Zentral- oder Axialkollineationen wurden von Strambach [86],[91], Löwen [36], [37], [38], [39], [40], [41], [43], [48] und Seidel [79],[80],[81],[82] eingehend untersucht und klassifiziert.

v) Die Frage nach Einbettbarkeit in Inzidenzstrukturen von höherer geometrischer Dimension wurde von Groh [21],[22] in sehr allgemeinem Rahmen beantwortet.

vi) Für zweidimensionale Ebenen mit zusammenhängenden Geraden hat Polley [63],[64],[65] lokal gültige Schließungssätze untersucht und deren globale Gültigkeit bewiesen.

vii) Die Dimensionsformel (1.5,b) ermöglicht Abschätzungen der Dimension der Automorphismengruppe Aut ($\mathbb{M}$). Diese Dimension kann als Maß für die Homogenität der Ebene dienen. Zwei- und vierdimensionale stabile Ebenen sind in dieser Hinsicht eingehend untersucht worden: von Salzmann [68], [69], [70], [71], [72], [73], [74], Strambach [87], [88], [89], [90], [92], Betten [3],[4], Groh [16], [17], [18], [19], [20], [24] und anderen wurden alle zweidimensionalen Ebenen mit zusammenhängenden Geraden und mindestens dreidimensionaler Automorphismengruppe bestimmt. Eine abschließende Darstellung findet sich in [24]. Die Klassifikation ohne Zusammenhangsvoraussetzung gelang Löwen [45] und Hubig [29]. Im Fall

$\dim M = 4$ sind alle Ebenen mit mindestens sechsdimensionaler, nicht auflösbarer Gruppe durch Löwen [49],[51] bestimmt.

In der vorliegenden Arbeit wird nach allgemeinen Vorbereitungen die oben gestellte Frage für achtdimensionale stabile Ebenen in folgenden Teilaspekten beantwortet:

Theorem A.
Kompakte Gruppen von Automorphismen
Hier wird das Ergebnis von Salzmann [76: sect. 3] auf achtdimensionale stabile Ebenen übertragen: Es sei Δ *eine kompakte Gruppe von Automorphismen einer achtdimensionalen stabilen Ebene* $\mathbb{M}$. *Ist* $\dim \Delta > 13$, *so ist* Δ *isomorph zur elliptischen Bewegungsgruppe* $\mathrm{PU}_3\mathbb{H}$, *und* $\mathbb{M}$ *ist isomorph zur projektiven Quaternionenebene. Die Wirkung ist äquivalent zur gewohnten.*

Theorem B.
Quasieinfache Gruppen von Automorphismen
Jede achtdimensionale stabile Ebene mit einer mehr als 16-dimensionalen quasieinfachen Gruppe Δ *von Automorphismen ist in die projektive Quaternionenebene einbettbar, und* Δ *ist isomorph zu einer der Gruppen*

$$\mathrm{PSL}_3\mathbb{H}, \quad \mathrm{PU}_3\mathbb{H}, \quad \mathrm{PU}_3\mathbb{H}(1).$$

Die Wirkung von Δ *auf* $\mathbb{M}$ *ist äquivalent zur gewohnten oder deren Dual.*

2. Lokal kompakte Gruppen.

Sei $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$ eine stabile Ebene. Mit der kompakt-offenen Topologie wird die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ der stetigen Kollineationen von $\mathbb{M}$ eine lokal kompakte Gruppe [33: 2.9]. Für $\dim M = 2$ ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ stets eine Liegruppe [45], im Fall vierdimensionaler Ebenen wird der Liecharakter jedenfalls durch Zusatzvoraussetzungen gesichert [33: 2.10, 2.11]. Im Allgemeinen ist die Frage nach dem Liecharakter von $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ offen. Die nachfolgend zusammengestellten Tatsachen erlauben allerdings, die Theorie der Liegruppen zum Verständnis lokal kompakter Gruppen auszunutzen.

(2.1) Lemma. *Eine Untergruppe einer lokal kompakten Gruppe ist genau dann lokal kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis: [31: §26 Cor. 3] □

Wir werden aus diesem Grund in der vorliegenden Arbeit nur abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ betrachten.

(2.2) Definition. Sei Δ eine lokal kompakte Gruppe. Wir nennen Δ von einer Liegruppe Λ *approximiert*, wenn ein Epimorphismus von Δ auf Λ existiert, dessen Kern total unzusammenhängend ist.

Der folgende Satz zeigt, daß in der Tat Δ projektiver Limes einer Folge von Überlagerungsgruppen von Λ ist. Da durch Λ das System aller Überlagerungsgruppen festgelegt ist, sei diese verkürzende Sprechweise gestattet.

(2.3) Satz. *Sei Δ eine zusammenhängende lokal kompakte Gruppe mit abzählbarer Basis. Dann gibt es in jeder Umgebung des Neutralelementes einen kompakten Normalteiler* N *derart, daß die Faktorgruppe $\Delta/_{\mathrm{N}}$ eine Liegruppe ist. Durch geeignete Wahl solcher Normalteiler erhält man ein inverses System $(\Lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Liegruppen, dessen projektiver Limes (als topologische Gruppe) isomorph zu Δ ist. Dabei gilt $\Lambda_i = \Delta/_{\mathrm{N}_i}$, $\mathrm{N}_i \geq \mathrm{N}_{i+1}$, und die Verbindungsmorphismen $\pi_i \colon \Delta/_{\mathrm{N}_{i+1}} \to \Delta/_{\mathrm{N}_i}$ sind kanonisch.*

Beweis: [56: 4.6, 4.7] □

(2.4) Bemerkung. Im Fall $\dim \Delta < \infty$ kann der Normalteiler N so gewählt werden, daß Δ von $\Delta/_{N}$ approximiert wird. Auf dem dann total unzusammenhängenden Normalteiler N kann die zusammenhängende Gruppe Δ nur trivial wirken, und N liegt demnach im Zentrum Z von Δ. Insbesondere ist $\Delta/_{Z}$ eine Liegruppe.

(2.5) Satz (MALCEV-IWASAWA). *Sei Δ eine zusammenhängende lokal kompakte Gruppe. Dann sind alle maximal kompakten Untergruppen von Δ zusammenhängend und paarweise zueinander konjugiert. Der Δ zugrundeliegende Raum ist homöomorph zum Produkt einer maximal kompakten Untergruppe Φ mit einem euklidischen Raum (endlicher Dimension!). Ist Δ abelsch, so ist Δ sogar als Gruppe isomorph zu $\Phi \times \mathbb{R}^n$, und Φ ist charakteristisch in Δ.*

Beweis: [32: Th. 13, p.549], vgl. [56: 4.13] □

(2.6) Satz (5. HILBERT-Problem). *Eine topologische Gruppe ist genau dann eine Liegruppe, wenn der zugrundeliegende Raum eine topologische Mannigfaltigkeit ist.*

Beweis: [56: 4.10] □

(2.7) Korollar. *Eine zusammenhängende lokal kompakte Gruppe ist genau dann eine Liegruppe, wenn ihre maximal kompakten Untergruppen Liegruppen sind.*

(2.8) Lemma. *Sind Φ und Ψ zusammenhängende Untergruppen einer lokal kompakten Gruppe Δ, so ist auch die Kommutatorgruppe $[\Phi, \Psi]$ (das heißt das abgeschlossene Erzeugnis der Menge $K = \{\varphi\psi\varphi^{-1}\psi^{-1} \mid \varphi \in \Phi, \psi \in \Psi\}$) zusammenhängend.*

Beweis: Die von der Menge K der Kommutatoren erzeugte Gruppe ist $G = \bigcup_{n \geq 1} G_n$, wobei

$$G_n = \{\alpha_1^{\varepsilon_1} \cdots \alpha_n^{\varepsilon_n} \mid \alpha_i \in K, \varepsilon_i \in \{1, -1\}\}.$$

Die Mengen G_n sind zusammenhängend und enthalten das Neutralelement. Daher ist auch G und damit der topologische Abschluß $[\Phi, \Psi]$ von G in Δ zusammenhängend [13: Chap. V 1.6]. □

(2.9) Korollar. *Sei $\pi: \Gamma \to \Delta$ ein Homomorphismus mit total unzusammenhängendem Kern zwischen lokal kompakten Gruppen. Zwei zusammenhängende Untergruppen Φ und Ψ von Γ zentralisieren sich genau dann, wenn ihre Bilder Φ^π und Ψ^π einander zentralisieren.*

(2.10) Definition. Sei $\Delta \neq 1$ eine zusammenhängende lokal kompakte Gruppe. Δ heißt *quasieinfach* genau dann, wenn alle echten Normalteiler total unzusammenhängend sind. Δ heißt *halbeinfach* genau dann, wenn alle abelschen Normalteiler total unzusammenhängend sind.

(2.11) Lemma. *Sei Δ eine zusammenhängende lokal kompakte halbeinfache Gruppe endlicher Dimension. Dann existieren quasieinfache Normalteiler Σ_i von Δ, die einander gegenseitig zentralisieren und deren Komplexprodukt gleich Δ ist.*

Beweis: Die entsprechende Aussage gilt für Liegruppen [96: 3.4, Satz 4; 3.7, Satz 2]. Die Behauptung folgt aus (2.4) und (2.9). □

(2.12) Bemerkung. Quasieinfache Gruppen sind halbeinfach. Ist eine zusammenhängende lokal kompakte Gruppe $\Delta \neq 1$ nicht halbeinfach, so gibt es einen nicht trivialen zusammenhängenden abelschen Normalteiler von Δ. Wählt man einen minimalen solchen Normalteiler N, so gilt wegen (2.5): Der Normalteiler N ist kompakt, oder die maximal kompakte Untergruppe von N ist trivial. Im zweiten Fall ist N eine Liegruppe (2.7), und es gilt $N \cong \mathbb{R}^n$ für geeignetes n. Die Gruppe Δ induziert eine irreduzible lineare Wirkung auf N. Im kompakten Fall ist N zentral:

(2.13) Lemma. *Alle zusammenhängenden kompakten abelschen Normalteiler einer endlichdimensionalen zusammenhängenden lokal kompakten Gruppe Δ liegen im Zentrum.*

Beweis: Sei Φ ein solcher Normalteiler. Nach (2.3) gibt es einen Epimorphismus π von Δ auf eine Liegruppe Λ. Das Bild Φ^π ist eine zusammenhängende kompakte abelsche Liegruppe. Es gibt also ein n so, daß $\Phi^\pi \cong \mathbb{T}^n$ gilt. Auf der total unzusammenhängenden Torsionsuntergruppe $T = \{x \in \mathbb{T}^n \mid o(x) < \infty\}$ wirkt Λ trivial. Da T dicht in Φ^π liegt, folgt die Behauptung mit (2.9). □

(2.14) Satz. *Zu jeder zusammenhängenden Liegruppe Λ gibt es eine einfach zusammenhängende Liegruppe $\tilde{\Lambda}$, die von Λ approximiert wird. Bis auf Isomorphie ist $\tilde{\Lambda}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis: [96: 4.6] □

(2.15) Satz. *Die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe $\tilde{\Phi}$ einer kompakten halbeinfachen Liegruppe Φ ist wieder kompakt.*

Beweis: [66: Th. 110], [97: Th. 4.11.6], [6: §1 no. 4, Th. 1], [27: Ch.II 6.9] □

Das Folgende geht auf eine mündliche Mitteilung von Herrn Rainer Löwen zurück:

(2.16) Satz. *Sei Δ eine zusammenhängende lokal kompakte Gruppe endlicher Dimension mit abzählbarer Basis, Λ eine approximierende Liegruppe (vgl. (2.4)). Dann existiert ein stetiger Homomorphismus $\tilde{\lambda}: \tilde{\Lambda} \to \Delta$ mit total unzusammenhängendem (sogar diskretem) Kern N. Dabei bezeichne $\tilde{\Lambda}$ die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe von Λ.*

Beweis: Sei $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein inverses System von kompakten Normalteilern wie in (2.3), $\Lambda = \Lambda_0 = \Delta/_{N_0}$. Die kanonischen Verbindungsmorphismen seien $\pi_i: \Delta/_{N_{i+1}} \to \Delta/_{N_i} = \Lambda_i$. Mit $\tilde{\Lambda}_i$ sei die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe von Λ_i bezeichnet. Die Λ_i sind Liegruppen, für alle i ist deshalb der Kern von π_i diskret, und man erhält $\tilde{\Lambda}_i \cong \tilde{\Lambda}_0$. Man kann nun induktiv Überlagerungsabbildungen $\lambda_i: \tilde{\Lambda}_0 \to \Lambda_i$ so finden, daß $\lambda_{i+1}\pi_i = \lambda_i$. Die so gefundene Folge $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ induziert einen Homomorphismus $\tilde{\lambda}: \tilde{\Lambda}_0 \to \Delta$. Der Kern von $\tilde{\lambda}$ ist als Schnitt der Kerne der λ_i diskret. Für alle i ist die Hintereinanderausführung $\tilde{\lambda}\kappa_i = \lambda_i$ mit dem kanonischen Epimorphismus $\kappa_i: \Delta \to \Delta/_{N_i}$ stetig, also auch $\tilde{\lambda}$. □

(2.17) Bemerkung. Unter den in (2.16) gemachten Annahmen betrachten wir den von $\tilde{\lambda}$ induzierten injektiven stetigen Homomorphismus $\lambda: \tilde{\Lambda}/_N \to \Delta$. Für jede kompakte Teilmenge K von

$\tilde{\Lambda}/_{\mathsf{N}}$ ist die Einschränkung $\lambda': K \to K^\lambda$ ein Homöomorphismus. Insbesondere erhält man mit (2.15):

(2.18) Satz. *Die endlichdimensionale zusammenhängende lokal kompakte Gruppe Δ werde von der Liegruppe Λ approximiert, das heißt, es existiert ein Epimorphismus π von Δ auf Λ mit total unzusammenhängendem Kern. Eine Untergruppe Φ von Λ sei kompakt und halbeinfach. Dann enthält Δ eine zu Φ lokal isomorphe kompakte Untergruppe $\hat{\Phi}$, und die Einschränkung von π auf $\hat{\Phi}$ ist eine Überlagerungsabbildung auf Φ.*

3. Quasiperspektivitäten.

Im Folgenden sei Γ die Automorphismengruppe einer stabilen Ebene $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$ mit $\dim M = 2l$.

(3.1) Definition. Eine Gruppe $\Delta \leq \Gamma$ von Automorphismen heißt *quasiperspektiv*, wenn zu jeder Punktbahn x^Δ eine Gerade F_x existiert, die die ganze Bahn enthält.
Ein Automorphismus γ einer stabilen Ebene heißt *quasiperspektiv* (oder eine *Quasiperspektivität*), wenn er in einer quasiperspektiven Gruppe liegt.

(3.2) Bemerkung. Wird x von Δ bewegt, so ist F_x eindeutig bestimmt und hängt stetig von x ab [35: 1.1]. Mit $\mathcal{G}_\Delta = \{F_x \mid x \notin \mathrm{Fix}(\Delta)\}$ sei die Menge dieser Fixgeraden bezeichnet. Einschränkung der stetigen Abbildung $\pi : x \mapsto F_x$ auf eine von Δ bewegte Gerade liefert eine offene Einbettung und damit die lokale Homöomorphie der Geraden zu $\mathcal{G}_\Delta$. Für jede Quasiperspektivität γ sei $\mathcal{G}_\gamma = \mathcal{G}_{\langle\gamma\rangle}$.

(3.3) Lemma. *Ist γ quasiperspektiv und schneiden sich zwei Fixgeraden $F_x, F_y \in \mathcal{G}_\gamma$ in einem Punkt z, so ist γ planar (das heißt, die Fixpunktmenge von γ trägt eine stabile Ebene der halben Dimension), oder der Punkt z ist Zentrum von γ.*

Beweis: Die Dimension einer Geraden sei l. Seien G, H Geraden durch x bzw. y, die von γ bewegt werden. In G und H kann man kompakte Umgebungen V von x und W von y so wählen, daß die beiden Abbildungen

$$\mu : V \to F_y : q \mapsto q^\pi \wedge F_y$$
$$\nu : W \to F_x : q \mapsto q^\pi \wedge F_x$$

definiert sind und außerdem die Menge $V^\pi \times W^\pi$ im Definitionsbereich der Schnittoperation liegt (vgl. [33: 1.6]). Dabei sei $\pi : x \mapsto F_x$ wie in (3.2).

Wir unterscheiden zwei Fälle:

i) Es gibt einen Punkt $r \in V^{\mu}$ mit mehr als $l/2$-dimensionalem Urbild $r^{\mu^{\leftarrow}}$ unter μ. Dann gilt auch $\dim r^{\mu^{\leftarrow}\pi} > l/2$. Schneidet eine Gerade $L \in W^{\pi}$ die Menge $r^{\mu^{\leftarrow}\pi}$ außerhalb r, so tut dies auch eine benachbarte Gerade L'. Die Schnittfigur

$$\{L \wedge X \mid X \in W^{\pi}\} \cup \{L' \wedge X \mid X \in W^{\pi}\}$$

erzeugt eine Ebene mit Geraden der Dimension $e > l/2$. Es folgt $e = l$ und $\gamma = \mathbb{1}$, ein Widerspruch. Alle Geraden aus W^{π} gehen demnach durch r. Vertauschen der Rollen von V und W liefert, daß auch V^{π} im Geradenbüschel durch r enthalten ist. Hieraus folgt $r = F_x \wedge F_y = z$, und die Menge der Fixgeraden von γ durch z ist offen und abgeschlossen im Büschel durch z. Die Büschel sind zusammenhängend [33: 1.14], die Abbildung γ wirkt also trivial auf dem Büschel durch z. Damit ist z als Zentrum von γ erkannt.
ii) Es gilt $\max\{\dim r^{\mu^{\leftarrow}} \mid r \in V^{\mu}\} \leq l/2$. Nach [59: Th. III.6] ist dann $\dim V^{\mu} \geq l/2$, und die Menge der Schnittpunkte von $V^{\mu} \times W^{\nu}$ erzeugt eine Unterebene der Dimension $d \geq l$. Aus $\gamma \neq \mathbb{1}$ folgt $d = l \geq 2$, und γ ist planar. □

(3.4) Lemma. *Hat $\gamma \in \Gamma$ eine Achse A und zwei weitere Fixpunkte außerhalb A, so gilt $\gamma = \mathbb{1}$.*

Beweis: Verbindet man jeweils die Punkte der Achse mit den beiden Fixpunkten, so erhält man zwei offene Teilmengen der Büschel durch die Fixpunkte. Die Schnittfigur dieser Geradenmenge erzeugt die ganze Ebene, woraus $\gamma = \mathbb{1}$ folgt. □

(3.5) Korollar. *Planare Automorphismen haben weder Zentrum noch Achse.*

(3.6) Lemma. *Es sei p ein Punkt einer stabilen Ebene $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$. Dann ist für jede Gerade G durch p der topologische Raum $\mathcal{M}_p \setminus \{G\}$ azyklisch.*

Beweis: Nach [46: 5.3] besitzt jede kompakte Teilmenge $\mathcal{X}$ von $\mathcal{M}_p \setminus \{G\}$ eine kontrahierbare kompakte Umgebung in $\mathcal{M}_p \setminus \{G\}$. Hieraus ergibt sich, daß alle Homotopiegruppen von $\mathcal{M}_p \setminus \{G\}$ trivial sind. Nach dem Satz von Hurewicz [85: Chap. 7, Sec. 5, Theorem 4, p. 397] ist $\mathcal{M}_p \setminus \{G\}$ auch homologisch trivial, das heißt azyklisch. □

(3.7) Lemma. *(Klassifikation involutorischer Automorphismen) Sei $\gamma \neq \mathbb{1}$ eine Quasiperspektivität endlicher Ordnung (etwa eine Involution). Dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:*

a) γ ist (fixpunkt-)frei

b) γ ist planar

c) γ hat ein Zentrum oder eine Achse (oder beides).

