

QCD Summenregelbeiträge zu
den elektromagnetischen
Formfaktoren des Nukleons im
Bereich mittleren
Energieübertrags



DISSERTATION ZUR ERLANGUNG DES
DOKTORGRADES DER NATURWISSENSCHAFTEN
(DR. RER. NAT.) DER FAKULTÄT PHYSIK DER
UNIVERSITÄT REGENSBURG

vorgelegt von

Nils Mahnke

aus

Ammersbek

März 2003

Die Arbeit wurde angeleitet von Prof. Dr. Vladimir M. Braun.

Das Promotionsgesuch wurde am 04.Mär.2003 eingereicht.

Das Kolloquium fand am 28.Apr.2003 statt.

Prüfungsausschuß:	Prof. Dr. C. Back	(Vorsitzender)
	Prof. Dr. V. M. Braun	(1. Gutachter)
	Prof. Dr. K. Richter	(2.Gutachter)
	Prof. Dr. J. Keller	(weiterer Prüfer)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Was ist das Nukleon?	5
1.2	Faktorisierung	7
1.3	Zu dieser Arbeit	10
2	Die Nukleon Wellenfunktion	13
2.1	Die Darstellung des Drei-Spinor-Produktes	15
2.1.1	Das Zwei-Spinor-Subsystem	16
2.1.2	Das Drei-Spinor-System	17
2.1.3	Eigenschaften des Drei-Spinor-Systems	18
2.2	Die allgemeinste Klassifizierung	20
2.2.1	Die Lorentz-Struktur	20
2.2.2	Symmetrien der Klassifizierung	27
2.2.3	Darstellung durch chirale Felder	32
2.3	Konforme Entwicklung der Distributionsamplituden	34
2.3.1	Die Leading Twist-3 Distributionsamplitude	36
2.3.2	Die Amplituden höheren Twists	38
3	Detailbetrachtungen zur Wellenfunktion	47
3.1	Bestimmung der nichtperturbativen Parameter	47
3.1.1	Die Bewegungsgleichungen	48
3.1.2	Abschätzungen durch QCD Summenregeln	51
3.2	Handbuch der Nukleon Distributionsamplituden	55
3.2.1	Twist-3 Distributionsamplituden	56
3.2.2	Twist-4 Distributionsamplituden	57
3.2.3	Twist-5 Distributionsamplituden	58

3.2.4	Twist-6 Distributionsamplituden	58
4	Die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons	59
4.1	Formfaktoren der Hintergrund	59
4.1.1	Theoretische Ansätze	61
4.1.2	Der Ansatz dieser Arbeit	63
4.2	Die Methode: Führender Twist	63
4.2.1	Die Dispersionsrelation	64
4.2.2	Der perturbative Anteil	65
4.2.3	Asymptotisches Verhalten und Modellvergleich	68
4.3	Einbeziehung der Terme höheren Twists	71
4.3.1	Korrelierte Formfaktoren und asymptotisches Verhalten . .	71
4.3.2	Numerische Ergebnisse und Diskussion	78
5	Detailbetrachtungen zu den Formfaktoren	83
5.1	Die $O(x^2)$ Korrekturen	83
5.2	Borel-Transformation mit Cutoff	88
6	Zusammenfassung und Ausblick	91
A	Dirac-Algebra	93
B	Lichtkegel Formalismus	97
C	Propagatoren und Eichfaktoren	101
C.1	Die Fock-Schwinger Eichung	101
C.2	Der Quark Propagator im äußeren Feld	103
C.3	Der Gluon Propagator im äußeren Feld	106
C.4	Eichfaktoren des Quark-Quark Matrixelements	106
D	Isospin	109
E	QCD Summenregeln	113
E.1	Herleitung der Dispersionsrelation	114
E.2	Operator-Produkt-Entwicklung und Vakuum-Kondensate	116
E.3	Die Borel-Transformation	121

F Fouriertransformationen

123

Danksagung

127

Abbildungsverzeichnis

1.1	Die Skalenabhängigkeit der Kopplungskonstante α_s als Funktion des Impulsübertrags Q^2 nach Gleichung 1.1 (gepunktete Linie: $N_f = 2$; durchgezogene Linie: $N_f = 6$, $\Lambda = 200$ MeV).	3
1.2	Der $ep \rightarrow ep$ Streuprozess. Der γ -Proton Vertex wird durch eine bilineare Funktion Γ_μ approximiert, die der Struktur des Protons Rechnung trägt.	6
1.3	Darstellung eines typischen DIS Ereignisses $ep \rightarrow e + X$. Die hadronischen Endzustände X sind dabei unbestimmt.	7
1.4	Faktorisierung des Streubildes bei großem Q^2 für den Prozess $ep \rightarrow ep$. T_H steht für den harten Streuteil und Φ_{in} , Φ_{out} bezeichnen den Ausgangs- und Endzustand in den die Partonen des Protons gebunden sind.	9
2.1	Störungstheoretische Beiträge zur Nukleon $qqqq\bar{q}g$ Wellenfunktion, bei Vernachlässigung der Lichtkegel-Quantisierung. Der Beitrag in b) muss mit in Betracht gezogen werden, obwohl der aus dem Vakuum erzeugte Anteil $q\bar{q}g$ formal nichts mit dem Nukleon zu tun hat.	14
2.2	Die Amplitude vom Twist 3	45
2.3	Die Amplituden vom Twist 4	45
2.4	Die Amplituden vom Twist 5	46
2.5	Die Amplitude vom Twist 6	46
4.1	Der Beitrag führender Ordnung zur Korrelationsfunktion (4.7) . .	66

4.2	Twist-3 Näherung der „weichen“ Beiträge zu den magnetischen Formfaktoren des Protons und des Neutrons. Die Datenpunkte stammen aus [1, 2].	69
4.3	Die LCSR Vorhersagen für den „weichen“ Beitrag zum magnetischen Formfaktor des Protons und des Neutrons	79
4.4	Vergleich der LCSR Vorhersagen für den elektrischen Formfaktor des Protons ($\mu_p G_E^p/G_M^p$) und des Neutrons ($(G_E^n/G_D)^2$) mit den experimentellen Daten.	80
C.1	Der Quark-Propagator im externen Gluonfeld	103
C.2	Der Gluon-Propagator im externen Gluonfeld	106

Tabellenverzeichnis

1.1	Tabelle der Elementarteilchen des Standardmodells, geordnet nach Isoduplets und der Eichbosonen der drei im Standardmodell vertretenen Grundkräfte.	4
2.1	Paritätsabhängigkeit der Lorentz-Strukturen vom Rang 0	21
2.2	Twistinterpretation der Lichtkegelstrukturen zur Distributionsamplitude \mathcal{A}_1	23
2.3	Twistsortierung der Lichtkegel Distributionsamplituden	25
2.4	Die acht unabhängigen Distributionsamplituden der Lichtkegelentwicklung	34
2.5	Numerische Werte der in (2.65) (2.66) (2.67) (2.68) definierten Entwicklungsparameter, gegeben in Einheiten von 10^{-2} GeV ² . . .	43
2.6	Summenregelwerte (SR) und asymptotische Werte (ASY) der 8 nichtperturbativen Parameter.	44
3.1	Die acht Distributionsamplituden, die sich aus der Umkehrung der Spin-Projektion der beiden up-Quarks in Tabelle 2.4 ergeben. . .	56
3.2	Die verbleibenden acht Nukleon Distributionsamplituden, die in (2.26) eingehen.	57

Kapitel 1

Einleitung

Heute, mehr als 40 Jahre nach der Verleihung des Nobelpreises an R. Hofstadter für seine Pionierarbeiten auf dem Gebiet der Streuung von Elektronen an Atomkernen, sowie für die Entdeckung und Untersuchung der Strukturen des Nukleons, stellt die Entschlüsselung bzw. Beschreibung der äußeren und inneren Strukturen von stark wechselwirkenden Teilchen, oder kurz „Hadronen“, immer noch eines der Hauptforschungsgebiete der modernen Physik dar.

Die Untersuchung dieser inneren Strukturen trug unter anderem wesentlich zur Entwicklung des Standardmodells der Elementarteilchen bei, das drei der vier Wechselwirkungen des Universums vereinigt. Die vierte Wechselwirkung, die Gravitation, entzieht sich bislang allen in sich konsistenten Versuchen einer Vereinheitlichung der vier Grundkräfte.

Die dem Standardmodell zugrunde liegenden modernen Elementarteilchentheorien basieren auf dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz einer gegebenen Lagrangedichte. Die lokale Eichinvarianz der Lagrangedichte führt auf das Einführen von Vektorfeldern, die zum einen in definierter Weise untereinander gekoppelt sind und zum anderen die Wechselwirkung von Materiefeldern vermitteln. Die allgemeinste Grundlage der heutigen Elementarteilchentheorien bilden die von Yang und Mills entwickelte Verallgemeinerung der Elektrodynamik hin zu nichtabelschen Eichtheorien [3].

Im Standardmodell sind neben der Theorie der schwachen Wechselwirkung, die mittels ihrer massiven Eichbosonen, W^+ , W^- und Z^0 , Prozesse wie den β -Zerfall vermittelt, auch die Quantenelektrodynamik (QED) und die Quantenchromodynamik (QCD) enthalten.

Mit der QED als Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen Elektronen, anderen geladenen Punktteilchen und masselosen Photonen als Eichboson enthält das Standardmodell die exakteste physikalische Theorie überhaupt. Z.B. werden die Vorhersagen der QED für das magnetische Moment des Elektrons von den experimentellen Daten bis auf Abweichungen in der Größenordnung 10^{-12} verifiziert. Diese präzise Übereinstimmung resultiert im Wesentlichen aus der Kleinheit der Kopplungskonstante der elektromagnetischen Wechselwirkung $\alpha = 1/137$, die sich über große Energiebereiche bis hin zur Skala des Z -Bosons nicht wesentlich ändert und damit die perturbativen Betrachtungen der Wechselwirkung ermöglicht.

In der QCD als Theorie der starken Wechselwirkung verhält sich die Kopplungskonstante nicht unabhängig von den beteiligten Impulsen. So zeigte es sich, dass bei Streuprozessen mit großen Energien (größer als die Ruheenergie des Protons > 1 GeV) und für kleine Abstände die Kopplungskonstante klein (gegen den Wert 1) ist, so dass eine störungstheoretische Formulierung der Effekte der starken Wechselwirkung zulässig wird. In diesem Energiebereich können die elementaren Fermionen der starken Wechselwirkung, die Quarks und die Eichbosonen der QCD, die Gluonen, als quasi freie Teilchen betrachtet werden. Man nennt diesen Bereich auch den Bereich asymptotischer Freiheit. Für freie Quarks und Gluonen läßt sich die Theorie mittels der Berechnung von Korrekturen zur Quark-Gluon Wechselwirkung renormieren. Die Renormierung führt zu divergenten Korrekturtermen und so notwendiger Weise zu einer Renormierung der Kopplungskonstanten, die dann die Skalenabhängigkeit enthält. In 1-Loop-Näherung lautet die renormierte Kopplungskonstante, siehe hierzu auch Abbildung 1.1,

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2)\beta_0 \log(Q^2/\mu^2)} = \frac{1}{\beta_0 \log(Q^2/\Lambda^2)}. \quad (1.1)$$

In (1.1) bezeichnet Q^2 die Impulsskala des Prozesses, $\beta_0 = 1/(12\pi)(11N_c - 2N_f)$, mit der Anzahl der beteiligten Quarkflavours N_f und der Anzahl der Farbladungen $N_c = 3$. Als Relikt der Renormierung enthält (1.1) noch den Parameter μ , der die Dimension einer Masse besitzt. Alle Abhängigkeiten von μ können, via

$$\Lambda^2 := \mu^2 \exp \left[\frac{-1}{\beta_0 \alpha_s(\mu^2)} \right], \quad (1.2)$$

in der Definition eines einzigen Parameters Λ , der Renormierungsskala, zusammengefasst werden. Der Wert von Λ wird durch die Theorie nicht vorausgesagt

und kann nur experimentell bestimmt werden. Der hier verwendete Wert beträgt $\Lambda \sim 200 \text{ MeV}$.

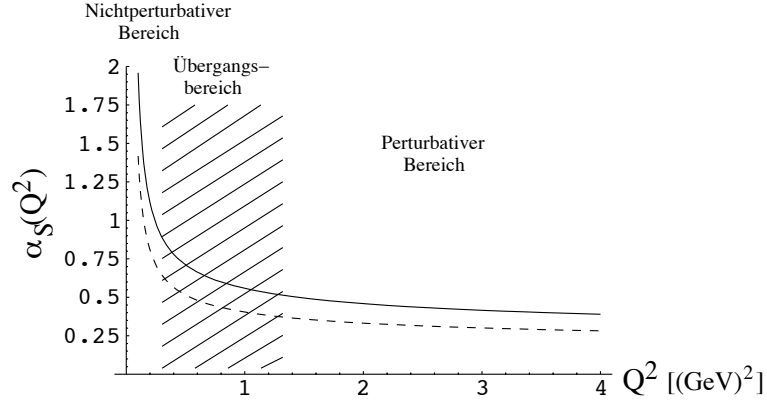


Abbildung 1.1: Die Skalenabhängigkeit der Kopplungskonstante α_s als Funktion des Impulsübertrags Q^2 nach Gleichung 1.1 (gepunktete Linie: $N_f = 2$; durchgezogene Linie: $N_f = 6$, $\Lambda = 200 \text{ MeV}$).

Sind die am jeweiligen Prozess beteiligten Energien geringer als die Skala der starken Wechselwirkung $\sim 1 \text{ GeV}$, so erreicht die starke Kopplung Werte ≥ 1 , was zum Versagen der bisherigen störungstheoretischen Methoden führt. In diesen Energiebereichen treten die Quarks und Gluonen nur noch in gebundenen Zuständen, den eingangs bereits erwähnten Hadronen, auf. Dieser Effekt wird als Confinement bezeichnet.

Die Hadronen teilen sich je nach Spineigenschaft in zwei Gruppen auf. Erstens in die bosonischen Hadronen, die „Mesonen“, die in erster Näherung als ein System bestehend aus einem Quark-Antiquark-Paar beschrieben werden können. Der leichteste Vertreter der Mesonen ist das Pion in seinen drei Ladungskonfigurationen π^+ , π^- und π^0 . Die zweite Gruppe ist die der fermionischen Hadronen, der „Baryonen“, die in erster Näherung aus einem System von drei Valenzquarks bestehen. Die leichtesten Vertreter sind die Bausteine der Atomkerne, das Proton und das Neutron, die in einem Isospinduplet, dem Nukleon, zusammengefasst werden können. Die Untersuchung der elektromagnetischen Eigenschaften dieser beiden leichtesten Baryonen in einem mittleren Energiebereich ist das Ziel dieser Arbeit.

Generation	1	2	3
Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$
Leptonen	$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$

Wechselwirkung	Eichbosonen
elektromagnetische WW.	Photon γ
schwache WW.	W^+, W^-, Z^0
starke WW.	Gluonen g

Tabelle 1.1: Tabelle der Elementarteilchen des Standardmodells, geordnet nach Isoduplets und der Eichbosonen der drei im Standardmodell vertretenen Grundkräfte.

Zusammenfassend besteht das Standardmodell aus einem Satz von drei Generationen von Fermionen, den Quark-Isodupletpaaren mit den elektrischen Ladungen $2/3$, $-1/3$, sowie den Leptonen mit ihren jeweiligen Neutrinos und den Eichbosonen der drei fundamentalen Wechselwirkungen.

1.1 Was ist das Nukleon?

Historisch gesehen wurde der Begriff des Nukleons in der Kernphysik eingeführt. Für die Kernkräfte mit Energien < 140 MeV sind, wenn man die Coulombwechselwirkung ausschalten könnte, das Proton und Neutron ununterscheidbare Teilchen. Aus diesem Grund ging man dazu über, Proton und Neutron als zwei Zustände ein und des selben Teilchens, des Nukleons, aufzufassen. Man verwendet wegen der Analogie zum Spin den gleichen mathematischen Formalismus und formuliert den Isospin, der in Anhang D genauer erläutert wird. Wenn im folgenden Text nicht explizit von Proton oder Neutron die Rede ist, so wird immer auf das Nukleon Bezug genommen.

Verfolgt man die Intention der eingangs gestellten Frage weiter, so kommt man unweigerlich zu der Frage, wie das Nukleon „aussieht“. Es zeigt sich, dass die Beantwortung dieser Frage keineswegs trivial ist, da sie direkt davon abhängt womit bzw. bei welchen Energien man das Nukleon „betrachtet“.

Auf der atomaren Skala wird z.B. die elektromagnetische Wechselwirkungen eines Nukleons gut durch die einfache Hamiltonfunktion für ein Punktteilchen beschrieben,

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\phi. \quad (1.3)$$

Diese Hamiltonfunktion beschreibt eine Vielzahl von Niederenergiephänomenen, z.B. die elastische Elektron-Proton Streuung ($ep \rightarrow ep$), die Comptonstreuung von Protonen ($\gamma p \rightarrow \gamma p$) und einige weitere. Im Prinzip kann dieser erste Zugang fast beliebig genau verbessert werden, indem man Wechselwirkungen einbezieht, die das magnetische Moment, den Ladungsradius etc. des Nukleons enthalten.

Die niederenergetische Beschreibung des Nukleons versagt, sobald sich die Energie des Streuprozesses der Skala der starken Wechselwirkung nähert (~ 140 MeV, Ruhemasse des Pions), da sich dann die Struktur des Nukleons bemerkbar macht und das Konzept des Punktteilchens für das Nukleon nicht mehr ausreichend ist. Chambers und Hofstadter zeigten 1965 in ihren Experimenten, dass bei der Elektron-Nukleon-Streuung der Streuprozess unter Austausch eines Photons der dominierende ist [4]. Das Streubild zu diesem Prozess ist in Abbildung 1.2 gegeben.

Um die bestehende Theorie adäquat umzuformulieren, muss für den Fall der Elektron-Nukleon-Streuung der für das Nukleon auftretende Übergangstrom der

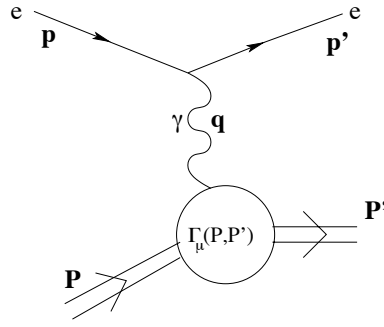


Abbildung 1.2: Der $ep \rightarrow ep$ Streuprozess. Der γ -Proton Vertex wird durch eine bilineare Funktion Γ_μ approximiert, die der Struktur des Protons Rechnung trägt.

Dirac-Gleichung im Impulsraum durch einen allgemeineren bilinearen Ausdruck ersetzt werden,

$$\bar{N}(P')\gamma_\mu N(P) \rightarrow \bar{N}(P')\Gamma_\mu(P', P)N(P). \quad (1.4)$$

Der allgemeinste Ansatz für einen solchen modifizierten Übergangstrom, der den Bedingungen der Lorentz-Invarianz, Hermitizität und Eichinvarianz genügt, läßt sich in Abhängigkeit von zwei skalaren Funktionen F_1 , F_2 schreiben,

$$\bar{N}(P')\Gamma_\mu(P', P)N(P) = \bar{N}(P') \left\{ \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma_{\mu\nu}}{2M} F_2(q^2) q^\nu \right\} N(P). \quad (1.5)$$

Die Funktionen F_1 und F_2 werden der Dirac- respektive Pauli-Formfaktor genannt. In einem nichtrelativistischen Limes beschreiben sie die Ladungs und Stromverteilung innerhalb des Nukleons. In Gleichung (1.5) bezeichnet q den Impulsübertrag, M die Ruhemasse des Nukleons und $\sigma_{\mu\nu} = i/2[\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu]$. Eine ausführlichere Betrachtung der Formfaktoren als hadronische Parameter findet sich in Kapitel 4.

Die Frage, wie die inneren Strukturen des Nukleons in die Bestimmung der Formfaktoren eingehen, soll später beantwortet werden. Zum Abschluss dieses Abschnitts soll der Vollständigkeit halber noch auf die Effekte bei Streuenergien $\gg 1$ GeV eingegangen werden.

Bei noch höheren Streuenergien erreichen die Experimente den Bereich der tiefinelastischen Streuung (Deep Inelastic Scattering-DIS). In diesem Bereich werden die Experimente unter Zerstörung des Nukleons sensitiv auf dessen innere Struktur.

Diese Experimente, wie sie z.B. ab 1960 am Stanford Linearbeschleuniger (SLAC) mit Elektronen an Nukleonen durchgeführt wurden, zeigten, dass der Wirkungs-

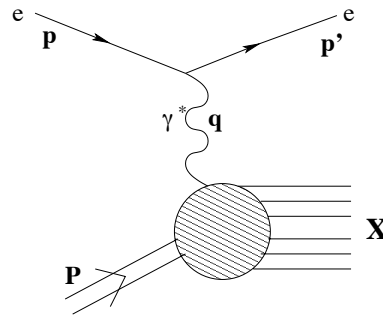


Abbildung 1.3: Darstellung eines typischen DIS Ereignisses $ep \rightarrow e + X$. Die hadronischen Endzustände X sind dabei unbestimmt.

querschnitt des inelastischen Prozesses, normiert auf den Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung nahezu unabhängig von der übertragenen Energie Q^2 ist, während im Gegensatz dazu der Einfluss der elastischen Streuung um mehrere Zehnerpotenzen abfällt. Dieses Verhalten, dass Skaleninvarianz (scaling) genannt wird, war der Beweis, dass die inelastische Streuung nicht kohärent am gesamten Nukleon erfolgte, sondern inkohärent an kleineren Konstituenten. Diese Konstituenten wurden von R. Feynmann mit dem Begriff „Partonen“ belegt.

Man identifizierte die Partonen später mit den Quarks und Gluonen. Für die Partonenbeiträge der Quarks unterscheidet man dabei zwei Anteile. Zum einen ist es der Beitrag durch die Valenzquarks, die das jeweilige Hadron im statischen Modell aufbauen. Für das Proton sind dieses zwei u -Quarks und ein d -Quark. Zum anderen ist es der Beitrag der See-Quarks, die von Gluonen in virtuellen Quark-Antiquark-Paaren erzeugt werden.

1.2 Faktorisierung

DIS-Experimente können den Beobachter nur in sehr begrenztem Maße mit Informationen bezüglich der über alle möglichen Partonenkonfigurationen gemittelten Quark- und Gluon-Verteilungen in den Hadronen versorgen. Wie wir noch sehen werden, sind mögliche Partonkonfigurationen gegeben durch z.B. $|qqq\rangle$, $|qqqg\rangle$ etc.. Aufschluss über die von den Partonen im gebundenen Zustand gebildeten Strukturen geben Untersuchungen von exklusiven Prozessen. Dieses sind Prozesse, deren Anfangs- und Endzustände die gleiche Zusammensetzung von Elementarteilchen und Hadronen besitzen, z.B. $ep \rightarrow ep$, $\gamma p \rightarrow \gamma p$, $pp \rightarrow pp$, um

nur einige zu nennen. Exklusive Prozesse ermöglichen es unterschiedliche Komponenten der Hadronwellenfunktion zu unterscheiden und so besteht die Hoffnung, über die Formfaktoren Informationen zu den Verteilungen der Valenzquarks bei kleinen transversalen Abständen gewinnen zu können.

Betrachtet man exklusive Streuprozesse bei hohen Streuenergien, so erwartet man zum einen ein hohes räumliches Auflösungsvermögen. Daraus ergibt sich die Möglichkeit die inneren Strukturen des beteiligten Hadrons mittels störungstheoretischer Methoden zu studieren, da bei kleinen Abständen die Partonen als asymptotisch frei betrachtet werden können. Zum anderen müssen in exklusiven Prozessen wegen des Confinement-Prozesses bei größeren Abständen auch nichtperturbative Effekte auftreten.