Beweis: Die genannten Fälle schließen sich gegenseitig aus (3.5). Sei q ein Fixpunkt von $\gamma \neq \mathbb{1}$. Da die Menge der Fixpunkte von γ nicht offen sein kann (sonst wäre $\gamma = \mathbb{1}$), existiert eine gegen q konvergente Folge q_n von Punkten, die von γ bewegt werden. Nach [33: 1.17] häuft sich die Menge der Geraden F_{q_n} bei einer Fixgeraden G, die nach [33: 1.5] durch q geht. Da $\mathcal{M}_q \setminus \{G\}$ azyklisch ist (3.6), gibt es wenigstens eine weitere Fixgerade H durch q nach [83]. Ist keine der Geraden G, H Achse von γ, so gilt $\{G, H\} \subset \mathcal{G}_\gamma$, und (3.3) läßt sich anwenden. □

(3.8) Lemma. *Sei $\gamma \neq \mathbb{1}$ eine Quasiperspektivität endlicher Ordnung mit Achse A. Dann existiert durch jeden Achsenpunkt $a \in A$ genau eine weitere Fixgerade $Z_a \neq A$ von γ.*

Beweis: Sei $a \in A$ ein Punkt auf der Achse von γ. Auf dem azyklischen Raum $\mathcal{M}_a \setminus \{A\}$ (vgl. (3.6)) wirkt γ nach [83] nicht frei, es gibt also eine Fixgerade $Z_a \neq A$ durch a. Da Z_a nicht Achse von γ ist (3.4), gilt $Z_a \in \mathcal{G}_\gamma$. Wäre Z_a nicht die einzige Fixgerade in $\mathcal{M}_a \setminus \{A\}$, so wäre nach (3.3) und (3.4) der Punkt a Zentrum von γ, und Z_b wäre für jeden Punkt $b \in A \setminus \{a\}$ Achse. □

(3.9) Korollar. *Kommutierende Involutionen mit derselben Achse sind gleich.*

Beweis: Der Beweis für den projektiven Fall in [76: 1.2] benutzt nur die Existenz und Eindeutigkeit einer zweiten Fixgeraden durch jeden Punkt der Achse. □

Für zentrale Involutionen gilt wenigstens die folgende schwächere Aussage:

(3.10) Lemma. *Sei $\mathcal{J}$ eine nicht leere Menge paarweise kommutierender Involutionen mit gemeinsamem Zentrum a. Existiert eine Involution α mit Achse A, die mit jedem Element von $\mathcal{J}$ kommutiert, so enthält $\mathcal{J}$ genau ein Element. Genauer gilt:*

a) *Liegt a nicht auf A, so ist $\mathcal{J} = \{\alpha\}$.*

b) *Liegt a auf A, so ist $\alpha \notin \mathcal{J} = \{\sigma\}$, und die Involution $\alpha\sigma$ hat die Achse Z_a.*

Beweis: Jedes Element $\sigma \in \mathcal{J}$ fixiert A. Liegt a nicht auf A, so ist A Achse von σ, und Behauptung a) folgt sofort aus (3.9). Da σ jede Gerade durch a fest läßt, fixiert im Fall $a \in A$ die Involution $\alpha\sigma$ im Büschel $\mathcal{M}_a$ genau die Geraden A und Z_a. Es ist daher $\alpha\sigma$ weder planar, noch hat $\alpha\sigma$ Zentrum a. Nach (3.7) hat $\alpha\sigma$ Achse A oder Z_a. Aus (3.9) folgt Behauptung b). □

(3.11) Korollar. *(Dreieckslemma)*

a) *In der Standgruppe eines Punktes x gibt es höchstens zwei kommutierende Involutionen mit Achsen durch x. Insbesondere hat im Falle der Existenz solcher Involutionen deren Produkt keine Achse durch x, und die Standgruppe eines Dreiecks enthält höchstens drei kommutierende nicht planare Involutionen.*

b) *In der Standgruppe eines Punktes gibt es höchstens drei paarweise kommutierende Involutionen mit Zentrum und Achse.*

c) *Seien α, β, γ verschiedene, nicht planare Involutionen, die ein Dreieck punktweise fixieren und paarweise kommutieren. Dann ist $\gamma = \alpha\beta \in \langle\alpha, \beta\rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.*

(3.12) Definition. Eine nicht leere offene Teilmenge U einer Geraden heißt *Halbachse* einer Gruppe $\Delta \leq \Gamma$, wenn Δ trivial auf U wirkt.

(3.13) Bemerkung. Hat $\Delta \leq \Gamma$ zwei Halbachsen, die nicht in derselben Geraden enthalten sind, so erzeugen diese beiden Punktmengen die ganze Ebene. Es folgt $\Delta = \mathbb{1}$.

(3.14) Lemma.

a) Gruppen mit Halbachsen haben höchstens die Dimension des Fahnenraumes, also $3l$.

b) Quasiperspektive Gruppen haben höchstens die Dimension des Fahnenraumes, quasiperspektive Gruppen mit Halbachse haben höchstens die Dimension einer Geraden.

c) Eine Gruppe $\Delta \leq \Gamma$ mit Halbachse U zentralisiere eine Involution $\sigma \in \Delta$. Dann ist σ axial, und $\dim \Delta \leq l$. Die Gruppe Δ wirkt frei auf den von σ bewegten Geraden durch Punkte der Halbachse.

Beweis: i) Sei $A \in \mathcal{M}$ eine Gerade und $U \subseteq A$ Halbachse einer Gruppe $\Delta \leq \Gamma$. Die Standgruppe Δ_x eines Punktes x, der nicht auf A liegt, fixiert jede der Verbindungsgeraden xu für $u \in U$. Diese Geraden bilden eine offene Teilmenge $\mathcal{U}$ des Büschels $\mathcal{M}_x$. Hält man nun einen weiteren Punkt y auf einer dieser Geraden fest, so schneidet die Verbindungsgerade yu mit irgendeinem Punkt $u \in U$ alle Geraden einer offenen, nicht leeren Teilmenge von $\mathcal{U}$. Die Gruppe $\Delta_{x,y}$ hat also zwei Halbachsen. Wegen $\dim \Delta/_{\Delta_x} \leq 2l$ und $\dim \Delta_x/_{\Delta_{x,y}} \leq \dim xy = l$ folgt die Behauptung a).

ii) Jede Gerade G, die von einer quasiperspektiven Gruppe Δ bewegt wird, ist Achse von Δ_G (vgl. (3.2)). Ist $U \subseteq A$ Halbachse von Δ, so kann man G im Büschel eines Punktes $u \in U$ wählen. Es folgt $\dim \Delta/_{\Delta_G} \leq l$ und wegen $\Delta_G = \mathbb{1}$ der zweite Teil der Behauptung b). Der erste Teil der Behauptung wird durch Festhalten einer beliebigen von Δ bewegten Geraden auf den Fall der Existenz einer (Halb-)Achse zurückgeführt.

iii) Nach (3.7) hat σ eine Achse A, und diese enthält U. Durch jeden Punkt $u \in U$ geht nach (3.8) genau eine Fixgerade Z_u von σ. Diese Gerade wird nun auch von Δ fixiert. Für jeden Punkt $x \in Z_u \setminus \{u\}$ hat Δ_x wieder zwei Halbachsen. Es folgt $\dim \Delta \leq l$.

iv) Fixiert $\delta \in \Delta$ eine Gerade $L \in \mathcal{M}_u \setminus \{A, Z_u\}$, so existiert für jeden Punkt v einer geeigneten Umgebung V von u in A der Schnittpunkt $z_v = L \wedge Z_v$. Der Automorphismus δ fixiert im Büschel $\mathcal{M}_{z_v}$ jeweils eine offene Menge von Geraden. Damit hat δ mehrere Halbachsen, und es folgt $\delta = \mathbb{1}$. □

Für kompakte quasiperspektive Gruppen gelten schärfere Schranken, die sich aus dem Folgenden ergeben:

(3.15) Satz. *Es sei $\Phi \leq \Gamma$ eine kompakte Gruppe von Automorphismen einer (nicht notwendig zusammenhängenden) stabilen Ebene $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$ mit $\dim M = 2l$.*

a) *Gibt es einen Punkt $p \in M$ mit $\dim p^\Phi = 2l$, so gilt $p^\Phi = M$, und $\mathbb{M}$ ist isomorph zur klassischen projektiven (Moufang-) Ebene der Dimension $2l$. Insbesondere ist Φ in der elliptischen Bewegungsgruppe enthalten und fixiert keinen Punkt. Der Zentralisator von Φ in der vollen Automorphismengruppe von $\mathbb{M}$ ist trivial.*

b) *Fixiert Φ einen Punkt p und gilt $\dim G^\Phi = l$ für eine Gerade G durch p, so fixiert Φ keine Gerade durch p, es gilt $G^\Phi = \mathcal{M}_p \approx \mathbb{S}_l$. Im Fall $l \geq 2$ enthält die Gruppe Φ eine zur einfach zusammenhängenden Überlagerungsgruppe Spin_{l+1} von $\mathrm{SO}_{l+1}\mathbb{R}$ isomorphe Gruppe Δ, die quasieffektiv und transitiv auf $\mathcal{M}_p$ wirkt. Die zentrale Involution von Δ wirkt trivial auf $\mathcal{M}_p$.*

c) *Fixiert Φ eine Gerade G und gilt $\dim p^\Phi = l$ für einen Punkt $p \in G$, so ist $p^\Phi = G$ eine kompakte Gerade. Insbesondere fixiert Φ keinen Punkt von G, es gilt $p^\Phi \cong \mathbb{S}_l$, und G schneidet jede andere Gerade $H \in \mathcal{M} \setminus \{G\}$. Im Fall $l \geq 2$ gilt weiter: Die Gruppe Φ enthält eine zur einfach zusammenhängenden Überlagerungsgruppe Spin_{l+1} von $\mathrm{SO}_{l+1}\mathbb{R}$ isomorphe Gruppe Δ, die quasieffektiv und transitiv auf G wirkt. Die zentrale Involution von Δ wirkt trivial auf G.*

Beweis: Kompakte Bahnen der vollen Dimension sind jeweils offen in M, G bzw. $\mathcal{M}_p$ (vgl. [46: Theorem 11c)]).

i) Es sei $\dim p^\Phi = 2l$. Dann trägt die Menge p^Φ eine kompakte, offene Unterebene $\mathbb{P} = (p^\Phi, \mathcal{P})$ von $\mathbb{M}$. Nach [33: 1.27] ist $\mathbb{P}$ projektiv. Sei $x \in M \setminus p^\Phi$. Die Menge der Verbindungsgeraden $\{p^\varphi x \mid \varphi \in \Phi\}$ ist kompakt und offen im Büschel $\mathcal{M}_x$. Da $\mathcal{M}_x$ zusammenhängend ist [33: 1.14], trifft jede Gerade durch x die offene Teilmenge p^Φ von M. Demnach ist x Schnittpunkt von Geraden aus $\mathcal{P}$. Je zwei solcher Geraden schneiden sich aber schon in p^Φ. Dieser Widerspruch liefert $p^\Phi = M$. Die Ebene $\mathbb{M} = \mathbb{P}$ ist also eine homogene projektive Ebene, nach [75] oder [42] ist $\mathbb{P}$ die Moufangebene der Dimension $2l$. Jeder Automorphismus von $\mathbb{P}$ fixiert einen Punkt von p^Φ. Insbesondere ist der Zentralisator von Φ trivial. Damit ist a) bewiesen.

ii) Es sei $G^\Phi \subseteq \mathcal{M}_p$ und $\dim G^\Phi = l$. Die Bahn G^Φ ist kompakt und offen im zusammenhängenden Büschel $\mathcal{M}_p$. Hieraus folgt $G^\Phi = \mathcal{M}_p$, und p ist ein isotroper Punkt von $\mathbb{M}$. Behauptung b) folgt nun direkt aus [47: 3.11].

iii) Es sei $p^\Phi \subseteq G$ und $\dim p^\Phi = l$. Das Komplement X von p^Φ in G ist eine abgeschlossene Teilmenge von M. Auf $M \setminus X$ wird daher eine stabile Ebene $\mathbb{E} = (M \setminus X, \mathcal{E})$ induziert. Die Bahn p^Φ ist eine kompakte Gerade von $\mathbb{E}$, schneidet also alle Geraden in $\mathcal{E}$ nach [33: 1.15]. Sei $x \in X$ und $y \in M \setminus G$. Die Gerade xy hat nun zwei Schnittpunkte mit G. Dieser Widerspruch liefert $p^\Phi = G$. Anwendung von b) auf die entgegengesetzte Ebene $\mathbb{M}^*$ (vgl. [39: 1.1] liefert die Behauptung c). □

(3.16) Korollar. *Kompakte quasiperspektive Gruppen haben höchstens $(l-1)$-dimensionale Punktbahnen.*

Beweis: Eine l-dimensionale Bahn eines Punktes x wäre kompakt und offen, woraus Transitivität auf der Geraden F_x und damit Kompaktheit von F_x folgt. Dann existiert mit dem Schnittpunkt von F_x mit einer anderen Fixgeraden ein Fixpunkt im Widerspruch zur Transitivität. □

4. Fünfecksstandgruppen, Unterebenen.

Unter dem Erzeugnis $\langle X \rangle$ einer Teilmenge X von M verstehen wir den Abschluß der kleinsten vollen Unterebene, die X enthält. Eine Unterebene $\mathbb{E} = (E, \mathcal{E})$ heißt voll in $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$, wenn für je zwei Geraden, die sich in $\mathbb{M}$ schneiden, der Schnittpunkt bereits in E liegt. Der Abschluß ist eine stabile Unterebene [33: 1.29], diese ist maximal unter den Unterebenen gleicher Dimension:

(4.1) Lemma. *Sei $\mathbb{E} = (E, \mathcal{E})$ eine volle, abgeschlossene, positiv dimensionale Unterebene der stabilen Ebene $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$, die abgeschlossene Unterebene $\mathbb{F} = (F, \mathcal{F})$ enthalte $\mathbb{E}$ als echte Unterebene. Dann gilt $\dim E < \dim F$.*

Beweis: Angenommen, $\dim E = \dim F$. Dann ist E offen in F nach [46: Th. 11c)]. Sei $z \in F \setminus E$. Man wählt einen Punkt $x \in E$ und einen weiteren Punkt $y \in E \setminus xz$. Die beiden Geraden xz und yz schneiden die offene Menge E in jeweils mehr als einem Punkt, gehören also zu $\mathcal{E}$. Da $\mathbb{E}$ als volle Unterebene vorausgesetzt war, erhält man den Widerspruch $z \in E$. □

Im Vergleich zum projektiven Fall stellt sich folgendes Problem: Das Erzeugnis eines Vierecks $\mathcal{V}$ kann ausgeartet sein, im Extremfall kann $\langle \mathcal{V} \rangle = \mathcal{V}$ gelten. Es gibt aber in stabilen Ebenen stets ein geeignetes (ausgeartetes) Fünfeck $\hat{\mathcal{V}} = (o, u, v, b, e)$ mit $b \in uv$, dessen Erzeugnis eine in sich dichte Unterebene ist:

(4.2) Lemma. *In stabilen Ebenen kann man zu jedem Dreieck $\mathcal{T} = (u, v, e)$ einen Punkt o und eine Umgebung U von u in uv so wählen, daß $\mathcal{V} = (o, u, v, e)$ ein Viereck bildet und für jeden Punkt $b \in U \setminus \{u\}$ das Fünfeck $\hat{\mathcal{V}} = (o, u, v, e, b)$ eine Unterebene erzeugt, die in sich überall dicht liegt. In stabilen Ebenen der Dimension 4 ist das Erzeugnis von $\hat{\mathcal{V}}$ stets von positiver Dimension.*

Beweis: [33: 1.33, 1.34] □

(4.3) Lemma. *Die Geradenbüschel einer stabilen Ebene $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$ sind lokal homogen.*

Beweis: Seien $X, Y \in \mathcal{M}_x$. Man kann Geraden G, H so wählen, daß $g = G \wedge X$ und $h = H \wedge Y$ existieren. Auf der Verbindungsgeraden gh wählt man einen Punkt z. Dann ist auf einer Umgebung W von X in $\mathcal{M}_x$ die Abbildung $\pi = \pi_{G,z,H,x} : L \mapsto (((L \wedge G)z) \wedge H)\,x$ definiert, und das Bild W^π ist eine Umgebung von Y in $\mathcal{M}_x$. □

(4.4) Lemma. *Sei $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$ eine 8-dimensionale stabile Ebene, die eine 4-dimensionale Unterebene $\mathbb{B} = (B, \mathcal{B})$ enthält. Dann sind die Geraden von $\mathbb{M}$ Mannigfaltigkeiten.*

Beweis: Sei V eine kompakte Umgebung in B, x ein Punkt in $M \setminus B$. Wir betrachten die Abbildung

$$\pi : V \to \mathcal{M}_x : b \mapsto bx.$$

Diese Abbildung ist stetig, wegen der Kompaktheit von V ist sie auch abgeschlossen. Da $x \notin B$, liegt x auf höchstens einer Geraden $L \in \mathcal{B}$. Ohne Beschränkung kann V so gewählt werden, daß $V \cap L = \emptyset$. Dann ist π injektiv, und es gilt $V \approx W = V^\pi$. Mit V ist also auch W vierdimensional und enthält damit eine nicht leere Teilmenge $\tilde{U}$, die in $\mathcal{M}_x$ offen ist [46: Th. 11c)]. Da die Punkträume 4-dimensionaler Ebenen Mannigfaltigkeiten sind [33: 1.13], kann man in V eine offene Umgebung $U \approx \mathbb{R}^4$ mit $U^\pi \subseteq \tilde{U}$ finden, das Bild U^π ist dann offen in $\mathcal{M}_x$. Aus der lokalen Homogenität des Büschels (4.3) folgt nun mit[33: 1.19]: $\mathcal{M}_x \approx \mathbb{S}_4$, und auch die Geraden sind Mannigfaltigkeiten. □

(4.5) Korollar. *Enthält die Automorphismengruppe einer 8-dimensionalen stabilen Ebene eine planare Involution, so sind die Geraden Mannigfaltigkeiten.*

Im Folgenden werden die Ergebnisse von [76: sect. 2] für Vierecksstandgruppen auf Standgruppen geeigneter Fünfecke übertragen. Dazu sei stets Λ eine zusammenhängende Gruppe von Automorphismen einer achtdimensionalen stabilen Ebene $\mathbb{M}$, die ein geeignetes Fünfeck $\hat{V}$ punktweise festläßt. Die von dem Fünfeck erzeugte Unterebene sei $\mathbb{F} = (F, \mathcal{F})$.

(4.6) Satz. *Ist Λ kompakt und nicht abelsch, so ist* $\Lambda \cong \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$.

Beweis: Nach dem Struktursatz [98: §25] gibt es einen Epimorphismus $\mathrm{A} \times \mathrm{X} \to \Lambda$ mit nulldimensionalem Kern, wobei A abelsch und X direktes Produkt (möglicherweise unendlich vieler) quasieinfacher Liegruppen ist. Ist Λ nicht abelsch, so ist $\mathrm{X} \neq \mathbb{1}$ und Λ enthält eine quasieinfache Liegruppe Σ. Wegen der Kompaktheit von Σ existiert eine Involution $\alpha \in \Lambda$, die planar sein muß. Nach (4.5) ist $\mathcal{M}_o \approx \mathbb{S}_4$. Die Gruppe Λ wirkt effektiv auf $\mathcal{M}_o$ (der Kern der Wirkung hat mit uv, ue mindestens zwei Achsen), und es gibt eine Gerade mit mindestens zweidimensionaler Bahn [54: Th. 1]. Mit ou, ov, oe läßt Λ mehr als zwei Geraden durch o fest, [67] liefert nun $\Lambda \cong \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$. □

(4.7) Satz. *Ist Λ kompakt, so ist* $\dim\Lambda \leq 3$.

Beweis: Wegen (4.6) kann Λ als abelsch angenommen werden. Für $c \in uv$ ist die Bahn c^Λ in uv enthalten und demnach wegen der Existenz von Fixpunkten höchstens 3-dimensional nach (3.15). Wählt man den Punkt c mit nicht trivialer Bahn, so ist das Erzeugnis der Bahn und des Fünfecks eine Unterebene $\mathbb{E}$ von positiver Dimension $e \geq 2\dim c^\Lambda$. Aus $\mathbb{E} = \mathbb{M}$ folgt $\Lambda_c = \mathbb{1}$ und damit die Behauptung. Ist $\mathbb{E}$ eine echte Unterebene, so wirkt Λ nicht trivial auf $\mathbb{E}$, läßt aber das Erzeugnis $\mathbb{F}$ des Fünfecks punktweise fest. Folglich muß Λ eine zusammenhängende Gruppe von Baer-Kollineationen der 4-dimensionalen Ebene $\mathbb{E}$ sein, was [35: 1.5] widerspricht. □

(4.8) Satz. *Wirkt Λ trivial auf einer Baer-Unterebene $\mathbb{B} = (B, \mathcal{B})$, so ist Λ kompakt und* $\dim\Lambda \leq 1$.

Beweis: Ist Λ nicht kompakt, so gibt es nach dem Satz von Arzela-Ascoli [57: 7-6.1, p. 290] Geraden $L_n \in \mathcal{M}_u$ und Automorphismen $\lambda_n \in \Lambda$ so, daß die Folge der L_n gegen die Gerade ou konvergiert, aber ou kein Häufungspunkt der Folge der Bildgeraden $L_n^{\lambda_n}$ ist. Wir wählen $J \in \mathcal{M}_v \setminus \mathcal{B}_v$ so, daß der Schnittpunkt $J \wedge ou$ existiert. Dann gibt es kompakte Umgebungen O von o in ov und U von u in uv so, daß J alle Verbindungsgeraden von Punktepaaren in $O \times U$ schneidet. Es sei $D := (B \cap U) \times (B \cap O)$. Da

$\mathbb{B}$ eine abgeschlossene Unterebene von $\mathbb{M}$ ist, ist D kompakt (und $\dim D = 4$). Die Abbildung

$$\mu : D \to D^{\mu} \subseteq \mathcal{M}_u : (s,t) \mapsto (st \wedge J)u$$

ist definiert, stetig, abgeschlossen und injektiv (sonst wäre $J \in \mathcal{B}$). Es ist demnach μ ein Homöomorphismus von D auf $D^{\mu} =: V$. Wegen $\dim D = 4$ ist V eine Umgebung von ou in $\mathcal{M}_u$. Wegen $\lim L_n = ou$ kann $\{L_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$ angenommen werden. Es sei $L_n = (s_n, t_n)^{\mu}$, dann konvergieren die Paare (s_n, t_n) gegen (u, o). Wir zeigen nun, daß die Folge der J^{λ_n} gegen uv konvergiert: Es gilt

$$(J \wedge L_n)^{\lambda_n} = (s_n t_n \wedge L_n)^{\lambda_n} = s_n t_n \wedge L_n^{\lambda_n}.$$

Da die $L_n^{\lambda_n}$ sich nicht bei ou häufen, konvergiert die betrachtete Folge gegen u, also gilt $\lim J^{\lambda_n} = uv$. Nach (4.3) gibt es Geraden $G \in \mathcal{B}_u$ und $H \in \mathcal{B}_o$ sowie einen Punkt $z \in ou \cap B$ so, daß die Projektivität $\pi = \pi_{G,z,H,v}$ auf einer Umgebung W von uv in $\mathcal{M}_v$ definiert ist und diese homöomorph auf eine Umgebung von ov in $\mathcal{M}_v$ abbildet. Ohne Beschränkung kann $J \in W$ angenommen werden, $K = J^{\pi}$ ist also definiert. Da die zur Projektion benutzten Elemente in $\mathbb{B}$ liegen, bleiben sie unter Λ fest. Daher zentralisiert π die Gruppe Λ, woraus die Konvergenz der Folge K^{λ_n} gegen $ov = (uv)^{\pi}$ folgt. Für $d \in B \cap uv$ nahe bei u sind $(d,o)^{\mu}$ und $(d,o)^{\mu} \wedge K$ definiert und es gibt (eindeutig bestimmte) Punkte $p \in uv \cap B, q \in ov \cap B$ so, daß $(d,o)^{\mu} = (pq \wedge K)u$. Damit konvergieren die $((d,o)^{\mu})^{\lambda_n} = (do \wedge J^{\lambda_n})\, u$ gegen $du = uv$, andererseits gilt $((d,o)^{\mu})^{\lambda_n} = (pq \wedge K^{\lambda_n})\, u$, woraus Konvergenz gegen qu folgt. Dieser Widerspruch liefert die Kompaktheit von Λ.

Zur Abschätzung der Dimension von Λ: Die Gruppe wirkt effektiv auf dem Büschel $\mathcal{M}_o \approx \mathbb{S}_4$ und läßt $\mathcal{B}_o \approx \mathbb{S}_2$ elementweise fest. Nach [67] müssen alle Bahnen eindimensional sein. Wie im Beweis von Satz (4.6) stellt man Λ als epimorphes Bild eines Produktes $\mathrm{A} \times \mathrm{X}$ dar. Jeder Faktor des nichtabelschen Anteils X müßte mit einer wenigstens zweidimensionalen Bahn wirken [54: Th. 1]. Λ ist demnach abelsch. Der Stabilisator Λ_c eines Punktes $c \in uv \setminus B$ wirkt trivial auf dem Erzeugnis $\langle B, c \rangle = \mathbb{M}$ und ist daher selbst trivial. Dies liefert die Behauptung. □

(4.9) Korollar.

a) *Wird eine planare Involution einer achtdimensionalen stabilen Ebene von einer halbeinfachen Gruppe* Δ *zentralisiert, so ist* Δ *quasieinfach und induziert auf der Fixebene eine der in [35] genannten Gruppen:*

$$\mathrm{SO}_3\mathbb{R},\quad \mathrm{Spin}_3,\quad \mathrm{SL}_2\mathbb{R},\quad \mathrm{PSL}_2\mathbb{R}\cong\Omega_3\mathbb{R}(1),$$

$$\mathrm{SL}_2\mathbb{C},\quad \mathrm{PSL}_2\mathbb{C}\cong\Omega_4\mathbb{R}(1)\cong\mathrm{SO}_3\mathbb{C},\quad \mathrm{PSL}_3\mathbb{R},$$

$$\mathrm{PSU}_3\mathbb{C},\quad \mathrm{PSU}_3\mathbb{C}(1),\quad \mathrm{PSL}_3\mathbb{C}$$

oder eine Überlagerungsgruppe von $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$.

b) *Läßt* Λ *eine Baer-Unterebene* $\mathbb{B}$ *invariant, die das Fünfeck* $\hat{V}$ *enthält, so wirkt* Λ *nach [33: 1.34], [35: 1.5] trivial auf* $\mathbb{B}$ *und ist demnach kompakt und höchstens eindimensional.*

(4.10) Lemma. *Ist* $\mathbb{E}=(E,\mathcal{E})$ *eine echte, volle Unterebene positiver Dimension, die das Fünfeck* $\hat{V}$ *enthält, so gilt für jeden Punkt* $c\in E\cap ou$: $\dim c^\Lambda\leq 2$.

Beweis: Ist $\dim F=4$, so ist $\mathbb{F}=\mathbb{E}$ und die Behauptung trivialerweise erfüllt. Sei also $\dim F=2$, $\dim E=4$ und $c\in E\setminus F$. Dann ist $\mathbb{E}=\langle F,c\rangle$, und Λ_c wirkt trivial auf E. Die Zusammenhangskomponente Λ_E^1 des globalen Stabilisators wirkt nach (4.9,b) trivial auf E, ist also gleich der Zusammenhangskomponente Λ_c^1. Der globale Stabilisator Λ_E ist demnach lokal isomorph zu Λ_c. Es sei $\eta:(E\cap ou)\times\Lambda\to ou:(x,\lambda)\mapsto x^{\lambda^{-1}}$. Die Einschränkung von η auf eine kompakte Umgebung ist stetig und abgeschlossen, nach [59: III.6] existiert $y\in ou$ mit $\dim y^{\eta^{\leftarrow}}\geq\dim\Lambda+2-4=\dim\Lambda-2$. Für $\dim\Lambda\leq 2$ ist die Behauptung klar, aus $\dim\Lambda\geq 3$ folgt also $\langle F,b\rangle=\mathbb{E}$ und damit $\Lambda_b=\Lambda_c$ für $b\in y^{\eta^{\leftarrow}}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $y=b\in E$. Nun gilt:

$$b^{\eta^{\leftarrow}}=\{(x,\lambda)\mid E\ni x=b^\lambda\}=\{(b^\lambda,\lambda)\mid b^\lambda\in E\}=\{(b^\lambda,\lambda)\mid \lambda\in\Lambda_E\},$$

woraus die lokale Homöomorphie des Stabilisators Λ_c mit $b^{\eta^{\leftarrow}}$ folgt. Es gilt also $\dim\Lambda_c\geq\dim\Lambda-2$ und damit $\dim c^\Lambda\leq 2$. □

(4.11) Satz. *Ist das Fünfeck $\hat{V}$ in einer Baer-Unterebene $\mathbb{B} = (B, \mathcal{B})$ enthalten, so gilt* $\dim \Lambda \leq 3$.

Beweis: Wird die Unterebene $\mathbb{B}$ von $\hat{V}$ erzeugt, so ist nach (4.8) sogar $\dim \Lambda \leq 1$. Jedenfalls ist $\dim F \geq 2$ [33: 1.34] und es existiert $c \in B$ mit $\mathbb{B} = \langle F, c \rangle$. Da Λ_c die Baer-Unterebene $\mathbb{B}$ invariant läßt, gilt $\dim \Lambda_c \leq 1$. Andererseits kann c auf ou gewählt werden. Das vorangehende Lemma liefert die Behauptung. □

(4.12) Lemma. *Ist* $\dim \Lambda = 4$ *und die Standgruppe Λ_G einer Geraden $G \in \mathcal{M}_o$ trivial, so ist die Abbildung*

$$\gamma : \Lambda \to \mathcal{M}_o : \lambda \mapsto G^\lambda$$

eine offene Einbettung, insbesondere ist Λ eine Liegruppe und $\mathcal{M}_o \approx \mathbb{S}_4$.

Beweis: Die Aussage ist dual zu [76: 2.8]. In dieser dualen Form läßt sie sich für stabile Ebenen wie im projektiven Fall beweisen. □

(4.13) Satz. *Wenn das Fünfeck $\hat{V}$ in einer echten, vollen Unterebene $\mathbb{E} = (E, \mathcal{E})$ positiver Dimension enthalten ist, gilt* $\dim \Lambda \leq 3$.

Beweis: Wegen (4.11) ist nur noch der Fall einer zweidimensionalen, maximalen Unterebene zu betrachten. Für jeden Punkt $x \in M \setminus E$ gilt also $\langle \hat{V}, x \rangle = \langle E, x \rangle = \mathbb{M}$ und $\Lambda_x = \mathbb{1}$. Da x auf uv gewählt werden kann, ist $\dim \Lambda = \dim x^\Lambda \leq 4$. Sei $\dim \Lambda = 4$. Zu jeder Geraden $G \in \mathcal{M}_o \setminus \mathcal{E}$ existiert eine Gerade $H \in \mathcal{E}$, die G in einem Punkt $x \neq o$ schneidet. Aus $x \in E$ folgt $G \in \mathcal{E}$, demnach ist $x \notin E$ und $\Lambda_G = \Lambda_x = \mathbb{1}$. Nach (4.12) ist also für jede solche Gerade G die Bahn G^Λ offen in der zusammenhängenden Menge $\mathcal{M}_o \setminus \mathcal{E}$, woraus Transitivität und damit $\mathcal{M}_o \setminus \mathcal{E} \approx \Lambda$ folgt. Aus $\dim E = 2$ schließt man $\mathcal{M}_o \setminus \mathcal{E} \approx \mathbb{S}_4 \setminus \mathbb{S}_1 \approx \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R} \not\approx \mathbb{R}^4$, die Liegruppe Λ kann also nicht kompaktfrei sein und enthält eine Involution. Diese Involution muß planar sein. Die Fixebene enthält das Fünfeck, nach (4.11) muß doch $\dim \Lambda \leq 3$ sein. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

(4.14) Lemma. *Seien Φ, Ψ zusammenhängende, nicht triviale Untergruppen von Λ, die sich gegenseitig zentralisieren. Dann sind die Fixunterebenen gleich, und Φ und Ψ wirken frei auf deren Komplement. Insbesondere gilt* $\dim \Phi \leq 4$.

Beweis: Wir betrachten einen Punkt $x \in ou$, der von Φ bewegt wird. Die von der Bahn x^{Φ} und dem Fünfeck erzeugte Unterebene $\mathbb{E} = (E, \mathcal{E})$ hat positive Dimension e, und Φ wirkt nicht trivial auf $\mathbb{E}$, läßt aber $\mathbb{F}$ punktweise fest. Aus $e = 2$ folgt $\mathbb{F} = \mathbb{E}$, im Falle $e = 4$ wäre $\mathbb{F}$ von positiver Dimension und Φ eine zusammenhängende Gruppe von Baer-Kollineationen. Beides widerspricht der Annahme $\Phi \neq \mathbb{1}$ (für den zweiten Fall vgl. [35: 1.5]). Daher gilt $\mathbb{E} = \mathbb{M}$ und damit $\Psi_x = \mathbb{1}$. Dieselbe Argumentation mit vertauschten Rollen für Ψ, Φ liefert nun die Behauptung. □

(4.15) Lemma. *Sei $\mathbb{E} = (E, \mathcal{E})$ eine abgeschlossene Unterebene von $\mathbb{M}$. Dann ist für jeden Punkt $o \in E$ die (zusammenhängende) Menge $\mathcal{M}_o \setminus \mathcal{E}$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^4$.*

Beweis: Der Beweis läßt sich genau wie bei [76: 2.11] führen. □

(4.16) Lemma. *Sei Φ eine zusammenhängende, nicht triviale Untergruppe von Λ. Dann ist der Zentralisator $\mathrm{C}_\Lambda(\Phi)$ höchstens dreidimensional.*

Beweis: Sei $\Psi = \mathrm{C}_\Lambda(\Phi)^1$ die Zusammenhangskomponente des Zentralisators, $\mathbb{E} = (E, \mathcal{E})$ die Fixebene von Φ. Aus (4.14) erhält man $\dim \Psi \leq 4$. Im Falle $\dim \Psi = 4$ ist nach (4.12) die Gruppe Ψ eine Liegruppe homöomorph zu $\mathcal{M}_o \setminus \mathcal{E}$, die nach (4.15) nicht kompaktfrei sein kann. Daher enthält Ψ eine Involution, und (4.11) liefert den Widerspruch $\dim \Lambda \leq 3 < \dim \Psi$. □

Die Beweise der folgenden Aussagen können direkt von [76: 2.13, 2.14] übernommen werden, da die dort angeführten Argumente sich (unter Verwendung der hier übertragenen Ergebnisse) nur noch auf die Gruppen beziehen und deswegen von der betrachteten Geometrie unabhängig gelten.

(4.17) Satz. *Ist Λ halbeinfach, so gilt* $\dim \Lambda \leq 3$ *(und Λ ist demnach quasieinfach oder trivial).*

(4.18) Satz. *Es gilt:* $\dim \Lambda \leq 4$, *oder* Λ *wirkt transitiv auf einem zu* $\mathbb{R}^2$ *isomorphen Normalteiler, und* $\dim \Lambda \leq 5$.

(4.19) Satz. *(Starrheitslemma)*
Wirkt eine Gruppe Δ *trivial auf einer Unterebene der Dimension* e*, die ein geeignetes Fünfeck enthält, so gilt* $\dim \Delta + e \leq 5$ *oder* $e = 8$, $\Delta = \mathbb{1}$.

Beweis: (4.2), (4.8), (4.13). □

Die Abschätzung der Dimension der Standgruppen geeigneter Fünfecke erlaubt eine erste grobe Abschätzung der Dimension der vollen Automorphismengruppe:

(4.20) Korollar. *Die Dimension der Automorphismengruppe einer lokal kompakten achtdimensionalen stabilen Ebene ist höchstens* $8 + 8 + 8 + 8 + 4 + 5 = 41$*, jedenfalls endlich.*

5. Kompakte Gruppen von Automorphismen.

In diesem Kapitel sei stets $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$ eine 8-dimensionale stabile Ebene.

Die folgende Tatsache motiviert die Aussage von Theorem A:

(5.1) Lemma. *Echte Untergruppen der elliptischen Bewegungsgruppe* $\mathrm{PU}_3\mathbb{H}$ *der Quaternionenebene sind höchstens 13-dimensional.*

Beweis: Untergruppen vom Rang ≤ 2 sind höchstens 10-dimensional. Die Untergruppen von maximalem Rang entnimmt man [5]: der 9-dimensionale Zentralisator einer planaren Involution (eine zu $\mathrm{U}_3\mathbb{C}$ isomorphe Gruppe) und der 13-dimensionale Zentralisator einer Spiegelung (ein Produkt von $\mathrm{U}_2\mathbb{H}$ und $\mathrm{U}_1\mathbb{H} \cong \mathrm{Spin}_3$ mit identifizierten Zentren). □

(5.2) Lemma. *Es sei* Δ *eine zusammenhängende, kompakte (nicht notwendig Liesche) Gruppe von Automorphismen einer achtdimensionalen stabilen Ebene, die sich nicht in die projektive Quaternionenebene einbetten läßt. Die Zusammenhangskomponente* Z *des Zentrums von* Δ *habe positive Dimension. Dann ist* $\dim \Delta \le 13$.

Beweis: i) Existiert ein Punkt p, dessen Bahn p^{Z} in keiner Geraden liegt, so erzeugt p^{Z} eine stabile Unterebene $\mathbb{E}$. Die Standgruppe Δ_p wirkt trivial auf $\mathbb{E}$, ist also höchstens dreidimensional nach (4.13). Wegen (3.15) gilt $\dim p^{\Delta} \le 7$ und damit $\dim \Delta \le 10$.

ii) Falls Z quasiperspektiv ist, seien p und q zwei von Z bewegte Punkte auf verschiedenen Fixgeraden $F_p, F_q \in \mathcal{G}_{\mathrm{Z}}$ (vgl. (3.2)). Dann erzeugen die Bahnen $p^{\mathrm{Z}}, q^{\mathrm{Z}}$ eine mindestens vierdimensionale Unterebene $\mathbb{E}$: die Bahnen sind wenigstens eindimensional, nach (3.16) sind die Geraden von $\mathbb{E}$ wenigstens zweidimensional. Da p von Z bewegt wird, gilt $\Delta_{[p]} = \mathbb{1}$.

Sind die Geraden Mannigfaltigkeiten (und damit die Büschel Sphären), so gilt nach [67] entweder $\dim \Delta_p \le 6$ (und damit $\dim \Delta \le 13$), oder es ist $\dim (pq)^{\Delta_p} \le 1$. Im zweiten Fall ergibt sich mit (3.15) $\dim \Delta_p / \Delta_{p,q} \le 1 + 3 = 4$ und $\dim \Delta / \Delta_{p,q} \le 11$.

Sind die Geraden keine Mannigfaltigkeiten, so ist nach [94] keine Bahn in $\mathcal{G}_Z$ offen und daher $\dim \Delta/\Delta_{p,q} \leq 12$.

Die Standgruppe $\Delta_{p,q}$ wirkt nun trivial auf $\mathbb{E}$, ist also nach (4.8) höchstens eindimensional. Damit ergibt sich $\dim \Delta \leq 13$. □

(5.3) Bemerkung. Zusammenhängende kompakte nicht Liesche Gruppen haben stets ein Zentrum von positiver Dimension [98: §25], erfüllen also die Voraussetzungen des vorangehenden Lemmas. Liegruppen werden im Folgenden genauer studiert. Mit Φ sei eine kompakte zusammenhängende Lie-Untergruppe von $\Gamma = \mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ bezeichnet.

(5.4) Lemma. *Wirkt eine mehr als 6-dimensionale kompakte zusammenhängende Lie-Untergruppe Δ einer Standgruppe Γ_p quasieffektiv auf dem Büschel $\mathcal{M}_p$, so gilt $\Delta \cong \mathrm{Spin}_5 (\cong \mathrm{SU}_2\mathbb{H})$, und die Wirkung auf $\mathcal{M}_p$ ist die gewöhnliche. Insbesondere wirkt keine mehr als 6-dimensionale Gruppe effektiv auf $\mathcal{M}_p$.*

Beweis: Sei $\Theta \cong \mathbb{T}^k$ ein maximaler Torus von Δ.

i) Enthält Θ eine planare Involution, so ist nach (4.4) das Büschel $\mathcal{M}_p$ homöomorph zu $\mathbb{S}_4$, und die Behauptung folgt aus [67] und (3.15).

ii) Enthält Θ eine axiale, aber keine planare Involution, so liegen wegen (3.9) und (3.10) höchstens drei Involutionen in Θ. Insbesondere ist in diesem Fall Δ eine kompakte Gruppe vom Rang $k \leq 2$. Quasieinfache kompakte Gruppen vom Rang 2 sind lokal isomorph zu Spin_5 oder $\mathrm{SU}_3\mathbb{C}$. In beiden Fällen gibt es nach [55: Cor. p.435] eine vierdimensionale Bahn. Aus (3.15) und [67] folgt $\Delta \cong \mathrm{Spin}_5$. Nicht quasieinfache kompakte Liegruppen vom Rang $k \leq 2$ sind höchstens 6-dimensional.

iii) Es bleibt der Fall, daß alle Involutionen in Θ Zentrum p haben. Da Δ quasieffektiv auf $\mathcal{M}_p$ wirkt, liegt die Menge $\mathcal{J}$ dieser Involutionen im Zentrum von Δ. Sei $q \neq p$ ein Punkt, der von Δ bewegt wird. Wegen (3.15) ist nur noch der Fall $\dim \Delta/\Delta_{qp} \leq 3$ zu betrachten, und es gilt $\dim \Delta_{qp}/\Delta_q \leq 3$. Im Fall $\dim \Delta_q > 0$ enthält Δ_q eine Involution $\sigma \in \mathcal{J}$. Nach (3.7) hat σ eine Achse durch q.

aus (3.10) folgt $k \leq 1$ und $\dim \Delta \leq 3$. Es bleibt $\dim \Delta_q = 0$ und damit $\dim \Delta \leq 6$. □

(5.5) Lemma. *Sei $\alpha \in \Phi$ eine Involution, Ψ der Zentralisator $\mathrm{C}_\Phi(\alpha)$ und $\Theta = \Psi_{[\mathcal{G}_\alpha]}$ der Kern der Wirkung von Ψ auf $\mathcal{G}_\alpha$ (vgl. (3.2)). Dann gilt:* $\dim \Theta \leq 3$.