Die Beschreibung der elektromagnetischen Formfaktoren eines Hadrons, z.B. (1.5), die dessen innere Ladungs- und Stromverteilung widerspiegeln, benötigt eine konsistente Analyse beider Längenskalen in einem einzigen Prozess. Bei ausreichend großem Impulsübertrag können in Hadron-Lepton- bzw. Hadron-Hadron-Streuung die relativen Geschwindigkeiten der beteiligten Streupartner als nahezu lichtartig angenommen werden. Unter dieser Bedingung ist der Bindungsprozess für die einzelnen Partonen im Ruhesystem des jeweiligen Hadrons mit einer hochgradigen Zeitdilatation versehen. Dieses gilt sowohl für den Anfangs- als auch für den Endzustand des Prozesses, weshalb man davon ausgehen kann, dass die Partonenkonstellation des Anfangszustandes über den gesamten Streuvorgang „eingefroren“ bleibt und als solche von anderen Teilchen „gesehen“ wird. Wenn sich auch die relativen Geschwindigkeiten der Lichtgrenze nähern, verringert sich zusätzlich die Kontaktzeit zwischen dem Hadron und dem beteiligten Streupartner und damit die Zeit für den Impulsübertrag. Tatsächlich ist es immer möglich, ein Bezugssystem so zu wählen, dass sich für ein beliebiges Paar von Teilchen die Kontaktzeit um den Faktor

$$\frac{1}{\gamma_{\text{rel}}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v_{\text{rel}}^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (1.6)$$

verringert. Unter diesen Bedingungen erwartet man, dass es bei hohen Energien zu keinen Wechselwirkungen zwischen den Skalen der langreichweitigen hadronischen Bindungszustände und dem kurzen Bereich des eigentlichen Streuprozesses kommt. Diese Inkohärenz, der Bereiche in denen nichtperturbative und perturbative Methoden ihre Anwendbarkeitsregime haben, ermöglicht eine Trennung der

beiden Anteile. Bei Streuprozessen mit hohen Energien kann davon ausgehen werden, dass jedes Hadron für den Zeitraum der Streuwechselwirkung durch einen definierten partonischen Zustand dargestellt wird. Ein Elektron-Proton Streu-

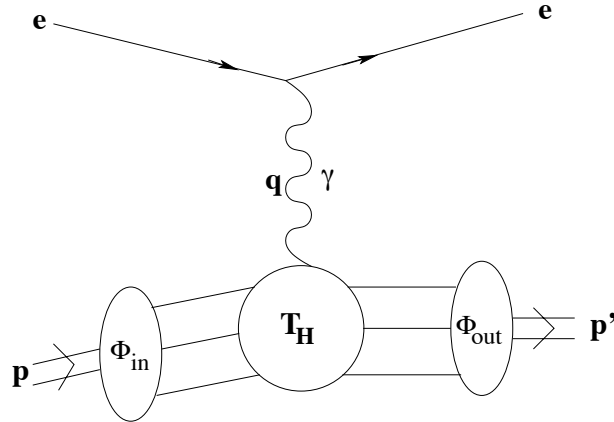


Abbildung 1.4: Faktorisierung des Streubildes bei großem Q^2 für den Prozess $ep \rightarrow ep$. T_H steht für den harten Streuanteil und Φ_{in} , Φ_{out} bezeichnen den Ausgangs- und Endzustand in den die Partonen des Protons gebunden sind.

prozess läßt sich damit wie in Abbildung 1.4 illustrieren, in der die Dynamik bei großen Abständen vom Streuzentrum durch eine Verteilungsfunktion der Valenzquarks, Φ_{in} , beschrieben wird. Man bezieht sich auf diese Verteilungsfunktion, wenn von der „Wellenfunktion“ des Protons die Rede ist. Über einen kurzen Weg findet zwischen den Partonen des Zustandes Φ_{in} und dem Elektron der Prozess des Impulsaustausches T_H statt. Der Index H steht hier für „Hart“ und deutet damit die perturbative Beschreibung dieses Anteils des Streuprozesses an. Zu einem späteren Zeitpunkt formen die Partonen dann wieder das Proton in der Wellenfunktion Φ_{out} .

Zusammenfassen lassen sich die vorangegangenen Betrachtungen für einen allgemeinen exklusiven Prozess in einer schematischen Darstellung, in der das Matrixelement als Produkt des kurzreichweitigen Impulsübertrages und den langreichweitigen Ausgangs- und Endzuständen formuliert wird,

$$M(p_i, p_j) = \prod_j \Phi_{out}(n_j) \otimes T_H(n_j, n_i) \otimes \prod_i \Phi_{in}(n_i). \quad (1.7)$$

Die Indizes i und j bezeichnen hier jeweils die einzelnen Hadronen in den „in“- und „out“-Zuständen. $\Phi(n)$ steht für die Wellenfunktion, ein Hadron mit dem

Partonenzustand n zu finden und $T_H(n_j, n_i)$ ist eine perturbative Funktion, welche die harte Streuung an den Partonen beschreibt. Das Symbol \otimes steht für das Faltungsintegral (oder auch die Summe) über alle partonischen Freiheitsgrade, die zu den Zuständen n_j und n_i gehören.

Diese Faktorisierung hat zwei wesentliche Vorteile. Zum einen sind die nicht-perturbativen Wellenfunktionen universell bezüglich einer ganzen Klasse von exklusiven Prozessen [5]. Zum anderen impliziert die Faktorisierung Bedingungen bezüglich der Konsistenz der einzelnen Terme, die es ermöglichen, die Abhängigkeit der Amplitude und damit der Formfaktoren vom Impulsübertrag Q^2 zu berechnen [6].

1.3 Zu dieser Arbeit

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Methoden gelten nur für Elektron-Nukleon-Streuung bei hohem Impulsübertrag. Die wohl einschneidendste Forderung ist hierbei das „Ausfrieren“ genau eines Partonenzustandes. Solch eine asymptotische Beschreibung ist nach dem modernen Verständnis der exklusiven Elektron-Nukleon-Streuung erst bei sehr hohem Impulsübertrag, $Q^2 \sim 100$ GeV, gültig, was im starken Gegensatz zu den asymptotischen Formulierungen von DIS-Prozessen steht, deren Gültigkeit bereits ab $Q^2 \sim 1$ GeV nachgewiesen wurde. Dieser Umstand motiviert die prä-asymptotische Untersuchung von exklusiven Prozessen bei mittlerem Impulsübertrag, wie sie Gegenstand dieser Arbeit ist. Für diese Untersuchungen nimmt man an, dass die Wellenfunktion des Nukleons aus einer Superposition von Partonenverteilungen, den sogenannten Distributionsamplituden besteht. Ziel ist es, aus der praeasymptotischen Formulierung der Nukleon-Wellenfunktion die Nukleon Formfaktoren für Reaktionen mit mittlerem Impulsübertrag zu bestimmen. Die Arbeit organisiert sich dabei wie folgt. In Kapitel 2 werden die Methoden zur Bestimmung der in der Nukleon Wellenfunktion auftretenden Distributionsamplituden bereitgestellt und die Bestimmung der linear unabhängigen Distributionsamplituden durchgeführt, welche das erste wichtige Ergebnis dieser Arbeit darstellen. In Kapitel 3 werden Detailschritte zur Kapitel 2 näher betrachtet und eine vollständige Liste aller gefundenen Distributionsamplituden in Abhängigkeit von den Parametern für die Impulsanteile der Partonen innerhalb des Nukleons angegeben. Kapitel 4 enthält die Bestimmung

der elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons mittels der Methode der QCD Summenregeln und damit das zweite wichtige Ergebnis dieser Arbeit, zusammen mit der notwendigen Gegenüberstellung zu den experimentellen Daten. Es schließt sich auch hier ein Kapitel (5) mit Detailbetrachtungen zu Teilschritten der Bestimmung der Formfaktoren an. Das finale Kapitel über Zusammenfassung und zukünftige Entwicklungsmöglichkeiten bildet den Abschluß dieser Arbeit. Die Anhänge enthalten eine Sammlung von Formalismen und Formeln, die das Handwerkszeug für diese Arbeit wiedergeben.

Kapitel 2

Die Nukleon Wellenfunktion

Wie in der Einleitung bereits erläutert wurde, fanden die ersten Ansätze zur Bestimmung der Nukleon Wellenfunktion ihre Anwendung bei Prozessen mit hohem Wechselwirkungsenergien. Was man folglich benötigte war eine relativistische Formulierung des gebundenen Zustandes der Partonen innerhalb des Nukleons. Ursprünglich wurde der hier verwendete Formalismus für Mesonen entwickelt [5, 21] und wird hier auf das Nukleon übertragen werden.

Im Folgenden sollen kurz die wesentlichen Voraussetzungen für eine solche erste Formulierung der Nukleon-Wellenfunktion skizziert werden und anschließend dann für Wellenfunktionen bei mittlerem Energieübetrag aus der Entwicklung des zentralen Objektes, des Drei-Spinor-Produktes der Valenzquarkfelder innerhalb des Protons und der gegebenen hadronischen Eigenschaften, die unabhängigen Distributionsamplituden extrahiert und deren Formulierung bzgl. der Parameter für die Impulsanteile der Quarks am Nukleonenimpuls erstellt werden.

Der Zugang zu einer Formulierung der Nukleon-Wellenfunktion ergibt sich aus dem Bethe-Salpeter-Formalismus zur Beschreibung kollinearer relativistischer Fermionen. Das zentrale Objekt bei der Beschreibung für ein Hadron ist die kovariante Wellenfunktion, hier allgemein gegeben für ein Drei-Quark-Objekt,

$$\Psi^{\text{BS}}(k_1, k_2, k_3) = \langle 0 | T \{ \psi(k_1) \psi(k_2) \psi(k_3) \} | N \rangle. \quad (2.1)$$

Sie beschreibt den prozessunabhängigen nichtperturbativen Rahmen, in den später die speziellen perturbativen Beschreibungen der Reaktionsmechanismen eingefügt werden können.

Im Prinzip ist die Formulierung (2.1) für hohe Energien nicht gültig, da die Wech-

selwirkungen zwischen Partonverteilungen wie qqq , $qqqg$, etc. bei großen Energien keineswegs klein sind. Auch darf bei großen Impulsen die Erzeugung von zusätzlichen Teilchen-Antiteilchenpaaren nicht vernachlässigt werden. Die Physik solcher Systeme hängt daher eher von dem Zusammenspiel vieler verschiedener Kanäle ab. Ein Baryon ist eine Superposition von Zuständen mit drei Quarks, drei Quarks und einem Gluon, drei Quarks und zwei Gluonen, usw..

Intuitiv würde man folglich ein Baryon gerne als eine Reihenentwicklung in Wellenfunktionen für jeden Kanal schreiben,

$$|B\rangle = \sum_{qqq} |qqq\rangle \psi_{qqq/B} + \sum_{qqqg} |qqqg\rangle \psi_{qqqg/B} + \dots \quad (2.2)$$

Formal ist diese Schreibweise möglich, indem man die QCD zu einer bestimmten Zeit, z.B. $t = 0$, quantisiert und anschließend die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Felder nutzt, um eine Basis dieses „Fock-Raumes“ zu definieren. Das Problem das sich daraus ergibt ist der nichtdefinierte Vakuum-Zustand, da dieser nicht Eigenzustand des Hamiltonoperators zum Baryon ist. Es ist durchaus denkbar, dass Wechselwirkungsterme wie z.B. $g\psi\gamma_\mu A^\mu\psi\psi$ zusätzliche Teilchen aus dem Vakuumzustand erzeugen, die nicht mit dem Hadron in Verbindung stehen.

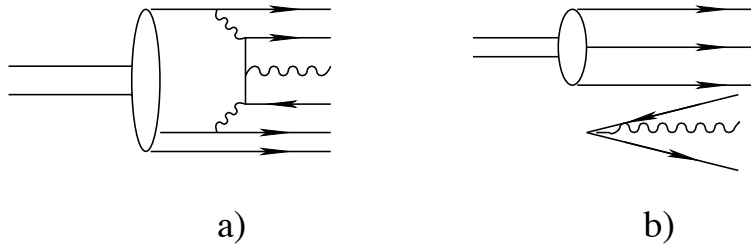


Abbildung 2.1: Störungstheoretische Beiträge zur Nukleon $qqq\bar{q}g$ Wellenfunktion, bei Vernachlässigung der Lichtkegel-Quantisierung. Der Beitrag in b) muss mit in Betracht gezogen werden, obwohl der aus dem Vakuum erzeugte Anteil $q\bar{q}g$ formal nichts mit dem Nukleon zu tun hat.

Auch Lorentz-Transformationen können zusätzliche Teilchen erzeugen und sind aufgrund ihrer Komplexität nur bedingt durchführbar. Der Hauptgrund für die Komplikationen liegt in der gewählten Zeitebene, $t = 0$, die unter Boosts nicht

invariant ist. Der Boost eines gewählten Zustandes schließt deshalb automatisch eine Entwicklung von Anteilen dieses Zustandes in der Zeit mit ein.

Wenn folglich eine verlässliche Beschreibung der Wellenfunktion in Form von Distributionsamplituden gefunden werden soll, so ist man auf eine Umgehung dieser Probleme angewiesen. Die Lösung besteht darin, die QCD auf dem Lichtkegel zu einer bestimmten Lichtkegelzeit ¹, $\tau := t + z$, zu quantisieren. In dieser Formulierung beschreiben die Baryon-Wellenfunktionen die Zusammensetzung des Baryons zu einer speziellen Zeit τ und die zeitliche Entwicklung des Zustandes ist durch die zu τ konjugierte Hamiltonfunktion auf dem Lichtkegel gegeben, $H_{LC} := P^- := P^0 - P^3$ [5, 7]. Bezüglich dieses Koordinatensystems ist der Grundzustand des Lichtkegel-Fock-Raumes ein exakter Eigenzustand der vollständigen Hamilton-Funktion H_{LC} . Auch die Lorentz-Transformationen vereinfachen sich, da sich die quantisierte Fläche $\tau = 0$ invariant unter longitudinalen Boosts verhält. Die in Lichtkegelkoordinaten definierte perturbative QCD bietet den Rahmen für die konsistente Berechnung von Distributionsamplituden auf dem Lichtkegel, sowie für die Formulierung der Lichtkegel-Wellenfunktionen zur Beschreibung des Baryons.

2.1 Die Darstellung des Drei-Spinor-Produktes

Da sich die Beschreibung der Nukleon-Wellenfunktion mittels Partonenverteilungsamplituden auf Nukleon-zu-Vakuum Matrixelemente nicht lokaler Operatoren wie (2.1) bezieht, und die Operatoren in solchen Matrixelementen aus Kombinationen lichtartig getrennter Quark- und Gluonfelder bestehen, ist der Ausgangspunkt für die Bestimmung der höheren Beiträge zum Proton durch das folgende Drei-Quark-Matrixelement gegeben,

$$\langle 0 | \epsilon^{ijk} u_{\alpha}^{i'}(a_1 x) [a_1 x, a_0 x]_{i',j} u_{\beta}^{j'}(a_2 x) [a_2 x, a_0 x]_{j',j} d_{\gamma}^{k'}(a_3 x) [a_3 x, a_0 x]_{k',k} | P(P, \lambda) \rangle. \quad (2.3)$$

Hierbei steht $|P(P, \lambda)\rangle$ für den Protonzustand mit dem Impuls P , mit $P^2 = M$ und der Helizität λ . x ist ein Lichtkegelvektor $x^2 = 0$. Die griechischen Indizes α, β, γ bezeichnen die Spinorkomponenten und die Farbladungen werden durch die lateinischen Indizes i, j, k notiert. Die Größen $[x, y]$ sind die notwendigen

¹Die Einzelheiten zum Lichtkegelformalismus finden sich ausführlich in Anhang B

Eichfaktoren, die in Anhang C.4 näher erläutert werden.

$$[x, y] = \text{Pexp} \left[\int_0^1 dt \quad (x - y)_\mu \mathbf{A}^\mu(tx + (1 - t)y) \right] \quad (2.4)$$

Im folgenden werden die Eichfaktoren nicht mehr mitgeschrieben, ihr Vorhandensein jedoch ständig vorausgesetzt.

Das zentrale Objekt von (2.3) ist das direkte Produkt der drei Diracspinoren. Für ein solches Produkt soll eine allgemeine Darstellung durch einen vollständigen Satz von Matrizen gefunden werden. Generell besteht die Idee darin, das direkte Produkt von zwei der drei Spinoren als ein äußeres Produkt zu schreiben, sowie für den verbleibenden freien Spinor eine Matrixdarstellung zu wählen und die resultierenden zwei 4×4 -Matrizen nach dem vollständigen Satz der 16 Diracmatrizen zu entwickeln.

2.1.1 Das Zwei-Spinor-Subsystem

Die erste Untersuchung beschäftigt sich mit einem Paar zweier beliebiger Spinoren. Im darauf folgenden Abschnitt wird dann die Matrixnotation dieses Paares eingeführt und anschließend das direkte Produkt zwischen dieser Matrixnotation und dem dritten Spinor untersucht.

Ein relativistisches Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen wird durch einen Dirac-Spinor mit vier Komponenten beschrieben, unabhängig davon, ob das Teilchen in freiem oder gebundenen Zustand vorliegt. Im Falle eines Einteilchenzustandes ist dieser Spinor die Lösung der Dirac-Gleichung mit dem zugehörigen Potential. Wenn zwei oder mehrere solcher Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen willkürlich miteinander wechselwirken und dabei einen zusammengesetzten Zustand bilden, so hat im allgemeinen die zugehörige Wellenfunktion die Form eines Produktes der Dirac-Spinoren der einzelnen Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen.

Die Wellenfunktion für ein zwei Fermionensystem wird durch die Bethe-Salpeter Gleichung beschrieben und geht in diese als das äußere Produkt der beiden Spinoren ein [8]. Die Wellenfunktion für das Zwei-Fermionen-System schreibt sich demnach als

$$\chi_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \Psi_\beta^t = \Psi_\alpha \otimes \Psi_\beta. \quad (2.5)$$

Die $\Psi_i, i = \alpha, \beta$ bezeichnen die beiden Spinoren, mit den Spinorindizes α, β . Ein Operator, der nur von rechts auf den ersten Spinor wirkt, kann auch in

transponierter Form von links wirken.

$$\chi_{\alpha\beta}\mathcal{O}_{\alpha\alpha'} = \mathcal{O}_{\alpha\alpha'}^t\chi_{\alpha\beta} = \mathcal{O}_{\alpha'\alpha}\chi_{\alpha\beta}. \quad (2.6)$$

Da wir später anstelle eines beliebigen Operators Diracmatrizen auf die Spinormatrix anwenden werden, ist es nützlich, die Matrix $A := C^{-1}\gamma_5$ einzuführen [9]. C bezeichnet die Ladungskonjugationsmatrix, deren Eigenschaften in (A.10) definiert sind.

Mit Hilfe von A transformieren sich dann die Diracmatrizen wie folgt

$$A^{-1}\gamma_\nu^t A = \gamma_\nu \quad \text{und} \quad A^{-1}\gamma_5^t A = \gamma_5 \quad ^2. \quad (2.7)$$

Für die Matrix A gelten die Beziehungen $A^{-1} = A^t = A^\dagger = -A$, $A^2 = -1$. Wenn wir nun als neue Wellenfunktion des zwei Fermionensystems das Matrixprodukt

$$\Phi_{\alpha\beta} = A_{\alpha'\alpha}^{-1}\chi_{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

definieren, so verändert sich Gleichung (2.6) zu

$$\Phi_{\alpha\beta}\mathcal{O}_{\alpha\alpha'} = (A^{-1}\mathcal{O}_{\alpha'\alpha}^t A)\Phi_{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

und durch den Operator $(A^{-1}\mathcal{O}_{\alpha'\alpha}^t A)$ wird ausgeschlossen, dass transponierte Diracmatrizen beachtet werden müssen. Die Matrix $\Phi_{\alpha\beta}$ kann damit ohne algebraische Komplikationen nach dem vollständigen Satz von Diracmatrizen entwickelt werden.

2.1.2 Das Drei-Spinor-System

Für das System aus drei Spinoren wollen wir einen ähnlichen Ansatz für eine allgemeine Entwicklung nach einem vollständigen Satz von Matrizen finden. Das übliche Vorgehen besteht darin, zwei der drei Spinoren wie in Abschnitt 2.1.1 zu kombinieren und anschließend das direkte Produkt mit dem dritten zu bilden. Insgesamt gibt es drei Möglichkeiten, das Zwei-Spinor-System zu bilden. Wegen der Allgemeingültigkeit der folgenden Betrachtungen reicht es aus, sich auf ein System zu beschränken, indem die ersten beiden Spinoren über ein äußeres Produkt zusammengefasst sind

$$(\Psi_\alpha \otimes \Psi_\beta)\Psi_\gamma. \quad (2.10)$$

²Die verwendeten Definitionen und weitere Transformationsbeziehungen für die Diracmatrizen finden sich im Anhang A

Die mit dem Spinor Ψ_γ verbundenen vier Freiheitsgrade können mit $\Phi_{\alpha\beta}$ verknüpft werden, indem man das Tensorprodukt der beiden Spinoren auf eine beliebige Spinorbasis anwendet, wie z.B. auf die Basis der vier freien Dirac Spinoren im Ruhesystem. Um auch den verbleibenden letzten Spinor allgemein darstellen zu können, schreibt man diesen als Matrix-Spinorprodukt $\Gamma_{\gamma\gamma'}\Psi_{\gamma'}^{(\pm)}$ in der reduzierten Spinorbasis $\Psi^{(\pm)}$, welche im Ruhesystem des Nukleons gegeben ist durch

$$\Psi^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Psi^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Hierbei ist $\Gamma_{\gamma\gamma'}$ eine beliebige 4×4 Matrix, die wie das Tensorprodukt der Spinoren Ψ_α und Ψ_β nach dem Satz der Dirac-Matrizen entwickelt werden kann.

Die allgemeine Form der Drei-Spinor-Wellenfunktion formuliert sich damit zu

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma} := (\Phi A)_{\alpha\beta} (\Gamma \Psi)_\gamma. \quad (2.12)$$

Bei dieser Notation orientiert sich die Reihenfolge der Indizes von $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ an der Reihenfolge der Indizes der rechten Seite von (2.12).

2.1.3 Eigenschaften des Drei-Spinor-Systems

Im Wesentlichen interessieren uns von allen Eigenschaften, die ein Drei-Spinor-System habe mag nur die Lorentz-Invarianz, die Parität und die Permutationssymmetrie der beteiligten Spinoren. Die für die Definitionen der beteiligten Objekte wird Bezug auf [10] genommen.

Lorentz-Symmetrie

Die Lorentz-Transformationseigenschaften von $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ sind die eines Produktes von drei Spinoren. Wird jeder Spinor mit einem Boost $S(\Lambda)$ versehen, so folgt mit

$$AS^t(\Lambda)A^{-1} = S^{-1}(\Lambda) \quad (2.13)$$

der Boost von $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ nach $\Omega'_{\alpha\beta\gamma}$

$$\Omega'_{\alpha\beta\gamma} = (S(\Lambda)\Phi S^{-1}(\Lambda)A)_{\alpha\beta} (S(\Lambda)\Gamma S^{-1}(\Lambda))_{\gamma\gamma'} (S(\Lambda)\Psi)_{\gamma'}. \quad (2.14)$$

Anhand von (2.14) ist zu erkennen, dass die Drei-Spinor-Wellenfunktion die Transformationseigenschaften des Produktes eines Tensors und eines Spinors Ψ besitzt. Der Rang des Tensors ist gleich der Anzahl der freien Lorentz-Indizes von Φ und Γ .

Z.B. transformiert sich $(\gamma_\nu A)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu \Psi^\pm)_\gamma$ wie ein Spin-up (+) bzw. Spin-down (-) Spinor.

Parität

Es ist auch ohne weitere Umstände möglich, Zustände bestimmter Parität zu definieren.

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma}(P) = \eta_P \gamma_0^a \gamma_0^b \gamma_0^c \Omega_{\alpha\beta\gamma}(\tilde{P}) = \eta_P (\gamma_0 \Phi \gamma_0 A)_{\alpha\beta} (\gamma_0 \Gamma \Psi)_\gamma \quad (2.15)$$

Hierbei beziehen sich die lateinischen Indizes a, b, c auf die Impulsbeiträge p_a, p_b, p_c der einzelnen Spinoren. P steht für den Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem, $P = p_a + p_b + p_c$ und \tilde{P} steht damit für $\tilde{P} = (P_0, -\mathbf{P})$.

Die Permutationssymmetrie

Die Permutationssymmetrie der Drei-Spinor-Funktion $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ reduziert sich im wesentlichen auf eine Symmetrie in den Indizes. Hierfür definiert man die Generatoren der Gruppe S_3 der Permutationen von drei Objekten via

$$Q_{ab} \Omega_{\alpha\beta\gamma} = \Omega_{\beta\alpha\gamma}. \quad (2.16)$$

Q_{ab} ist die Operation, welche die ersten beiden Spinoren a und b vertauscht und damit die ersten beiden Indizes von Ω . Analog dazu definiert man Q_{bc} und Q_{ac} . Die Darstellung der Gruppenoperatoren als Indexoperatoren enthält, dass nur die Operatoren Q_{ab} und Q_{bc} für die Betrachtung der Symmetrie benötigt werden, da sich Q_{ac} als Verknüpfung dieser Permutationen ausdrücken läßt,

$$Q_{ac} = Q_{ab} \circ Q_{bc} \circ Q_{ab}. \quad (2.17)$$

In unserem Fall ist die Anwendung des Operators Q_{ab} auf (2.12) unkompliziert. In der Entwicklung nach Diracmatrizen sind die Matrizen $A, \gamma_5 A, \gamma_\mu A$ antisymmetrisch und $\gamma_\mu \gamma_5 A, \sigma_{\mu\nu} A$ sind symmetrisch.

Das Vertauschen der Indizes b und c bzw. a und c ist komplizierter, zumal die Indizes zwischen zwei im Prinzip unabhängigen Mengen von Diracmatrizen vertauscht

werden. Umgesetzt wird diese Symmetrietransformation durch eine Spinor Umordnung und diese erhält man standardgemäß durch eine Fierz-Transformation. Die Matrix der Fierz-Transformation ergibt sich aus der Vollständigkeitsrelation der Diracmatrizen

$$\begin{aligned} \delta_{\beta\alpha'}\delta_{\alpha\beta'} = & \frac{1}{4}[(\mathbf{1})_{\alpha\alpha'}(\mathbf{1})_{\beta\beta'} + (\gamma_5)_{\alpha\alpha'}(\gamma_5)_{\beta\beta'} + (\gamma_\mu)_{\alpha\alpha'}(\gamma^\mu)_{\beta\beta'} \\ & - (\gamma_5\gamma_\mu)_{\alpha\alpha'}(\gamma_5\gamma^\mu)_{\beta\beta'} + \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\alpha'}(\sigma^{\mu\nu})_{\beta\beta'}]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.2 Die allgemeinste Klassifizierung

2.2.1 Die Lorentz-Struktur

Die Wellenfunktion (2.12) kann nun nach dem vollständigen Satz der 16 Dirac-Matrizen $\mathbf{1}, \gamma_5, \gamma_\nu, \gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}$ entwickelt werden. Die Menge aller möglichen Entwicklungsterme wird nach der Anzahl der freien Lorentz-Indizes geordnet. Diejenigen Terme ohne freie Lorentz-Indizes gehören zur Ordnung nullten Ranges $r = 0$, die mit einem freien Lorentz-Index zu $r = 1$ usw.. Terme vom Rang $r > 4$ liefern entweder keinen neuen Beitrag zur Spinorstruktur, da der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ und der Levi-Civita Tensor keine Elemente der Spinorbasis sind oder können mittels der Identitäten im Anhang A auf Terme vom Rang $r \leq 4$ zurückgeführt werden.