Beweis: Es sei x ein Punkt, der von α bewegt wird, $G = xx^\alpha \in \mathcal{G}_\alpha$. Nach (3.16) wirkt Θ auf G mit höchstens dreidimensionalen Bahnen. Die Standgruppe Θ_x bleibt invariant unter Konjugation mit α und fixiert deswegen auch den Punkt x^α. Wir betrachten die Wirkung von Θ_x auf den Büscheln $\mathcal{M}_x$ und $\mathcal{M}_{x^\alpha}$. Enthält die Gruppe Θ_x eine Involution β, so fixiert diese außer xx^α noch jeweils eine weitere Gerade durch x bzw. x^α (3.8). Diese beiden Fixgeraden sind Achsen, woraus $\beta = \mathbb{1}$ folgt. Damit ist $\dim \Theta \leq 3$ bewiesen. □

(5.6) Lemma. *Der Zentralisator $\Psi = \mathrm{C}_\Phi(\alpha)$ einer Involution $\alpha \in \Phi$ hat höchstens Dimension 13. Hat er die maximal mögliche Dimension, so wirkt er transitiv auf $\mathcal{G}_\alpha$.*

Beweis: Es sei $\dim \Psi \geq 13$. Sei weiter $x \neq x^\alpha$ und $G = xx^\alpha \in \mathcal{G}_\alpha$. Nach (3.16) wirkt die Standgruppe Ψ_G auf G mit höchstens dreidimensionalen Bahnen. Jede Standgruppe $\Xi = \Psi_{G,x}$ ist also mindestens 6-dimensional. Wir betrachten die Wirkung von Ξ auf dem Büschel $\mathcal{M}_x$. Wegen $\Xi_{[x]} = \Xi^\alpha_{[x]} = \Xi_{[x]} \cap \Xi_{[x^\alpha]} = \mathbb{1}$ ist diese Wirkung effektiv. Nach (5.4) gilt $\dim \Xi = 6$, woraus $\dim G^\Psi = 4$ folgt. Alle Bahnen sind demnach vierdimensional und somit offen (und kompakt), der Zusammenhang von $\mathcal{G}_\alpha$ liefert die behauptete Transitivität. □

(5.7) Lemma. *Es gilt* $\dim \Phi_{[z]} \leq 3$.

Beweis: Sei Δ die Zusammenhangskomponente von $\Phi_{[z]}$ und x ein Punkt, der von Δ bewegt wird. Dann ist $\dim x^\Delta \leq 3$, da Δ auf keiner Zentrumsgeraden transitiv wirken kann. Im Fall $\dim \Delta > 3$ gibt es eine Involution $\alpha \in \Delta_x$. Diese fixiert außer xz eine weitere Gerade A durch x (3.8). Diese Gerade ist Achse von α und wird deshalb vom Zentralisator $\mathrm{C}_\Delta(\alpha)$ fixiert. Es folgt

$C_\Delta(\alpha) \leq \Delta_A = \Delta_{[A]} \leq \Delta_z$. Insbesondere hat Δ denselben Rang wie Δ_z. Enthält Δ_z eine zu $\mathbb{T}^2$ isomorphe Gruppe, so liegen in $\Phi_{[z]}$ zwei kommutierende Involutionen mit derselben Achse A. Nach (3.9) ist dies unmöglich, die Gruppe Δ hat also Rang 1 und ist höchstens dreidimensional. □

(5.8) Korollar. *Fixiert die kompakte Liegruppe Φ einen Punkt p, so gilt* $\dim \Phi \leq 13$.

Beweis: Es sei $\Theta = \Phi^1_{[p]}$ die Zusammenhangskomponente des Kerns der Wirkung von Φ auf $\mathcal{M}_p$. Dann gibt es eine zusammenhängende Gruppe $\Delta \leq \Phi$ mit $\Phi = \Delta\Theta$ und $\dim(\Delta \cap \Theta) = 0$. Nach (5.4) und (5.7) ist $\dim \Phi = \dim \Delta + \dim \Theta \leq 10 + 3 = 13$. □

(5.9) Lemma. *Keine zu* $\mathrm{SO}_6\mathbb{R}$ *lokal isomorphe Liegruppe* Δ *enthält eine zu* $(\mathrm{SO}_3\mathbb{R})^3$ *lokal isomorphe Untergruppe.*

Beweis: Es sei $\Phi = \Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3 < \mathrm{SO}_6\mathbb{R}$ mit zu $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ lokal isomorphen Faktoren Σ_i. Liegt eine Involution $\alpha \in \Sigma_i$ im Zentrum von Σ_i, so ist $\Sigma_i \cong \mathrm{Spin}_3$.

i) Enthält Σ_1 eine Involution $\sigma \neq -\mathbb{1}$, so zerfällt $\mathbb{R}^6$ in zwei σ-Eigenräume U, V der Dimension 2 bzw. 4. Diese Eigenräume bleiben invariant unter Σ_2 und Σ_3. Die Gruppe $\Sigma_2\Sigma_3$ wirkt trivial auf U und deshalb effektiv auf V, ist also zu $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ (in der naheliegenden Einbettung) konjugiert. Der Fixraum U von $\Sigma_2\Sigma_3$ bleibt auch unter Σ_1 invariant. Die Gruppe Σ_1 wirkt daher trivial auf U, und $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ wirkt effektiv auf V. Das ist aber unmöglich.

ii) Jeder Faktor Σ_i enthält demnach die zentrale Involution $-\mathbb{1}$ und ist deswegen zu Spin_3 isomorph. Als reduktive Gruppe wirkt Σ_1 vollständig reduzibel auf $\mathbb{R}^6$. Auf jedem invarianten Teilraum U wirkt $-\mathbb{1}$ und damit Σ_1 effektiv. Es folgt $\dim U \geq 4$ und daher $U = \mathbb{R}^6$. Als Zentralisator der irreduzibel wirkenden Gruppe Σ_1 müßte $\Sigma_2\Sigma_3$ nach dem Lemma von Schur in einem Schiefkörper enthalten sein. Das ist unmöglich. □

(5.10) Satz. *In nicht klassischen 8-dimensionalen stabilen Ebenen gilt stets* $\dim \Phi \leq 13$.

Beweis: Für jeden Punkt x gilt $\dim \Phi = \dim x^\Phi + \dim \Phi_x$. Ist die Bahn eines Punktes 8-dimensional, so wirkt Φ transitiv und die Ebene ist kompakt und daher projektiv [33: 1.27]. Punkthomogene kompakte projektive Ebenen sind klassisch laut [75], [42]. Im Folgenden wird deshalb stets angenommen, daß alle Bahnen höchstens 7-dimensional sind.

i) Angenommen, es existiert ein Punkt p mit $\Phi_{[p]} = \mathbb{1}$. Lemma (5.4) liefert $\dim \Phi_p \leq 6$, und es folgt $\dim \Phi \leq 13$, da alle Bahnen höchstens 7-dimensional sind.

ii) Es bleibt der Fall zu betrachten, daß $\Phi_{[p]} \neq \mathbb{1}$ für jeden Punkt p. Dann ist jeder Punkt das Zentrum einer geeigneten Zentralkollineation und muß deshalb Fixpunkt des Zentrums $Z = Z(\Phi)$ sein. Hieraus folgt $Z = \mathbb{1}$, die Gruppe Φ ist also direktes Produkt einfacher Liegruppen. In nicht klassischen Ebenen existiert höchstens ein Punkt x, auf dessen Büschel die Standgruppe transitiv wirkt [47]. Mit (5.4) und (5.7) folgen die Abschätzungen $\dim x^\Phi \leq 7, \dim \Phi_x \leq 6 + 3 = 9$ bzw. $\Phi = \Phi_x, \dim \Phi_x \leq 10 + 3$. Mit $\dim x^\Phi \leq 7$ erhält man $\dim \Phi \leq 16$, es bleiben also noch die halbeinfachen Gruppen der Dimension f mit $16 \geq f \geq 14$ auszuschließen. Wir betrachten zuerst einfache Gruppen: Nach [95] oder [60] gibt es nur die Möglichkeiten $\Phi \cong \mathrm{PSU}_4\mathbb{C}$ und $\Phi \cong G_{2(-14)}$. Da die 14-dimensionale Gruppe $G_{2(-14)}$ nach [54: Th. 1] nur mit mindestens 5-dimensionalen Bahnen wirken kann, muß für die Standgruppe gelten: $7 \leq \dim \Phi_x \leq 9$. Ferner muß Φ_x einen Normalteiler $\Phi_{[x]}$ mit $3 \geq \dim \Phi_{[x]} \geq \dim \Phi_x - 6$ enthalten. Für das Tripel $d = (\dim x^\Phi, \dim \Phi_x/\Phi_{[x]}, \dim \Phi_{[x]})$ ergeben sich folgende Möglichkeiten: (7,6,1), (7,5,2), (7,4,3), (6,6,2), (6,5,3) und (5,6,3). In jedem dieser Fälle müßte der Rang von Φ_x größer als der Rang von $G_{2(-14)}$ sein. Für die 15-dimensionale Gruppe $\mathrm{PSU}_4\mathbb{C} \cong \mathrm{PSO}_6\mathbb{R}$ ergeben sich die Möglichkeiten für d als (7,6,2), (7,5,3) und (6,6,3). Die ersten beiden Fälle scheiden wieder wegen zu großem Rang der Standgruppe aus, im letzten Fall müßte Φ_x lokal isomorph zu $(\mathrm{SO}_3\mathbb{R})^3$ sein. Nach (5.9) enthält aber $\mathrm{PSU}_4\mathbb{C}$ keine solche Untergruppe.

Die Fälle nicht einfacher Gruppen unterteilen wir nach dem Maximum m der Dimensionen einfacher Faktoren. Ist $m = 10$, so ist $\Phi \cong \mathrm{SO}_5\mathbb{R} \times (\mathrm{SO}_3\mathbb{R})^2$ und enthält eine Involution mit 14-dimensionalem Zentralisator im Widerspruch zu (5.6). Ist $m = 8$, so gibt es die Fälle $\Phi \cong (\mathrm{PSU}_3\mathbb{C})^2$ und $\Phi \cong \mathrm{PSU}_3\mathbb{C} \times (\mathrm{SO}_3\mathbb{R})^2$. In beiden Fällen enthält Φ eine Untergruppe Υ, die zu $\mathrm{PSU}_3\mathbb{C} \times \mathrm{SO}_3\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ lokal isomorph ist. Diese Untergruppe zentralisiert eine Involution $\alpha \in \mathbb{T}$. Auf $\mathcal{G}_\alpha$ wirkt $\mathrm{PSU}_3\mathbb{C}$ transitiv nach (3.16) und [54: Th. 1]. Nach [54: Th. 1] wirkt eine zu $\mathrm{SO}_3\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ lokal isomorphe Gruppe trivial auf $\mathcal{G}_\alpha$. Dies widerspricht (5.6). Schließlich bleibt noch der Fall $\Phi \cong (\mathrm{SO}_3\mathbb{R})^5$. In diesem Fall wird jede Involution α in einem der Faktoren von einer Gruppe $\Psi \cong (\mathrm{SO}_3\mathbb{R})^4 \times \mathbb{T}$ zentralisiert. Als 13-dimensionale Gruppe wirkt Ψ nach (5.6) transitiv auf $\mathcal{G}_\alpha$. Nach [54: Th. 1] muß der Kern Θ der Wirkung auf $\mathcal{G}_\alpha$ mindestens 6-dimensional sein. Dies widerspricht (5.5).

Damit ist der Satz bewiesen. □

Mit (5.1), (5.3), (5.10) und [52] ergibt sich nun:

(5.11) Theorem A. *Es sei Δ eine kompakte Gruppe von Automorphismen einer achtdimensionalen stabilen Ebene $\mathbb{M}$. Ist $\dim \Delta > 13$, so ist Δ isomorph zur elliptischen Bewegungsgruppe $\mathrm{PU}_3\mathbb{H}$, und $\mathbb{M}$ ist isomorph zur projektiven Quaternionenebene. Die Wirkung ist äquivalent zur gewohnten.*

6. Rekonstruktion von Inzidenzgeometrien.

Die von Freudenthal [15: 6.2] 1951 entwickelte Methode zur Konstruktion fahnenhomogener Inzidenzgeometrien, die auch in [28] dargelegt wird, soll im Folgenden für unsere Zwecke verallgemeinert werden.

Operiert eine Gruppe Δ auf einer Menge $\mathcal{X}$, so bezeichnen wir mit $\mathcal{X}/_{\Delta} = \{x^{\Delta} \mid x \in \mathcal{X}\}$ die Menge der Bahnen unter Δ. Mit $\Delta_x = \{\delta \in \Delta \mid x^{\delta} = x\}$ sei die Standgruppe von $x \in \mathcal{X}$ bezeichnet.

Im Folgenden sei $\mathfrak{G}$ eine *Inzidenzgeometrie*, das heißt ein Tripel $(G, \mathcal{G}, \mathcal{F})$, wobei G und $\mathcal{G}$ Mengen und $\mathcal{F} \subseteq G \times \mathcal{G}$ sind. Für $q \in G$ sei $\mathcal{G}_q = \{H \in \mathcal{G} \mid (q, H) \in \mathcal{F}\}$.

(6.1) Definition.

a) Eine Untergruppe Δ von $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ heißt *repräsentativ* für $\mathfrak{G}$, wenn gilt:

(R 1) Δ wirkt transitiv auf G.

(R 2) Es gibt einen Punkt $p \in G$ und eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G}_p$, die gleichzeitig ein Repräsentantensystem für $\mathcal{G}/_{\Delta}$ und für $\mathcal{G}_p/_{\Delta_p}$ ist.

(R 3) Für verschiedene Repräsentanten $R, R' \in \mathcal{R}$ ist stets $\Delta_R \neq \Delta_{R'}$.

In dieser Situation heißt $(\Delta, \Delta_p, (\Delta_R)_{R \in \mathcal{R}})$ auch ein *repräsentierendes Tripel* für $\mathfrak{G}$.

b) Es sei Δ repräsentativ für $\mathfrak{G}$.

Mit $\tilde{G} = \Delta/_{\Delta_p}$, $\tilde{\mathcal{G}} = \bigcup\limits_{R \in \mathcal{R}} \Delta/_{\Delta_R}$ und

$$\tilde{\mathcal{F}} = \left\{(\Delta_p\alpha, \Delta_R\beta) \in \tilde{G} \times \tilde{\mathcal{G}} \;\middle|\; \Delta_p\alpha \cap \Delta_R\beta \neq \emptyset\right\}$$

heißt $\tilde{\mathfrak{G}} = (\tilde{G}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{F}})$ die von $(\Delta, \Delta_p, (\Delta_R)_{R \in \mathcal{R}})$ *repräsentierte Geometrie*.

(6.2) Lemma. *Es sei Δ repräsentativ für $\mathfrak{G}$. Dann ist die von $(\Delta, \Delta_p, (\Delta_R)_{R \in \mathcal{R}})$ repräsentierte Geometrie $\tilde{\mathfrak{G}}$ zu $\mathfrak{G}$ isomorph, und die Wirkungen von Δ auf $\tilde{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{G}$ sind äquivalent.*

Beweis: i) Die Abbildung $\pi: \Delta/_{\Delta_p} \to G: \Delta_p\alpha \mapsto p^\alpha$ ist offenbar eine Bijektion.
ii) Für $R, R' \in \mathcal{R}$ und $\alpha, \alpha' \in \Delta$ gilt

$$\Delta_R\alpha = \Delta_{R'}\alpha' \iff \Delta_R = \Delta_{R'}\alpha'\alpha^{-1}$$

Wegen $\mathbb{1} \in \Delta_R$ ist die zweite Bedingung äquivalent zu $\Delta_R = \Delta_{R'} \ni \alpha'\alpha^{-1}$, was wegen (R 3) zu $R = R'$ und $R^\alpha = R'^{\alpha'}$ äquivalent ist. Damit ist die Abbildung

$$\gamma: \bigcup_{R \in \mathcal{R}} \Delta/_{\Delta_R} \to \mathcal{G}: \Delta_R\alpha \mapsto R^\alpha$$

wohldefiniert und injektiv. Da $\mathcal{R}$ ein Repräsentantensystem für $\mathcal{G}/_\Delta$ ist, folgt die Surjektivität von γ.
iii) Für $R \in \mathcal{R}$ und $\alpha, \alpha' \in \Delta$ gilt

$$(p^\alpha, R^{\alpha'}) \in \mathcal{F} \iff (p, R^{\alpha'\alpha^{-1}}) \in \mathcal{F}$$

da Δ als Gruppe von Automorphismen auf $\mathbb{G}$ wirkt. Nach (R 2) ist die zweite Bedingung äquivalent dazu, daß ein Automorphismus $\beta \in \Delta_p$ mit $R^{\alpha'\alpha^{-1}} = R^\beta$ (das heißt $\Delta_R\alpha'\alpha^{-1} = \Delta_R\beta$) existiert. Dies ist wiederum äquivalent zur Existenz eines Elementes im Schnitt von Δ_p und $\Delta_R\alpha'\alpha^{-1}$ und damit zu $\Delta_p\alpha \cap \Delta_R\alpha' \neq \emptyset$, das heißt $(\Delta_p\alpha, \Delta_R\alpha') \in \tilde{\mathcal{F}}$. Damit ist gezeigt, daß die Abbildungen π und γ einen Isomorphismus von $\tilde{\mathbb{G}}$ auf $\mathbb{G}$ definieren.
iv) Auf $\tilde{\mathbb{G}}$ wirkt Δ durch Rechtsmultiplikation. Diese Wirkung ist offensichtlich (via π, γ) äquivalent zur gegebenen Wirkung von Δ auf $\mathbb{G}$. $\square$

(6.3) Satz. *Es sei $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$ eine stabile Ebene und $\Delta \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ repräsentativ für $\mathbb{M}$. Versieht man die Punktmenge $\tilde{M} = \Delta/_{\Delta_p}$ der repräsentierten Geometrie $\tilde{\mathbb{M}}$ mit der Quotiententopologie, so gibt es genau eine Topologie auf $\tilde{\mathcal{M}}$, die $\tilde{\mathbb{M}}$ zu einer stabilen Ebene macht. Mit dieser Topologie ist $\tilde{\mathbb{M}}$ isomorph zu $\mathbb{M}$ (als topologischer Ebene), und die Wirkungen von Δ auf $\tilde{\mathbb{M}}$ und $\mathbb{M}$ sind topologisch äquivalent.*

Beweis: Nach (6.2) sind $\tilde{\mathbb{M}}$ und $\mathbb{M}$ als Inzidenzgeometrien isomorph. Nach [14] (vgl. [2],[56: 2.13]) ist π ein Homöomorphismus. Nach [33: 1.4] gibt es genau eine Topologie auf $\mathcal{M}$, die $\mathbb{M}$ zu einer stabilen Ebene macht. Die Abbildung γ^{-1} transportiert diese Topologie auf $\tilde{\mathcal{M}}$ und macht damit $\tilde{\mathbb{M}}$ zu einer stabilen Ebene. Die Wirkung von Δ auf $\tilde{\mathbb{M}}$ durch Rechtsmultiplikation ist bezüglich dieser Topologien auch topologisch äquivalent zur gegebenen Wirkung auf $\mathbb{M}$. □

(6.4) Korollar. *Es sei $(\Delta, \Delta_p, (\Delta_R)_{R \in \mathcal{R}})$ repräsentierendes Tripel für zwei stabile Ebenen $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$. Dann gilt $\mathbb{E} \cong \mathbb{F}$, und die Wirkungen von Δ sind äquivalent.*

(6.5) Bemerkung. Analog zu [15: 6.3] und [28] läßt sich die Gültigkeit gewisser Inzidenzaxiome gruppentheoretisch charakterisieren:

Eine von $(\Delta, \Delta_p, (\Delta_R)_{R \in \mathcal{R}})$ repräsentierte Geometrie ist etwa ein linearer Raum, wenn gilt:

i) $\Delta = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} \Delta_p \Delta_R \Delta_p$ (Existenz von Verbindungsgeraden)

ii) Für alle $R \in \mathcal{R}$: $\Delta_p \Delta_R \cap \Delta_R \Delta_p = \Delta_p \cup \Delta_R$
(Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden).

(6.6) Bemerkung. Für jede Translationsebene ist die zugehörige Translationsgruppe repräsentativ ([1], vgl. [62: S. 200]).

7. Schiefhyperbolische Quaternionenebenen.

Alle zwei- und vierdimensionalen stabilen Ebenen, auf denen Invarianzgruppen zu nicht ausgearteten reflexiven Sesquilinearformen auf $\mathbb{R}^3$ ($\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$, $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}(1)$) bzw. $\mathbb{C}^3$ ($\mathrm{SU}_3\mathbb{C}$, $\mathrm{SU}_3\mathbb{C}(1)$ und $\mathrm{SO}_3\mathbb{C} \cong \mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$) wirken, sind bekannt (vgl. [52]). Im achtdimensionalen Fall hat Löwen die entsprechende Fragestellung für die (21-dimensionalen) Gruppen $\mathrm{U}_3\mathbb{H}$ und $\mathrm{U}_3\mathbb{H}(1)$ beantwortet. Im Folgenden werden die möglichen Wirkungen der 15-dimensionalen antiunitären Gruppe $\mathrm{U}_3\mathbb{H}(i)$ bestimmt. Dieses Ergebnis dient auch der Bestimmung aller hinreichend großen quasieinfachen Automorphismengruppen achtdimensionaler stabiler Ebenen.

Es sei

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_3\mathbb{H}(i) &= \left\{A \in \mathbb{H}^{3\times 3} \mid AI\bar{A} = I\right\} \\ &= \left\{A \in \mathbb{H}^{3\times 3} \mid AJ\bar{A} = J\right\}^P \\ &= \left\{A \in \mathbb{H}^{3\times 3} \mid AK\bar{A} = K\right\}^Q \\ &= \left\{A \in \mathbb{H}^{3\times 3} \mid AL\bar{A} = L\right\}^R .\end{aligned}$$

Dabei seien

$$I = \begin{pmatrix} i & & \\ & i & \\ & & i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & i & \\ 1 & & \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} -i & & \\ & i & \\ & & i \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} i & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

und

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & -j \\ & \sqrt{2} & \\ -i & & -k \end{pmatrix} = \bar{P}^{-1},\ Q = \begin{pmatrix} j & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \bar{Q}^{-1},$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & \\ & 1 & -j \\ & -i & -k \end{pmatrix} = \bar{R}^{-1},$$

ferner sei mit $\bar{A}$ die Matrix bezeichnet, die durch Konjugation aller Einträge und Transposition von A entsteht.

Mit $\pi = (A \mapsto \{A, -A\})$ sei der kanonische Epimorphismus von $\mathrm{U}_3\mathbb{H}(i)$ auf $\Gamma = \mathrm{PU}_3\mathbb{H}(i)$ bezeichnet. Für den Kern Z von π gilt $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}(\mathrm{U}_3\mathbb{H}(i)) = \mathrm{Z}(\mathrm{SL}_3\mathbb{H}) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (vgl. [11]). Der Isomorphietyp der maximal kompakten Untergruppen von $\mathrm{U}_3\mathbb{H}(i)$ wird von π nicht beeinflußt:

(7.1) Lemma. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $\varphi = -1$ die zentrale Involution der Gruppe $\mathrm{U}_n\mathbb{C}(r)$. Dann gilt $\mathrm{U}_n\mathbb{C}(r) \cong \mathrm{U}_n\mathbb{C}(r)/_{\langle\varphi\rangle}$.*

Beweis: Die Gruppe $\mathrm{U}_n\mathbb{C}(r)$ erhält man als epimorphes Bild des direkten Produktes $\mathrm{SU}_n\mathbb{C}(r) \times \mathbb{T}$ durch Identifikation der (zentralen) Elemente von Ordnung n. Dieser Epimorphismus kommutiert mit $\pi = (\alpha \mapsto \{\alpha, -\alpha\})$. Andererseits gilt $\mathbb{T}^{\pi} \cong \mathbb{T}$. □

(7.2) Lemma. *Unter der natürlichen Wirkung von Γ zerfallen die Punkt- und die Geradenmenge der projektiven Quaternionenebene in jeweils zwei Bahnen. Die Standgruppen anisotroper Punkte und Geraden sind zu*

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & hD \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{T}, h \in \mathbb{H}', D \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \right\}^{R\pi},$$

diejenigen isotroper Elemente zu

$$\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} ra & & \\ b & c & \\ xa + \frac{1}{2r}a\bar{b}ib & \frac{1}{r}a\bar{b}ci & \frac{a}{r} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} r > 0, a \in \mathbb{H}', b \in \mathbb{H} \\ c \in \mathbb{T}, x \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}^{P\pi}$$

konjugiert. Die Standgruppe zweier isotroper Punkte ist jeweils zu Untergruppen von Λ und von Φ konjugiert.

Beweis: Aus der Darstellung der anti-hermiteschen Form bezüglich J erhält man die Bedingungen für Φ als Standgruppe des isotropen Punktes $q = \mathbb{H}(1,0,0)P$. Nach dem Satz von Witt ([61] oder [12: I §11 p.21]) wirkt Γ transitiv auf der Menge der isotropen Punkte. Die Standgruppe des anisotropen Punktes $p = \mathbb{H}(1,0,0)$ ist offenbar Λ. In $\mathbb{H}^3$ hat jeder anisotrope Vektor rein imaginäre Länge, die sich durch geeignete Multiplikation auf i normieren läßt. Aus dem Satz von Witt folgt Transitivität auf anisotropen Punkten. Die Verbindungsgerade zweier isotroper Punkte ist anisotrop, wie man leicht nachrechnet. Dies zeigt die letzte Behauptung. □

(7.3) Lemma. *Die Gruppen Λ und Φ sind maximal in Γ.*

Beweis: i) Seien $\mathbb{H}v, \mathbb{H}w$ zwei isotrope Punkte. Die betrachtete schiefhermitesche Form hat den Witt-Index 1, es gilt daher

$vI\bar{w} = h \neq 0$. Nun ist $\mathbb{H}v = \mathbb{H}h^{-1}v$ und $(h^{-1}v)I\bar{w} = 1$, und aus dem Satz von Witt folgt, daß Γ ein Element enthält, das $\mathbb{H}v$ auf $\mathbb{H}(0,0,1)P = \mathbb{H}(1,0,j)$ und $\mathbb{H}w$ auf $\mathbb{H}(1,0,0)P = \mathbb{H}(1,0,-j)$ abbildet. Die Gruppe Γ wirkt demnach zweifach transitiv und damit primitiv auf der Menge der isotropen Punkte. Hieraus folgt die Maximalität von Φ.

ii) Als Standgruppe des Zentrums von $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}^{\pi}$ muß Λ der volle Zentralisator von σ in Γ sein. Da σ die einzige Involution im Zentrum von Λ ist, gilt $N_\Gamma(\Lambda) \leq C_\Gamma(\sigma) = \Lambda$. Jede echte Obergruppe $\Xi > \Lambda$ hat folglich größere Dimension als Λ. Die Gruppe $\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & h\mathbf{1} \end{pmatrix} \middle|\ h \in \mathbb{H}' \right\}^{R\pi}$ wirkt demnach effektiv auf der Liealgebra von Ξ, und diese zerfällt unter dieser Wirkung in die Algebra von Λ und einen wenigstens vierdimensionalen Unterraum. Daraus folgt $\dim \Xi \geq 11$ und damit $\Xi = \Gamma$, da die quasieinfache Gruppe Γ nicht quasieffektiv auf $\Gamma/_\Xi$ wirkt (vgl. [54: Th. 1]). □

(7.4) Lemma. *In Γ gibt es genau drei Konjugiertenklassen von Involutionen, die durch*

$$\tau = I^{\pi} = \begin{pmatrix} & & i \\ & i & \\ i & & \end{pmatrix}^{\pi}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}^{\pi} \text{ und } \sigma\tau = K^{\pi} = \begin{pmatrix} & & -i \\ & i & \\ i & & \end{pmatrix}^{\pi}$$

repräsentiert werden.
Die Zusammenhangskomponenten der Zentralisatoren sind jeweils

$$\mathrm{ET} = \left\{ A \in \mathbb{C}^{3\times 3} \mid AI\bar{A} = I \right\}^{\pi} = C_\Gamma(\tau)^1$$

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} t & \\ & hD \end{pmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{T}, h \in \mathbb{H}', D \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \right\}^{R\pi} = \mathrm{Z}\Sigma\Psi = C_\Gamma(\sigma)$$

$$\Upsilon\Theta = \left\{ A \in \mathbb{C}^{3\times 3} \mid AK\bar{A} = K \right\}^{Q\pi} = C_\Gamma(\sigma\tau)^1 .$$

Dabei ist

$$\mathrm{E} = \mathrm{SU}_3\mathbb{C}$$

$$\mathrm{T} = \{c\mathbb{1} \mid c \in \mathbb{T}\}$$

$$\mathrm{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} c & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{T} \right\}^{\pi} = \mathrm{Z}(\Lambda)$$

$$\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & h\mathbb{1} \end{pmatrix} \,\middle|\, h \in \mathbb{H}' \right\}^{R\pi}$$

$$\Psi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & D \end{pmatrix} \,\middle|\, D \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} \right\}^{R\pi}$$

$$\Upsilon = \left\{ \begin{pmatrix} -jrj & -js & -jt \\ uj & v & w \\ xj & y & z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_3\mathbb{C}(1) \right\}^{\pi} \cong \mathrm{SU}_3\mathbb{C}(1)$$

$$\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{c} & & \\ & c & \\ & & c \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{T} \right\}^{\pi}.$$

Ferner gilt: die Untergruppe ET *ist maximal kompakt in* Γ, *und die Gruppen* T, Θ *und* Z *erzeugen einen maximalen Torus von* ET.

Beweis: Die Involutionen τ, σ und $\sigma\tau$ liegen offenbar in Γ, und die genannten Gruppen sind jedenfalls in den Zentralisatoren enthalten. Wir betrachten die klassische Wirkung von $\mathrm{PSL}_3\mathbb{H}$ auf der projektiven Quaternionenebene. Die Involution τ ist planar, und ihr Zentralisator läßt die Fixebene invariant. Der Kern der induzierten Wirkung ist kompakt und höchstens eindimensional. In $\mathrm{PSL}_3\mathbb{H}$ wird τ von $\Pi = \left\{ A \in \mathbb{C}^{3\times 3} \mid |\det A| = 1 \right\}^{\pi}$ zentralisiert. Diese Gruppe induziert auf der Fixebene die volle Gruppe $\mathrm{PSL}_3\mathbb{C}$, und der Kern hat die maximal mögliche Dimension. Also ist Π die Zusammenhangskomponente des Zentralisators von τ in $\mathrm{PSL}_3\mathbb{H}$, und es gilt $\mathrm{C}_\Gamma(\tau)^1 = \Pi \cap \Gamma = \mathrm{ET}$. Wegen $\sigma\tau = K^{\pi} = I^{Q\pi} = \tau^{Q^{\pi}}$ gilt $\mathrm{C}_\Gamma(\sigma\tau)^1 = \Pi^{Q^{\pi}} \cap \Gamma = \Upsilon\Theta$. Die Gruppe Λ ist maximal nach (7.3), also gilt $\Lambda = \mathrm{C}_\Gamma(\sigma)$. Da ihre Zentralisatoren nicht isomorph sind, liegen τ, σ und $\sigma\tau$ in drei verschiedenen Konjugiertenklassen. Nach [95] oder [60] ist $\mathrm{ET} \cong \mathrm{U}_3\mathbb{C}$ maximal kompakt. In $\mathrm{U}_3\mathbb{C}$ gibt es genau drei Konjugiertenklassen von Involutionen (repräsentiert von $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$). Da T, Θ und Z eine zu $\mathbb{T}^3$ isomorphe Gruppe erzeugen, folgt die letzte Behauptung aus $\mathrm{rang}(\mathrm{ET}) = 3$. □

(7.5) Lemma. *Wirkt Γ auf einer stabilen Ebene $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$ der Dimension 8, so enthält jede Punktstandgruppe eine Untergruppe isomorph zu $\mathbb{T}^2$. Ferner gilt:*

a) *Die Involution τ ist planar, die Fixebene $\mathbb{E}$ ist isomorph zur komplexen projektiven Ebene, und $\mathrm{E}/\langle\tau\rangle$ wirkt als elliptische Bewegungsgruppe auf $\mathbb{E}$.*

b) *Die Involution σ ist eine Spiegelung (das heißt, sie hat ein Zentrum z und eine Achse H).*

c) *Die Involution $\sigma\tau$ ist planar, die Fixebene $\mathbb{F}$ ist isomorph zu einer unter der Wirkung der hyperbolischen Bewegungsgruppe invarianten, offenen Unterebene der komplexen projektiven Ebene, und $\Upsilon/\langle\sigma\tau\rangle$ wirkt als die hyperbolische Gruppe.*

Beweis: i) Ist $\tau \in \Gamma_x$, so muß τ planar sein, da der Zentralisator weder auf einem Büschel noch auf einer Geraden wirken kann (vgl. (3.15)). Nach [52] ist die Fixebene isomorph zur komplexen projektiven Ebene, und die Wirkung von $\mathrm{E} \cong \mathrm{SU}_3\mathbb{C}$ ist äquivalent zur gewöhnlichen. Die Standgruppe $(\mathrm{ET})_x = \mathrm{E}_x\mathrm{T}$ enthält dann einen maximalen Torus. Insbesondere wirkt keine der Involutionen frei auf M. Nach (3.11) können die drei zu σ konjugierten Involutionen im maximalen Torus nicht alle axial mit Achsen durch x sein, die Involution σ ist daher eine Spiegelung.

ii) Die Involution σ kann nicht planar sein, da ihr Zentralisator die halbeinfache, nicht quasieinfache Gruppe $\Sigma\Psi$ enthält (4.9).

iii) Hat σ ein Zentrum z, so enthält die Standgruppe Γ_z die Involution τ, und σ ist eine Spiegelung nach i).

iv) Die maximal kompakte Untergruppe ET von Γ ist 9-dimensional. Nach (3.15) hat ET keine 8-dimensionale Bahn. In diesem Fall hätte die zentrale Involution τ von ET Fixpunkte, was der Transitivität widerspricht. Daher sind alle Standgruppen in ET wenigstens zweidimensional. Enthält die Standgruppe Γ_x keine zu $\mathbb{T}^2$ isomorphe Untergruppe, so ist die maximal kompakte Untergruppe Ξ der Zusammenhangskomponente Γ_x^1 lokal isomorph zu Spin_3. Wir können $\Xi < \mathrm{ET}$ annehmen, da ET maximal kompakt in Γ ist. Die Projektion der quasieinfachen Gruppe Ξ nach T muß trivial sein. Daher ist $\Xi < \mathrm{E}_x$. Nach i) wird x von τ bewegt, und die Punktstandgruppe E_x ist in der Geradenstandgruppe E_{xx^τ} enthalten. Nach (3.16) ist die Wirkung von E auf $\mathcal{G}_\tau$ nicht trivial, nach [54: Th. 2] also äquivalent zur gewöhnlichen Wirkung von $\mathrm{SU}_3\mathbb{C}$ auf der projektiven Ebene über $\mathbb{C}$, und T wirkt trivial auf $\mathcal{G}_\tau$. Insbesondere ist $(\mathrm{ET})_{xx^\tau} = \mathrm{E}_{xx^\tau}\mathrm{T}$ konjugiert zu $\mathrm{TZ}\Sigma$, und Ξ ist konjugiert zu Σ. Wir können also $\Xi = \Sigma$ und $\sigma \in \Gamma_x$ annehmen. Nach ii) ist σ zentral oder axial. Im Falle $\sigma \in \Gamma_{[x]}$ enthält Γ_x den Zentralisator Λ von σ und damit eine zu $\mathbb{T}^3$ isomorphe Untergruppe. Also liegt x auf der Achse H von σ. Die einzigen linearen halbeinfachen Liegruppen, die Spin_3, aber keine zu $\mathbb{T}^2$ isomorphe Gruppe enthalten, sind $\mathrm{Spin}_3 \cong \mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ und $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ (vgl. [95] oder [60]). Da $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ sich nicht in $\mathrm{C}_\Gamma(\sigma) = \Lambda$ einbetten läßt, ist Γ_x^1 das Produkt der Gruppe Σ und eines auflösbaren, kompaktfreien Normalteilers Ω mit $\dim \Omega \geq 4$. Nach dem Satz von Lie läßt Ω bei der natürlichen Wirkung auf der projektiven Quaternionenebene einen Punkt fest. Da Λ keine vierdimensionale kompaktfreie Gruppe enthält, hat Ω in der gewöhnlichen Wirkung genau einen (isotropen) Fixpunkt, der dann auch unter Γ_x fest bleibt. Für geeignetes $\varphi \in \Gamma$ ist also $\Gamma_x^\varphi \leq \Phi$. Da Ω nicht im Zentralisator von σ liegen kann, wirkt Σ effektiv auf der Liealgebra von Ω. Andererseits zerfällt die Liealgebra von Φ unter der Wirkung von Σ^φ in die Summe der Σ^φ-invarianten Untervektorräume, die man als Liealgebren von Σ^φ, $\left\{\begin{pmatrix} r & & \\ & 1 & \\ & & r^{-1} \end{pmatrix} \middle| \ r>0 \right\}^{P\pi}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{pmatrix} \middle| \ c \in \mathbb{T} \right\}^{P\pi}$ und

$$\Delta = \left\{\begin{pmatrix} 1 & & \\ b & 1 & \\ x + \frac{1}{2}\bar{b}ib & \bar{b}i & 1 \end{pmatrix} \middle| \ b \in \mathbb{H}, x \in \mathbb{R} \right\}^{P\pi}$$

erhält. Nur die Liealgebra von Δ zerfällt weiter entsprechend der Zerlegung von Δ in die Kommutatorgruppe $\Delta' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ x & & 1 \end{pmatrix} \middle| \ x \in \mathbb{R} \right\}^{P\pi}$ und deren Σ^φ-

invariantes Komplement $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ b & 1 & \\ \frac{1}{2}bib & bi & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{H} \right\}^{P\pi}$. Dabei bildet D keine Gruppe. Die mindestens vierdimensionale Liealgebra von Ω^φ hat im 7-dimensionalen Radikal der Liealgebra von Φ nicht trivialen Schnitt mit dem vierdimensionalen Unterraum, der D entspricht. Da Σ^φ irreduzibel auf diesem Unterraum wirkt, liegt D und damit $\Delta = \langle D \rangle$ in Ω^φ. Wir betrachten nun die Wirkung von Γ_{x^φ} auf der Bahn von x^φ unter der Gruppe Φ. Die Gruppe Δ ist normal in Φ. Daher wirkt sie trivial auf der Bahn $x^{\varphi\Phi}$. Wegen $\dim \Delta = 5$ ist diese Bahn in einer Geraden G enthalten (4.19). Im Falle $G \neq H^\varphi$ enthielte die Standgruppe Γ_{x^φ} mit dem Zentralisator $C_\Phi(\sigma^\varphi)$ eine Gruppe isomorph zu $\mathbb{T}^2$. Daher gilt $G = H^\varphi$. Aus der Maximalität von Φ folgt $\Gamma = \Gamma_H$. Nun wirkt ET effektiv auf der vierdimensionalen Geraden H im Widerspruch zu [54:Th.1].

Damit ist die erste Behauptung gezeigt. Wir betrachten nun die möglichen Tripel kommutierender Involutionen in einer zu $\mathbb{T}^2$ isomorphen Untergruppe von Γ_x.

v) Je drei kommutierende, zu $\sigma\tau$ konjugierte Involutionen erzeugen eine zu $\left(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}\right)^3$ isomorphe Gruppe und können deswegen in keiner zu $\mathbb{T}^2$ isomorphen Gruppe enthalten sein.

vi) Fixieren drei kommutierende, zu σ konjugierte Involutionen einen Punkt, so muß dieser das Zentrum einer der drei Involutionen sein (3.11), und i) findet Anwendung.

vii) Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß Γ_x die Involutionen σ, α und $\sigma\alpha$ enthält. Dabei sei $\alpha \neq \sigma\tau$ eine zu $\sigma\tau$ konjugierte Involution, die mit σ und τ kommutiert (dann ist $\sigma\alpha$ ebenfalls zu $\sigma\tau$ konjugiert). Sind alle drei Involutionen axial, so muß wenigstens eine Zentrum x haben, und i) findet Anwendung. Ist α (und damit $\sigma\tau$) planar, so ist nach [52] die Fixebene $\mathbb{F} = (F, \mathcal{F})$ von $\sigma\tau$ isomorph zu einer unter der Wirkung der hyperbolischen Bewegungsgruppe invarianten, offenen Unterebene der komplexen projektiven Ebene, und $\Upsilon/_{\langle\sigma\tau\rangle}$ wirkt als die hyperbolische Gruppe. Da Θ auf $\mathbb{F}$ trivial wirken muß, enthält die Standgruppe Γ_y jedes anisotropen Punktes $y \in F$ einen maximalen Torus. Insbesondere fixiert τ einen Punkt.