Zusätzlich ergibt sich noch die sehr nützliche Unterteilung in Terme positiver und negativer Parität. So lauten z.B. die 10 kovarianten Beiträge zum Rang $r = 0$, wie sie unter anderem für Nukleon-Nukleon Streuung verwendet werden.

Für die allgemeinste Entwicklung des von uns betrachteten Matrixelementes (2.3) des Nukleons, sind die äußeren Parameter des Nukleons, wie positive Parität, Lorentzinvarianz und der Spin zu berücksichtigen. Für die Kontraktion der bei der Entwicklung entstehenden freien Lorentzindizes stehen der Gesamtimpuls P_μ und der Lichtkegelvektor x_ν zur Verfügung.

Strukturen	Parität (1)	Parität (-1)
Skalar	$(A)_{\alpha\beta}(\mathbf{1})_{\gamma\gamma'}$	$(A)_{\alpha\beta}(\gamma_5)_{\gamma\gamma'}$
Pseudoskalar	$(A\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma_5)_{\gamma\gamma'}$	$(A\gamma_5)_{\alpha\beta}(\mathbf{1})_{\gamma\gamma'}$
Vektor	$(A\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\mu)_{\gamma\gamma'}$	$-(A\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_5\gamma_\mu)_{\gamma\gamma'}$
Axialvektor	$-(A\gamma_5\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_5\gamma_\mu)_{\gamma\gamma'}$	$(A\gamma_5\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\mu)_{\gamma\gamma'}$
Tensor	$\frac{1}{2}(A\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu})_{\gamma\gamma'}$	$\frac{1}{2}(A\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}(\gamma_5\sigma^{\mu\nu})_{\gamma\gamma'}$

Tabelle 2.1: Paritätsabhängigkeit der Lorentz-Strukturen vom Rang 0

Die allgemeinste Zerlegung von (2.3) besteht aus 24 linear unabhängigen Strukturtermen, die jeweils eine invariante Funktion enthalten:

$$\begin{aligned}
& 4\langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 x) u_\beta^j(a_2 x) d_\gamma^k(a_3 x) | P \rangle \\
&= \mathcal{S}_1 M C_{\alpha\beta}(\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{S}_2 M^2 C_{\alpha\beta}(\hat{x}\gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{P}_1 M(\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma + \mathcal{P}_2 M^2(\gamma_5 C)_{\alpha\beta}(\hat{x}N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{V}_1(\hat{P}C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_2 M(\hat{P}C)_{\alpha\beta}(\hat{x}\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_3 M(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta}(\gamma^\mu\gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{V}_4 M^2(\hat{x}C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_5 M^2(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta}(i\sigma^{\mu\nu}x_\nu\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_6 M^3(\hat{x}C)_{\alpha\beta}(\hat{x}\gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{A}_1(\hat{P}\gamma_5 C)_{\alpha\beta}(N)_\gamma + \mathcal{A}_2 M(\hat{P}\gamma_5 C)_{\alpha\beta}(\hat{x}N)_\gamma + \mathcal{A}_3 M(\gamma_\mu\gamma_5 C)_{\alpha\beta}(\gamma^\mu N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{A}_4 M^2(\hat{x}\gamma_5 C)_{\alpha\beta}(N)_\gamma + \mathcal{A}_5 M^2(\gamma_\mu\gamma_5 C)_{\alpha\beta}(i\sigma^{\mu\nu}x_\nu N)_\gamma + \mathcal{A}_6 M^3(\hat{x}\gamma_5 C)_{\alpha\beta}(\hat{x}N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{T}_1(P^\nu i\sigma_{\mu\nu}C)_{\alpha\beta}(\gamma^\mu\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_2 M(x^\mu P^\nu i\sigma_{\mu\nu}C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{T}_3 M(\sigma_{\mu\nu}C)_{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_4 M(P^\nu\sigma_{\mu\nu}C)_{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\rho}x_\rho\gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{T}_5 M^2(x^\nu i\sigma_{\mu\nu}C)_{\alpha\beta}(\gamma^\mu\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_6 M^2(x^\mu P^\nu i\sigma_{\mu\nu}C)_{\alpha\beta}(\hat{x}\gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{T}_7 M^2(\sigma_{\mu\nu}C)_{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\nu}\hat{x}\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_8 M^3(x^\nu\sigma_{\mu\nu}C)_{\alpha\beta}(\sigma^{\mu\rho}x_\rho\gamma_5 N)_\gamma \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet N_γ den Nukleon Spinor, P den Gesamtimpuls des Nukleons, M die Nukleonmasse und $\sigma_{\mu\nu} := (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Anstelle des Feynmann Dagers wird die Notation $\hat{x} = \gamma_\mu x^\mu$ verwandt. Wie später deutlich werden wird, ist es nützlich, den Faktor 4 auf der linken Seite der Gleichung einzuführen. Jede der 24 Funktionen $\mathcal{S}_i, \mathcal{P}_i, \mathcal{V}_i, \mathcal{A}_i$ und \mathcal{T}_i hängt noch von dem Skalarprodukt $P \cdot x$ ab. Das nächste Ziel ist es, die einzelnen Terme von (2.19) nach ihrem Beitrag zum jeweiligen Twist zu ordnen. Da die noch unbestimmten invarianten Funktionen

in ihrer bisherigen Form (2.19) noch keinem definitiven Twist zugeordnet werden können, führt man einen zweiten Lichtkegelvektor ein.

$$p_\mu = P_\mu - \frac{1}{2}x_\mu \frac{M^2}{px}, \quad p^2 = 0. \quad (2.20)$$

Für Fälle in denen die Nukleonmasse vernachlässigt werden darf, gilt dann $P \rightarrow p$. Angenommen, das Bezugssystem sei so gewählt, dass sich das Nukleon in Richtung \vec{e}_z bewegen würde, dann wären bei einer Formulierung in Lichtkegelkomponenten (siehe Anhang B) p^+ und x^- die einzigen nicht verschwindenden Komponenten von p und x .

Um die Betrachtung auf dem Lichtkegel zu rechtfertigen, führt man ein Bezugssystem ein, das auf einen unendlichen Impuls des Nukleons hin ausgerichtet ist. Dieses Bezugssystem großer Impulse kann durch die Wahl $p^+ \sim Q \rightarrow \infty$ mit festem $P \cdot x = p \cdot x \sim 1$ realisiert werden, wobei bei der Anwendung in möglichen Wechselwirkungsreaktionen der Impulsübertrag Q die große Skala des Prozesses ist.

Entwickelt man nach der Festlegung des Bezugssystems das Matrixelement in Potenzen von $1/p^+$, so erhält man eine Einteilung in Terme proportional zu negativen Potenzen von Q , dem so genannten Power-Counting. So gesehen entspricht der Twist eines Terms der Unterdrückung durch negative Potenzen von p^+ . Passend dazu zerlegt man den Nukleonspinor $N_\gamma(P, \lambda)$ in „große“ und „kleine“ Anteile

$$N_\gamma(P, \lambda) = \frac{\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}}{2p \cdot x} N_\gamma(P, \lambda) = N_\gamma^+(P, \lambda) + N_\gamma^-(P, \lambda), \quad (2.21)$$

womit die beiden Projektionsoperatoren

$$\Lambda^+ = \frac{\hat{p}\hat{x}}{2p \cdot x} \quad \text{und} \quad \Lambda^- = \frac{\hat{x}\hat{p}}{2p \cdot x} \quad (2.22)$$

definiert sind, die jeweils auf die „plus“ und die „minus“ Komponente des Spinors abbilden.

Für die weiteren Schritte sind noch die Beziehungen

$$\hat{p}N(P) = MN^+(P) \quad \text{und} \quad \hat{x}N(P) = \frac{2px}{M}N^-(P) \quad (2.23)$$

wichtig, die sich direkt aus der Dirac-Gleichung $\hat{P}N(P) = MN(P)$ ableiten lassen. Wendet man die Projektionsoperatoren (2.22) auf die Darstellung (2.21) des Nukleonspinors an, so sind die Beiträge der „plus“ und „minus“ Komponenten

des Spinors zur Twistentwicklung leicht abzulesen, da beide Projektionen des Spinors explizit proportional zu p^+ sind

$$\Lambda^+ N = N^+ \sim \sqrt{p^+}, \quad \Lambda^- N = N^- \sim \frac{1}{\sqrt{p^+}}. \quad (2.24)$$

Um ein Beispiel für das Power-Counting anzuführen, soll exemplarisch die Lorentzstruktur vor der Funktion \mathcal{A}_1 in Beiträge von Lichtkegelvektoren zerlegt werden

$$\begin{aligned} (\hat{P}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma &= (\hat{p}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^+ + (\hat{p}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^- \\ &+ \frac{M^2}{2(px)} (\hat{x}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^+ + \frac{M^2}{2(px)} (\hat{x}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^-. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Zählt man die Potenzen von p^+ , die in den einzelnen Strukturtermen auf der rechten Seite von (2.25) auftreten, so findet man, daß jeder Term zu einer anderen Potenz von p^+ beiträgt.

Struktur	$\sqrt{p^+}^n$	Twistinterpretation
$(\hat{p}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^+$	$n = 3$	Twist-3
$(\hat{p}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^-$	$n = 1$	Twist-4
$\frac{M^2}{2(px)} (\hat{x}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^+$	$n = -1$	Twist-5
$\frac{M^2}{2(px)} (\hat{x}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^-$	$n = -3$	Twist-6

Tabelle 2.2: Twistinterpretation der Lichtkegelstrukturen zur Distributionsamplitude \mathcal{A}_1

Es zeigt sich damit, daß die invariante Funktion \mathcal{A}_1 zu jedem in unserer Betrachtung möglichen Twist beiträgt, angefangen beim führenden Twist-3.

Eine von der Mathematik her ähnliche Einteilung erhält man, wenn man die Quarkfelder des Matrixelementes (2.3) in „plus“ und „minus“ Komponenten $q = q^+ + q^-$ einteilt, analog zu (2.24)³. Die Amplitude führenden Twists ist dann definiert als diejenige, die drei „plus“ Quarkfelder enthält und jedes weitere „minus“ Quarkfeld erhöht die Ordnung im Twist um eins. Wenn man einmal von

³Dieser Zugang zur Lichtkegel Quantisierung findet sich in [11]

Isospineigenschaften absieht, so erwartet man acht unabhängige Nukleon Distributionsamplituden für den Strom aus drei Quarkfeldern zu finden: eine zum Twist-3 ($u^+u^+d^+$), drei zum Twist-4 ($u^+u^+d^-$), ($u^+u^-d^+$), ($u^-u^+d^+$), weitere drei zum Twist-5 ($u^+u^-d^-$), ($u^-u^+d^-$), ($u^-u^-d^+$) und eine Distributionsamplitude zum Twist-6 ($u^-u^-d^-$). Auf beiden Wegen der Einteilung von (2.19) in Lichtkegelkomponenten erhält man Distributionsamplituden, die zu je einem definierten Twist beitragen. Bildet man die Lichtkegel-Entwicklung, unter bezug auf den Nukleonspinor, so ergibt sich die folgende Definition der Lichtkegel Distributionsamplituden zu (2.3).

$$\begin{aligned}
& 4\langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 x) u_\beta^j(a_2 x) d_\gamma^k(a_3 x) | P \rangle \\
&= S_1 M C_{\alpha\beta}(\gamma_5 N^+)_\gamma + S_2 M C_{\alpha\beta}(\gamma_5 N^-)_\gamma \\
&+ P_1 M(\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^+ + P_1 M(\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^- \\
&+ V_1(\hat{p}C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 N^+)_\gamma + V_2(\hat{p}C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 N^-)_\gamma + V_3 \frac{M}{2}(\gamma_\perp C)_{\alpha\beta}(\gamma^\perp \gamma_5 N^+)_\gamma \\
&+ V_4 \frac{M}{2}(\gamma_\perp C)_{\alpha\beta}(\gamma^\perp \gamma_5 N^-)_\gamma + V_5 \frac{M^2}{2px}(\hat{x}C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 N^+)_\gamma + V_6 \frac{M^2}{2px}(\hat{x}C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 N^-)_\gamma \\
&+ A_1(\hat{p}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^+ + A_2(\hat{p}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^- + A_3 \frac{M}{2}(\gamma_\perp \gamma_5 C)_{\alpha\beta}(\gamma^\perp N^+)_\gamma \\
&+ A_4 \frac{M}{2}(\gamma_\perp \gamma_5 C)_{\alpha\beta}(\gamma^\perp N^-)_\gamma + A_5 \frac{M^2}{2px}(\hat{x}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^+ + A_6 \frac{M^2}{2px}(\hat{x}\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma^- \\
&+ T_1(i\sigma_{\perp p} C)_{\alpha\beta}(\gamma^\perp \gamma_5 N^+)_\gamma + T_2(i\sigma_{\perp p} C)_{\alpha\beta}(\gamma^\perp \gamma_5 N^-)_\gamma \\
&+ T_3 \frac{M}{px}(i\sigma_{px} C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 N^+)_\gamma + T_4 \frac{M}{px}(i\sigma_{px} C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 N^-)_\gamma \\
&+ T_5 \frac{M^2}{2px}(i\sigma_{\perp x} C)_{\alpha\beta}(\gamma^\perp \gamma_5 N^+)_\gamma + T_6 \frac{M^2}{2px}(i\sigma_{\perp x} C)_{\alpha\beta}(\gamma^\perp \gamma_5 N^-)_\gamma \\
&+ T_7 \frac{M}{2}(\sigma_{\perp\perp'} C)_{\alpha\beta}(\sigma^{\perp\perp'} \gamma_5 N^+)_\gamma + T_8 \frac{M}{2}(\sigma_{\perp\perp'} C)_{\alpha\beta}(\sigma^{\perp\perp'} \gamma_5 N^-)_\gamma \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die abkürzende Schreibweise $\sigma_{xp} = \sigma_{\mu\nu} x^\mu p^\nu$ verwandt. Die Kontraktion $\gamma_\perp \gamma^\perp = \gamma^\mu g_{\mu\nu}^\perp \gamma^\nu$ definiert sich mittels des metrischen Tensors $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^\perp + (p_\mu x_\nu + p_\nu x_\mu)/px$. \perp steht für die Projektion transversal zur Richtung von p und x . Die longitudinalen Anteile der Gamma-Matrizen lieferten keine zusätzlichen Beiträge zu den Lichtkegel Strukturen, was die folgende Beziehung deutlich macht

$$g_{\mu\nu} \gamma^\nu N(P) = (g_{\mu\nu}^\perp \gamma^\nu + \frac{2p_\mu}{M} \Lambda^- + \frac{z_\mu}{Mpz} \Lambda^+) N(P). \tag{2.27}$$

Fasst man die Menge der 24 Distributionsamplituden über das Zählen von Poten-

zen von p^+ in Gruppen gleichen Twists zusammen, so lassen sich drei Amplituden mit Twist-3 identifizieren (V_1 , A_1 und T_1), je neun mit Twist-4 und Twist-5 und drei mit Twist-6.

	Twist-3	Twist-4	Twist-5	Twist-6
Skalar		S_1	S_2	
Pseudoskalar		P_1	P_2	
Vektor	V_1	V_2, V_3	V_4, V_5	V_6
Axialvektor	A_1	A_2, A_3	A_4, A_5	A_6
Tensor	T_1	T_2, T_3, T_7	T_4, T_5, T_8	T_6

Tabelle 2.3: Twistsortierung der Lichtkegel Distributionsamplituden

Jede der Distributionsamplituden $F = S_i, P_i, V_i, A_i, T_i$ hängt im Wesentlichen nur noch von dem Skalarprodukt der dimensionsbehafteten Parameter p und x ab. Da der longitudinale Impuls des Protons festliegt, läßt sich ein Variablenwechsel zu drei dimensionslosen Variablen $\xi_i, i = 1, 2, 3$, mit $0 < \xi_i < 1, \sum_i \xi_i = 1$, durchführen, die in Korrespondenz zu den longitudinalen Impulsanteilen der Quarks am Protonimpuls stehen,

$$F(a_i p \cdot x) = \int \mathcal{D}\xi \ e^{-ipx \sum_i \xi_i a_i} F(\xi). \quad (2.28)$$

Das Integrationsmaß ist dabei definiert durch

$$\int \mathcal{D}\xi = \int_0^1 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \delta(1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3). \quad (2.29)$$

Vergleicht man die Entwicklungen (2.19) und (2.26), so lassen sich die Invarianten Funktionen der allgemeinsten Entwicklung von (2.3) ($\mathcal{S}_i, \mathcal{P}_i, \mathcal{V}_i, \mathcal{A}_i, T_i$) als lineare Kombinationen der Lichtkegel-Distributionsamplituden ausdrücken. Z.B ergibt sich für die skalaren Strukturen der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 N_\gamma^+ + (\mathcal{S}_1 - 2p \cdot z \mathcal{S}_2) N_\gamma^- &= S_1 N_\gamma^+ + S_2 N_\gamma^- \\ \Rightarrow \mathcal{S}_1 = S_1, \quad 2p \cdot z \mathcal{S}_2 &= S_1 - S_2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Insgesamt erhält man die folgenden 24 Beziehungen von kaligrafischen zu nicht-kaligrafischen Distributionsamplituden.

Skalar und Pseudoskalar Distributionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= S_1, & 2p \cdot x \mathcal{S}_2 &= S_1 - S_2, \\ \mathcal{P}_1 &= P_1, & 2p \cdot x \mathcal{P}_2 &= P_2 - P_1 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Vektor Distributionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= V_1, & 2p \cdot x \mathcal{V}_2 &= V_1 - V_2 - V_3, \\ 2\mathcal{V}_3 &= V_3, & 4p \cdot x \mathcal{V}_4 &= -2V_1 + V_3 + V_4 + 2V_5, \\ 4p \cdot x \mathcal{V}_5 &= V_4 - V_3, & (2p \cdot x)^2 \mathcal{V}_6 &= -V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 - V_6 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Axialvektor Distributionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= A_1, & 2p \cdot x \mathcal{A}_2 &= -A_1 + A_2 - A_3, \\ 2\mathcal{A}_3 &= A_3, & 4p \cdot x \mathcal{A}_4 &= -2A_1 - A_3 - A_4 + 2A_5, \\ 4p \cdot x \mathcal{A}_5 &= A_3 - A_4, & (2p \cdot x)^2 \mathcal{A}_6 &= A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - A_5 + A_6 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Tensor Distributionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= T_1, & 2p \cdot x \mathcal{T}_2 &= T_1 + T_2 - 2T_3, \\ 2\mathcal{T}_3 &= T_7, & 2p \cdot x \mathcal{T}_4 &= T_1 - T_2 - 2T_7, \\ 2p \cdot x \mathcal{T}_5 &= -T_1 + T_5 + 2T_8, & (2p \cdot x)^2 \mathcal{T}_6 &= 2T_2 - 2T_3 - 2T_4 + 2T_5 + 2T_7 + 2T_8, \\ 4p \cdot x \mathcal{T}_7 &= T_7 - T_8, & (2p \cdot x)^2 \mathcal{T}_8 &= -T_1 + T_2 + T_5 - T_6 + 2T_7 + 2T_8. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Damit haben wir die allgemeinste Entwicklung des Drei-Quark-Matrixelementes (2.3) in Strukturterme mit invarianten Komponentenfunktionen aufgestellt und im Bezugssystem unendlicher Impulse, die Twist-Einteilung der dort auftretenden Distributionsamplituden identifiziert, sowie deren Beziehungen zu den Komponentenfunktionen gefunden.

2.2.2 Symmetrien der Klassifizierung

Wie bereits angedeutet wurde, erwartet man bei einer Aufspaltung der Quarkfelder in (2.3) in „plus“ und „minus“ Anteile nur acht unabhängige Distributionsamplituden, im Gegensatz zu den 24 noch unbestimmten. Ziel dieses Abschnittes ist es daher die Anzahl der Distributionsamplituden unter Ausnutzung der vorhandenen Symmetrien auf das Minimum zu reduzieren.

Jede der Distributionsamplituden besitzt definierte Symmetrieeigenschaften. So impliziert die Ununterscheidbarkeit der u -Quarks innerhalb des Protons, zusammen mit den Symmetrieeigenschaften der Quarkoperatoren und Gamma-Matrizen in (2.26), dass die Vektor- und Tensor-Distributionsamplituden symmetrisch und die Axialvektor-, Skalar- und Pseudoskalar-Distributionsamplituden antisymmetrisch sind in den ersten beiden Argumenten.

$$\begin{aligned} V_i(1, 2, 3) &= V_i(2, 1, 3) & T_i(1, 2, 3) &= T_i(2, 1, 3) \\ S_i(1, 2, 3) &= -S_i(2, 1, 3) & P_i(1, 2, 3) &= -P_i(2, 1, 3) \\ A_i(1, 2, 3) &= -A_i(2, 1, 3) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ähnliche Beziehungen gelten für die kaligrafischen Funktionen in (2.19).

Die zweite wichtige Symmetrie gilt für das Matrixelement (2.3) und ergibt sich daraus, daß es die Vernichtung eines Nukleons mit den Isospin 1/2 representiert.

Als definierende Gleichung erhält man demnach

$$\left(T^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right) \langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i u_\beta^j d_\gamma^k | P \rangle = 0. \quad (2.36)$$

Hier ist der Isospinoperator T^2 gegeben durch

$$T^2 = \frac{1}{2} (T_+ T_- + T_- T_+) + T_3^2 \quad (2.37)$$

und die Operatoren T_\pm stehen für die üblichen Auf- und Absteigeoperatoren im Isospinraum⁴. Für das Matrixelement in (2.36) lautet damit die Bedingung aus der Isospinsymmetrie

$$\langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i u_\beta^j d_\gamma^k | P \rangle + \langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i u_\gamma^j d_\beta^k | P \rangle + \langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\gamma^i u_\beta^j d_\alpha^k | P \rangle = 0. \quad (2.38)$$

Um die Darstellungen der Matrixelemente in (2.38) besser vergleichen zu können, führen wir eine Kurzschreibweise für die Strukturen der Lichtkegel-Entwicklung (2.26) ein

⁴siehe hierzu auch Anhang D

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 x) u_\beta^j(a_2 x) d_\gamma^k(a_3 x) | P(P, \lambda) \rangle \\
&= S_1(s_1)_{\alpha\beta,\gamma} + S_2(s_2)_{\alpha\beta,\gamma} + P_1(p_1)_{\alpha\beta,\gamma} + P_2(p_2)_{\alpha\beta,\gamma} \\
&\quad + V_1(v_1)_{\alpha\beta,\gamma} + V_2(v_2)_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2}V_3(v_3)_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2}V_4(v_4)_{\alpha\beta,\gamma} \\
&\quad + V_5(v_5)_{\alpha\beta,\gamma} + V_6(v_6)_{\alpha\beta,\gamma} \\
&\quad + A_1(a_1)_{\alpha\beta,\gamma} + A_2(a_2)_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2}A_3(a_3)_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2}A_4(a_4)_{\alpha\beta,\gamma} \\
&\quad + A_5(a_5)_{\alpha\beta,\gamma} + A_6(a_6)_{\alpha\beta,\gamma} \\
&\quad + T_1(t_1)_{\alpha\beta,\gamma} + T_2(t_2)_{\alpha\beta,\gamma} + T_3(t_3)_{\alpha\beta,\gamma} + T_4(t_4)_{\alpha\beta,\gamma} \\
&\quad + T_5(t_5)_{\alpha\beta,\gamma} + T_6(t_6)_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2}T_7(t_7)_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2}T_8(t_8)_{\alpha\beta,\gamma}. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Hierbei stehen die Bezeichnungen in Klammern als Abkürzungen für die jeweiligen Lorentz-Strukturen, allgemein $(\chi_1)_{\alpha\beta,\gamma} = (\Gamma C)_{\alpha\beta}(\Gamma' N)_\gamma$ (z.B. $(s_1)_{\alpha\beta,\gamma} = M(C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 N^+)_\gamma$). Um die Indexabhängigkeit der Lorentz-Strukturen zu den drei Matrixelementen in (2.38) in eine vergleichbare Form zu bringen, benötigt man eine allgemeine Fierz-Transformation zwischen den auftretenden Strukturen:

$$\begin{aligned}
& (\Gamma C)_{\alpha\beta}(\Gamma' N)_\gamma \\
&= \frac{1}{4} \left[C_{\gamma\beta}(\Gamma \Gamma' N)_\alpha + (\gamma_5 C)_{\gamma\beta}(\Gamma \gamma_5 \Gamma' N)_\alpha + \frac{1}{p \cdot z} (\hat{p} C)_{\gamma\beta}(\Gamma \hat{z} \Gamma' N)_\alpha \right. \\
&\quad + \frac{1}{p \cdot z} (\hat{z} C)_{\gamma\beta}(\Gamma \hat{p} \Gamma' N)_\alpha + (\gamma_\perp C)_{\gamma\beta}(\Gamma \gamma^\perp \Gamma' N)_\alpha \\
&\quad - \frac{1}{p \cdot z} (\hat{z} \gamma_5 C)_{\gamma\beta}(\Gamma \hat{p} \gamma_5 \Gamma' N)_\alpha - \frac{1}{p \cdot z} (\hat{p} \gamma_5 C)_{\gamma\beta}(\Gamma \hat{z} \gamma_5 \Gamma' N)_\alpha \\
&\quad - (\gamma_\perp \gamma_5 C)_{\gamma\beta}(\Gamma \gamma^\perp \gamma_5 \Gamma' N)_\alpha - \frac{1}{(p \cdot z)^2} (\sigma_{pz} C)_{\gamma\beta}(\Gamma \sigma_{zp} \Gamma' N)_\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2} (\sigma_{\perp\perp'} C)_{\gamma\beta}(\Gamma \sigma^{\perp\perp'} \Gamma' N)_\alpha + \frac{1}{p \cdot z} (i\sigma_{\perp p} C)_{\gamma\beta}(\Gamma \gamma^\perp \hat{z} \Gamma' N)_\alpha \\
&\quad \left. + \frac{1}{p \cdot z} (i\sigma_{\perp z} C)_{\gamma\beta}(\Gamma \gamma^\perp \hat{p} \Gamma' N)_\alpha \right] \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Wendet man die Fierz-Transformation auf das dritte Matrixelement in Gleichung (2.38) an, so ergeben sich die folgenden Transformationen für die Twist-3 Struk-

turen

$$\begin{aligned}
(v_1)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{2}(v_1 - a_1 - t_1)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
(a_1)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{2}(-v_1 + a_1 - t_1)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
(t_1)_{\gamma\beta,\alpha} &= -(v_1 + a_1)_{\alpha\beta,\gamma}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

und für die Twist-4 Strukturen

$$\begin{aligned}
(s_1)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} \left(s_1 + p_1 - 2v_2 - 2a_2 + v_3 - a_3 - 2t_2 - t_3 + \frac{1}{2}t_7 \right)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
(p_1)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} \left(s_1 + p_1 + 2v_2 + 2a_2 - v_3 + a_3 - 2t_2 - t_3 + \frac{1}{2}t_7 \right)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
(v_2)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} \left(-s_1 + p_1 + v_3 + a_3 - t_3 - \frac{1}{2}t_7 \right)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
(a_2)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} \left(-s_1 + p_1 - v_3 - a_3 - t_3 - \frac{1}{2}t_7 \right)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
(v_3)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} (2s_1 - 2p_1 + 4v_2 - 4a_2 - 2t_3 - t_7)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
(a_3)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} (-2s_1 + 2p_1 + 4v_2 - 4a_2 + 2t_3 - t_7)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
(t_2)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} (-2s_1 - 2p_1 - 2t_3 + t_7)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
(t_3)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} \left(-s_1 - p_1 - 2v_2 - 2a_2 - v_3 + a_3 - t_3 - 2t_2 - \frac{1}{2}t_7 \right)_{\alpha\beta,\gamma}, \\
(t_7)_{\gamma\beta,\alpha} &= \frac{1}{4} (2s_1 + 2p_1 - 4v_2 - 4a_2 - 2v_3 + 2a_3 - 2t_3 + 4t_2 + t_7)_{\alpha\beta,\gamma}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Die Relationen der für die Strukturen zum Twist-5 und Twist-6 erhält man mittels der Substitutionen

$$\begin{aligned}
\text{Twist-5: } & \{s_1, p_1, v_2, v_3, a_2, a_3, t_2, t_3, t_7\} \rightarrow \{s_2, p_2, v_5, v_4, a_5, a_4, t_5, t_4, t_8\} \\
\text{Twist-6: } & \{v_1, a_1, t_1\} \rightarrow \{v_6, a_6, t_6\}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

und durch eine einfache Ersetzung der Spinorindizes läßt sich anschließend auch die Fierztransformation des Übergangs $(\dots)_{\alpha\gamma,\beta} \rightarrow (\dots)_{\alpha\beta,\gamma}$ ableiten, wie sie für das zweite Matrixelement in (2.38) benötigt wird.

Zusammengesetzt ergeben sich aus (2.38) mehrere Beziehung, z.B. für den Twist-

3 Anteil,

$$\begin{aligned}
0 = & [2T_1(1, 2, 3) - V_1(1, 3, 2) + A_1(1, 3, 2) - V_1(3, 2, 1) - A_1(3, 2, 1)](t_1)_{\alpha\beta,\gamma} \\
& + [2V_1(1, 2, 3) + 2V_1(1, 3, 2) + 2A_1(1, 3, 2) - 2T_1(1, 3, 2) \\
& + V_1(3, 2, 1) - A_1(3, 2, 1) - 2T_1(3, 2, 1)](v_1)_{\alpha\beta,\gamma} \\
& + [2A_1(1, 2, 3) + 2V_1(1, 3, 2) + 2A_1(1, 3, 2) + 2T_1(1, 3, 2) \\
& - V_1(3, 2, 1) + A_1(3, 2, 1) - 2T_1(3, 2, 1)](a_1)_{\alpha\beta,\gamma}. \tag{2.44}
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Symmetrien (2.35) der Distributionsamplituden kann leicht gezeigt werden, daß (2.44) durch die folgende Beziehung zwischen Tensor-, Axialvektor- und Vektoramplituden gelöst wird

$$2T_1(1, 2, 3) = [V_1 - A_1](1, 3, 2) + [V_1 - A_1](2, 3, 1). \tag{2.45}$$

Über die gleiche Vorgehensweise findet man für den Twist-4 Anteil neun Beziehungen zwischen den beteiligten Distributionsamplituden, die sich mittels (2.35) auf insgesamt zwei Beziehungen reduzieren lassen. Für den Twist-5 Anteil erhält man ebenfalls zwei Beziehungen und für den Twist-6 Anteil wiederum nur eine. Alle Isospinrelationen zwischen den Distributionsamplituden sind im Folgenden aufgelistet

$$\begin{aligned}
2T_1(1, 2, 3) &= [V_1 - A_1](1, 3, 2) + [V_1 - A_1](2, 3, 1) \\
[T_3 + T_7 + S_1 - P_1](1, 2, 3) &= [V_3 - A_3](3, 1, 2) + [V_2 - A_2](2, 3, 1) \\
2T_2(1, 2, 3) &= [T_3 - T_7 + S_1 + P_1](3, 1, 2) \\
&+ [T_3 - T_7 + S_1 + P_1](3, 2, 1) \\
[T_4 + T_8 + S_2 - P_2](1, 2, 3) &= [V_4 - A_4](3, 1, 2) + [V_5 - A_5](2, 3, 1) \\
2T_5(1, 2, 3) &= [T_4 - T_8 + S_2 + P_2](3, 1, 2) \\
&+ [T_4 - T_8 + S_2 + P_2](3, 2, 1) \\
2T_6(1, 2, 3) &= [V_6 - A_6](1, 3, 2) + [V_6 - A_6](2, 3, 1). \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Die Tensor-Distributionsamplitude (2.45) ist bereits aus den Arbeiten [12, 13, 14] und [15] bekannt. Da die Tensoramplitude dargestellt wird durch Vektor- und Axialvektoramplituden und letztere eine unterschiedliche Symmetrie bzgl. der Vertauschung der ersten beiden Argumente besitzen, können diese zu einer einzelnen, unabhängigen Distributionsamplitude des Twists-3 zusammengesetzt

werden

$$\Phi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [V_1 - A_1](\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (2.47)$$

Diese Twist-3 Distributionsamplitude ist seit langem bekannt und fand in der Vergangenheit große Beachtung. Die verbleibenden Relationen in (2.46) sind neu und beschränken die Zahl der Distributionen höheren Twists auf weitere sieben unabhängige.

Im einzelnen reduziert sich die Anzahl der neun Amplituden zum Twist-4 (siehe Tabelle 2.3) auf drei unabhängige Amplituden, die hier wie folgt benannt werden sollen

$$\begin{aligned} \Phi_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [V_2 - A_2](\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \Psi_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [V_3 - A_3](\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \Xi_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [T_3 - T_7 + S_1 + P_1](\xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Unter zur Hilfenahme der Zeilen zwei und drei in (2.46) lassen sich aus den drei Twist-4 Distributionen alle neun Distributionsamplituden $S_1, P_1, V_2, A_2, V_3, A_3, T_2, T_3$ und T_7 ableiten.

Ebenso lassen sich die neun Amplituden zum Twist-5 zu drei unabhängigen zusammenfassen

$$\begin{aligned} \Phi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [V_5 - A_5](\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \Psi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [V_4 - A_4](\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \Xi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [T_4 - T_8 + S_2 + P_2](\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{aligned} \quad (2.49)$$

und schließlich existiert noch eine Amplitude zum Twist-6

$$\Phi_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [V_6 - A_6](\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (2.50)$$

Damit haben wir unter Ausnutzung der Symmetrie der u -Quarks innerhalb des Protons und der Isospinsymmetrie des Matrixelementes (2.3) die Anzahl der 24 abhängigen Distributionsamplituden auf 8 unabhängige reduziert. Was noch fehlt, bevor man sich der Formulierung der einzelnen Amplituden zuwenden kann, ist eine physikalische Interpretation letzterer.

2.2.3 Darstellung durch chirale Felder

Die physikalische Interpretation der Distributionsamplituden $\Phi_l(\xi_i)$, $\Psi_m(\xi_i)$, $\Xi_n(\xi_i)$ ist am offensichtlichsten, wenn man die beteiligten Quarkfelder auf ihre Chiralität hin betrachtet

$$q^{\uparrow(\downarrow)} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)q. \quad (2.51)$$

Die chirale Projektion auf Spin-up bzw. Spin-down Beiträge ermöglicht es, die Distributionsamplituden einzelnen Matrixelementen zuzuordnen.

So geben die Zustände, bei denen die Spins der beiden u -Quarks antiparallel ausgerichtet sind, Vektor- und Axialvektoramplituden wieder und die Zustände mit parallelem Spin der beiden u -Quarks Skalar-, Pseudoskalar- und Tensoramplituden.

Man erhält eine Klassifizierung der acht unabhängigen Distributionsamplituden nach Lichtkegel Komponenten und Spin-Projektionen (siehe Tabelle 2.4). Die Amplitude führenden Twists kann damit nach [16] definiert werden als

$$\begin{aligned} \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\uparrow(a_1x) C \hat{z} u_j^\downarrow(a_2x) \right) \hat{z} d_k^\uparrow(a_3x) | P \rangle \\ = -\frac{1}{2}(pz) \hat{z} N^\uparrow \int \mathcal{D}x e^{-ipz \sum \xi_i a_i} \Phi_3(\xi_i). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Die Twist-4 Distributionsamplituden erlauben die folgenden Darstellungen

$$\begin{aligned} \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\uparrow(a_1x) C \hat{z} u_j^\downarrow(a_2x) \right) \hat{p} d_k^\uparrow(a_3x) | P \rangle \\ = -\frac{1}{2}(pz) \hat{p} N^\uparrow \int \mathcal{D}x e^{-ipz \sum \xi_i a_i} \Phi_4(\xi_i) \\ \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\uparrow(a_1x) C \hat{z} \gamma_\perp \hat{p} u_j^\downarrow(a_2x) \right) \gamma^\perp \hat{z} d_k^\downarrow(a_3x) | P \rangle \\ = -(pz) M \hat{z} N^\uparrow \int \mathcal{D}x e^{-ipz \sum \xi_i a_i} \Psi_4(\xi_i) \\ \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\uparrow(a_1x) C \hat{p} \hat{z} u_j^\uparrow(a_2x) \right) \hat{z} d_k^\uparrow(a_3x) | P \rangle \\ = \frac{1}{2}(pz) M \hat{z} N^\uparrow \int \mathcal{D}x e^{-ipz \sum \xi_i a_i} \Xi_4(\xi_i). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ebenso ergeben sich die Darstellungen für die Twist-5 Amplituden

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\uparrow(a_1x) C \hat{p} u_j^\downarrow(a_2x) \right) \hat{z} d_k^\uparrow(a_3x) | P \rangle \\
& \quad = -\frac{1}{4} M^2 \hat{z} N^\uparrow \int \mathcal{D}x e^{-ipz \sum \xi_i a_i} \Phi_5(\xi_i) \\
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\uparrow(a_1x) C \hat{p} \gamma_\perp \hat{z} u_j^\downarrow(a_2x) \right) \gamma^\perp \hat{p} d_k^\downarrow(a_3x) | P \rangle \\
& \quad = -(pz) M \hat{p} N^\uparrow \int \mathcal{D}x e^{-ipz \sum \xi_i a_i} \Psi_5(\xi_i) \\
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\uparrow(a_1x) C \hat{z} \hat{p} u_j^\uparrow(a_2x) \right) \hat{p} d_k^\uparrow(a_3x) | P \rangle \\
& \quad = \frac{1}{2} (pz) M \hat{p} N^\uparrow \int \mathcal{D}x e^{-ipz \sum \xi_i a_i} \Xi_5(\xi_i)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

und die Darstellung der Twist-6 Amplitude

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\uparrow(a_1x) C \hat{p} u_j^\downarrow(a_2x) \right) \hat{p} d_k^\uparrow(a_3x) | P \rangle \\
& \quad = -\frac{1}{4} M^2 \hat{z} N^\uparrow \int \mathcal{D}x e^{-ipz \sum \xi_i a_i} \Phi_6(\xi_i).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Die Formulierung der acht unabhängigen Lichtkegel Distributionsamplituden durch Nukleon-Vakuum Matrixelemente chiraler Operatoren ((2.52)- (2.55)) stellt eines der Hauptergebnisse dieser Arbeit dar. In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels soll es nun darum gehen, diesen Satz an Distributionsamplituden im Detail zu untersuchen.

	Lorentz-Struktur	Lichtkegel Projektion	Nomenklatur
Twist-3	$(C\hat{z}) \otimes \hat{z}$	$u_{\uparrow}^+ u_{\downarrow}^+ d_{\uparrow}^+$	$\Phi_3(\xi_i) = [V_1 - A_1](\xi_i)$
Twist-4	$(C\hat{z}) \otimes \hat{p}$	$u_{\uparrow}^+ u_{\downarrow}^+ d_{\downarrow}^-$	$\Phi_4(\xi_i) = [V_2 - A_2](\xi_i)$
	$(C\hat{z}\gamma_{\perp}\hat{p}) \otimes (\gamma^{\perp}\hat{z})$	$u_{\uparrow}^+ u_{\downarrow}^- d_{\downarrow}^+$	$\Psi_4(\xi_i) = [V_3 - A_3](\xi_i)$
	$(C\hat{p}\hat{z}) \otimes \hat{z}$	$u_{\uparrow}^- u_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^+$	$\Xi_4(\xi_i) = [T_3 - T_7 + S_1 + P_1](\xi_i)$
Twist-5	$(C\hat{p}) \otimes \hat{z}$	$u_{\uparrow}^- u_{\downarrow}^- d_{\uparrow}^+$	$\Phi_5(\xi_i) = [V_5 - A_5](\xi_i)$
	$(C\hat{p}\gamma_{\perp}\hat{z}) \otimes (\gamma^{\perp}\hat{p})$	$u_{\uparrow}^- u_{\downarrow}^+ d_{\downarrow}^-$	$\Psi_5(\xi_i) = [V_4 - A_4](\xi_i)$
	$(C\hat{z}\hat{p}) \otimes \hat{p}$	$u_{\uparrow}^+ u_{\uparrow}^- d_{\uparrow}^-$	$\Xi_5(\xi_i) = [T_4 - T_8 + S_2 + P_2](\xi_i)$
Twist-6	$(C\hat{p}) \otimes \hat{p}$	$u_{\uparrow}^- u_{\downarrow}^- d_{\uparrow}^-$	$\Phi_6(\xi_i) = [V_6 - A_6](\xi_i)$

Tabelle 2.4: Die acht unabhängigen Distributionsamplituden der Lichtkegelentwicklung

2.3 Konforme Entwicklung der Distributionsamplituden

Mit dem Ziel eine mathematisch, analytische und damit für die Numerik leichter zugängliche Darstellung der Lichtkegel Distributionsamplituden zu finden, bedient man sich der Methode der konformen Entwicklung. Die konforme Entwicklung ist das feldtheoretische Analogon zur Entwicklung nach Partialwellen in der Quantenmechanik. In beiden Fällen ist die zugrunde liegende Idee, die Ausnutzung der Symmetrie des Problems, um einen Satz getrennter Koordinaten einzuführen. In der Quantenmechanik erlaubt es die Kugelsymmetrie des Potentials, den Lösungsansatz als Produkt aus Radialteil und winkelabhängigen Anteil

zu schreiben und die Evolutionsgleichung für beide Anteile getrennt zu lösen. Alle winkelabhängigen Beiträge werden durch die Kugelwellenfunktionen beschrieben, einer irreduziblen Darstellung der Symmetriegruppe $O(3)$. Der Radialanteil wird wiedergegeben durch die Lösung einer eindimensionalen Schrödinger Gleichung. Einen vergleichbaren Ansatz verwendet man, wenn man die konforme Symmetrie der Lagrangefunktion der QCD [17] ausnutzt, um die Distributionsamplituden zu studieren, da sie es ermöglicht, longitudinale Freiheitsgrade von transversalen zu trennen [18, 19, 16] (u.a.).

Die Abhängigkeit von den longitudinalen Impulsanteilen wird dabei durch einen Satz orthogonaler Polynome berücksichtigt, die eine irreduzible Darstellung der Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ bilden, einer Untergruppe der konformen Gruppe, die die Möbiustransformationen auf dem Lichtkegel beschreibt.

Die transversalen Koordinaten werden durch die Renormierungsskala ersetzt. Die Abhängigkeit ist dabei durch die Renormierungsgruppe gegeben. Da die Renormierungsgruppengleichungen bis zur Genauigkeit führender Logarithmen, von Tree-Level Gegentermen bestimmt werden, sind sie konform symmetrisch. Als eine Konsequenz hieraus mischen bis zu dieser Genauigkeit solche Komponenten in den Distributionsamplituden nicht, die paarweise verschiedenen konformen Spin und synchronisierte konforme Partialwellen besitzen.

Der konforme Spin von Quarks ist definiert als

$$j = \frac{1}{2}(l + s), \quad (2.56)$$

wobei $l = 3/2$ die kanonische Dimension des Quarkfeldes ist und $s = \pm 1/2$ die Spin-Projektion des Quarks auf den Lichtkegel. Als Projektionsoperatoren verwendet man hierfür die gleichen, wie sie in (2.22) genutzt wurden, um die „plus“ und „minus“ Komponenten des Nukleonspinors zu separieren. Die „plus“ Komponente des Quarkfeldes q^+ gehört zum Spin $s = 1/2$ und damit zu $j = 1$, während die „minus“ Komponente q^- die Quantenzahlen $s = -1/2$ und damit $j = 1/2$ besitzt. Für Multiquarkzustände bleibt das klassische Problem der Summation von Spins, mit dem Unterschied, dass im betrachteten Fall keine kompakte Gruppe vorliegt.

Die Distributionsamplitude, mit dem niedrigsten konformen Spin $j_{\min} = j_1 + j_2 + j_3$ des Drei-Quark-Systems ist gegeben durch ([18, 19, 20])

$$\Phi_{\text{AS}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\Gamma[2j_1 + 2j_2 + 2j_3]}{\Gamma[2j_1]\Gamma[2j_2]\Gamma[2j_3]} \xi_1^{2j_1-1} \xi_2^{2j_2-1} \xi_3^{2j_3-1}. \quad (2.57)$$

Beiträge höheren konformen Spins $j = j_{\min} + n$, $n = 1, 2, \dots$, sind dann gegeben durch das Produkt aus Φ_{AS} und einem Satz von Polynomen

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mu) = \underbrace{\Phi_{\text{AS}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}_{j=j_{\min}} \sum_{n,l} \phi_n^l(\mu) \underbrace{\Psi_{n,l}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}_{j=j_{\min}+n} \quad (2.58)$$

, die orthogonal sind bezüglich der Gewichtsfunktion (2.57)

$$\int \mathcal{D}x \Phi_{\text{AS}} \Psi_{n,l}(\xi_i) \Psi_{m,k}(\xi_i) = \delta_{nm} \delta_{lk}. \quad (2.59)$$

Eine passende Basis solcher „konformer Polynome“ ist in [16] allgemein konstruiert worden und für unseren Spezialfall der Darstellung der Distributionen im Raum der Impulsanteile, $1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, ist dieser vollständige Satz von Polynomen gegeben durch

$$\Psi_{n,l}^{(12)3}(\xi_i) = (n+l+4)(\xi_1 + \xi_2)^l P_{n-l}^{(2l+3,1)}(2\xi_3 - 1) C_l^{3/2} \left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 + \xi_2} \right). \quad (2.60)$$

Hier steht der Index (12)3 für die Symmetrie der „up“-Quarks. n bezeichnet die Quantenzahl des konformen Spins, mit $l = 0, \dots, n$. Die Bezeichnungen $P_{n-l}^{(2l+3,1)}$ und $C_l^{3/2}$ stehen für Jacobi- und Gegenbauer-Polynome.

Im Folgenden betrachten wir die konforme Entwicklung der Distributionsamplituden des Nukleons nur in führender und nächster Ordnung des konformen Spins. Diese ersten beiden Ordnungen bezeichnet man auch als „S“- und „P“-Wellen. Im Prinzip könnte die Entwicklung für beliebigen Spin fortgesetzt werden. Ein Grund, weshalb die vollständige Entwicklung nicht durchgeführt werden wird ist der, daß die notwendigen Werkzeuge zur Bestimmung der dann auftretenden zusätzlichen Parameter noch nicht zur Verfügung stehen. Ein zweiter Grund ist dadurch gegeben, daß in die Betrachtung von Beiträgen höheren Spins auch solche von Distributionsamplituden für drei Quarks und einem zusätzlichen Gluon einfließen, was ein Thema für eine weitere Arbeit wäre und hier nicht untersucht werden soll.

2.3.1 Die Leading Twist-3 Distributionsamplitude

Für den führenden Twist existiert nur eine unabhängige Distributionsamplitude, die der Lichtkegelprojektion auf die Struktur $(C\hat{z}) \otimes \hat{z}$ mit drei „plus“ Quarkfeldern zugeordnet werden kann, siehe auch Tabelle 2.4. Die konforme Entwicklung

dieser Amplitude schreibt sich damit als

$$\Phi_3(\xi_i, \mu) = 120 \xi_1 \xi_2 \xi_3 [\phi_3^0(\mu) + \phi_3^-(\mu)(\xi_1 - \xi_2) + \phi_3^+(\mu)(1 - 3\xi_3) + \dots]. \quad (2.61)$$

Hier ist μ die Renormierungsskala. Für die Diskussion der Form der Amplitude ist es nützlich, den Normierungsfaktor $\phi_3^0(\mu)$ aus der Klammer herauszuziehen und (2.61) wie folgt umzuschreiben

$$\Phi_3(\xi_i, \mu) = 120 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \phi_3^0(\mu) \left[1 + \tilde{\phi}_3^-(\mu)(\xi_1 - \xi_2) + \tilde{\phi}_3^+(\mu)(1 - 3\xi_3) + \dots \right]. \quad (2.62)$$

Die Beziehung zwischen $\phi_3^\pm(\mu)$ und $\tilde{\phi}_3^\pm(\mu)$ ist offensichtlich. Die Hauptaussage der konformen Symmetrie ist, wie in der Einführung bereits erwähnt wurde, dass bezüglich der Renormierung die Koeffizienten $\phi^0(\mu)$ und $\phi^\pm(\mu)$ unabhängig voneinander sind, da sie unterschiedlichen konformen Spin besitzen, nämlich $j = 3$ und $j = 4$.

Explizite Berechnungen zur Abhängigkeit von der Renormierungsskala wurden in [5, 21, 22, 23] und [24] durchgeführt und ergaben

$$\phi_3^0(\mu_2) = L^{\frac{2}{3}b} \phi_3^0(\mu_1), \quad L \equiv \frac{\alpha_s(\mu_2)}{\alpha_s(\mu_1)}, \quad (2.63)$$

hierbei ist $b = 11 - 2/3 \cdot N_f$, und

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_3^+(\mu_2) &= \frac{1}{4} \left(3L^{\frac{20}{9}b} + L^{\frac{8}{3}b} \right) \tilde{\phi}_3^+(\mu_1) + \frac{1}{4} \left(L^{\frac{20}{9}b} - L^{\frac{8}{3}b} \right) \tilde{\phi}_3^-(\mu_1), \\ \tilde{\phi}_3^-(\mu_2) &= \frac{3}{4} \left(L^{\frac{20}{9}b} - L^{\frac{8}{3}b} \right) \tilde{\phi}_3^+(\mu_1) + \frac{1}{4} \left(L^{\frac{20}{9}b} + 3L^{\frac{8}{3}b} \right) \tilde{\phi}_3^-(\mu_1). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Numerisch sind diese Koeffizienten mittels der Methode der QCD Summenregeln abgeschätzt worden ([12, 13, 15, 25]),

$$\begin{aligned} \phi_3^0(\mu = 1 \text{ GeV}) &= (5.3 \pm 0.5) \times 10^{-3} \text{ GeV}^2, \\ \tilde{\phi}_3^+(\mu = 1 \text{ GeV}) &= 1.1 \pm 0.3, \\ \tilde{\phi}_3^-(\mu = 1 \text{ GeV}) &= 4.0 \pm 1.5. \end{aligned} \quad (2.65)$$

In den Modellen von ([12, 13, 15, 25]) wurden auch Beiträge von Polynomen zweiter Ordnung mit in die Berechnungen einbezogen, die zu den Operatoren mit konformen Spin-5 in Beziehung stehen. Die Abschätzungen der zugehörigen Koeffizienten sind bei dieser Erweiterung weniger verlässlich und können nur mit einem großen Fehler angegeben werden.