Damit ist gezeigt, daß keine der Involutionen frei ist. Außerdem ist nach i) die Involution τ planar, und σ ist eine Spiegelung.

viii) Im Zentralisator von $\sigma\tau$ liegen wenigstens drei kommutierende, zu σ konjugierte Spiegelungen. Die Involution $\sigma\tau$ fixiert das aus den jeweiligen Zentren bestehende Dreieck. Wäre $\sigma\tau$ axial oder zentral, so hätte $\sigma\tau$ dieselbe Achse wie eine dieser Spiegelungen. Alle zu $\sigma\tau$ konjugierten Involutionen sind daher planar, die Wirkung von Υ auf der Fixebene ergibt sich aus [52]. □

(7.6) Satz. *Wirkt Γ effektiv auf einer 8-dimensionalen stabilen Ebene $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$, so enthält $\mathbb{M}$ eine Γ-invariante, offene Unterebene $\mathbb{D} = (D, \mathcal{D})$, die isomorph ist zu der auf der Menge der anisotropen Punkte induzierten stabilen Unterebene der projektiven Quaternionenebene. Die Wirkung von Γ auf $\mathbb{D}$ ist die natürliche.*

Beweis: i) Nach (7.5b) hat die Involution σ ein Zentrum z. Die Standgruppe Γ_z enthält den Zentralisator Λ von σ. Da ET nicht effektiv auf dem Büschel $\mathcal{M}_z$ wirken kann, ist Γ_z eine echte Untergruppe von Γ. Aus der Maximalität von Λ in Γ folgt $\Gamma_z = \Lambda$, und die Bahn z^Γ ist offen in M. Es sei $\mathbb{D}$ die auf $D = z^\Gamma$ induzierte offene Unterebene von $\mathbb{M}$.

ii) Es ist $\Lambda = \mathrm{Z}\Sigma\Psi$ (vgl. (7.4)). Die Gruppe Σ zentralisiert $\tau = L^{R\pi}$, die Gruppe Ψ zentralisiert $\begin{pmatrix} i & & \\ & i & \\ & & -i \end{pmatrix}^\pi = I^{R\pi} \in (\sigma\tau)^\Gamma$.
Beide Gruppen wirken effektiv auf den zugehörigen Fixebenen, die jeweils z enthalten. Auf der jeweiligen Fixebene wirkt weder Σ noch Ψ trivial auf dem Büschel durch z. Die Wirkung von $\Sigma\Psi$ auf $\mathcal{M}_z$ muß daher quasieffektiv sein. Nach [67] kann Λ nicht quasieffektiv auf dem Büschel wirken, der Kern $\Gamma_{[z]}$ ist also die Gruppe $\mathrm{Z} \cong \mathbb{T}$. Aus der Planarität von τ folgt $\mathcal{M}_z \approx \mathbb{S}_4$ nach (4.5), und die Anwendung von [67] auf die effektive Wirkung der maximal kompakten Untergruppe von $\Sigma\Psi/\langle\sigma\rangle \cong \mathrm{SO}_3\mathbb{R} \times \mathrm{PSL}_2\mathbb{R} \cong \mathrm{PU}_2\mathbb{H}(i)$ auf $\mathcal{M}_z$ zeigt, daß die maximal kompakte Untergruppe $\mathrm{SO}_3\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ von $\Sigma\Psi/\langle\sigma\rangle$ in der natürlichen Weise (als Untergruppe von $\mathrm{SO}_5\mathbb{R}$) auf dem Büschel wirkt. Insbesondere hat Σ

eine zu $\mathbb{S}_1$ homöomorphe Menge $\mathcal{G}$ von Fixgeraden in $\mathcal{M}_z$, auf der Ψ transitiv wirkt. Es gibt daher eine Gerade $S \in \mathcal{G}$ mit $\Psi_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & u & \\ & v & u^{-1} \end{pmatrix} \middle| \; 0 \neq u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \right\}^{R\pi}$ und damit $\Lambda_S = (Z\Sigma)\Psi_S$. Sei $T \in \mathcal{M}_z \setminus \mathcal{G}$. Nach [67] enthält die Standgruppe $(\Sigma\Psi)_T$ eine zu $\mathbb{T}$ isomorphe Untergruppe. In $\Lambda_T = Z(\Sigma\Psi)_T$ gibt es daher drei zu σ konjugierte Spiegelungen oder eine zu $\sigma\tau$ konjugierte planare Involution α. Im ersten Fall enthält $\Lambda_{[T]}$ eine der Spiegelungen, und Λ_T enthält deren Zentralisator in Λ. Aus der Maximalität des Zentralisators in Γ folgt die Gleichheit. Im zweiten Fall induziert σ eine Spiegelung auf der Fixebene von α. Das Zentrum z ist ein anisotroper Punkt, die Standgruppe von T im Zentralisator $C_\Gamma(\alpha)$ enthält also eine zu $\mathbb{T}^3$ isomorphe Untergruppe. Damit ist der zweite Fall auf den ersten zurückgeführt.

iii) Nach ii) ist die Wirkung von $\Lambda = \Gamma_z$ auf dem Büschel $\mathcal{M}_z$ die gewöhnliche. Für jede Gerade $T \in \mathcal{M}_z \setminus \mathcal{G}$ ist außerdem die Standgruppe Γ_T als die gewöhnliche erkannt, es bleibt also nur noch Γ_S für $S \in \mathcal{G}$ zu bestimmen. Wegen $\dim \Lambda_S < \dim \Gamma - 8$ gilt $\dim \Gamma_S > \dim \Lambda_S$. Die zu Spin_3 isomorphe Untergruppe Σ wirkt daher effektiv auf der Liealgebra von Γ_S. Es gibt also eine Zerlegung dieser Liealgebra in die Liealgebra von Λ_S und einen wenigstens vierdimensionalen Vektorraum. Andererseits ist $\Gamma_{S,z} = \Lambda_S$ und daher $\dim \Gamma_S = \dim \Lambda_S + 4 = 10$.

Halbeinfache Liegruppen der Dimension 10 sind quasieinfach und zu einer der Gruppen $\mathrm{SO}_5\mathbb{R}(r)$ lokal isomorph (vgl. [95] oder [60]). In keine dieser Gruppen läßt sich Λ_S einbetten. Es gibt also einen minimalen abelschen zusammenhängenden Normalteiler Ω der Zusammenhangskomponente Γ_S^1.

Wird Ω von σ nicht zentralisiert, so wirkt Σ effektiv auf Ω, und Ω ist eine mindestens vierdimensionale Vektorgruppe. Nach dem Satz von Lie und (7.2) fixiert Ω genau einen isotropen Punkt. Der Normalisator von Ω ist daher zu Φ konjugiert. In Φ gibt es aber keinen solchen Normalteiler. Demnach liegt Ω in $C_{\Gamma_S}(\sigma) = \Lambda_S$ und fixiert mit z die vierdimensionale Bahn z^{Γ_S}. Insbesondere ist die Involution σ nicht in Ω enthalten, und es ist $\Omega \cap Z = \mathbb{1}$. Da Ω im Radikal $Z\Psi_S$ von Λ_S liegt, ist $\dim \Omega = 1$ (sonst wäre $Z\Psi_S = Z\Omega$

abelsch). Die maximal kompakte Untergruppe Z von $Z\Psi_S$ ist charakteristisch in $Z\Psi_S$. Es folgt $\Omega \cong \mathbb{R}$. Der Schnitt $\Omega \cap \Psi_S$ ist nicht trivial (sonst wäre $Z\Psi_S = \Omega\Psi_S$ kompaktfrei). Da der einzige nicht triviale abelsche Normalteiler von Ψ_S die Kommutatorgruppe $\Psi'_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & r & 1 \end{pmatrix} \middle| \; r \in \mathbb{R} \right\}^{R\pi}$ ist, erhält man $\Omega = \Psi'_S$. In der gewohnten Wirkung auf der Quaternionenebene ist Ψ'_S genau die Gruppe der Translationen in Γ mit der Achse $\bar{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Normalisator $N_\Gamma(\Psi'_s)$ ist die Standgruppe dieser Geraden, eine zusammenhängende Gruppe der Dimension 10. Dual zu (7.3) erhält man die Maximalität der Geradenstandgruppe. Damit ist Γ_S bestimmt. Wie in (6.4) rekonstruiert man die Geometrie von $\mathbb{M}$ aus den Nebenklassenräumen nach den Standgruppen. Damit ist der Satz bewiesen. □

(7.7) Satz. *Alle achtdimensionalen stabilen Ebenen, auf denen $\Gamma = PU_3\mathbb{H}(i)$ effektiv wirkt, sind in die projektive Quaternionenebene einbettbar, genauer: die Wirkung von Γ ist äquivalent zur gewöhnlichen, und die Ebene $\mathbb{M}$ ist die Spurgeometrie $\mathbb{D}$ auf der offenen Bahn von Γ, oder $\mathbb{M}$ ist isomorph zur projektiven Quaternionenebene.*

Beweis: i) Sei $\mathbb{D}$ wie in (7.6) und $x \in M \setminus D$. Nach (7.5) enthält Γ_x eine zu $\mathbb{T}^2$ isomorphe Gruppe. Da Γ_x keine zu τ konjugierte Involution und höchstens zwei zu $\alpha\sigma$ konjugierte Involutionen enthält, können wir annehmen, daß der Punkt x auf der Achse H von σ liegt. Der Zentralisator Λ von σ wirkt mit genau zwei Bahnen auf dem Büschel $\mathcal{M}_z$ durch das Zentrum z von σ. Die Gerade xz repräsentiert die zu $\mathbb{S}_1$ homöomorphe Bahn. Da Λ die Achse von σ festhält, ergibt sich, daß die Projektion $q \mapsto qz: H \to \mathcal{M}_z$ surjektiv ist. Die Achse H ist also eine kompakte Gerade. Die Gruppe Γ wirkt transitiv auf der Menge der Spiegelungsachsen, diese sind demnach sämtlich kompakt.

ii) Es sei $S \in \mathcal{D}$ eine Gerade, die nicht Achse einer Spiegelung ist. Da die Verbindungsgerade von zwei isotropen Punkten anisotrop (und damit Achse einer Spiegelung) ist, gibt es in der stabilen

Ebene $\mathbb{D}$ durch jeden Punkt $p \in D$ genau eine Parallele G zu S. Der Schnittpunkt von zwei Nicht-Achsen ist aus dualen Gründen anisotrop und existiert demnach in D. Dies zeigt, daß G Achse einer Spiegelung ist. In $\mathbb{M}$ ist G kompakt nach i), daher existiert in M der Schnittpunkt $G \wedge S$, und S ist kompakt. Nach i) liegt jeder Punkt $x \in M \setminus D$ auf einer Spiegelungsachse. Die Gruppe Γ wirkt transitiv auf den Achsen, und die Standgruppe $\Gamma_H = \Lambda$ wirkt transitiv auf $H \setminus D$. Jeder Punkt $x \in M \setminus D$ liegt demnach auf genau einer Nicht-Achse $G_x \in \mathcal{D}$.

iii) Es seien x und y zwei verschiedene Punkte von $M \setminus D$. Die beiden Geraden G_x und G_y schneiden sich in einem Punkt $p \in D$. Dieser Punkt ist Zentrum einer Spiegelung, und alle diejenigen Punkte auf Nicht-Achsen durch p, die nicht in D liegen, gehören der Achse dieser Spiegelung an.

iv) Nach iii) treffen alle Geraden von $\mathbb{M}$ die Punktmenge D in mehr als einem Punkt. Nach i) und ii) sind sämtliche Geraden kompakt. Die Ebene $\mathbb{M}$ ist damit als projektive Ebene erkannt [33: 1.15]. Dualisieren von (7.6) liefert die behauptete Isomorphie von $\mathbb{D}$ mit der projektiven Quaternionenebene. □

Zum Schluß dehnen wir unser Ergebnis auf die von Γ approximierten Gruppen aus:

(7.8) Satz. *(Charakterisierung der schiefhyperbolischen Ebenen) Wirkt eine von $\Gamma = \mathrm{PU}_3\mathbb{H}(i)$ approximierte zusammenhängende lokal kompakte Gruppe X effektiv auf einer achtdimensionalen stabilen Ebene $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$, so gilt $\mathrm{X} \cong \Gamma$ (und die Ebene ist klassisch).*

Beweis: Die Gruppe Γ ist die zentrumsfreie Form der Liegruppen vom Typ $A_3^{\mathbb{C},1} = D_3^{\mathbb{H}1}$ (vgl. [95] oder [60]). Sei also ζ ein nicht triviales Element des Zentrums von X. Liegen alle $\langle\zeta\rangle$-Bahnen in Geraden, so wirkt die in X enthaltene Gruppe $\mathrm{E} \cong \mathrm{SU}_3\mathbb{C}$ (vgl. (2.18)) effektiv auf der Menge $\mathcal{G}_\zeta = \{xx^\zeta \mid x^\zeta \neq x \in M\}$. Diese Menge ist lokal homöomorph zu einer Geraden (3.2) und daher vierdimensional. Nach [54: Th. 2] gibt es keine solche Wirkung. Es gibt also einen Punkt z, dessen Bahn unter $\langle\zeta\rangle$ ein Dreieck enthält. Da die kompakte Gruppe E nicht mit achtdimensionalen

Bahnen auf M wirkt (vgl. (3.15)), enthält die Standgruppe von z eine Involution $\sigma \in \mathrm{E}$. Der Zentralisator dieser Involution kann auf keiner vierdimensionalen Ebene wirken (4.9), der Punkt z ist also Zentrum oder Achsenpunkt von σ. Mit z hält σ auch die Bahn $z^{\langle\zeta\rangle}$ fest. Eine der Ecken des in dieser Bahn enthaltenen Dreiecks ist Zentrum von σ. Der Zentralisator von σ, insbesondere die Gruppe $\langle\zeta\rangle$, fixiert dieses Zentrum: ein Widerspruch. $\square$

8. Ausschluss der von $\mathrm{PSp}_6\mathbb{R}$ approximierten Gruppen.

Es sei

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}_6\mathbb{R} &= \{A \in \mathbb{R}^{6\times 6} \mid AIA' = I\} \\ &= \{B \in \mathbb{R}^{6\times 6} \mid BJB' = J\}^Q .\end{aligned}$$

Dabei seien

$$I = \begin{pmatrix} & 1 & & & & \\ -1 & & & & & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & -1 & \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} & 1 & & & & \\ -1 & & & & & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & & & & & -1 \\ & & & & 1 & \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

und A' die zu A transponierte Matrix. Mit $\pi = (A \mapsto \{A, -A\})$ sei der kanonische Epimorphismus von $\mathrm{Sp}_6\mathbb{R}$ auf $\Gamma = \mathrm{PSp}_6\mathbb{R}$ bezeichnet.

(8.1) Lemma.

a) *Die Konjugiertenklassen der Involutionen in Γ werden repräsentiert durch*

$$\tau = I^\pi, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}^\pi \quad \text{und } \alpha\tau = J^\pi .$$

b) *Der Zentralisator von τ ist die maximal kompakte Untergruppe*

$$\mathrm{C}_\Gamma(\tau) = \{A \mid AIA' = I, AI = IA\}^\pi .$$

Mit $\mathrm{T} = \{c\mathbf{1} + sI \mid c^2 + s^2 = 1\}^\pi \cong \mathbb{T}$

und $\mathrm{E} = \mathrm{C}_\Gamma(\tau)' \cong \mathrm{SU}_3\mathbb{C}$ *gilt* $\mathrm{C}_\Gamma(\tau) = \mathrm{ET} \cong \mathrm{U}_3\mathbb{C}$.

c) *Der Zentralisator von α ist die (maximale) Untergruppe*

$$\mathrm{C}_\Gamma(\alpha) = \left\{\begin{pmatrix} C & \\ & D \end{pmatrix} \,\middle|\, C \in \mathrm{Sp}_4\mathbb{R}, D \in \mathrm{Sp}_2\mathbb{R}\right\}^\pi .$$

Mit $$\Phi = \left\{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & D \end{pmatrix} \,\middle|\, D \in \mathrm{Sp}_2\mathbb{R}\right\}^\pi$$

und $$\Psi = \left\{\begin{pmatrix} C & \\ & \mathbf{1} \end{pmatrix} \,\middle|\, C \in \mathrm{Sp}_4\mathbb{R}\right\}^\pi$$

gilt $\mathrm{C}_\Gamma(\alpha) = \Phi\Psi$.

d) Der Zentralisator von $\alpha\tau$ ist die Gruppe

$$\mathrm{C}_\Gamma(\alpha\tau) = \{A \mid AIA' = I, AJ = JA\}^\pi$$
$$= \{B \mid BJB' = J, BI = IB\}^{Q\pi}.$$

Mit $\Theta = \mathrm{T}^Q$ und $\Upsilon = \mathrm{C}_\Gamma(\alpha\tau)' \cong \mathrm{SU}_3\mathbb{C}(1)$ gilt

$$\mathrm{C}_\Gamma(\alpha\tau) = \Upsilon\Theta \cong \mathrm{U}_3\mathbb{C}(1).$$

Beweis: Die Aussagen über die Zentralisatoren verifiziert man sofort durch Nachrechnen. Dabei benutzt man die Identifikation von $\mathbb{C}$ mit der Menge der Drehstreckungen von $\mathbb{R}^2$ und beschreibt den Endomorphismenring von $\mathbb{C}^3(=\mathbb{R}^6)$ durch

$$\left\{(A_{ij})_{1\le i,j\le 3} \;\middle|\; A_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij} & \beta_{ij} \\ -\beta_{ij} & \alpha_{ij} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\right\}.$$

Damit wird $I = i\mathbf{1}$, $J = \begin{pmatrix} i & & \\ & i & \\ & & -i \end{pmatrix}$, und Transposition der reell aufgefaßten Matrix $(A_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ entspricht Transposition und Konjugation aller Einträge der komplex aufgefaßten.

Die Involutionen τ, α und $\alpha\tau$ repräsentieren offenbar die Konjugiertenklassen von Involutionen in $\mathrm{ET} \cong \mathrm{U}_3\mathbb{C}$. Nach [95] oder [60] ist ET maximal kompakt in Γ. Jede Involution in Γ ist daher zu einer in ET konjugiert. Da die Zentralisatoren nicht isomorph sind, sind die genannten Involutionen paarweise nicht konjugiert.
□

(8.2) Lemma. *Jede zu $\mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ isomorphe Untergruppe von Γ ist konjugiert zu*

$$\Sigma = \left\{\begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} & \\ A_{32} & A_{33} & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_6\mathbb{R} \;\middle|\; \begin{matrix} A_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij} & \beta_{ij} \\ -\beta_{ij} & \alpha_{ij} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \\ A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32} = \mathbf{1} \end{matrix}\right\}^\pi$$

Für die jeweiligen Zentralisatoren von Σ in Γ bzw. Ψ gilt:

$$\mathrm{C}_\Gamma(\Sigma) = \Phi\mathrm{T},$$

$$\mathrm{Z} = \mathrm{C}_\Psi(\Sigma) = \left\{\begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_6\mathbb{R} \;\middle|\; \begin{matrix} AA' = \mathbf{1} \\ \det A = 1 \end{matrix}\right\}^\pi \cong \mathbb{T}.$$

Beweis: Jede zu $SU_2\mathbb{C}$ isomorphe Untergruppe von Γ ist kompakt und daher zu einer Untergruppe Ξ von ET konjugiert. Da Ξ quasieinfach ist, gilt $\Xi = \Xi'$ und damit $\Xi \leq (ET)' = E$. In $E \cong SU_3\mathbb{C}$ sind alle Involutionen paarweise konjugiert, die zentrale Involution ξ von Ξ ist daher in E konjugiert zu α. Nun ist Ξ die Kommutatorgruppe des Zentralisators von ξ in E und damit zu Σ konjugiert. Die Aussage über den Zentralisator rechnet man leicht nach. □

Die Gruppe $PSp_6\mathbb{R}$ ähnelt der Gruppe $PU_3\mathbb{H}(i)$, was die Involutionen und deren Zentralisatoren angeht (vgl. (7.4)). Das folgende Lemma steht jedoch in offenkundigem Gegensatz zu (7.5). Es bildet damit den Schlüssel zum Ausschluß der symplektischen Gruppe. Im Folgenden sei $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$ eine zusammenhängende stabile Ebene der Dimension 8, auf der $\Gamma = PSp_6\mathbb{R}$ effektiv als Gruppe von Automorphismen wirkt.