2.3.2 Die Amplituden höheren Twists

Die konforme Entwicklung der Amplituden höheren Twists, welche in Unterkapitel 2.2 definiert wurden, ist ebenfalls direkt zu berechnen. Mit Hilfe des verallgemeinerten Ausdrucks in (2.57) erhält man für die Amplituden vom Twist-4:

$$\begin{aligned}\Phi_4(\xi_i) &= 24\xi_1\xi_2 [\phi_4^0 + \phi_4^-(\xi_1 - \xi_2) + \phi_4^+(1 - 5\xi_3)] , \\ \Psi_4(\xi_i) &= 24\xi_1\xi_3 [\psi_4^0 + \psi_4^-(\xi_1 - \xi_3) + \psi_4^+(1 - 5\xi_2)] , \\ \Xi_4(\xi_i) &= 24\xi_2\xi_3 [\chi_4^0 + \chi_4^-(\xi_2 - \xi_3) + \chi_4^+(1 - 5\xi_1)] ,\end{aligned}\tag{2.66}$$

für die Twist-5 Amplituden:

$$\begin{aligned}\Phi_5(\xi_i) &= 6\xi_3 [\phi_5^0 + \phi_5^-(\xi_1 - \xi_2) + \phi_5^+(1 - 2\xi_3)] , \\ \Psi_5(\xi_i) &= 6\xi_2 [\psi_5^0 + \psi_5^-(\xi_1 - \xi_3) + \psi_5^+(1 - 2\xi_2)] , \\ \Xi_5(\xi_i) &= 6\xi_1 [\chi_5^0 + \chi_5^-(\xi_2 - \xi_3) + \chi_5^+(1 - 2\xi_1)] ,\end{aligned}\tag{2.67}$$

und für Twist-6:

$$\Phi_6(\xi_i) = 2 [\phi_6^0 + \phi_6^-(\xi_1 - \xi_2) + \phi_6^+(1 - 3\xi_3)] .\tag{2.68}$$

Mit der Entwicklung der sieben Funktion höheren Twists erhalten wir zusätzlich 21 unbestimmte Parameter. Der nächste Schritt besteht nun darin zu bestimmen, wieviele dieser Parameter tatsächlich unabhängig sind und welche über Bewegungsgleichungen zueinander in Beziehung stehen.

Einen Ansatzpunkt bietet hier die Normierung der Distributionsamplituden, denn die Normierung und damit die asymptotischen Wellenfunktionen werden über die Matrix-Elemente von lokalen Drei-Quark-Operatoren ohne Ableitungen bestimmt. Auf diese lokalen Matrix-Elemente kann nun wieder der Formalismus der allgemeinsten Klassifizierung angewandt werden. Die Zerlegung nach Lorentz-Strukturen eines solchen lokalen Matrixelementes ist sehr viel einfacher als die allgemeinste Klassifizierung (2.19) und wird durch vier Strukturen wiedergegeben.

$$\begin{aligned}4\langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i(0) u_\beta^j(0) d_\gamma^k(0) | N, P \rangle \\ = \mathcal{V}_1^0 (\hat{P}C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_3^0 M (\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 N)_\gamma \\ + \mathcal{T}_1^0 (P^\nu i\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_3^0 M (\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} \gamma_5 N)_\gamma\end{aligned}\tag{2.69}$$

Die Isospinrelation reduziert analog zu (2.36) die vier freien Parameter um einen, da sich aus ihr $\mathcal{V}_1^0 = \mathcal{T}_1^0$ ableiten läßt.

Die drei verbleibenden Parameter sind schon seit längerem bekannt und werden über Abschätzungen der folgenden Matrixelemente festgelegt:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \epsilon^{ijk} [u^i(0) C \hat{z} u^j(0)] \gamma_5 \hat{z} d^k(0) | P \rangle &= f_N p z \hat{z} N(P), \\ \langle 0 | \epsilon^{ijk} [u^i(0) C \gamma_\mu u^j(0)] \gamma_5 \gamma^\mu d^k(0) | P \rangle &= \lambda_1 MN(P), \\ \langle 0 | \epsilon^{ijk} [u^i(0) C \sigma_{\mu\nu} u^j(0)] \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} d^k(0) | P \rangle &= \lambda_2 MN(P). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Der Parameter $f_N = \mathcal{V}_1^0$ geht bereits in die Amplitude vom Twist-3 ein und bestimmt dort die Normierung (2.65). Die anderen zwei Parameter $\lambda_1 = (\mathcal{V}_1^0 - 4\mathcal{V}_3^0)$ und $\lambda_2 = 6(\mathcal{V}_1^0 - 4\mathcal{T}_3^0)$ entsprechen den Kopplungskonstanten für die Kopplung des Nukleons and die zwei möglichen Felder zur Beschreibung des Nukleonstromes. Letztere fanden vielfache Anwendung im Zusammenhang mit der Methode der QCD Summenregeln. Der Operator zu λ_1 wurde in [26, 27] eingeführt, während der Operator zu λ_2 zuerst in [28, 29] betrachtet wurde.

In Abschnitt 3.1 von Kapitel 3 werden die Berechnungen der Abschätzungen für λ_1 und λ_2 mittels QCD Summen Regeln ausführlich dargelegt. Die Ergebnisse der Abschätzungen lauten:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mu = 1 \text{ GeV}) &= - (2.7 \pm 0.9) \times 10^{-2} \text{ GeV}^2, \\ \lambda_2(\mu = 1 \text{ GeV}) &= (5.1 \pm 1.9) \times 10^{-2} \text{ GeV}^2. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Die Anomalen Dimensionen sind für beide Ströme gleich [30].

$$\lambda_1(\mu_2) = L^{\frac{2}{5}} \lambda_1(\mu_1), \quad \lambda_2(\mu_2) = L^{\frac{2}{5}} \lambda_2(\mu_1). \quad (2.72)$$

Zu beachten ist dabei, daß das globale Vorzeichen bei der Bestimmung der Vakuum-Nukleon Matrixelemente unbestimmt ist, da es noch von einer beliebigen globalen Phase der Nukleon Wellenfunktion abhängt. Die relativen Vorzeichen zwischen den Kopplungskonstanten f_N , λ_1 und λ_2 sind dagegen wohldefiniert und können mittels der korrekten Wahl nichtdiagonaler Korrelationsfunktionen ermittelt werden. Einzelheiten hierzu finden sich in Abschnitt 3.1.

Wir wählen f_N reell und das Vorzeichen positiv, woraus folgt, daß das Vorzeichen für λ_1 negativ und für λ_2 positiv ist. Der Unterschied in den relativen Vorzeichen zwischen λ_1 und λ_2 ist bereits aus [29] bekannt. Das negative relative Vorzeichen zwischen f_N und λ_1 ist ein neues Ergebnis.

Diejenigen Koeffizienten, die in den Gleichungen (2.66), (2.67), (2.68) dem führenden konformen Spin zugeordnet werden können, schreiben sich damit in Abhängigkeit von $f_N, \lambda_1, \lambda_2$

$$\begin{aligned}\phi_3^0 = \phi_6^0 = f_N, & \quad \phi_4^0 = \phi_5^0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + f_N), \\ \chi_4^0 = \chi_5^0 = \frac{1}{6}\lambda_2, & \quad \psi_4^0 = \psi_5^0 = \frac{1}{2}(f_N - \lambda_1).\end{aligned}\tag{2.73}$$

Es zeigt sich, daß die Normierung der Twist-3 und Twist-6 Amplituden gleich ist und ähnliches gilt für die Amplituden zu Twist-4 und Twist-5. Die Konstanten $\phi_{4,5}^0$ und $\psi_{4,5}^0$ enthalten sowohl das Matrix-Element führenden Twists f_N , als auch einen Beitrag proportional zum höheren Twist $\sim \lambda_1$. Ersteres ist analog zum Beitrag vom Wazura-Wilzek-Typ zu den Distributionsamplituden höheren Twists, wie sie in [31, 32] für das ρ -Meson untersucht wurden und letztere definieren höhere Twistkorrekturen.

Auffällig ist dabei vor allem, der Größenvergleich der Kopplungskonstanten $\lambda_1, \lambda_2 \gg f_N$. Das Ergebnis zeigt, dass die Matrix-Elemente von Drei-Quark Operatoren höheren Twists numerisch groß sind im Vergleich zum führenden Twist.

Die verbleibenden Beiträge der nächsten Ordnung im konformen Spin werden ausgedrückt durch Operatoren mit einer auf die Quarkfelder wirkenden Ableitung. Durch Anwenden der gleichen Schritte, wie zur Bestimmung der Beiträge des führenden Twists, erhält man 14 unbekannte Parameter, deren Zahl sich über die Isospin Symmetrie und Ausnutzung von Bewegungsgleichungen auf 5 dimensionslose Parameter $V_1^d, A_1^u, f_1^d, f_2^d$ und f_1^u reduzieren läßt (siehe Abschnitt 3.1). Definiert sind diese fünf Parameter wie folgt

$$\begin{aligned}\langle 0 | [u(0)C\hat{x}u(0)] \gamma_5 \hat{x} [ix\vec{D}d(0)] | P \rangle &= f_N V_1^d(px)^2 \hat{x} N(P), \\ \langle 0 | [u(0)C\hat{x}\gamma_5 ix\overleftrightarrow{D}u(0)] \hat{x} d(0) | P \rangle &= -f_N A_1^u(px)^2 \hat{x} N(P), \\ \langle 0 | [u(0)C\gamma_\mu u(0)] \gamma_5 \gamma^\mu [ix\vec{D}d(0)] | P \rangle &= \lambda_1 f_1^d(px) M \hat{x} N(P), \\ \langle 0 | [u(0)C\sigma_{\mu\nu} u(0)] \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} \hat{x} [ix\vec{D}d(0)] | P \rangle &= -\lambda_2 f_2^d(px) M \hat{x} N(P), \\ \langle 0 | [u(0)C\gamma_\mu \gamma_5 ix\overleftrightarrow{D}u(0)] \gamma^\mu \hat{x} d(0) | P \rangle &= -\lambda_1 f_1^u(px) M \hat{x} N(P).\end{aligned}\tag{2.74}$$

Hier haben wir die links-rechts Ableitung abgekürzt durch $ix\overleftrightarrow{D} = ix(\vec{D} - \overleftarrow{D})$ und die Farbindizes weggelassen. Die ersten beiden Matrixelemente gehören noch

zum führenden Twist-3 und sind schon seit längerem bekannt [12, 13, 14, 15]⁵

$$\begin{aligned} V_1^d(\mu = 1 \text{ GeV}) &= 0.23 \pm 0.03, \\ A_1^u(\mu = 1 \text{ GeV}) &= 0.38 \pm 0.15 . \end{aligned} \quad (2.75)$$

Wir haben diese Abschätzungen bereits in Gleichung (2.65) verwandt, zusammen mit den Beziehungen

$$\tilde{\phi}_3^- = \frac{21}{2} A_1^u \quad \text{und} \quad \tilde{\phi}_3^+ = \frac{7}{2} (1 - 3V_1^d). \quad (2.76)$$

die verbleibenden drei Parameter gehören ausschließlich zu Beiträgen höheren Twists und eine Erläuterung zu ihrer Abschätzung mittels QCD Summenregeln findet sich in Abschnitt 3.1. Numerisch erhielten wir die folgenden Werte

$$\begin{aligned} f_1^d(\mu = 1 \text{ GeV}) &= 0.60 \pm 0.2, \quad , \\ f_1^u(\mu = 1 \text{ GeV}) &= 0.15 \pm 0.06 \quad , \\ f_2^d(\mu = 1 \text{ GeV}) &= 0.22 \pm 0.15 . \end{aligned} \quad (2.77)$$

Die noch unbestimmten Koeffizienten der konformen Entwicklungen (2.66), (2.67) und (2.68) können durch die bestimmten nichtperturbativen Parameter wie folgt ausgedrückt werden.

Für Twist-4:

$$\begin{aligned} \phi_4^- &= \frac{5}{4} (\lambda_1 (1 - 2f_1^d - 4f_1^u) + f_N (2A_1^u - 1)) , \\ \phi_4^+ &= \frac{1}{4} (\lambda_1 (3 - 10f_1^d) - f_N (10V_1^d - 3)) , \\ \psi_4^- &= -\frac{5}{4} (\lambda_1 (2 - 7f_1^d + f_1^u) + f_N (A_1^u + 3V_1^d - 2)) , \\ \psi_4^+ &= -\frac{1}{4} (\lambda_1 (-2 + 5f_1^d + 5f_1^u) + f_N (2 + 5A_1^u - 5V_1^d)) , \\ \chi_4^- &= \frac{5}{16} \lambda_2 (4 - 15f_2^d) , \\ \chi_4^+ &= \frac{1}{16} \lambda_2 (4 - 15f_2^d) , \end{aligned} \quad (2.78)$$

⁵Bezeichnungen in diesen Papieren: $V_1^d = V^{(0,0,1)}$ und $A_1^u = A^{0,1,0}$

für Twist-5:

$$\begin{aligned}
\phi_5^- &= \frac{5}{3} (\lambda_1 (f_1^d - f_1^u) + f_N (2A_1^u - 1)), \\
\phi_5^+ &= -\frac{5}{6} (\lambda_1 (4f_1^d - 1) + f_N (4V_1^d + 3)), \\
\psi_5^- &= \frac{5}{3} (\lambda_1 (f_1^d - f_1^u) + f_N (2 - A_1^u - 3V_1^d)), \\
\psi_5^+ &= -\frac{5}{6} (\lambda_1 (-1 + 2f_1^d + 2f_1^u) + f_N (5 + 2A_1^u - 2V_1^d)), \\
\chi_5^- &= -\frac{5}{4} \lambda_2 f_2^d, \\
\chi_5^+ &= \frac{5}{36} \lambda_2 (2 - 9f_2^d),
\end{aligned} \tag{2.79}$$

und für Twist-6:

$$\begin{aligned}
\phi_6^- &= \frac{1}{2} (\lambda_1 (1 - 4f_1^d - 2f_1^u) + f_N (1 + 4A_1^u)), \\
\phi_6^+ &= -\frac{1}{2} (\lambda_1 (1 - 2f_1^d) + f_N (4V_1^d - 1)).
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Mit der Konstruktion dieser Relationen ist der Aufbau der Nukleon Distributionsamplituden bis zu unserer Genauigkeit vollständig. Man beachte dabei besonders, dass die Parameter aus Gleichung (2.71) und (2.75) über den QCD Summenregel-Zugang verknüpft sind und aus diesem Grund die gegebenen Fehler in den Summen (2.78) - (2.80) nicht aufaddiert werden dürfen. Die Genauigkeit der QCD Summenregel Berechnung aller Koeffizienten in den Distributionsamplituden wird auf 50% geschätzt. Die numerischen Werte für die Entwicklungsparameter der konformen Entwicklung sind in Tabelle 2.5 aufgelistet.

Die numerischen Werte der 8 nichtperturbativen Parameter f_N , λ_1 , λ_2 , V_1^d , A_1^u , f_1^d , f_2^d und f_1^u sind, wie bereits erwähnt, über Summenregeln bestimmt worden. Für den asymptotischen Grenzfall $Q^2 \rightarrow \infty$ verschwinden alle Beiträge höheren Spins in der konformen Entwicklung. Für diesen Fall erhält man einen zweiten Satz von numerischen Werten für die nichtperturbativen Parameter V_1^d , A_1^u , f_1^d und f_1^u der sich aus dem Verschwinden der Beziehungen (2.76), (2.78), (2.79) und (2.80) bestimmen lässt. Im asymptotischen Limes hat der Parameter f_2^d keinen eindeutigen Wert und die Parameter f_N , λ_1 und λ_2 bestimmen die Koeffizienten führender Ordnung, weshalb ihre Werte nicht angepasst werden. Eine Zusammenfassung der numerischen Werte für die 8 nichtperturbativen Parameter findet sich in Tabelle 2.6.

	ϕ_i^0	ϕ_i^-	ϕ_i^+
Twist-3: $i = 3$	0.53	2.11	0.57
Twist-4: $i = 4$	-1.08	3.22	2.12
Twist-5: $i = 5$	-1.08	-2.01	1.42
Twist-6: $i = 6$	0.53	3.09	-0.25
	ψ_i^0	ψ_i^-	ψ_i^+
Twist-3: $i = 3$			
Twist-4: $i = 4$	1.61	-6.13	0.99
Twist-5: $i = 5$	1.61	-0.98	-0.99
Twist-6: $i = 6$			
	χ_i^0	χ_i^-	χ_i^+
Twist-3: $i = 3$			
Twist-4: $i = 4$	0.85	2.79	0.56
Twist-5: $i = 5$	0.85	-0.95	0.46
Twist-6: $i = 6$			

Tabelle 2.5: Numerische Werte der in (2.65) (2.66) (2.67) (2.68) definierten Entwicklungsparameter, gegeben in Einheiten von 10^{-2} GeV^2 .

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch einen Blick auf die grafische Darstellung der acht unabhängigen Distributionsamplituden (2.62), (2.66), (2.67) und (2.68) werfen. In Abhängigkeit von den Parametern ξ_i , $i = 1, 2, 3$ für die Impulsverteilung auf die Valenzquarks innerhalb des Protons, lassen sich die speziellen Verteilungen, die jeweils von den acht Distributionsamplituden bestimmt werden, unter der Bedingung $\sum_i \xi_i = 1$ darstellen. Für die Darstellungen wurden die Werte der Nichtperturbativen Entwicklungsparameter verwendet, die über Summenregeln abgeschätzt wurden (Tabelle 2.6).

	f_N	λ_1
SR	$0.0053 \pm 0.005 \text{ GeV}^2$	$-0.027 \pm 0.09 \text{ GeV}^2$
ASY	$0.0053 \pm 0.005 \text{ GeV}^2$	$-0.027 \pm 0.09 \text{ GeV}^2$
	λ_2	V_1^d
SR	$0.051 \pm 0.019 \text{ GeV}^2$	0.23 ± 0.03
ASY	$0.051 \pm 0.019 \text{ GeV}^2$	$1/3$
	A_1^u	f_1^d
SR	0.38 ± 0.15	0.6 ± 0.2
ASY	0	$3/10$
	f_2^d	f_1^u
SR	0.15 ± 0.06	0.22 ± 0.15
ASY	X	$1/10$

Tabelle 2.6: Summenregelwerte (SR) und asymptotische Werte (ASY) der 8 nicht-perturbativen Parameter.

Physikalisch geben die Abbildungen 2.3, 2.4, 2.5 die seltenen Partonenverteilungen wieder, die als Beiträge höheren Twists eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons spielen. Die Abbildung 2.2 zeigt die seit langem bekannte Partonenverteilung des Beitrags führenden Twists, z.B. [12].

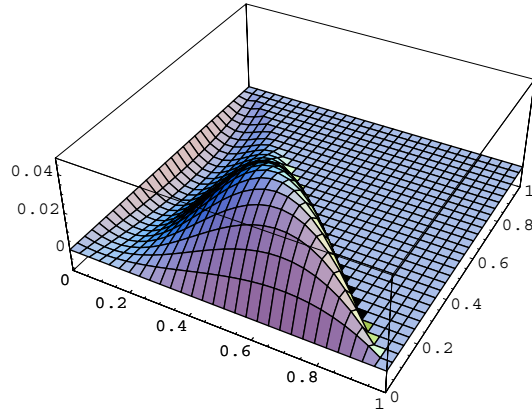


Abbildung 2.2: Die Amplitude vom Twist 3

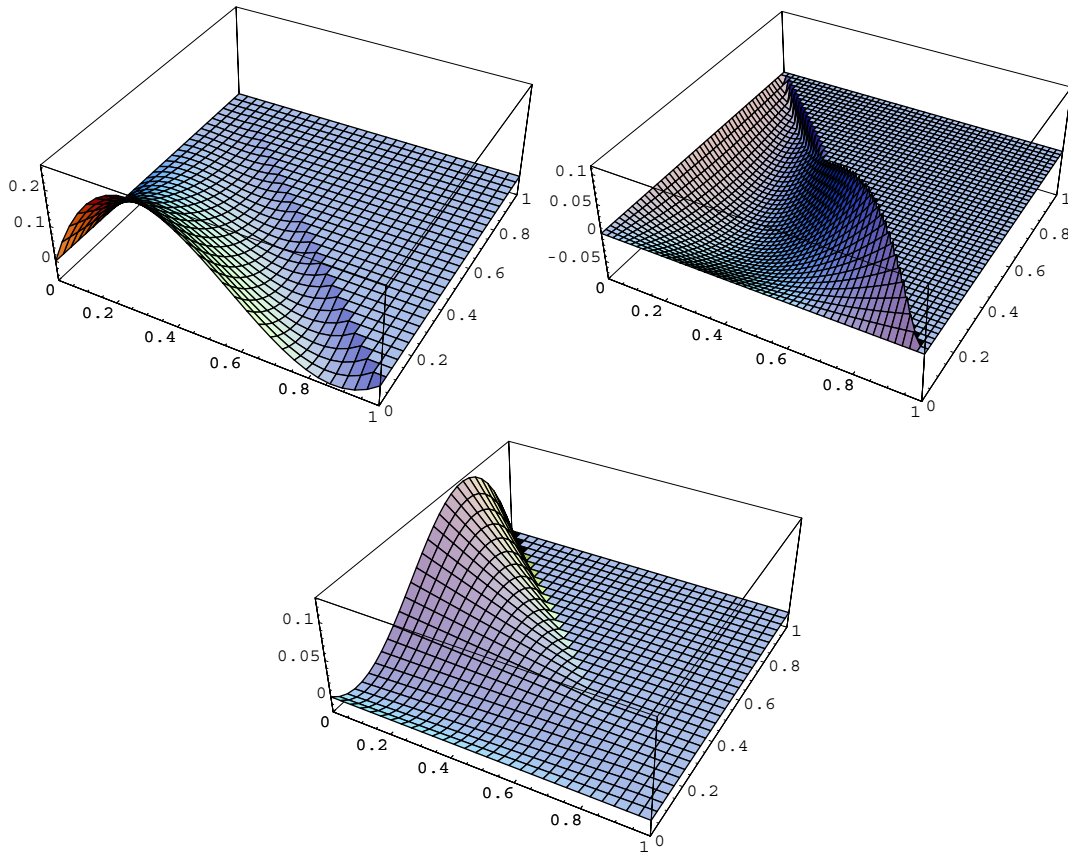


Abbildung 2.3: Die Amplituden vom Twist 4

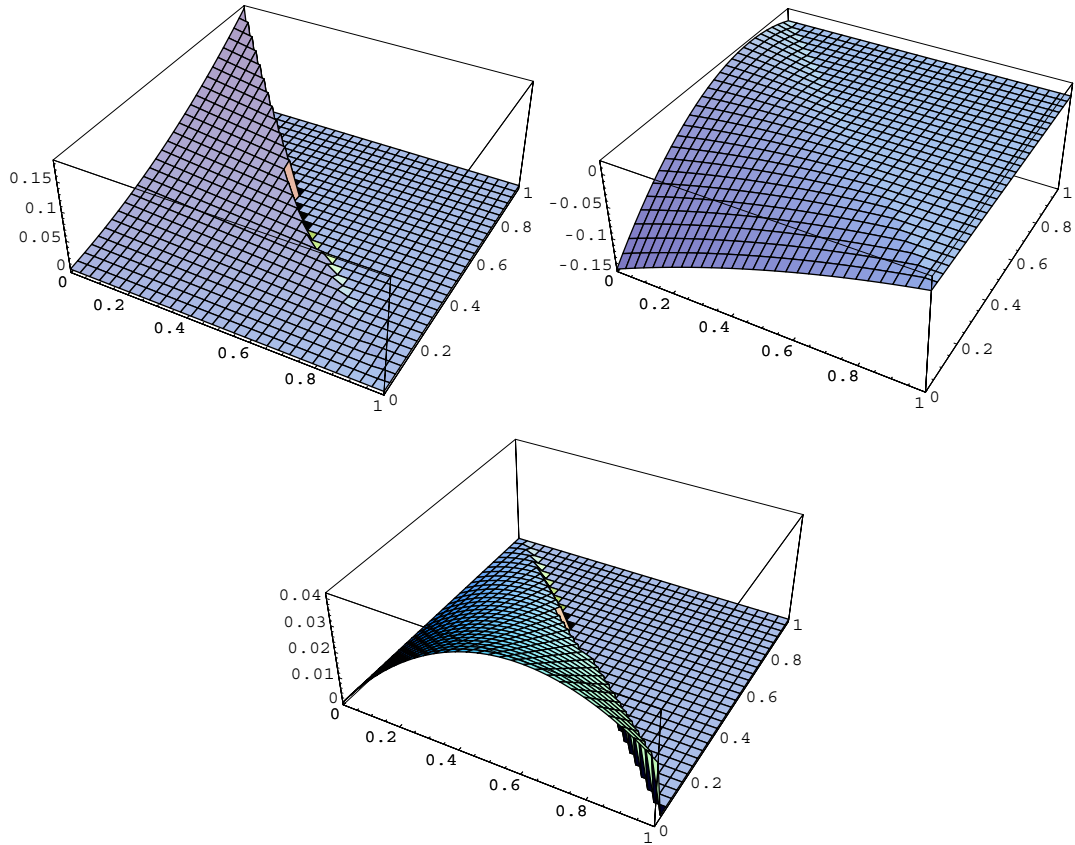


Abbildung 2.4: Die Amplituden vom Twist 5

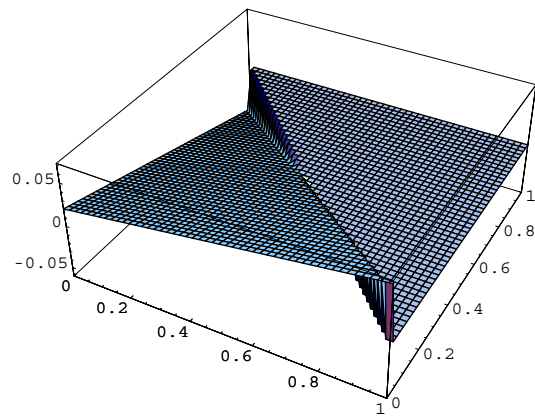


Abbildung 2.5: Die Amplitude vom Twist 6

Kapitel 3

Detailbetrachtungen zur Wellenfunktion

In diesem Kapitel werden all diejenigen Betrachtungen und Rechnungen zusammengefasst, die den Text im vorhergehenden Kapitel 2 nur unnötig belastet hätten und zu speziell sind als dass sie in einem allgemeinen Anhang untergebracht werden könnten.

3.1 Bestimmung der nichtperturbativen Parameter

In den Abschnitten 2.3.1 und 2.3.2 wurde gezeigt, dass die Normierung der asymptotischen Distributionsamplituden aller betrachteten Twists die Einführung dreier unabhängiger Parameter f_N , λ_1 , λ_2 zur Folge hat.

Die Betrachtung der nächsten Korrekturen zu den asymptotischen Distributionsamplituden („P“-Wellen), welche durch konforme Drei-Quark-Operatoren gegeben sind, die eine zusätzliche Ableitung enthalten, führen auf fünf weitere Parameter, die durch die in (2.70) und (2.74) definierten Parameter der reduzierten Matrixelemente bestimmt werden können.

Im Folgenden sollen diese Korrekturen und ihre Abhängigkeit von nichtperturbativen Parametern näher untersucht werden, um anschließend über QCD Summenregeln die Matrixelemente höheren Twists abzuschätzen. Zum Teil finden sich die Berechnungen via Summenregeln in der Literatur ([26, 29, 33]) und zum Teil

sind sie neu.

3.1.1 Die Bewegungsgleichungen

Die Koeffizienten der „P“-Wellen Beiträge in der konformen Entwicklung der Distributionsamplituden sind gegeben durch Matrixelemente von Operatoren, die eine Ableitung enthalten. Für den Fall, dass diese Ableitung auf das „down“-Quark wirkt, verändert sich die allgemeinste Zerlegung des Matrixelementes zu

$$\begin{aligned}
& 4\langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i(0) u_\beta^j(0) [iD_\lambda d_\gamma]^k(0) | N, P \rangle \\
&= \mathcal{V}_1^d P_\lambda \left(\hat{P} C \right)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_2^0 M \left(\hat{P} C \right)_{\alpha\beta} (\gamma_\lambda \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_3^d P_\lambda M (\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{V}_4^0 M^2 (\gamma_\lambda C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_5^0 M^2 (\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} (i\sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{T}_1^d P_\lambda (P^\nu i\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_2^0 M (P^\nu i\sigma_{\lambda\nu} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{T}_3^d P_\lambda M (\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_4^0 M (P_\nu \sigma^{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma_{\mu\lambda} \gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{T}_5^0 M^2 (i\sigma_{\mu\lambda} C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{T}_7^0 M^2 (\sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\sigma^{\mu\nu} \gamma_\lambda \gamma_5 N)_\gamma. \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Insgesamt sind es 11 Parameter, die in dieser Entwicklung auftreten.

Wirkt eine Ableitung auf die „up“-Quarks, so führt dieses in der Entwicklung auf unter Transposition antisymmetrische Strukturen von γ -Matrizen

$$\begin{aligned}
& 4\langle 0 | \epsilon^{ijk} u_\alpha^i(0) i\overleftrightarrow{D}_\lambda u_\beta^j(0) d_\gamma^k(0) | N, P \rangle \\
&= \mathcal{S}_1^u P_\lambda M C_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{S}_2^0 M^2 C_{\alpha\beta} (\gamma_\lambda \gamma_5 N)_\gamma + \\
&\quad + \mathcal{P}_1^u P_\lambda M (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma + \mathcal{P}_2^0 M^2 (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\gamma_\lambda N)_\gamma + \\
&\quad + \mathcal{A}_1^u P_\lambda \left(\hat{P} \gamma_5 C \right)_{\alpha\beta} N_\gamma + \mathcal{A}_2^0 M \left(\hat{P} \gamma_5 C \right)_{\alpha\beta} (\gamma_\lambda N)_\gamma + \mathcal{A}_3^u P_\lambda M (\gamma_\mu \gamma_5 C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{A}_4^0 M^2 (\gamma_\lambda \gamma_5 C)_{\alpha\beta} N_\gamma + \mathcal{A}_5^0 M^2 (\gamma^\mu \gamma_5 C)^{\alpha\beta} (i\sigma_{\mu\lambda} N)_\gamma, \tag{3.2}
\end{aligned}$$

was auf 9 weitere Parameter führt. Insgesamt sind es folglich 20 Unbekannte. Die Bewegungsgleichungen liefern die Bedingungen, die es ermöglichen, die Zahl der

Freiheitsgrade einzuschränken,

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} u^i(0) C \gamma_\rho u^j(0) \gamma^\lambda [iD_\lambda d_\gamma]^k(0) | N, P \rangle = 0, \\
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} u^i(0) C \gamma^\lambda u^j(0) [iD_\lambda d_\gamma]^k(0) | N, P \rangle = P_\lambda \langle 0 | \epsilon^{ijk} u^i(0) C \gamma_\lambda u^j(0) d_\gamma^k(0) | N, P \rangle, \\
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} u^i(0) C \sigma_{\alpha\beta} u^j(0) \gamma^\lambda [iD_\lambda d_\gamma]^k(0) | N, P \rangle = 0, \\
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} u^i(0) C i \sigma_{\alpha\beta} u^j(0) [iD^\beta d_\gamma]^k(0) | N, P \rangle \\
& \quad = P^\beta \langle 0 | \epsilon^{ijk} u^i(0) C i \sigma_{\alpha\beta} u^j(0) d^k(0) | N, P \rangle \\
& \quad \quad - \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left[u(0) C i \overset{\leftrightarrow}{D}_\alpha u(0) \right]^{ij} d_\gamma^k(0) | N, P \rangle, \\
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} u^i(0) C i \gamma_5 \sigma_{\alpha\beta} u^j(0) [iD^\beta d_\gamma]^k(0) | N, P \rangle \\
& \quad = P^\beta \langle 0 | \epsilon^{ijk} u^i(0) C \gamma_5 i \sigma_{\alpha\beta} u^j(0) d^k(0) | N, P \rangle \\
& \quad \quad - \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left[u(0) C \gamma_5 i \overset{\leftrightarrow}{D}_\alpha u(0) \right]^{ij} d_\gamma^k(0) | N, P \rangle. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Aus diesen Bedingungen lassen sich Beziehungen zwischen den einzelnen Parametern ableiten

$$\begin{aligned}
& \mathcal{V}_1^d = 4\mathcal{V}_2^0 + 2\mathcal{V}_3^d, & -3\mathcal{V}_5^0 = \mathcal{V}_3^d + \mathcal{V}_4^0, \\
& \mathcal{V}_1^0 - \mathcal{V}_3^0 = \mathcal{V}_1^d - \mathcal{V}_3^d + 4\mathcal{V}_4^0 - \mathcal{V}_2^0, \\
& 0 = \mathcal{T}_3^d + \mathcal{T}_5^0, & \mathcal{T}_2^0 = -\mathcal{T}_1^d + 4\mathcal{T}_3^d + 3\mathcal{T}_4^0, \\
& \mathcal{T}_1^0 - 2\mathcal{T}_3^0 - \mathcal{S}_2^0 = \mathcal{T}_1^d - 2\mathcal{T}_3^d - \mathcal{T}_4^0 + 3\mathcal{T}_5^0 + 6\mathcal{T}_7^0, \\
& \mathcal{T}_1^0 - 2\mathcal{T}_3^0 - \mathcal{S}_1^u = \mathcal{T}_1^d - 3\mathcal{T}_2^0 - 2\mathcal{T}_3^d - \mathcal{T}_4^0, \\
& -2\mathcal{T}_3^d + 2\mathcal{T}_4^0 = -2\mathcal{T}_3^0 - \mathcal{P}_1^u, & 2\mathcal{T}_3^0 - \mathcal{P}_2^0 = 2\mathcal{T}_3^d - 2\mathcal{T}_4^0 - 6\mathcal{T}_7^0. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

In (3.4) ergeben sich die zwei Beziehungen der ersten Zeile aus der ersten Zeile von (3.3), die Beziehungen der zweiten Zeile aus der zweiten Zeile von (3.3), die der dritten aus der dritten, die der vierten und fünften aus der vierten von (3.3) und die Beziehungen der letzten Zeile von (3.4) aus der letzten Zeile von (3.3).

Analog zu diesem Vorgehen lassen sich die Bedingungen aus den Bewegungsglei-

chungen für die axialen Strukturen bestimmen

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left[u(0) C \gamma^\rho \gamma_5 \overleftrightarrow{D}_\rho u(0) \right]^{ij} d_\gamma^k(0) | N, P \rangle = 0, \\
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left[u(0) C \left\{ \gamma_\lambda i \overleftrightarrow{D}_\rho - \gamma_\rho i \overleftrightarrow{D}_\lambda \right\} \gamma_5 u(0) \right]^{ij} d_\gamma^k(0) | N, P \rangle \\
& = \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left[u(0) C \frac{i}{2} \left\{ \sigma_{\lambda\rho} \gamma^\alpha i \overleftrightarrow{D}_\alpha + \gamma^\alpha \sigma_{\lambda\rho} i \overleftrightarrow{D}_\alpha \right\} \gamma_5 u(0) \right]^{ij} d_\gamma^k(0) | N, P \rangle \\
& = -i \epsilon_{\lambda\rho\alpha\delta} \left[P^\alpha \langle 0 | \epsilon^{ijk} u^i(0) C \gamma^\delta u^j(0) d_\gamma^k(0) | N, P \rangle \right. \\
& \quad \left. - \langle 0 | \epsilon^{ijk} u^i(0) C \gamma^\delta u^j(0) [i D^\alpha d_\gamma]^k(0) | N, P \rangle \right], \tag{3.5}
\end{aligned}$$

aus denen sich die wiederum die folgenden Beziehungen zwischen den Parametern ableiten lassen

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}_1^u + \mathcal{A}_3^u + \mathcal{A}_2^0 + 4\mathcal{A}_4^0 = 0, \\
& \mathcal{A}_3^u - \mathcal{A}_2^0 = \mathcal{V}_2^0 + \mathcal{V}_3^0 - \mathcal{V}_3^d, \quad 2\mathcal{A}_5^0 = \mathcal{V}_2^0 + \mathcal{V}_3^0 - 2\mathcal{V}_5^0 - \mathcal{V}_3^d. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Auch in (3.6) ergibt sich die Beziehung in der ersten Zeile aus der Bedingung der ersten Zeile in (3.5) usw.. Kombiniert man jetzt die Beziehungen aus den Bewegungsgleichungen mit den Isospin-Relationen aus Gleichung (2.46), so ergibt sich ein überbestimmter Satz von 20 Gleichungen. Mit der Wahl von fünf Parametern \mathcal{V}_1^d , \mathcal{A}_1^u , \mathcal{V}_3^d , \mathcal{A}_3^u und \mathcal{T}_3^d als unabhängige Parameter, löst man die 20 Gleichungen und erhält Relationen für die verbleibenden Parameter in Abhängigkeit von den fünf gewählten

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_2^0 &= \frac{1}{4} (\mathcal{V}_1^d - 2\mathcal{V}_3^d), & \mathcal{V}_4^0 &= \frac{1}{16} (4\mathcal{V}_1^0 - 3\mathcal{V}_1^d - 4\mathcal{V}_3^0 + 2\mathcal{V}_3^d), \\
\mathcal{V}_5^0 &= \frac{1}{48} (-4\mathcal{V}_1^0 + 3\mathcal{V}_1^d + 4\mathcal{V}_3^0 - 18\mathcal{V}_3^d), & \mathcal{A}_2^0 &= \mathcal{A}_3^u - \frac{\mathcal{V}_1^d}{4} - \mathcal{V}_3^0 + \frac{3\mathcal{V}_3^d}{2}, \\
\mathcal{A}_4^0 &= \frac{1}{16} (-4\mathcal{A}_1^u - 8\mathcal{A}_3^u + \mathcal{V}_1^d + 4\mathcal{V}_3^0 - 6\mathcal{V}_3^d), \\
& & \mathcal{A}_5^0 &= \frac{1}{48} (4\mathcal{V}_1^0 + 3\mathcal{V}_1^d + 20\mathcal{V}_3^0 - 18\mathcal{V}_3^d), \\
\mathcal{T}_2^0 &= \frac{1}{8} (\mathcal{A}_1^u + 6\mathcal{A}_3^u + 8\mathcal{T}_3^d - \mathcal{V}_1^0 - 2\mathcal{V}_1^d - 6\mathcal{V}_3^0 + 12\mathcal{V}_3^d), & \mathcal{T}_5^0 &= -\mathcal{T}_3^d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_4^0 &= \frac{1}{8} (-\mathcal{A}_1^u + 2\mathcal{A}_3^u - 8\mathcal{T}_3^d + \mathcal{V}_1^0 - 2\mathcal{V}_1^d - 2\mathcal{V}_3^0 + 4\mathcal{V}_3^d) , \\
\mathcal{T}_7^0 &= \frac{1}{96} (3\mathcal{A}_1^u - 6\mathcal{A}_3^u - 16\mathcal{T}_3^0 + 48\mathcal{T}_3^d + \mathcal{V}_1^0 + 6\mathcal{V}_1^d + 6\mathcal{V}_3^0 - 12\mathcal{V}_3^d) , \\
\mathcal{S}_2^0 &= \frac{1}{16} (3\mathcal{A}_1^u + 10\mathcal{A}_3^u - 16\mathcal{T}_3^0 + 16\mathcal{T}_3^d + 9\mathcal{V}_1^0 - 2\mathcal{V}_1^d - 10\mathcal{V}_3^0 + 20\mathcal{V}_3^d) , \\
\mathcal{S}_1^u &= \frac{1}{4} (3\mathcal{A}_1^u + 10\mathcal{A}_3^u - 8\mathcal{T}_3^0 + 16\mathcal{T}_3^d + \mathcal{V}_1^0 - 2\mathcal{V}_1^d - 10\mathcal{V}_3^0 + 20\mathcal{V}_3^d) , \\
\mathcal{P}_1^u &= \frac{1}{4} (\mathcal{A}_1^u - 2\mathcal{A}_3^u - 8\mathcal{T}_3^0 + 16\mathcal{T}_3^d - \mathcal{V}_1^0 + 2\mathcal{V}_1^d + 2\mathcal{V}_3^0 - 4\mathcal{V}_3^d) , \\
\mathcal{P}_2^0 &= \frac{1}{16} (-\mathcal{A}_1^u + 2\mathcal{A}_3^u + 16\mathcal{T}_3^0 - 16\mathcal{T}_3^d + 5\mathcal{V}_1^0 - 2\mathcal{V}_1^d - 2\mathcal{V}_3^0 + 4\mathcal{V}_3^d) , \\
\mathcal{T}_1^d &= \frac{1}{2} (-\mathcal{A}_1^u + \mathcal{V}_1^0 - \mathcal{V}_1^d) .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Die verbleibenden Parameter \mathcal{V}_1^d , \mathcal{A}_1^u , \mathcal{V}_3^d , \mathcal{A}_3^u und \mathcal{T}_3^d können nun durch die reduzierten Matrixelemente der Operatoren (Definition siehe Gleichung (2.74)) ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_1^d &= f_N V_1^d , \quad \mathcal{A}_1^u = f_N A_1^u , \quad \lambda_1 f_1^d = \frac{1}{2} (\mathcal{V}_1^d - 6\mathcal{V}_3^d) , \\
\lambda_1 f_1^u &= \frac{1}{2} (-2\mathcal{A}_1^u - 12\mathcal{A}_3^u + \mathcal{V}_1^d + 4\mathcal{V}_3^0 - 6\mathcal{V}_3^d) , \\
\lambda_2 f_2^d &= 2 (-2\mathcal{A}_3^u - 8\mathcal{T}_3^d + \mathcal{V}_1^d + 2\mathcal{V}_3^0 - 4\mathcal{V}_3^d + 2\mathcal{T}_1^d) .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Die ersten beiden Parameter traten bereits vor 18 Jahren in den Berechnungen zum Twist-3 Beitrag auf und sind bekannt aus [12, 13, 14] und [25]. Die verbleibenden Parameter werden im folgenden Abschnitt bestimmt.

3.1.2 Abschätzungen durch QCD Summenregeln

Begonnen werden soll mit der Abschätzung für die Parameter λ_1 , λ_2 . Die QCD Summenregeln für diese Parameter ergeben sich aus der Darstellung der folgenden Zwei-Punkt Korrelationsfunktion¹ zum einen durch eine Dispersionsrelation

$$i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \eta_i(x) \bar{\eta}_i(0) | 0 \rangle = |\lambda_i|^2 M^2 \frac{(\hat{q} + M)}{M^2 - q^2} + \dots , \tag{3.9}$$

wobei die verwandten lokalen Drei-Quark Operatoren $\langle 0 | \eta_1(0) | P \rangle = M \lambda_1 N(P)$ und $\langle 0 | \eta_2(0) | P \rangle = M \lambda_2 N(P)$ bereits in (2.70) definiert wurden. Die Punkte stehen für weitere angeregte Zustände und das Kontinuum. Zum anderen erhält man

¹Einzelheiten zu QCD Summenregeln finden sich in Anhang E

aus der Operator Produkt Entwicklung durch das Einbeziehen von Vakuumkondensaten bis zur Dimension 6 zusammen mit (3.9) die folgenden Summenregeln [29, 33]:

$$2(2\pi)^4 M^2 |\lambda_1|^2 = \exp(M^2/M_B^2) \left\{ M_B^6 E_3(s_0/M_B^2) + \frac{b}{4} M_B^2 E_1(s_0/M_B^2) + \frac{a^2}{3} \left(4 - \frac{m_0^2}{M_B^2} \right) \right\} \quad (3.10)$$

und

$$2(2\pi)^4 M^2 \frac{|\lambda_2|^2}{6} = \exp(M^2/M_B^2) \left\{ M_B^6 E_3(s_0/M_B^2) + \frac{b}{4} M_B^2 E_1(s_0/M_B^2) \right\}, \quad (3.11)$$

mit

$$E_n(s_0/M_B^2) = 1 - e^{(-s_0/M_B^2)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{s_0}{M_B^2} \right)^k. \quad (3.12)$$

M_B bezeichnet von jetzt ab den Borel Parameter. Als Borelfenster wird der Energiebereich $1 \text{ GeV}^2 \leq M_B^2 \leq 2 \text{ GeV}^2$ angesetzt, zusammen mit der unteren Grenze $\sqrt{s_0} \sim 1.5 \text{ GeV}$ für das Kontinuum. Die numerischen Werte für die Vakuumkondensate sind normiert für den Wert $\mu = 1 \text{ GeV}$ der Renormierungskonstanten [32, 32]:

$$\begin{aligned} a &= - (2\pi)^2 \langle \bar{q}q \rangle \quad \sim 0.55 \text{ GeV}^3, \\ b &= (2\pi)^2 \langle \frac{\alpha_S}{\pi} G^2 \rangle \sim 0.47 \text{ GeV}^4, \\ m_0^2 &= \frac{\langle \bar{q}gGq \rangle}{\langle \bar{q}q \rangle} \quad \sim 0.8 \text{ GeV}^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Damit lassen sich die numerischen Werte der gesuchten Parameter bestimmen:

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= 0.027 \pm 0.009 \text{ GeV}^2 \\ |\lambda_2| &= 0.051 \pm 0.019 \text{ GeV}^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Wie zu sehen ist, bestimmen die Summenregeln nur die Absolutbeträge der Parameter λ_1 und λ_2 . Zur Bestimmung des relativen Vorzeichens betrachten wir die nicht diagonalen Korrelationsfunktionen, die uns auf die relative Phase zwischen zwei verschiedenen Nukleon-Vakuum Matrixelementen führen.

Um das relative Vorzeichen zwischen f_N und λ_1 zu ermitteln, geht man von dem folgenden Korrelator aus

$$i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \varepsilon^{ijk} [u^i(x) C \hat{z} u^j(x)] \gamma_5 \hat{z} d^k(x) \bar{\eta}_1(0) | 0 \rangle = f_N \lambda_1^* M \hat{z} \frac{(\hat{q} + M)}{M^2 - q^2} + \dots \quad (3.15)$$

Bildet man das Verhältnis zwischen den Summenregeln aus Gleichung (3.15) und Gleichung (3.10), so erhält man den Ausdruck

$$\frac{f_N}{\lambda_1} = -\frac{1}{3} \frac{(2M_B^2 E_1(s_0/M_B^2) - m_0^2) aM}{M_B^6 E_3(s_0/M_B^2) + \frac{b}{4} M_B^2 E_1(s_0/M_B^2) + \frac{a^2}{3} \left(4 - \frac{m_0^2}{M_B^2}\right)}, \quad (3.16)$$

welcher reell und negativ ist. Um nicht von der Standardwahl für f_N abzuweichen [12, 13, 14, 25], wurde f_N positiv gesetzt und λ_1 damit negativ.

Als Wert für f_N erhält man aus der angegebenen Summenregel $f_N = 5.6 \times 10^{-3} \text{ GeV}^2$. Dieser Wert ist konsistent mit dem Literaturwert (siehe auch (2.65)).

Eine ähnliche Berechnung der nichtdiagonalen Korrelationsfunktion

$$i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \eta_1(x) \bar{\eta}_2(0) + \eta_2(x) \bar{\eta}_1(0) | 0 \rangle = (\lambda_1 \lambda_2^* + \lambda_2 \lambda_1^*) M^2 \frac{(\hat{q} + M)}{M^2 - q^2} + \dots \quad (3.17)$$

wurde bereits in [29] durchgeführt. Als Summenregel erhielt man

$$\begin{aligned} & -2(2\pi)^4 M^3 (\lambda_1 \lambda_2^* + \lambda_2 \lambda_1^*) \\ & = 2ae^{\frac{M^2}{M_B^2}} \left(12M_B^4 E_2(s_0/M_B^2) - 6m_0^2 M_B^2 E_1(s_0/M_B^2) + \frac{32\alpha_s a^2}{27\pi M_B^2} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

welche ein negatives Vorzeichen zwischen λ_1 und λ_2 aufweist.

Um die verbleibenden drei Parameter höheren Twists f_1^d, f_2^d, f_1^u ² abzuschätzen, bilden wir analog zum bisherigen Vorgehen die Korrelationsfunktionen zwischen den drei zu den Parametern gehörenden Operatoren höheren Twists aus Gleichung (3.10).

²Für die Parameter V_1^d und A_1^u siehe (2.75)

chung (2.74) und $\bar{\eta}_1$ bzw. $\bar{\eta}_2$:

$$\begin{aligned}
& i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \varepsilon^{ijk} (u^i(x) C \gamma_\mu u^j(x)) \gamma_5 \gamma^\mu (iz \vec{D} d)^k(x) \bar{\eta}_1(0) | 0 \rangle \\
& \quad = \frac{f_1^d |\lambda_1|^2 M^2 q \cdot z \hat{q}}{M^2 - q^2} + \dots, \\
& i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | \varepsilon^{ijk} (u(x) C \gamma_\mu \gamma_5 iz \overleftrightarrow{D} u(x))^{ij} \gamma^\mu d^k(x) \bar{\eta}_1(0) | 0 \rangle \\
& \quad = \frac{f_1^u |\lambda_1|^2 M^2 q \cdot z \hat{q}}{M^2 - q^2} + \dots, \\
& i \int d^4x e^{iqx} \varepsilon^{ijk} \langle 0 | (u^i(x) C \sigma_{\mu\nu} u^j(x)) \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} (iz \vec{D} d)^k(x) \bar{\eta}_2(0) | 0 \rangle \\
& \quad = \frac{f_2^d |\lambda_2|^2 M^2 q \cdot z \hat{q}}{M^2 - q^2} + \dots.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Die Punkte stehen für angeregte Zustände und weitere Lorentz-Strukturen, die hier nicht betrachtet werden. Für $|\lambda_i|$, $i = 1, 2$, können nun die Ergebnisse (3.10) und (3.11) eingesetzt werden und man erhält die Summenregeln:

$$\begin{aligned}
f_1^d &= \frac{\frac{3}{10} M_B^6 E_3(s_0/M_B^2) + \frac{b}{9} M_B^2 E_1(s_0/M_B^2) + \frac{a^2}{3} \left(4 - \frac{m_0^2}{M_B^2}\right)}{M_B^6 E_3(s_0/M_B^2) + \frac{b}{4} M_B^2 E_1(s_0/M_B^2) + \frac{a^2}{3} \left(4 - \frac{m_0^2}{M_B^2}\right)}, \\
f_1^u &= \frac{\frac{1}{10} M_B^6 E_3(s_0/M_B^2) + \frac{b}{8} M_B^2 E_1(s_0/M_B^2) + \frac{5a^2}{18} \frac{m_0^2}{M_B^2}}{M_B^6 E_3(s_0/M_B^2) + \frac{b}{4} M_B^2 E_1(s_0/M_B^2) + \frac{a^2}{3} \left(4 - \frac{m_0^2}{M_B^2}\right)}, \\
f_2^d &= \frac{\frac{8}{5} M_B^6 E_3(s_0/M_B^2) - \frac{4b}{9} M_B^2 E_1(s_0/M_B^2)}{6 M_B^6 E_3(s_0/M_B^2) + \frac{3b}{2} M_B^2 E_1(s_0/M_B^2)}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Setzt man noch die numerischen Werte der beteiligten Parameter ein, so ergeben sich die folgenden Abschätzungen für die nichtperturbativen Parameter zu den Matrixelementen höheren Twists

$$\begin{aligned}
f_1^d(\mu = 1 \text{ GeV}) &= 0.6 \pm 0.2, \\
f_2^d(\mu = 1 \text{ GeV}) &= 0.15 \pm 0.06, \\
f_1^u(\mu = 1 \text{ GeV}) &= 0.22 \pm 0.15.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

3.2 Handbuch der Nukleon Distributionsamplituden

In diesem Abschnitt wird als Vorbereitung auf die folgenden Kapitel eine vollständige Auflistung aller 24 abhängigen Nukleon Distributionsamplituden von (2.26) gegeben.