(8.3) Lemma. *Die Involution α hat kein Zentrum, und τ wirkt frei.*

Beweis: i) Fixiert die Involution τ einen Punkt p, so wirkt sie planar, da E weder trivial noch quasieffektiv auf $\mathcal{M}_p$ wirken kann (3.15). Die Gruppe E induziert auf der Fixebene $\mathbb{F}$ von τ dann die elliptische Bewegungsgruppe, und $\mathbb{F}$ ist isomorph zur komplexen projektiven Ebene [52]. Insbesondere hat α in diesem Fall Achse und Zentrum in $\mathbb{F}$ und damit, da α nicht planar sein kann (4.9), auch in $\mathbb{M}$.

ii) Hat α ein Zentrum z, so fixiert τ den Punkt z und ist nach dem eben Bemerkten planar. Insbesondere ist $\mathcal{M}_z \approx \mathbb{S}_4$ nach (4.5). Aus [67] entnimmt man, daß keine maximal kompakte Untergruppe von $\Phi\Psi$ quasieffektiv auf $\mathcal{M}_z$ wirken kann. Da Ψ nicht trivial auf $\mathcal{M}_z$ wirkt (3.15), gilt $\Phi = (\Phi\Psi)_{[z]}$. Die maximal kompakte Untergruppe ΣZ von Ψ induziert auf $\mathcal{M}_z$ eine zu $SO_3\mathbb{R} \times SO_2\mathbb{R}$ isomorphe effektive Transformationsgruppe. Laut [67] ist die Wirkung dieser Gruppe auf $\mathbb{S}_4$ bis auf Äquivalenz festgelegt. Insbesondere gibt es eine Gerade $G \in \mathcal{M}_z$, die von Σ fixiert wird. Es sei $\Lambda = \Gamma_G$ die Standgruppe dieser Geraden. Dann ist $\Lambda_z = \Lambda \cap \Gamma_z = \Lambda \cap \Phi\Psi = C_\Lambda(\alpha)$. Die reduktive Gruppe $\Phi\Sigma$ wirkt daher effektiv auf einem Vektorraum-Komplement V der Liealgebra von Λ_z in der Liealgebra von Λ. Da die Bahn z^Λ in der Geraden G enthalten ist, gilt $\dim V \leq 4$. Die zu $\mathrm{SU}_2\mathbb{C}$ isomorphe Gruppe Σ wirkt demnach irreduzibel auf $V \cong \mathbb{R}^4$. Nach dem Lemma von Schur müßte Φ in einem Schiefkörper liegen. Das ist unmöglich. $\square$

(8.4) Lemma. *Die Gruppe* $\Gamma = \mathrm{PSp}_6\mathbb{R}$ *kann nicht wirken.*

Beweis: i) Nach (3.15) ist $\dim \mathrm{E}_p > 0$ für jeden Punkt $p \in M$. Insbesondere enthält E_p eine Involution. Diese ist konjugiert zu α. Nach (4.9) ist α nicht planar, hat also eine Achse A nach (3.7) und (8.3). Diese wird vom Zentralisator $\Phi\Psi$ von α festgehalten. Die Gruppe Ψ enthält drei zu α konjugierte Involutionen, die paarweise kommutieren. Nach dem Dreieckslemma (3.11) kann Ψ keinen Punkt der Achse A fixieren.

ii) Wir betrachten die Wirkung von $\Phi\Psi$ auf dem Nebenklassenraum $X = \Phi\Psi/(\Phi\Psi)_a$ nach der Standgruppe eines Punktes $a \in A$. Da $\Phi\Psi$ die Achse A invariant läßt, gilt $\dim X \leq 4$. Wirkt $\Phi\Psi$ quasieffektiv auf X, so ist $\dim X = 4$ nach [54: Th. 1], und jede maximal kompakte Untergruppe von $\Phi\Psi$ wirkt transitiv auf X. In diesem Fall ist $a^{\Phi\Psi}$ offen in A und daher homöomorph zum Nebenklassenraum X. Dies widerspricht (3.15).

iii) Die Gruppe $\Phi\Psi$ wirkt also nicht quasieffektiv auf $X = \Phi\Psi/(\Phi\Psi)_a$. Da Ψ nach i) nicht in $(\Phi\Psi)_a$ liegt, folgt $\Phi \leq (\Phi\Psi)_a$ für alle Punkte $a \in A$. Die maximal kompakte Untergruppe $\Sigma\mathrm{Z}$ von Ψ wirkt mit mindestens eindimensionaler Standgruppe $(\Sigma\mathrm{Z})_a$ nach (3.15), die Standgruppe $(\Phi\Psi)_a$ enthält also eine zu $\mathbb{T}^2$ isomorphe Untergruppe.

iv) In einer zu $\mathbb{T}^2$ isomorphen Untergruppe von $(\Phi\Psi)_a$ liegen drei paarweise kommutierende Involutionen. Diese können nach dem Dreieckslemma (3.11) nicht alle axial sein. Hätte eine dieser Involutionen Zentrum a, so wäre τ nicht frei. Es ergibt sich somit, daß $(\Phi\Psi)_a$ eine planare Involution enthält. Diese muß zu $\alpha\tau$ konjugiert sein. Nach [52] enthält die Fixebene von $\alpha\tau$ eine zur inneren oder äußeren komplex hyperbolischen Ebene isomorphe Unterebene $\mathbb{E} = (E, \mathcal{E})$, auf der $\Upsilon\Theta$ wie gewohnt wirkt. Die Standgruppe $(\Upsilon\Theta)_q$ eines Punktes $q \in E$ enthält damit eine zu $\mathbb{T}^3$ isomorphe Gruppe. Diese ist ein maximaler Torus von Γ. Das widerspricht der freien Wirkung von τ. □

(8.5) Satz. *Keine von* $\mathrm{PSp}_6\mathbb{R}$ *approximierte Gruppe kann auf einer stabilen Ebene der Dimension 8 wirken.*

Beweis: Sei Δ eine von $\mathrm{PSp}_6\mathbb{R}$ approximierte Gruppe. Nach (2.18) enthält Δ eine zu $\mathrm{SU}_3\mathbb{C}$ isomorphe Gruppe E. Die Standgruppe E_x jedes Punktes x hat nach (3.15) positive Dimension und enthält eine Involution σ. Alle Involutionen in E sind zueinander konjugiert und werden in Δ jeweils von einer von $\mathrm{PSp}_4\mathbb{R} \times \mathrm{PSp}_2\mathbb{R}$ approximierten Gruppe zentralisiert. Die Involution σ ist demnach nicht planar (4.9). Wir betrachten das Zentrum $\mathrm{Z}(\Delta)$ von Δ. Nach (8.4) ist $\mathrm{Z}(\Delta) \neq \mathbb{1}$.

i) Gibt es einen Punkt x, dessen Bahn $x^{\mathrm{Z}(\Delta)}$ ein Dreieck enthält, so wird dieses Dreieck von der in E_x enthaltenen Involution σ punktweise fixiert. Demnach ist σ eine Spiegelung, und eine der Ecken ist Zentrum von σ. Da die Ecken von $\mathrm{Z}(\Delta)$ bewegt werden, ist dies unmöglich.

ii) Im Fall eines nicht trivialen quasiperspektiven Zentrums wirkt $\Delta/\mathrm{Z}(\Delta) \cong \mathrm{PSp}_6\mathbb{R}$ effektiv auf der Fixgeradenschar $\mathcal{G}_{\mathrm{Z}(\Delta)}$ (vgl. (3.2)). Die Gruppe $\mathrm{PSp}_6\mathbb{R}$ enthält aber eine zu $\mathrm{U}_3\mathbb{C}$ isomorphe kompakte Untergruppe, die nach [54: Th. 1] nicht auf der vierdimensionalen Menge $\mathcal{G}_{\mathrm{Z}(\Delta)}$ wirkt. □

9. Quasieinfache Automorphismengruppen.

Eine lokal kompakte Gruppe Δ endlicher positiver Dimension heißt *quasieinfach*, wenn alle echten (abgeschlossenen) Normalteiler total unzusammenhängend sind. Insbesondere ist dann Δ zusammenhängend, und die echten Normalteiler sind Untergruppen des nulldimensionalen Zentrums $Z = Z(\Delta)$. Die Zentrumsfaktorgruppe Δ/Z ist eine einfache Liegruppe. Die einfachen Liegruppen sind bekannt (vgl. etwa [95] oder [60]). Insbesondere kennt man die maximal kompakten Untergruppen von Δ/Z und damit halbeinfache kompakte Liegruppen in Δ (vgl. (2.18)). Wegen Theorem A, (8.5) und [52] entnimmt man [95] oder [60]:

(9.1) Lemma. *Sei Δ eine quasieinfache Automorphismengruppe einer achtdimensionalen stabilen Ebene, die sich nicht in die projektive Quaternionenebene einbetten läßt. Dann ist* $\dim \Delta \leq 16$, *oder die Zentrumsfaktorgruppe Δ/Z ist isomorph zu einer der Gruppen*

$$\mathrm{SL}_5\mathbb{R}, \quad \mathrm{PSU}_5\mathbb{C}(2), \quad \mathrm{SO}_5\mathbb{C},$$

$$\Omega_8\mathbb{R}(3), \quad \mathrm{P}\Omega_8\mathbb{R}(4), \quad \Omega_7\mathbb{R}(2), \quad \Omega_7\mathbb{R}(3).$$

Dabei bezeichnet $\Omega_n\mathbb{R}(r)$ die Zusammenhangskomponente der Gruppe $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}(r)$. Wir werden im Folgenden alle diese Gruppen ausschließen.

(9.2) Bemerkung. Auf der projektiven Quaternionenebene wirken neben der vollen Automorphismengruppe $\mathrm{PSL}_3\mathbb{H}$ die folgenden quasieinfachen Gruppen in naheliegender Weise: die elliptische, die hyperbolische und die schiefhyperbolische Gruppe sowie die Gruppen $\mathrm{SL}_3\mathbb{C}$ und $\mathrm{SL}_2\mathbb{H}$.
Bis auf die Gruppe $\mathrm{SL}_3\mathbb{C}$ (vgl. [77: S. 354-356] erzwingen alle diese Gruppen die desarguessche Ebene (vgl. [52],[93] und (7.8)).

(9.3) Lemma. *Sei Φ eine zu $\mathrm{SO}_5\mathbb{R}$ lokal isomorphe zusammenhängende Untergruppe der Automorphismengruppe einer achtdimensionalen stabilen Ebene $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$.*

a) *Ist* $\Phi = \mathrm{SU}_2\mathbb{H}$ ($\cong \mathrm{Spin}_5$), *so gilt: Für jeden Punkt* $x \in M$, *der von der zentralen Involution* $\zeta = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ *von* Φ *bewegt wird, ist die Zusammenhangskomponente* Ξ *der Standgruppe* Φ_x *konjugiert zu* $\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid d\bar{d} = 1 \right\}$. *Die in* Ξ *enthaltene Involution* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ *hat die Achse* xx^ζ. *Die Involution* ζ *ist frei, axial oder zentral (oder beides).*

b) *Ist* $\Phi = \mathrm{SO}_5\mathbb{R}$, *so gilt:*

Jede zu $\sigma = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ *konjugierte Involution hat eine Achse, aber kein Zentrum. Jeder Punkt* $x \in M$ *liegt auf der Achse einer zu* σ *konjugierten Involution* τ. *Die Standgruppe* Φ_x *enthält eine zu* Spin_3 *isomorphe Untergruppe des Zentralisators* $\mathrm{C}_\Phi(\tau)$, *oder* $\alpha = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ *ist planar.*

c) *Ist* $\Phi = \mathrm{SO}_5\mathbb{R}$ *und* α *nicht planar, oder ist* $\Phi = \mathrm{SU}_2\mathbb{H}$, *so hat einer der beiden quasieinfachen Faktoren der (zu* $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ *bzw.* $\mathrm{Spin}_4 \cong \mathrm{Spin}_3 \times \mathrm{Spin}_3$ *isomorphen) Zusammenhangskomponente des Zentralisators von* σ *in* Φ *eine Halbachse (vgl. (3.12)). Diese ist in der Achse von* σ *enthalten.*

Beweis: i) Sei $\Phi = \mathrm{SU}_2\mathbb{H}$. Wegen $\dim\Phi = 10$ müssen die Standgruppen wenigstens zweidimensional sein. Enthält Ξ zwei kommutierende Involutionen, so auch deren Produkt, die zentrale Involution $\zeta = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$. Da x von ζ bewegt wird, ist das unmöglich. Aus $\dim \Xi > 1$ folgt demnach $\Xi \cong \mathrm{Spin}_3$. Ohne Einschränkung kann $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \in \Xi$ angenommen werden. Dann ist Ξ im Zentralisator $\Psi = \mathrm{C}_\Phi(\sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a\bar{a}d\bar{d} = 1 \right\}$ enthalten. Die Projektionen von Ξ auf die quasieinfachen Faktoren Σ und $\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a\bar{a} = 1 \right\}$ von Ψ sind jeweils entweder bijektiv oder trivial. Da σ im Kern der Projektion auf Θ liegt, muß $\Xi = \Sigma$ sein. Die Involution σ wird von einer zu $\mathrm{Spin}_3 \times \mathrm{Spin}_3$ isomorphen Gruppe zentralisiert, kann also nicht planar sein (4.9). Da ζ das Zentrum von σ fixiert, gilt

$\sigma \in \Phi_{[x x^\sigma]}$. Damit ist a) bewiesen.

ii) Sei $\Phi = SO_5\mathbb{R}$. Die Involution σ wird von einer zu $SO_4\mathbb{R}$ isomorphen Gruppe zentralisiert, kann also nach (4.9) nicht planar sein. Hat sie ein Zentrum z, so ist $C_\Phi(\sigma) \leq \Phi_z$. Insbesondere wird z von fünf zu σ konjugierten paarweise kommutierenden Involutionen fixiert. Nach dem Dreieckslemma (3.11) hat σ keine Achse. Alle diese Involutionen liegen demnach in $\Phi_{[z]}$, und ihre Zentralisatoren fixieren z. Da $C_\Phi(\sigma)$ maximal in Φ ist, wird z von ganz Φ festgehalten. Nun folgt $\Phi = \Phi_{[z]}$, ein Widerspruch zu (3.16). Die Involution σ ist demnach entweder axial (ohne Zentrum) oder frei.

iii) Nach ii) kann Φ auf keiner projektiven achtdimensionalen Ebene wirken. Aus (3.15) erhält man $\dim \Phi_x \geq 3$ für jeden Punkt $x \in M$. Die Gruppe Φ enthält keine zu $\mathbb{T}^3$ isomorphe Untergruppe, es gibt also eine zu Spin_3 oder zu $SO_3\mathbb{R}$ isomorphe Gruppe $\Xi \leq \Phi_x$. Im Fall $\Xi \cong \mathrm{Spin}_3$ enthält Ξ eine zu σ konjugierte Involution, die nach ii) eine Achse, aber kein Zentrum hat. Im Fall $\Xi \cong SO_3\mathbb{R}$ enthält Ξ drei paarweise kommutierende zu α konjugierte Involutionen. Es gilt $\Xi_{[x]} = \mathbb{1}$ oder $\Xi_{[x]} = \Xi$. Die Zentralisatoren dieser Involutionen sind maximale Untergruppen von Φ. Es können daher keine zwei dieser Involutionen in $\Phi_{[x]}$ liegen, da sonst (wie oben) $\Phi = \Phi_x = \Phi_{[x]}$ folgt. Da nach dem Dreieckslemma (3.11) nicht alle drei Involutionen Achsen durch x besitzen können, sind diese Involutionen planar. Insbesondere sind sie nicht zu σ konjugiert, also zu α, und auch α ist planar. Auf der Fixebene $\mathbb{F}$ wirkt σ wie $\sigma\alpha$. Da $\sigma\alpha$ in dem zu $SO_3\mathbb{R}$ isomorphen Faktor des Zentralisators $C_\Phi(\alpha)$ liegt, ist nach [49: Th. 2, Cor. 2] die Involution $\sigma\alpha$ axial auf $\mathbb{F}$. Damit hat σ Fixpunkte und ist nach ii) axial. Damit ist b) bewiesen.

iv) Ist $\Phi = SO_5\mathbb{R}$ und α nicht planar, oder ist $\Phi = SU_2\mathbb{H}$, so wird nach a) bzw. b) jeder Punkt der Achse A von σ von einem der beiden quasieinfachen Faktoren der Zusammenhangskomponente des Zentralisators fixiert. Die Fixpunktmengen der beiden Faktoren sind jeweils abgeschlossen in A. Wenigstens einer der Faktoren hat also eine offene, nicht leere Fixpunktmenge $U \subseteq A$. $\square$

(9.4) Korollar.

a) *Keine von $SL_5\mathbb{R}$ approximierte Gruppe kann auf einer achtdimensionalen stabilen Ebene wirken.*

b) *Keine von $SO_5\mathbb{C}$ approximierte Gruppe kann auf einer achtdimensionalen stabilen Ebene wirken.*

Beweis: i) Die einzigen von $SL_5\mathbb{R}$ approximierten Gruppen sind $SL_5\mathbb{R}$ selbst und die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe. Im Fall $\Delta = SL_5\mathbb{R}$ enthält der Zentralisator von

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

eine zu $SL_2\mathbb{R} \times SL_3\mathbb{R}$ isomorphe Gruppe. Nach (4.9) kann α nicht planar sein. In beiden Fällen sind damit die Voraussetzungen von (9.3c) für jede maximal kompakte Untergruppe Φ erfüllt. Die zu $SL_4\mathbb{R}$ lokal isomorphe zusammenhängende Untergruppe des Zentralisators von σ hat also im Widerspruch zu (3.14) eine Halbachse.

ii) Die einzigen von $SO_5\mathbb{C}$ approximierten Gruppen sind $SO_5\mathbb{C}$ selbst und die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe. Im Fall $\Delta = SO_5\mathbb{C}$ enthält der Zentralisator von α eine zu $SO_3\mathbb{C}$ isomorphe Gruppe Θ. Ist α planar, so induziert nach [49: Theorem 1] die Involution $\sigma\alpha \in \Theta$ auf der Fixebene von α eine Involution mit Achse und Zentrum. Damit fixiert aber auch σ ein Dreieck, hat also im Widerspruch zu (9.3b) ein Zentrum. In beiden Fällen sind damit die Voraussetzungen von (9.3c) für jede maximal kompakte Untergruppe Φ erfüllt. Eine zu $SO_3\mathbb{C}$ lokal isomorphe Untergruppe des Zentralisators von σ hat also im Widerspruch zu (3.14c) eine Halbachse. □

(9.5) Lemma. *Es sei $\Phi \cong SO_5\mathbb{R}$ eine Gruppe von Automorphismen einer achtdimensionalen stabilen Ebene $\mathbb{M} = (M, \mathcal{M})$. Der Zentralisator von Φ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ enthalte eine kompakte zusammenhängende eindimensionale Gruppe T. Dann enthält die Gruppe $\Phi\mathrm{T}$ eine planare Involution.*

Beweis: i) Die Gruppe $\Phi \cong SO_5\mathbb{R}$ kann nach [54] und (3.15) weder auf einem Büschel noch auf einer Geraden wirken. Insbesondere fixiert Φ keinen Punkt und keine Gerade.

ii) Nach i) erzeugt jede Punktbahn x^Φ eine stabile Unterebene $\mathbb{E} = (E, \mathcal{E})$ von $\mathbb{M}$. Auf höchstens vierdimensionalen Ebenen kann Φ nicht wirken [35]. Es folgt $\mathbb{E} = \mathbb{M}$ (vgl. (4.1)). Die Standgruppe T_x wirkt trivial auf x^Φ und damit trivial auf $\mathbb{M}$. Es ergibt sich $\mathrm{T}_x = \mathbb{1}$ für jeden Punkt $x \in M$. Da die Gruppe T das Zentrum jeder nicht trivialen Zentralkollineation in $\Phi\mathrm{T}$ fixiert, gilt auch $(\Phi\mathrm{T})_{[x]} = \mathbb{1}$ für jeden Punkt $x \in M$.

iii) Für jeden Punkt $x \in M$ ist die Standgruppe $(\Phi\mathrm{T})_x$ mindestens vierdimensional (3.15) und wirkt trivial auf der Bahn x^T. Nach (4.19) ist diese Bahn in einer Geraden enthalten. Die Gruppe T ist somit quasiperspektiv. Nach i) fixiert Φ keine Gerade, wirkt also mit vierdimensionalen, offenen Bahnen auf der Fixgeradenschar $\mathcal{G}_\mathrm{T}$ (vgl. [54]). Die Fixgeradenschar ist folglich eine Mannigfaltigkeit, und die Büschel sind zu $\mathbb{S}_4$ homöomorph.

iv) Nach ii) wirkt die Standgruppe $(\Phi\mathrm{T})_x$ effektiv auf $\mathcal{M}_x \approx \mathbb{S}_4$ und fixiert dabei die Gerade, die die Bahn x^T enthält. Nach [67] ist die Zusammenhangskomponente $(\Phi\mathrm{T})^1_x$ zu $U_2\mathbb{C}$ oder $SO_4\mathbb{R}$ isomorph, und die Wirkung auf $\mathcal{M}_x$ ist äquivalent zur gewohnten. Insbesondere gibt es eine Involution mit zu $\mathbb{S}_2$ homöomorpher Menge von Fixgeraden durch x. Diese Involution kann nach (3.8) nicht axial sein, ist also planar (3.7). □

(9.6) Lemma. *Keine von $PSU_5\mathbb{C}(2)$ approximierte Gruppe kann auf einer achtdimensionalen stabilen Ebene wirken.*

Beweis: Jede von $PSU_5\mathbb{C}(2)$ approximierte Gruppe enthält eine von $PSU_4\mathbb{C}(1) \cong PU_3\mathbb{H}(i)$ approximierte Untergruppe. Aus (7.8), (7.7) und [78] folgt die Behauptung. □

(9.7) Lemma. *Die Gruppe $SL_2\mathbb{H}$ wirkt nur auf offenen Unterebenen der projektiven Quaternionenebene. Die Wirkung ist stets äquivalent zur gewöhnlichen. Wirkungen von Gruppen, die $SL_2\mathbb{H}$ enthalten, lassen sich auf die projektive Ebene fortsetzen.*

Beweis: [93], [44] □

(9.8) Lemma. *Wirkt die Gruppe $\mathrm{PSL}_2\mathbb{H}$ auf einer achtdimensionalen stabilen Ebene, so ist ihr Zentralisator in der vollen Automorphismengruppe dieser Ebene trivial.*

Beweis: Sei $\zeta \neq \mathbb{1}$ ein Element des Zentralisators. Die Gruppe $\Delta = \mathrm{PSL}_2\mathbb{H}$ enthält eine zu $\mathrm{SO}_5\mathbb{R}$ isomorphe Gruppe Φ. Gibt es einen Punkt $x \in M$, dessen Bahn $x^{\langle\zeta\rangle}$ ein Dreieck enthält, so fixiert die nach (9.3b) in Φ_x enthaltene zu σ konjugierte Involution dieses Dreieck. Nach (9.3b) ist dies unmöglich. Das Zentrumselement ζ ist also quasiperspektiv. Auf der Fixgeradenschar $\mathcal{G}_\zeta$ wirkt Δ mit höchstens vierdimensionalen Bahnen. Nach [93: 1.d] ist die Standgruppe einer Geraden $G \in \mathcal{G}_\zeta$ zusammenhängend, ihre maximal kompakten Untergruppen sind zu $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ isomorph. Andererseits wird jeder Punkt $x \in G$ von einer zu σ konjugierten axialen Involution $\tau \in \Phi$ fixiert. Wählt man einen von ζ bewegten Punkt, so muß G die Achse von τ sein. Dann wird G vom Zentralisator $\mathrm{C}_\Phi(\tau)$ fixiert. Dieser Zentralisator enthält aber eine zu $\mathrm{O}_4\mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe, die nicht in $\mathrm{SO}_4\mathbb{R}$ liegen kann. $\square$