Die chiralen Strukturen des Basissatzes der acht unabhängigen Distributionsamplituden finden sich bereits aufgelistet in Tabelle 2.4 in Unterkapitel 2.3. Die zugehörigen Darstellungen der verbleibenden 16 Distributionsamplituden finden sich in den Tabellen 3.1 und 3.2.

Bei der Konstruktion ist zu beachten, dass die Spin-Projektionen der Operatoren im jeweiligen Matrixelement bei der Entwicklung auf die zugehörige Kombination von Distributionsamplituden abbildet. Die Lorentz-Strukturen projizieren dagegen auf den jeweiligen Twist. \hat{x} bildet dabei auf die „plus“ Komponenten der Quarkfelder ab und \hat{p} auf die „minus“ Komponenten.

Den Satz der acht Distributionsamplituden aus Tabelle 3.1 erhält man direkt aus den Gleichungen (2.52) bis (2.55), indem man die entgegengesetzte Spin-Projektion für die beiden u -Quarks wählt.

Tabelle 3.2 enthält vier Distributionsamplituden, die sich aus den vorhergehenden durch Vertauschen der Lichtkegel-Projektionen ergeben und die Amplituden T_1 , T_2 , T_3 und T_6 , die sich aus den bisherigen Ausdrücken nicht ablesen lassen und aus diesem Grund hier explizit aufgeführt werden sollen.

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\uparrow(a_1x) C i \sigma_{\perp x} u_j^\uparrow(a_2x) \right) \gamma^\perp \hat{x} d_k^\downarrow(a_3x) | P \rangle &= -2px \hat{z} N^\uparrow \int \mathcal{D}\xi e^{-ipx \Sigma \xi_i a_i} T_1(\xi_i), \\
\langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\downarrow(a_1x) C i \sigma_{\perp x} u_j^\downarrow(a_2z) \right) \gamma^\perp \hat{p} d_k^\downarrow(a_3x) | P \rangle &= -2px \hat{p} N^\uparrow \int \mathcal{D}\xi e^{-ipx \Sigma \xi_i a_i} T_2(\xi_i), \\
\langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\downarrow(a_1x) C i \sigma_{\perp p} u_j^\downarrow(a_2x) \right) \gamma^\perp \hat{x} d_k^\downarrow(a_3x) | P \rangle &= -M^2 \hat{x} N^\uparrow \int \mathcal{D}\xi e^{-ipx \Sigma \xi_i a_i} T_5(\xi_i), \\
\langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^\uparrow(a_1x) C i \sigma_{\perp p} u_j^\uparrow(a_2x) \right) \gamma^\perp \hat{p} d_k^\downarrow(a_3x) | P \rangle &= -M^2 \hat{p} N^\uparrow \int \mathcal{D}\xi e^{-ipx \Sigma \xi_i a_i} T_6(\xi_i).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Auch für skalare Beiträge und Tensorbeiträge lassen sich Darstellungen in Form von Nukleon-Vakuum Matrixelementen lichtkegelprojizierter Operatoren bestimmen.

	Lorentz-Struktur	Lichtkegel Projektion	Nomenklatur
Twist-3	$(C\hat{x}) \otimes \hat{x}$	$u_{\downarrow}^+ u_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^+$	$[V_1 + A_1] (\xi_i)$
Twist-4	$(C\hat{x}) \otimes \hat{p}$	$u_{\downarrow}^+ u_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^-$	$[V_2 + A_2] (\xi_i)$
	$(C\hat{x}\gamma_{\perp}\hat{p}) \otimes \gamma^{\perp}\hat{x}$	$u_{\downarrow}^+ u_{\uparrow}^- d_{\downarrow}^+$	$[V_3 + A_3] (\xi_i)$
	$(C\hat{p}\hat{x}) \otimes \hat{x}$	$u_{\downarrow}^- u_{\downarrow}^+ d_{\uparrow}^+$	$[T_3 + T_7 + S_1 - P_1] (\xi_i)$
Twist-5	$(C\hat{p}) \otimes \hat{x}$	$u_{\downarrow}^- u_{\uparrow}^- d_{\uparrow}^+$	$[V_5 + A_5] (\xi_i)$
	$(C\hat{p}\gamma_{\perp}\hat{x}) \otimes \gamma^{\perp}\hat{p}$	$u_{\downarrow}^- u_{\uparrow}^+ d_{\downarrow}^-$	$[V_4 + A_4] (\xi_i)$
	$(C\hat{x}\hat{p}) \otimes \hat{p}$	$u_{\downarrow}^+ u_{\downarrow}^- d_{\uparrow}^-$	$[T_4 + T_8 + S_2 - P_2] (\xi_i)$
Twist-6	$(C\hat{p}) \otimes \hat{p}$	$u_{\downarrow}^- u_{\uparrow}^- d_{\uparrow}^-$	$[V_6 + A_6] (\xi_i)$

Tabelle 3.1: Die acht Distributionsamplituden, die sich aus der Umkehrung der Spin-Projektion der beiden up-Quarks in Tabelle 2.4 ergeben.

men.

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^{\uparrow}(a_1x) C u_j^{\uparrow}(a_2x) \right) \hat{x} d_k^{\uparrow}(a_3x) | P \rangle \\
&= \frac{1}{2} M \hat{x} N^{\uparrow} \int \mathcal{D}\xi e^{-ipx \sum \xi_i a_i} [S_1 + P_1] (\xi_i), \\
& \langle 0 | \epsilon^{ijk} \left(u_i^{\uparrow}(a_1x) C i \sigma_{xp} u_j^{\uparrow}(a_2x) \right) \hat{x} d_k^{\uparrow}(a_3x) | P \rangle \\
&= \frac{1}{2} p x M \hat{x} N^{\uparrow} \int \mathcal{D}\xi e^{-ipx \sum \xi_i a_i} [T_3 - T_7] (\xi_i). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

In den folgenden Unterkapiteln geben wir den vollständigen Satz der 24 Lichtkegel Distributionsamplituden an, eingeteilt nach ihrem Twist. Die numerischen Werte der Entwicklungsparameter finden sich in Tabelle 2.5.

3.2.1 Twist-3 Distributionsamplituden

$$\begin{aligned}
V_1(\xi_i, \mu) &= 120 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \left[\phi_3^0(\mu) + \phi_3^+(\mu)(1 - 3\xi_3) \right], \\
A_1(\xi_i, \mu) &= 120 \xi_1 \xi_2 \xi_3 (\xi_2 - \xi_1) \phi_3^-(\mu), \\
T_1(\xi_i, \mu) &= 120 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \left[\phi_3^0(\mu) + \frac{1}{2} (\phi_3^- - \phi_3^+) (\mu)(1 - 3\xi_3) \right]. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

	Lorentz-Struktur	Lichtkegel Projektion	Nomenklatur
Twist-3	$(Ci\sigma_{\perp x}) \otimes \gamma^{\perp} \hat{x}$	$u_{\uparrow}^+ u_{\uparrow}^+ d_{\downarrow}^+$	$T_1(\xi_i)$
Twist-4	$(Ci\sigma_{\perp x}) \otimes \gamma^{\perp} \hat{p}$	$u_{\downarrow}^+ u_{\downarrow}^+ d_{\downarrow}^-$	$T_2(\xi_i)$
	$(C\hat{x}\hat{p}) \otimes \hat{x}$	$u_{\uparrow}^+ u_{\uparrow}^- d_{\uparrow}^+$	$-[T_3 - T_7 - S_1 - P_1](\xi_i)$
	$(C\hat{x}\hat{p}) \otimes \hat{x}$	$u_{\downarrow}^+ u_{\downarrow}^- d_{\uparrow}^+$	$-[T_3 + T_7 - S_1 + P_1](\xi_i)$
Twist-5	$(Ci\sigma_{\perp p}) \otimes \gamma^{\perp} \hat{x}$	$u_{\downarrow}^- u_{\downarrow}^- d_{\downarrow}^+$	$T_5(\xi_i)$
	$(C\hat{p}\hat{x}) \otimes \hat{p}$	$u_{\uparrow}^- u_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^-$	$-[T_4 - T_8 - S_2 - P_2](\xi_i)$
	$(C\hat{p}\hat{x}) \otimes \hat{p}$	$u_{\downarrow}^- u_{\downarrow}^+ d_{\uparrow}^-$	$-[T_4 + T_8 - S_2 + P_2](\xi_i)$
Twist-6	$(Ci\sigma_{\perp p}) \otimes \gamma^{\perp} \hat{p}$	$u_{\uparrow}^- u_{\uparrow}^- d_{\downarrow}^-$	$T_6(\xi_i)$

Tabelle 3.2: Die verbleibenden acht Nukleon Distributionsamplituden, die in (2.26) eingehen.

3.2.2 Twist-4 Distributionsamplituden

$$\begin{aligned}
V_2(\xi_i, \mu) &= 24\xi_1\xi_2 [\phi_4^0(\mu) + \phi_4^+(\mu)(1 - 5\xi_3)] , \\
A_2(\xi_i, \mu) &= 24\xi_1\xi_2(\xi_2 - \xi_1)\phi_4^-(\mu) , \\
V_3(\xi_i, \mu) &= 12\xi_3 [\psi_4^0(\mu)(1 - \xi_3) + \psi_4^-(\mu)(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3(1 - \xi_3)) + \psi_4^+(\mu)(1 - \xi_3 - 10\xi_1\xi_2)] , \\
A_3(\xi_i, \mu) &= 12\xi_3(\xi_2 - \xi_1) [(\psi_4^0(\mu) + \psi_4^+(\mu)) + \psi_4^-(\mu)(1 - 2\xi_3)] , \\
T_3(\xi_i, \mu) &= 6\xi_3 [(\chi_4^0 + \phi_4^0 + \psi_4^0)(\mu)(1 - \xi_3) + (\chi_4^- + \phi_4^- - \psi_4^-)(\mu)(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3(1 - \xi_3)) \\
&\quad + (\chi_4^+ + \phi_4^+ + \psi_4^+)(\mu)(1 - \xi_3 - 10\xi_1\xi_2)] , \\
T_7(\xi_i, \mu) &= 6\xi_3 [(-\chi_4^0 + \phi_4^0 + \psi_4^0)(\mu)(1 - \xi_3) + (-\chi_4^- + \phi_4^- - \psi_4^-)(\mu)(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3(1 - \xi_3)) \\
&\quad + (-\chi_4^+ + \phi_4^+ + \psi_4^+)(\mu)(1 - \xi_3 - 10\xi_1\xi_2)] , \\
T_2(\xi_i, \mu) &= 24\xi_1\xi_2 [\chi_4^0(\mu) + \chi_4^+(\mu)(1 - 5\xi_3)] , \\
S_1(\xi_i, \mu) &= 6\xi_3(\xi_2 - \xi_1) [(\chi_4^0 + \phi_4^0 + \psi_4^0 + \chi_4^+ + \phi_4^+ + \psi_4^+)(\mu) \\
&\quad + (\chi_4^- + \phi_4^- - \psi_4^-)(\mu)(1 - 2\xi_3)] , \\
P_1(\xi_i, \mu) &= 6\xi_3(\xi_2 - \xi_1) [(\chi_4^0 - \phi_4^0 - \psi_4^0 + \chi_4^+ - \phi_4^+ - \psi_4^+)(\mu) \\
&\quad + (\chi_4^- - \phi_4^- + \psi_4^-)(\mu)(1 - 2\xi_3)] .
\end{aligned} \tag{3.25}$$

3.2.3 Twist-5 Distributionsamplituden

$$\begin{aligned}
V_5(\xi_i, \mu) &= 6\xi_3 [\phi_5^0(\mu) + \phi_5^+(\mu)(1 - 2\xi_3)] , \\
A_5(\xi_i, \mu) &= 6\xi_3(\xi_2 - \xi_1)\phi_5^-(\mu) , \\
V_4(\xi_i, \mu) &= 3 [\psi_5^0(\mu)(1 - \xi_3) + \psi_5^-(\mu)(2\xi_1\xi_2 - \xi_3(1 - \xi_3)) \\
&\quad + \psi_5^+(\mu)(1 - \xi_3 - 2(\xi_1^2 + \xi_2^2))] , \\
A_4(\xi_i, \mu) &= 3(\xi_2 - \xi_1) [-\psi_5^0(\mu) + \psi_5^-(\mu)\xi_3 + \psi_5^+(\mu)(1 - 2\xi_3)] , \\
T_4(\xi_i, \mu) &= \frac{3}{2} [(\chi_5^0 + \psi_5^0 + \phi_5^0)(\mu)(1 - \xi_3) + (\chi_5^- + \phi_5^- - \psi_5^-)(\mu)(2\xi_1\xi_2 - \xi_3(1 - \xi_3)) \\
&\quad + (\chi_5^+ + \phi_5^+ + \psi_5^+)(\mu)(1 - \xi_3 - 2(\xi_1^2 + \xi_2^2))] , \\
T_8(\xi_i, \mu) &= \frac{3}{2} [(\psi_5^0 + \phi_5^0 - \chi_5^0)(\mu)(1 - \xi_3) + (\phi_5^- - \psi_5^- - \chi_5^-)(\mu)(2\xi_1\xi_2 - \xi_3(1 - \xi_3)) \\
&\quad + (\phi_5^+ + \psi_5^+ - \chi_5^+)(\mu)(1 - \xi_3 - 2(\xi_1^2 + \xi_2^2))] , \\
T_5(\xi_i, \mu) &= 6\xi_3 [\chi_5^0(\mu) + \chi_5^+(\mu)(1 - 2\xi_3)] , \\
S_2(\xi_i, \mu) &= \frac{3}{2}(\xi_2 - \xi_1) [-(\psi_5^0 + \phi_5^0 + \chi_5^0)(\mu) + (\chi_5^- + \phi_5^- - \psi_5^-)(\mu)\xi_3 \\
&\quad + (\chi_5^+ + \phi_5^+ + \psi_5^0)(\mu)(1 - 2\xi_3)] , \\
P_2(\xi_i, \mu) &= \frac{3}{2}(\xi_2 - \xi_1) [(\psi_5^0 + \psi_5^0 - \chi_5^0)(\mu) + (\chi_5^- - \phi_5^- + \psi_5^0)(\mu)\xi_3 \\
&\quad + (\chi_5^+ - \phi_5^+ - \psi_5^0)(\mu)(1 - 2\xi_3)] , \tag{3.26}
\end{aligned}$$

3.2.4 Twist-6 Distributionsamplituden

$$\begin{aligned}
V_6(\xi_i, \mu) &= 2 [\phi_6^0(\mu) + \phi_6^+(\mu)(1 - 3\xi_3)] , \\
A_6(\xi_i, \mu) &= 2(\xi_2 - \xi_1)\phi_6^- , \\
T_6(\xi_i, \mu) &= 2 \left[\phi_6^0(\mu) + \frac{1}{2} (\phi_6^- - \phi_6^+) (1 - 3\xi_3) \right] . \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons

Da es nicht direkt möglich ist, die in den vorangegangenen Kapiteln erstellte Formulierung der Nukleon Wellenfunktion, direkt zu testen, befasst sich dieses Kapitel mit der Berechnung zweier klassischer Observablen des Nukleons, den elektrischen und magnetischen Formfaktoren, der Bereitstellung der Methode und mit der Gegenüberstellung der Ergebnisse zu den experimentellen Daten.

4.1 Formfaktoren der Hintergrund

Im Jahre 1956 veröffentlichten Chambers und Hofstadter die erste Arbeit zu den elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons [4] und fanden, dass die Elektron-Proton Streuung von Prozessen mit dem Austausch eines Photons dominiert wird. Der Prozess selber wird durch das Matrixelement des elektromagnetischen Vektorstromes,

$$j_\nu^{\text{em}} = e_u \bar{u} \gamma_\nu u + e_d \bar{d} \gamma_\nu d, \quad (4.1)$$

zwischen zwei Nukleon Zuständen beschrieben

$$\langle P - q | j_\mu^{\text{em}}(0) | P \rangle = \bar{N}(P - q) \left[\gamma_\mu F_1(Q^2) - i \frac{\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2M} F_2(Q^2) \right] N(P). \quad (4.2)$$

Den üblichen Konventionen folgend, ist die Formulierung des Matrixelementes mittels der Dirac und Pauli Formfaktoren $F_1(Q^2)$ bzw. $F_2(Q^2)$ gewählt worden.

In Gleichung (4.2) bezeichnet P_μ den Viererimpuls des Nukleons im Ausgangszustand, M ist die Nukleonmasse, q_μ ist der ausgehende Impuls des Photons, $Q^2 = -q^2$ und $N(P)$ steht für den Nukleon Spinor.

Normiert sind die Dirac und Pauli Formfaktoren für $Q^2 = 0$ und definieren dort die elektrische Ladung und das anomale magnetische Moment des Nukleons

$$\begin{aligned} F_1^p(0) &= 1, & F_1^n(0) &= 0, \\ F_2^p(0) &= \kappa_p = 1.79, & F_2^n(0) &= \kappa_n = -1.91. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Indizes „p“ und „n“ werden von jetzt an die Formfaktoren für das Proton bzw. das Neutron unterscheiden. Für den späteren Vergleich mit den Messdaten seien hier noch die elektrischen und magnetischen Sachs-Formfaktoren $G_E(Q^2)$ bzw. $G_M(Q^2)$ eingeführt.

Diese Formfaktoren haben den Vorteil, dass sie experimentell leichter zugänglich sind als die Dirac und Pauli Formfaktoren ¹ aus welchen sie sich wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} G_M(Q^2) &= F_1(Q^2) + F_2(Q^2), & G_E(Q^2) &= F_1(Q^2) + \frac{q^2}{4M^2} F_2(Q^2), \\ G_M^p(0) &= \mu_p = 2.79, & G_M^n(0) &= \mu_n = -1.91. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Wählt man als Bezugssystem für die elastische Elektron-Nukleon Streuung das Koordinatensystem nach Breit, das Schwerpunktssystem des Streuprozesses, so beschreibt $G_E(Q^2)$ die Verteilung der elektrischen Ladung innerhalb des Nukleons und $G_M(Q^2)$ die der magnetischen Ströme [36]. In dem selben Bezugssystem steht $G_M(Q^2)$ für die helizitätserhaltende Amplitude, während $G_E(Q^2)$ einen Helizitäts-Flip beschreibt. Im in Kapitel 2.2.1 eingeführten Bezugssystem unendli-

¹Die elastische Streuung eines longitudinal polarisierten Elektrons an einem Proton resultiert in eine Polarisation des zurückgestreuten Protons. Die Polarisation des Protons besteht dabei nur aus zwei Komponenten, die beide in der Streuebene liegen, einem longitudinalen Anteil, P_l und einem transversalen Anteil, P_t . Wie in [34, 35] gezeigt wurde, erlaubt die gleichzeitige Messung von P_l und P_t , dass sich das Verhältnis G_E^p/G_M^p direkt aus dem Verhältnis der beiden Polarisationen bestimmen lässt

$$\frac{G_E^p}{G_M^p} = -\frac{P_t}{P_l} \frac{(E_e + E_{e'})}{2m_p} \tan \frac{\theta_e}{2}. \quad (4.4)$$

Hierbei stehen E_e und $E_{e'}$ für die Energien des ein- und auslaufenden Elektrons, θ_e für den Streuwinkel des Elektrons und m_p für die Protonmasse.

chen Impulses, sind $F_1(Q^2)$ und $F_2(Q^2)$ die helizitätserhaltenden bzw. helizitätsverletzenden Anteile.

Eine gute Beschreibung der experimentellen Daten im Energiebereich von Q^2 bis zu 5 GeV^2 stellt für $G_M(Q^2)$ die bekannte Dipolformel dar

$$\frac{1}{\mu_p} G_M^p(Q^2) \sim \frac{1}{\mu_n} G_M^n(Q^2) \sim \frac{1}{(1 + Q^2/\mu_0^2)^2} = G_D(Q^2); \quad \mu_0^2 \sim 0.71 \text{ GeV}^2. \quad (4.6)$$

Für den elektrischen Formfaktor beobachtete man ebenfalls ein Dipolverhalten für $Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$. Für größere Q^2 war die experimentelle Situation unklar, da in diesem Energiebereich die Messdaten von Kollaborationen am SLAC [37] denen vom DESY widersprachen [38]. Beide Messungen basierten dabei auf der gleichen Methode der Rosenblut-Separation des Wirkungsquerschnitts.

Erst vor kurzem bestimmten Jefferson Forschergruppen vom Jefferson Lab Hall A erneut das Verhältnis $G_E^p(Q^2)/G_M^p(Q^2)$ über die gleichzeitige Messung von longitudinalen und transversalen Anteilen der Polarisation des zurückgestreuten Protons [39, 40]. Dabei fand man eine systematische Abweichung vom Dipolverhalten des elektrischen Formfaktors, was die früheren Messungen der DESY Arbeitsgruppe bestätigte.

4.1.1 Theoretische Ansätze

Die theoretische Bestimmung der Formfaktoren basierend auf der zugrunde liegende Feldtheorie stellt ein klassisches Problem der Physik der starken Wechselwirkung dar. In Betrachtungen mittels störungstheoretischer QCD (pQCD) stellte sich der Austausch von harten Gluonen als der dominante Prozess bei hohen Energien heraus. Der Formalismus hierzu wurde in [41, 7, 42, 43] entwickelt und ist einer der wissenschaftlichen Höhepunkte der pQCD. Dieser Zugang führt das Konzept der hadronischen Distributionsamplituden ein, wie sie in Kapitel 2 bestimmt worden sind.

Es zeigte sich, dass der Dirac Formfaktor $F_1(Q^2)$ im asymptotischen Limes ($Q^2 \rightarrow \infty$) ein Skalenverhalten von $1/Q^2$ aufweist und in faktorisierter Form als Faltung zwischen zwei Distributionsamplituden führenden Twists und einem harten Anteil geschrieben werden kann (1.7). Für den Pauli Formfaktor $F_2(Q^2)$ ergab sich, dass letzterer gegenüber $F_1(Q^2)$ um einen Faktor $1/Q^2$ unterdrückt ist und damit dem höheren Twist zugeordnet werden muss. M.a.W über einen Zugang der nur

den führenden Twist betrachtet ist der Pauli Formfaktor nicht bestimmbar.

In der Tat ist das Ergebnis der Berechnungen der Nukleon Formfaktoren im üblichen harten Streubild des Nukleons wenig überzeugend für realistische Werte von Q^2 . Für die asymptotische Form der Distributionsamplitude führenden Twists (2.57) ist der Formfaktor des Protons in führender Ordnung gleich Null und der Formfaktor des Neutrons im Vergleich zu den Daten zu klein und vom Vorzeichen her negativ [5, 21, 44, 45, 46]. Als eine Lösung für dieses Problem wurde in [12, 13, 14, 25] vorgeschlagen, dass die Form der Distributionsamplituden bei Impulsüberträgen mittlerer Energien sehr von der asymptotischen Form abweicht. Chernyak und Zhitnitsky haben dabei gezeigt, dass asymmetrische Amplituden, bei denen der größte Anteil des Gesamtimpulses von einem der drei Valenzquarks getragen wird, zu einer zufriedenstellenden Beschreibung der magnetischen Formfaktoren führen. Ein Nachteil dieser Beschreibung ist jedoch, dass selbst bei großen $Q^2 \sim 10 \text{ GeV}^2$ die „harte“ Amplitude von Gluonen mit geringer Virtualität dominiert wird [47, 48], was Zweifel an der Konsistenz des störungstheoretischen Zugangs aufwarf.

Es wurden Versuche unternommen, den Bereich der Anwendbarkeit der störungstheoretischen QCD zu erweitern, indem man logarithmische Korrekturen vom Sudakov-Typ über alle Ordnungen summierte [49]. Unglücklicher Weise ist die Unterdrückung von Beiträgen mit einem großen transversalen Anteil nicht ausreichend, um nichtstörungstheoretische Effekte zu kompensieren. Eine ausführliche Diskussion hierzu findet sich in [50].

Ein weiterer Ansatz bestand darin, den Beginn des Gültigkeitsbereiches der pQCD für exklusive Reaktionen soweit zu höheren Energien zu verschieben, dass nicht störungstheoretische, so genannte „weiche“ oder „Endpunkts“-Beiträge eine dominante Rolle bei den gegenwärtigen Energien spielen. Es zeigte sich, dass man eine gute Beschreibung der existierenden Daten alleine aus den „weichen“ Beiträgen erhält, wobei man als Modell sich überlappende nicht störungstheoretische Wellenfunktionen verwendet, siehe [51, 52, 53, 54, 55, 56]. Ein Problem dieses Ansatzes besteht in der Möglichkeit, dass Beiträge doppelt gezählt werden können und dass harte Beiträge von möglichen Rückstreuungen in den modellabhängigen Hadron Wellenfunktionen maskiert werden.

4.1.2 Der Ansatz dieser Arbeit

In dieser Arbeit werden die Baryon-Formfaktoren basierend auf der Methode der Lichtkegel Summenregeln (LCSR) berechnet [57, 58]. Auch wenn die Vorhersagen der LCSR eine spezielle Modellabhängigkeit einbeziehen und die Ergebnisse in führender Ordnung nicht wirklich aussagekräftig sind, so besitzt doch diese Methode den wichtigen Vorteil, dass sie vollständig konsistent mit der Theorie der pQCD ist. Die Methode der LCSR gibt den Unterschied in der Skalenabhängigkeit von „harten“ und „weichen“ Beiträgen preis [59, 60]. Für das Pion wurde gezeigt [59, 60], dass der Anteil der „harten“ Rückstreuung über den Zugang durch LCSR korrekt als Teil der $O(\alpha_s)$ Korrekturen wiedergegeben wird. In den vergangenen Jahren gab es eine Vielzahl von Anwendungen der LCSR auf dem Gebiet der Physik der Mesonen, siehe hierzu auch [61, 62].