(9.9) Korollar. *Keine von $\Omega_7\mathbb{R}(2)$ (oder $\Omega_8\mathbb{R}(3)$) approximierte Gruppe kann auf einer achtdimensionalen stabilen Ebene wirken.*

Beweis: i) Die Gruppe $\Omega_7\mathbb{R}(2)$ hat zu $\mathrm{SO}_5\mathbb{R} \times \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ isomorphe maximal kompakte Untergruppen. Die Konjugiertenklassen der Involutionen werden repräsentiert durch

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 &&&&&& \\ & -1 &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1 &&&&&& \\ & -1 &&&&& \\ && -1 &&&& \\ &&& -1 &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& -1 & \\ &&&&&& -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha\gamma \text{ und } \beta\gamma.$$

Die Zentralisatoren enthalten jeweils zu $SO_2\mathbb{R} \times \Omega_5\mathbb{R}(2)$, $SO_4\mathbb{R} \times \Omega_3\mathbb{R}(1), SO_5\mathbb{R} \times SO_2\mathbb{R}, SO_3\mathbb{R} \times \Omega_4\mathbb{R}(2)$ bzw. $\Omega_6\mathbb{R}(2)$ isomorphe Gruppen. Nach (4.9) ist keine dieser Involutionen planar. Dies widerspricht (9.5).

ii) Jede von $\Omega_7\mathbb{R}(2)$ approximierte, nicht zu $\Omega_7\mathbb{R}(2)$ isomorphe Gruppe enthält eine zu $PSL_2\mathbb{H} \cong \Omega_6\mathbb{R}(1)$ lokal isomorphe Gruppe mit nicht trivialem Zentralisator. Aus (9.8), (9.7) und [78] folgt die Behauptung. □

(9.10) Lemma. *Keine von $\Omega_7\mathbb{R}(3)$ (oder $P\Omega_8\mathbb{R}(4)$) approximierte Gruppe kann auf einer achtdimensionalen stabilen Ebene wirken.*

Beweis: i) Die maximal kompakten Untergruppen von $\Delta = \Omega_7\mathbb{R}(3)$ sind konjugiert zu

$$\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} \middle| \; A \in SO_4\mathbb{R}, B \in SO_3\mathbb{R} \right\}.$$

Jede von Δ approximierte Gruppe $\hat{\Delta}$ hat nach (2.18) zu Φ lokal isomorphe maximal kompakte Untergruppen. Nach (2.7) ist $\hat{\Delta}$ eine Liegruppe. Jede echte Überlagerungsgruppe von Δ zentralisiert wenigstens eine Involution ζ (vgl. [95] oder [60]). Auf $\mathcal{G}_\zeta$ wirkt Φ und damit $\hat{\Delta}$ nicht quasieffektiv [54: Th. 1]. Nach (3.14) ist $\hat{\Delta}$ aber auch nicht quasiperspektiv, es kann also nur die einfache Gruppe Δ vorkommen.

ii) Die Konjugiertenklassen der Involutionen in Δ werden repräsentiert durch

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 &&&&&& \\ & -1 &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1 &&&&&& \\ & -1 &&&&& \\ && -1 &&&& \\ &&& -1 &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& 1 & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& -1 & \\ &&&&&& -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha\gamma \text{ und } \beta\gamma.$$

Für die Zusammenhangskomponenten der Zentralisatoren gilt:

$$\begin{aligned} C_\Delta(\alpha)^1 &\cong SO_2\mathbb{R} \times \Omega_5\mathbb{R}(2), \\ \Phi = C_\Delta(\beta)^1 &\cong SO_4\mathbb{R} \times SO_3\mathbb{R}, \\ C_\Delta(\gamma)^1 &\cong \Omega_5\mathbb{R}(1) \times SO_2\mathbb{R}, \\ C_\Delta(\alpha\gamma)^1 &\cong \Omega_4\mathbb{R}(2) \times \Omega_3\mathbb{R}(1), \\ C_\Delta(\beta\gamma)^1 &\cong \Omega_6\mathbb{R}(2). \end{aligned}$$

Nach (4.9) ist keine der Involutionen planar. Der quasieinfache Zentralisator von $\beta\gamma$ enthält eine zu $SO_4\mathbb{R} \times SO_2\mathbb{R}$ isomorphe Gruppe,die nicht quasieffektiv auf einer Achse oder einem Zentrumsbüschel wirkt [54: Th. 1], [67]. Wegen (3.14) ist $\beta\gamma$ frei.

iii) Jede Involution wird von einer zu $\beta\gamma$ konjugierten zentralisiert. Es gibt daher keine Involutionen mit Zentrum. Alle Involutionen in Δ sind folglich axial oder frei.

iv) Nach (3.15) ist die Standgruppe Φ_x für jeden Punkt x wenigstens zweidimensional. Nach dem Dreieckslemma (3.11) liegt keine zu $\mathbb{T}^2$ oder $SO_3\mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe in Φ_x. Die Zusammenhangskomponente Σ der Standgruppe ist also zu $Spin_3$ isomorph.

v) Durch Projektion auf den zu $SO_3\mathbb{R}$ isomorphen Faktor von Φ sieht man, daß Σ die Involution β enthält. Auf der Achse von

β wirkt Φ mit höchstens vierdimensionalen Bahnen. Dies widerspricht $\dim \Phi/_{\Phi_x} = 9 - 3 = 6$. $\square$

Damit ist bewiesen:

(9.11) Theorem B. *Sei Δ eine quasieinfache Automorphismengruppe einer achtdimensionalen stabilen Ebene, die sich nicht in die projektive Quaternionenebene einbetten läßt. Dann ist* $\dim \Delta \leq 16$.

(9.12) Bemerkung. Es gibt eine Einparameter-Familie von nicht desarguesschen achtdimensionalen kompakten projektiven Ebenen, die die 16-dimensionale quasieinfache Gruppe $SL_3\mathbb{C}$ zulassen (sogenannte Hughes-Ebenen, vgl. [77: S. 354-356], [30], [8], [9], [10]). Die in dieser Arbeit bewiesene Schranke ist daher scharf.

LITERATUR.

1. André, J., 'Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe', *Math. Z.* **60** (1954) 156-186.
2. Arens, R., 'Topologies for homeomorphism groups', *Amer. J. Math.* **68** (1946) 593-610.
3. Betten, D., 'Topologische Geometrien auf dem Möbiusband', *Math. Z.* **107** (1968) 363-379.
4. Betten, D., Ostmann, A., 'Wirkungen und Geometrien der Gruppe $L_2 \times \mathbb{R}$', *Geom. Ded.* **7** (1978) 141-162.
5. Borel, A., De Siebenthal, J., 'Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos', *Comment. Math. Helv.* **23** (1949) 200-221.
6. Bourbaki, N., *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitre 9, Masson, Paris, 1982.
7. Cartan, H., Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.
8. Dembowski, P., 'Zur Geometrie der Gruppen $PSL_3(q)$', *Math. Z.* **117** (1970) 125-134.
9. Dembowski, P., 'Generalized Hughes planes', *Can. J. Math.* **23** (1971) 481-494.
10. Dembowski, P., 'Gruppenerhaltende quadratische Erweiterungen endlicher desarguesscher projektiver Ebenen', *Archiv d. Math.* **22** (1971) 214-220.
11. Dieudonné, J., 'On the structure of unitary groups', *Trans. Am. Math. Soc.* **72** (1952) 367-85.
12. Dieudonné, J., *La géométrie des groupes classiques*, Springer, Berlin, 1955.
13. Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
14. Freudenthal, H., 'Einige Sätze über topologische Gruppen', *Ann. of Math.* **37** (1936) 46-56.
15. Freudenthal, H., 'Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie', *Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht, Utrecht (1951) = Geom. Ded.* **19** (1985) 7-63.
16. Groh, H., 'Point homogeneous flat affine planes', *J.Geom.* **8** (1976) 145-162.
17. Groh, H., '$\mathbb{R}^2$-planes with 2-dimensional point transitive automorphism group', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **48** (1979) 171-202.
18. Groh, H., 'Pasting of $\mathbb{R}^2$-planes', *Geom. Ded.* **14** (1981) 69-98.
19. Groh, H., 'Isomorphism types of arc planes', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **52** (1982) 133-149.
20. Groh, H., '$\mathbb{R}^2$-planes with point transitive 3-dimensional collineation group', *Indag. Math.* **44** (1982) 173-182.
21. Groh, H., 'Geometric lattices with topology', *J. Combin. Theory Ser. A* **42** (1986) 111-125.

22. Groh, H., 'Embedding geometric lattices with topology', *J. Combin. Theory Ser. A* **42** (1986) 126-136.

23. Groh, H., Tae Ho Choe, 'Topological geometric lattices', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **59** (1989) 39-42.

24. Groh, H., Lippert, M.F., Pohl, H.-J., '$\mathbb{R}^2$-planes with 3-dimensional automorphism group fixing precisely a line', *J. Geom.* **21** (1983) 66-96.

25. Grundhöfer, Th., Salzmann, H., 'Locally compact double loops and ternary fields', in: Chein, O., Pflugfelder, H., Smith, J. (eds.): *Quasigroups and loops - theory and applications*, Heldermann, Berlin (1990) .

26. Halder, H.R., 'Die Dimension der Bahnen lokalkompakter Gruppen', *Arch. der Math.* **22** (1971) 302-303.

27. Helgason, S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, Orlando, 1962.

28. Higman, D.G., and McLaughlin, J.E., 'Geometric ABA-groups', *Illinois Journal of Math.* **5** (1961) 382-397.

29. Hubig, M., 'Zweidimensionale stabile Ebenen mit auflösbarer, nicht zu $L_2 \times \mathbb{R}$ lokalisomorpher, mindestens dreidimensionaler Kollineationsgruppe', *Diplomarbeit, Tübingen* (1987) .

30. Hughes, D.R., 'A class of non-Desarguesian planes', *Canad. J. Math.* **9** (1957) 378-388.

31. Husain, T., *Introduction to topological groups*, Saunders, Philadelphia, London, 1966.

32. Iwasawa, K., 'On some types of topological groups', *Ann. of Math (2)* **50** (1949) 507-557.

33. Löwen, R., 'Vierdimensionale stabile Ebenen', *Geom. Ded.* **5** (1976) 239-294.

34. Löwen, R., 'Locally compact connected groups acting on euclidean space with Lie isotropy groups are Lie', *Geom. Ded.* **5** (1976) 171-174.

35. Löwen, R., 'Halbeinfache Automorphismengruppen von vierdimensionalen stabilen Ebenen sind quasi-einfach', *Math. Ann.* **236** (1978) 15-28.

36. Löwen, R., 'Symmetric planes', *Pacific J. Math.* **84** (1979) 367-390.

37. Löwen, R., 'Classification of 4-dimensional symmetric planes', *Math. Z.* **167** (1979) 137-159.

38. Löwen, R., 'Weakly flag homogeneous stable planes of low dimension', *Arch. Math.* **33** (1979) 485-491.

39. Löwen, R., 'Central collineations and the Parallel Axiom in stable planes' *Geom. Ded.* **10** (1981) 283-315.

40. Löwen, R., 'Characterization of symmetric planes in dimension at most 4' *Indag. Math.* **43** (1981) 87-103.

41. Löwen, R., 'Equivariant embeddings of low dimensional symmetric planes', *Monatsh. Math.* **91** (1981) 19-37.

42. Löwen, R., 'Homogeneous compact projective planes', *J. Reine Angew. Math.* **321** (1981) 217-220.

43. Löwen, R., 'Stable planes of low dimension admitting reflections at many lines', *Resultate Math.* **5** (1982) 60-80.

44. Löwen, R., 'A local "Fundamental Theorem" for classical topological projective spaces', *Arch. Math.* **38** (1982) 286-288.

45. Löwen, R., 'Zweidimensionale stabile Ebenen mit nichtauflösbarer Automorphismengruppe', *Arch. Math.* **41** (1983) 565-571.

46. Löwen, R., 'Topology and dimension of stable planes: On a conjecture by H. Freudenthal', *J. Reine Angew. Math.* **343** (1983) 108-122.

47. Löwen, R., 'Stable planes with isotropic points', *Math. Z.* **182** (1983) 49-61.

48. Löwen, R., 'Ebene stabile Ebenen mit vielen Zentralkollineationen', *Mitt. Math. Sem. Gießen* **165** (1984) 63-67.

49. Löwen, R., 'Actions of SO(3) on 4-dimensional stable planes', *Aequ. Math.* **30** (1986) 212-222.

50. Löwen, R., 'A criterion for stability of planes', *Arch. Math.* **46** (1986) 275-278.

51. Löwen, R., 'Actions of Spin_3 on 4-dimensional stable planes', *Geom. Ded.* **21** (1986) 1-12.

52. Löwen, R., 'Stable planes admitting a classical motion group', *Res. Math.* **9** (1986) 119-130.

53. Malcev, A., 'On solvable topological groups', (Russian, English summary) *Mat. Sbornik N. S.* **19** (1946) 165-174.

54. Mann, L.N., 'Gaps in the dimensions of transformation groups', *Ill. Journal of Math.* **10** (1966) 532-546.

55. Mann, L.N., 'Dimensions of compact transformation groups', *Michigan Math. J.* **14** (1967) 433-444.

56. Montgomery, D., Zippin, L., *Topological transformation groups*, Wiley, New York, 1955.

57. Munkres, J.R., *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

58. Nagami, K., *Dimension Theory*, Acad. Press, NewYork, London, 1970.

59. Nagata, J., *Modern Dimension Theory*, Interscience, NewYork, 1965.

60. Onishchik, A.L., Vinberg, E.B., *Lie groups and algebraic groups*, Springer, Berlin etc., 1990.

61. Pall, G., 'Hermitian quadratic forms in a quasi-field', *Bull. Am. Math. Soc.* **51** (1945) 889-893.

62. Pickert, G., *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin etc., 1955.
63. Polley, C., 'Lokal desarguessche Salzmann-Ebenen', *Arch. d. Math.* **19** (1968) 553-557.
64. Polley, C., 'Lokal desarguessche Geometrien auf dem Möbiusband', *Arch. d. Math.* **23** (1972) 346-347.
65. Polley, C., 'Zweidimensionale topologische Geometrien, in denen lokal die dreifache Ausartung des desarguesschen Satzes gilt', *Geom. Ded.* **1** (1972) 124-140.
66. Pontrjagin, L.S., *Topologische Gruppen*, Teubner, Leipzig, 1957.
67. Richardson, R.W., 'Groups acting on the 4-sphere', *Illinois J. Math.* **5** (1961) 474-485.
68. Salzmann, H., 'Characterization of the three classical plane geometries', *Illinois J. Math.* **7** (1963) 543-547.
69. Salzmann, H., 'Zur Klassifikation topologischer Ebenen', *Math. Ann.* **150** (1963) 226-241.
70. Salzmann, H., 'Zur Klassifikation topologischer Ebenen. II', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **27** (1964) 145-166.
71. Salzmann, H., 'Zur Klassifikation topologischer Ebenen. III', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **28** (1965) 250-261.
72. Salzmann, H., 'Topological planes', *Adv. in Math.* **2** (1967) 1-60.
73. Salzmann, H., 'Kollineationsgruppen ebener Geometrien', *Math. Z.* **99** (1967) 1-15.
74. Salzmann, H., 'Geometries on surfaces', *Pacific J. Math.* **29** (1969) 397-402.
75. Salzmann, H., 'Homogene kompakte projektive Ebenen', *Pacific. J. Math.* **60** (1975) 217-234.
76. Salzmann, H., 'Compact 8-dimensional projective planes with large collineation groups', *Geom. Ded.* **8** (1979) 139-161.
77. Salzmann, H., 'Kompakte, 8-dimensionale projektive Ebenen mit großer Kollineationsgruppe', *Math. Z.* **176** (1981) 345-357.
78. Salzmann, H., 'Compact 8-dimensional projective planes', *Forum Math.* **2** (1990) 15-34.
79. Seidel, H.-P., 'Symmetrische Strukturen und Zentralkollineationen auf topologischen Ebenen', *Dissertation, Tübingen* (1987) .
80. Seidel, H.-P., 'Generalized symmetric planes', *Geom. Ded.* **33** (1990) 337-354.
81. Seidel, H.-P., 'Connected 4-dimensional stable planes with many central collineations', *Geom. Ded.* **36** (1990) 375-388.
82. Seidel, H.-P., 'Classification of 4-dimensional generalized symmetric planes', *Forum Math.* **3** (1991) 35-59.

83. Smith, P.A., 'Fixed point theorems for periodic transformations', *Am. J. Math.* **63** (1941) 1-8.
84. Smith, P.A., 'New results and old problems in finite transformation groups', *Bull. Am. Math. Soc.* **66** (1960) 401-415.
85. Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York etc., 1966.
86. Strambach, K., 'Salzmann-Ebenen mit hinreichend vielen Punkt- oder Geradenspiegelungen', *Math. Z.* **99** (1967) 247-269.
87. Strambach, K., 'Eine Charakterisierung der klassischen Geometrien', *Arch. Math.* **18** (1967) 539-544.
88. Strambach, K., 'Zur Klassifikation von Salzmann-Ebenen mit dreidimensionaler Kollineationsgruppe', *Math. Ann.* **179** (1968) 15-30.
89. Strambach, K., 'Zur Klassifikation von Salzmann-Ebenen mit dreidimensionaler Kollineationsgruppe II', *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **34** (1970) 159-169.
90. Strambach, K., 'Salzmann-Ebenen mit punkttransitiver dreidimensionaler Kollineationsgruppe', *Indag. Math.* **32** (1970) 253-267.
91. Strambach, K., 'Zentrale und axiale Kollineationen in Salzmann-Ebenen', *Math. Ann.* **185** (1970) 173-190.
92. Strambach, K., 'Gruppentheoretische Charakterisierungen klassischer desarguesscher und Moultonscher Ebenen', *J. Reine Angew. Math.* **248** (1971) 75-116.
93. Stroppel, M., 'A characterization of Quaternion planes', *Geom. Ded.* **36** (1990) 405-410.
94. Szenthe, J., 'On the topological characterization of transitive Lie group actions', *Acta Scient. Math. Szeged* **36** (1974) 323-344.
95. Tits, J., *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen*, Lect. Notes in Math. **40** Springer, 1967.
96. Tits, J., *Liesche Gruppen und Algebren*, Springer, 1983.
97. Varadarajan, V.S., *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
98. Weil, A., *L'intégration dans les groupes topologiques*, Hermann, Paris, 2ème ed., 1951.

BEZEICHNUNGEN:

In der vorliegenden Arbeit werden Gruppen durchweg mit großen griechischen Buchstaben $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z} \ldots)$, ihre Elemente mit kleinen griechischen Buchstaben $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots)$ bezeichnet. Für die Wirkung eines Gruppenelementes α wird die Potenzschreibweise x^α verwendet, konsequenterweise bezeichnet $\alpha\beta$ die Abbildung *zuerst* α, *dann* β. Diese Konvention gilt auch für Matrizen: Koordinatenvektoren sind als *Zeilen* aufzufassen, die Anwendung einer linearen Abbildung erfolgt durch Multiplikation einer Matrix von *rechts*. Vektorräume über Schiefkörpern sind nach dieser Konvention *Linksvektorräume*.

Die folgenden Bezeichnungen werden im Text verwendet:

$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{H}$	(Schief-)Körper der Hamilton-Quaternionen
$\mathbb{O}$	Algebra der Cayley-Oktaven
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{1}$	Neutralelement bzw. die triviale Gruppe
$\alpha^{\leftarrow}$	volles α-Urbild
$\mathrm{C}_\Gamma(\Delta)$	Zentralisator von Δ in Γ
$\mathrm{N}_\Gamma(\Delta)$	Normalisator von Δ in Γ
Γ^1	Zusammenhangskomponente des Neutralelements von Γ
Γ'	(abgeschlossene) Kommutatorgruppe von Γ
$\cong$	Isomorphie
$\approx$	Homöomorphie

Lebenslauf

Am 5.4.1961 wurde ich als zweiter Sohn des Josef Stroppel und der Roswitha Stroppel, geborene Epple, in Tuttlingen geboren. Nach dem Besuch der Grundschule in Tuttlingen wechselte ich 1971 auf das Immanuel-Kant-Gymnasium in Tuttlingen und legte dort am 10.6.1980 die Reifeprüfung ab. Nach Ableistung meines Grundwehrdienstes nahm ich zum Wintersemester 1981/82 an der Universität Tübingen das Studium der Mathematik und der katholischen Theologie auf. Beide Fächer schloß ich am 15.11.1988 mit dem Staatsexamen ab. Seit dem 24.4.1987 bin ich verheiratet mit Bernhild Stroppel, geborene Walter.