Der LCSR Zugang wurde auf die Berechnung von Baryon Formfaktoren bislang nicht angewandt. Ein Grund hierfür war, dass für LCSR die Kenntnis der Distributionsamplituden höheren Twists für Baryonen vorausgesetzt wurde und letztere erst mit der Veröffentlichung des Artikels [63] zu den Kapiteln 2 und 3 zur Verfügung standen. Ein weiterer Grund war außerdem, dass, wie wir im Folgenden sehen werden, der Formalismus der LCSR für Baryonen durchaus kompliziert anmuten mag.

4.2 Die Methode: Führender Twist

Die Methode der LCSR [57, 58] verbindet die Standardtechnik der QCD Summenregeln [64] mit der spezifischen Lichtkegel Kinematik harter exklusiver Prozesse. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass die Wilson Operator-Produkt-Entwicklung mit ansteigender Dimension durch eine Entwicklung auf dem Lichtkegel mit Distributionsamplituden zunehmenden Twists ersetzt wird.

Als Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen wählen wir die folgende Korrelationsfunktion

$$T_\nu(P, q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ \eta(0) j_\nu^{\text{em}}(x) \} | P \rangle. \quad (4.7)$$

Dieser Korrelator enthält neben dem elektromagnetischen Strom (4.1) noch das interpolierende Nukleon- bzw. Protonfeld [12, 13, 14, 15]

$$\eta_{\text{CZ}}(0) = \varepsilon^{ijk} [u^i(0) C \hat{z} u^j(0)] \gamma_5 \hat{z} d^k(0), \quad (4.8)$$

mit der Normierung

$$\langle 0 | \eta_{CZ} | P \rangle = f_N (P \cdot z) \hat{z} N(P). \quad (4.9)$$

Hierbei ist z ein Vektor auf dem Lichtkegel, $z^2 = 0$. Sowohl der Nukleonstrom als auch die Kopplung f_N , bei der es sich um die Normierung der Distributionsamplitude führenden Twists handelt, sind bereits aus Kapitel 2 bekannt. Als Strom wurde η_{CZ} auch deshalb gewählt, weil wir damit die gleiche Hierarchie in den Beiträgen unterschiedlichen Twists erzeugen, wie im störungstheoretischen Zugang [43, 41, 7, 42].

4.2.1 Die Dispersionsrelation

Durch eine Dispersionsrelation ist die Korrelationsfunktion (4.7) mit den Formfaktoren des Nukleons (4.2) verknüpft. Diese Beziehung ergibt sich aus der Definition des zeitgeordneten Produktes der zwei beteiligten Ströme über die Θ -Funktion

$$T\{A(x)B(y)\} = \Theta(x_0 - y_0)A(x)B(y) + \Theta(y_0 - x_0)B(y)A(x) \quad (4.10)$$

und durch das Einschleiben eines vollständigen Satzes von Einteilchenzuständen unterschiedlicher Helizität λ zwischen das Strom-Produkt, deren niedrigster Zustand gerade die Massenschalenbedingung $k^2 = m_p^2$ erfüllt. Die Summation umfasst dabei das gesamte Teilchenspektrum,

$$1 = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k_0} |k, \lambda\rangle \langle k, \lambda|. \quad (4.11)$$

Drückt man noch den elektromagnetischen Strom am Ort x mit Hilfe des Translationsoperators,

$$j_{\nu}^{\text{em}}(x) = e^{ipx} j_{\nu}^{\text{em}}(0) e^{-ipx}, \quad (4.12)$$

aus, so lässt sich der Korrelator (4.7) nach dem Ausführen der ortsabhängigen x Integration schreiben als

$$\begin{aligned} T_{\nu}(P, q) = & i \int dx_0 \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{2k_0} \\ & \left[\Theta(-x_0) e^{i(q_0 + k_0 - P_0)x_0} \langle 0 | \eta_{CZ} | k, \lambda \rangle \langle k, \lambda | j_{\nu}^{\text{em}} | P \rangle \delta(\vec{q} + \vec{k} - \vec{P}) \right. \\ & \left. + \Theta(x_0) e^{i(q_0 - k_0)x_0} \langle 0 | j_{\nu}^{\text{em}} | k, \lambda \rangle \langle k, \lambda | \eta_{CZ} | P \rangle \delta(\vec{q} - \vec{k}) \right]. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Integraldarstellung für die Θ -Funktion

$$\Theta(x_0) = \frac{-1}{2\pi i} \int d\omega \frac{e^{-i\omega x_0}}{\omega + i\epsilon} \quad (4.14)$$

lassen sich sämtliche Integrationen lösen und zusammen mit der Massenschalenbedingung $k_0^2 = k^2 + m^2$ erhält man eine von der speziellen Form der Ströme unabhängige Formulierung des Korrelators

$$T_\nu(P, q) = \frac{1}{m^2 - (P - q)^2} \sum_\lambda \langle 0 | \eta_{CZ} | P - q, \lambda \rangle \langle P - q, \lambda | j_\nu^{\text{em}} | P \rangle + \dots \quad (4.15)$$

Dabei wurde als führender Term der Nukleonbeitrag angegeben und höhere Resonanzen nur durch Punkte angedeutet. Zusammen mit den Gleichungen (4.2) und (4.9) ergibt sich, unter Berücksichtigung der Spinor-Projektion $\hat{P} + m = \sum_\lambda N(P) \bar{N}(P)$, die finale Form der Korrelationsfunktion in Abhängigkeit von den Dirac und Pauli Formfaktoren

$$\begin{aligned} z^\nu T_\nu(P, q) = \frac{f_N}{M^2 - P'^2} (P' \cdot z) & \left\{ \left[2F_1(Q^2) (P' \cdot z) - F_2(Q^2) (q \cdot z) \right] \hat{z} \right. \\ & \left. + F_2(Q^2) \left[(P' \cdot z) + \frac{1}{2} (q \cdot z) \right] \frac{\hat{z} \hat{q}}{M} \right\} N(P) + \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

mit

$$P' = P - q. \quad (4.17)$$

Die Punkte in (4.16) stehen erneut für höhere Resonanzen und für das Kontinuum. Zur Vereinfachung der Lorentz-Struktur haben wir die Korrelationsfunktion mit dem Lichtkegelvektor z^ν kontrahiert. Hierdurch entledigen wir uns von Beiträgen, die proportional zu z_ν sind und als solche von höherer Ordnung auf dem Lichtkegel. Für die Summenregeln werden wir später nur Lorentz-Strukturen betrachten, die im Bezugssystem unendlichen Impulses (siehe Kapitel 2.2.1) den größten Beitrag liefern. Für den Dirac Formfaktor ist dieses die Struktur $F_1(Q^2) \sim (P \cdot z)^2 \hat{z} N(P)$ und für den Pauli Formfaktor ist es $F_2(Q^2) \sim (P \cdot z)^2 \frac{\hat{z} \hat{q}}{M} N(P)$.

4.2.2 Der perturbative Anteil

Für große euklidische Impulse P'^2 und $q^2 = -Q^2$ kann die Korrelationsfunktion auch störungstheoretisch berechnet werden. Den Beitrag führender Ordnung

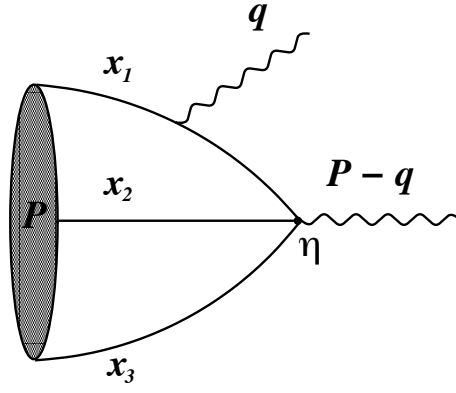


Abbildung 4.1: Der Beitrag führender Ordnung zur Korrelationsfunktion (4.7)

erhält man aus dem Diagramm in Figur 4.1. Eine einfache Berechnung mittels der expliziten Form der Ströme führt auf,

$$\begin{aligned}
 z_\nu T^\nu(P, q) = & \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x \frac{e^{iqx}}{x^4} (C\hat{z})_{\alpha\beta} (z \cdot x) (\gamma_5 \hat{z})_\gamma \\
 & \times \left[2e_d \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(0) u_\beta^j(0) d_\gamma^k(x) | P \rangle + 4e_u \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(0) u_\beta^j(x) d_\gamma^k(0) | P \rangle \right].
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Die Indizes α, β, γ sind die Spinor-Indizes der Quarkfelder und i, j, k bezeichnen die Farbladungen. Im Lichtkegel-Limes $x^2 \rightarrow 0$ können die Nukleon-Vakuum Matrixelemente mit den Drei-Quark Operatoren mittels der Nukleon Distributionsamplituden führenden Twists (siehe auch Tabelle 2.3 zusammen mit (2.32) (2.33) (2.34)) ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}
 4 \langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 z) u_\beta^j(a_2 z) d_\gamma^k(a_3 z) | P \rangle = & \mathcal{V}_1 \left(\hat{P} C \right)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{A}_1 \left(\hat{P} \gamma_5 C \right)_{\alpha\beta} N_\gamma \\
 & + \mathcal{T}_1 (P^\nu i \sigma_{\mu\nu} C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 N)_\gamma.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Jede der Distributionsamplituden $\mathcal{V}_1, \mathcal{A}_1, \mathcal{T}_1$ wird dann wie in Kapitel 2.2 in den Raum der Impulsanteilsvariablen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \sum_i \xi_i = 1$, der einzelnen Quarks transformiert, siehe (2.28) und (2.29). Mit diesen Definitionen und den in Anhang F beschriebenen Ortsraumintegralen findet man für die Beiträge in (4.18)

$$z_\nu T^\nu = - \left[e_d \int \mathcal{D}x \frac{x_3 \mathcal{V}_1(x_i)}{(q - x_3 P)^2} + 2e_u \int \mathcal{D}x \frac{x_2 \mathcal{V}_1(x_i)}{(q - x_2 P)^2} \right] 2(P \cdot z)^2 \hat{z} N(P) + \dots \tag{4.20}$$

Die Punkte stehen hier für Beiträge, die in der Kinematik des Koordinatensystem unendlichen Impulses $P \rightarrow \infty, q \sim \text{const.}, z \sim 1/P$, nicht von führender Ordnung

sind. Interessanter Weise trägt nur die Distributionsamplitude \mathcal{V}_1 bei und es gibt keine Lorentz-Struktur $\sim (P \cdot z)^2 \hat{z} \hat{q}$, die Beiträge zum Pauli Formfaktor liefern würde.

Folgt man der Idee der QCD Summenregeln, wird die Dispersionsrelation (4.16) gleich der QCD Berechnung gesetzt, wobei man voraussetzt, dass der euklidische Impuls P'^2 , der durch den das Nukleon interpolierenden Strom fließt, nicht wirklich unendlich groß ist.

Das störungstheoretische Ergebnis (4.20) kann jetzt als Dispersionsrelation mit einer bestimmten spektralen Dichte geschrieben werden

$$z^\nu T_\nu(P, q) = \int_0^{s_0} ds \frac{\varrho(s, Q^2)}{s - P'^2} 2(P \cdot z)^2 \hat{z} N(P) + \dots \quad (4.21)$$

Um alle Resonanzen mit Ausnahme des Nukleons zu eliminieren, wurde das Integral auf eine Region unterhalb der Roper-Resonanz, $s_0 \sim (1.5 \text{ GeV})^2$ beschränkt [64]. Vernachlässigt man Terme von der Ordnung $O(M^2/Q^2)$, was konsistent ist bei einer Genauigkeit von Twist-3, so erhält man diese Form der Darstellung via $s = (1 - x_3)Q^2/x_3$ für den d -Quark Beitrag und $(1 - x_2)Q^2/x_2$ für den u -Quark Beitrag. Die obere Grenze im Dispersionsintegral, läßt sich dann als untere Grenze in den Integralen über die Impulsanteile schreiben: $x_2 > Q^2/(s_0 + Q^2)$ bzw. $x_3 > Q^2/(s_0 + Q^2)$. Als letzten Schritt in der Methode der QCD Summenregeln führen wir noch eine Borel-Transformation durch (siehe auch Anhang E.3) und konvertieren die potentielle Unterdrückung von höheren Massenbeiträgen in eine exponentielle

$$\frac{1}{-(q - xP)^2} = \frac{1}{x(s - P'^2)} \rightarrow \frac{1}{x} \exp \left\{ -\frac{s}{M_B^2} \right\} . \quad (4.22)$$

als eine neue Variable erhält man den Borel-Parameter M_B anstelle von P'^2 . Die finalen Summenregeln ergeben sich, indem man die Borel-transformierten Fassungen der Gleichungen (4.16) und (4.20) gleichsetzt,

$$\begin{aligned} F_1^{\text{tw-3}}(Q^2) &= \frac{1}{f_N} \left[e_d \int \mathcal{D}x \mathcal{V}_1(x_i) \exp \left(-\frac{\bar{x}_3 Q^2 - x_3^2 M^2}{x_3 M_B^2} \right) \Theta \left(x_3 - \frac{Q^2}{Q^2 + s_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2e_u \int \mathcal{D}x \mathcal{V}_1(x_i) \exp \left(-\frac{\bar{x}_2 Q^2 - x_2^2 M^2}{x_2 M_B^2} \right) \Theta \left(x_2 - \frac{Q^2}{Q^2 + s_0} \right) \right] , \\ F_2^{\text{tw-3}}(Q^2) &= 0 . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Der Index 'tw-3' bezeichnet die Twist-3 Genauigkeit². Die Θ -Funktionen in Gleichung (4.23) stammen von der Beschränkung der spektralen Dichte auf die Region der Dualität zwischen der hadronischen Beschreibung und der QCD Formulierung $s < s_0$. Die Integrationsbereiche der Impulsanteilsvariablen bei großen Energien, $Q^2 \rightarrow \infty$, beziehen sich dadurch nur noch auf $0 \leq x_3, x_2 \leq 1$.

4.2.3 Asymptotisches Verhalten und Modellvergleich

In der asymptotischen Näherung, $Q^2 \rightarrow \infty$, wird der Formfaktor von solchen Partonverteilungen dominiert, bei denen das an der Streuung beteiligte Quark fast den gesamten Impuls des Nukleons trägt. Dieses ist der so genannte „weiche“ oder Feynmann Mechanismus und solch ein Beitrag ist bei sehr großem Impulsübertrag nicht von führender Ordnung. Tatsächlich zeigt es sich, dass unter Verwendung der asymptotischen Wellenfunktion,

$$\mathcal{V}_1^{\text{asy}}(x_i) = 120 f_N x_1 x_2 x_3, \quad (4.24)$$

die Entwicklung nach $1/Q^2$ sich im Limes $Q^2 \rightarrow \infty$ verhält wie,

$$F_1^{\text{tw-3}}(Q^2) = 20 (e_d + 2e_u) \frac{1}{Q^8} \int_0^{s_0} ds s^3 e^{-\frac{s-M^2}{M_B^2}}. \quad (4.25)$$

M.a.W. in unserer Darstellung ist $F_1^{\text{tw-3}}$ gegenüber des erwarteten asymptotischen Verhaltens von $1/Q^4$ um einen Faktor 2 in der Potenz unterdrückt. Diese Beobachtung stimmt mit der Analyse der weichen Beiträge zu F_1 vor dem Hintergrund der Drell-Yan Formulierung überein [65]. Der Überlappbeitrag zweier Funktionen führenden Twists verhält sich asymptotisch, wie in [55] gezeigt wurde, wie $1/Q^8$. Es wird sich zeigen, dass diese starke Form der Unterdrückung nicht mehr aufrecht erhalten werden kann, wenn Beiträge von Funktionen mit einer anderen Helizität ins Spiel kommen.

Bevor die Beiträge höheren Twists jedoch mit einbezogen werden, sollen erst noch die Formfaktoren in Abhängigkeit der aus den unterschiedlichen Modellen stammenden Nukleon Distributionsamplituden verglichen werden. Die historische Entwicklung der verschiedenen Nukleon Distributionsamplituden hat gezeigt, dass der Formfaktor sehr stark von deren Form abhängt. Wie wir bereits

²Die angegebenen Formeln beziehen sich dabei nur auf das Proton. Die Formeln für das Neutron erhält man über folgende Transformation: $e_u \leftrightarrow e_d$ und $M_p \leftrightarrow M_n$.

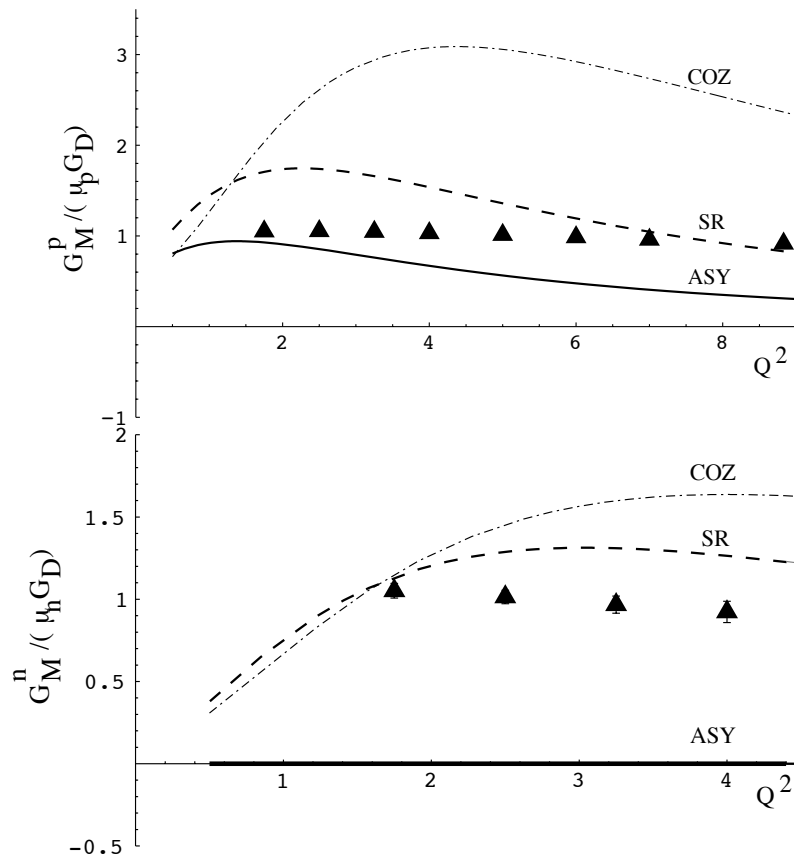


Abbildung 4.2: Twist-3 Näherung der „weichen“ Beiträge zu den magnetischen Formfaktoren des Protons und des Neutrons. Die Datenpunkte stammen aus [1, 2].

in Kapitel 2.3 gesehen haben, basiert die allgemeine Beschreibung der Distributionsamplituden mittels der QCD auf deren konformer Entwicklung. Es existieren dazu verschiedene Modelle, die jeweils unterschiedlich viele Terme der konformen Entwicklung in Betracht ziehen.

In Figur 4.2 sind die Vorhersagen der LCSR zum Twist-3 für die magnetischen Sachs Formfaktoren $G_M^{p,n}$ abgebildet. Bei dieser Genauigkeit gilt allerdings $G_M = F_1$. Normiert sind die Grafen dabei auf den Dipolfit (4.6). Aufgetragen sind die

folgenden drei verschiedenen Distributionsamplituden

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_1^{\text{asy}}(x_i, \mu \simeq 1\text{GeV}) &= 120x_1x_2x_3f_N, \\
\mathcal{V}_1(x_i, \mu \simeq 1\text{GeV}) &= 120x_1x_2x_3f_N \left[1 + \tilde{\phi}_3^+(\mu)(1-x_3) \right], \\
\mathcal{V}_1^{\text{COZ}}(x_i, \mu \simeq 1\text{GeV}) &= 120x_1x_2x_3f_N \left[1 + \tilde{\phi}_3^+(\mu)(1-x_3) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\phi}_3^{d1} [3 - 21x_3 + 28x_3^2] + \tilde{\phi}_3^{d2} [5(x_1^2 + x_2^2) - 3(1-x_3)^2] \right],
\end{aligned} \tag{4.26}$$

die Amplitude $\mathcal{V}_1^{\text{asy}}$ im asymptotischen Limes $Q^2 \rightarrow \infty$ (schwarze Linie), die ausschließlich nur den „s“-Wellen Beitrag enthält [5, 21, 44, 45, 46], die Amplitude \mathcal{V}_1 , mit dem zusätzlichen „p“-Wellen Beitrag (gestrichelte Linie) und die Amplitude $\mathcal{V}_1^{\text{COZ}}$ (Strich-Punkt Linie), die auch „d“-Wellen Beiträge der Entwicklung im Konformen Spin mit einbezieht.

Die Parameter zu den ersten beiden Amplituden finden sich in (2.65) und (2.73). Die in der letzten Amplitude auftretenden Parameter der „d“-Terme sind in [12, 13, 14] bestimmt worden und ihre numerischen Werte lauten,

$$\tilde{\phi}_3^{d1}(\mu = 1\text{GeV}) = 0.615, \quad \tilde{\phi}_3^{d2}(\mu = 1\text{GeV}) = 3.68. \tag{4.27}$$

Die Formulierung der letzten Amplitude weicht von der in der Literatur zu findenden ab, da hier nicht die Apple Polynome als Basis gewählt wurden, sondern, um mit der in Kapitel 2.3 definierten Entwicklung in Terme konformer Polynome konsistent zu bleiben, $\mathcal{V}_1^{\text{COZ}}$ auf die in [16] definierte Basis von Polynomen umgeschrieben wurde. Diese sind dann orthogonal bezüglich der Gewichtsfunktion $\mathcal{V}_1^{\text{asy}}$ sind.

Interessanter Weise entfällt die Abhängigkeit der Amplituden von f_N in der Summenregel (4.23). Der numerische Einfluss der Skalenabhängigkeit der verbleibenden Parameter ist gegenüber der Größe der in ihnen enthaltenen Fehler zu vernachlässigen und wurde deshalb hier auch nicht berücksichtigt.

Beim Betrachten der Grafiken in Abbildung 4.2 wird deutlich, dass die Ergebnisse sehr unterschiedlich ausfallen. Zum Teil sieht man Abweichung um einen Faktor 2 bis 3. Die Amplitude \mathcal{V}_1 , die ausschließlich „s“- und „p“-Wellen Beiträge mit einbezieht, scheint die Daten für den magnetischen Formfaktor von Proton und Neutron bis zu dieser Genauigkeit am ehesten wiedergeben zu können. Interessant ist auch, dass im Falle des magnetischen Formfaktors für das Neutron

der asymptotische Beitrag verschwindet. Des Weiteren darf man nicht vergessen, dass bei dieser Genauigkeit die Amplituden keinen Beitrag zum Pauli Formfaktor liefern, $F_2(Q^2) = 0$. Damit ergibt sich, dass die Sachs Formfaktoren identisch sind, $G_M(Q^2) = G_E(Q^2)$, was ein eher unerfreuliches Ergebnis ist.

Die Ergebnisse zeigen klar, dass die Beiträge der Distributionsamplituden führenden Twists zu den LCSR nicht ausreichen um die Energieabhängigkeit der Nukleon Formfaktoren quantitativ zu beschreiben. Im folgenden Abschnitt werden wir deshalb die Methode der LCSR um die Einbeziehung der Distributionsamplituden höheren Twists erweitern.

4.3 Einbeziehung der Terme höheren Twists

Die Frage, die man sich eingehend stellen sollte lautet: Welche Korrekturen zur Korrelationsfunktion (4.7), mal abgesehen von Strahlungskorrekturen, stehen zur Verfügung, um über den Beitrag führenden Twists hinaus zu gehen?

Einer von zwei möglichen Ansätzen bestünde in der Betrachtung von Korrekturen zum Quark-Quark-Propagator $\sim \hat{x}/x^4$, vor dem Hintergrund des Farbfeldes [20], der in Gleichung (4.18) eingeht. Diese Korrekturen sind proportional zum Gluon-Feldstärketensor und führen auf Distributionsamplituden von Matrixelementen mit vier und fünf Teilchen, welche zu partonischen Zuständen mit einem zusätzlichen Gluon oder einem zusätzlichen Quark-Antiquark Paar neben den drei Valenzquarks gehören. Von Korrekturen dieser Art wird jedoch nicht erwartet, dass sie unter allen möglichen nächsten Korrekturen eine wesentliche Rolle spielen (siehe z.B.[55]) und als solche werden sie nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

4.3.1 Korrelierte Formfaktoren und asymptotisches Verhalten

Die in dieser Arbeit betrachteten Korrekturen beziehen sich auf die in Kapitel 2 bestimmten Beiträge höheren Twists zu den Drei-Quark-Matrixelementen in (4.18). Ausgedrückt durch die allgemeinste Darstellung der Matrixelemente, wie sie in (2.19) gegeben ist, lassen sich die Indizes der Strukturterme in (2.19) und (4.18) kontrahieren und es zeigt sich, dass ausschließlich vektorartige Dirac-

Strukturen zum Korrelator beitragen

$$\begin{aligned}
& 4\langle 0 | \varepsilon^{ijk} u_\alpha^i(a_1 x) u_\beta^j(a_2 x) d_\gamma^k(a_3 x) | P \rangle \\
&= \left(\mathcal{V}_1 + \frac{x^2 M^2}{4} \mathcal{V}_1^M \right) (\hat{P}C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_2 M (\hat{P}C)_{\alpha\beta} (\hat{x} \gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{V}_3 M (\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} (\gamma^\mu \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_4 M^2 (\hat{x} C)_{\alpha\beta} (\gamma_5 N)_\gamma \\
&\quad + \mathcal{V}_5 M^2 (\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} (i\sigma^{\mu\nu} x_\nu \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_6 M^3 (\hat{x} C)_{\alpha\beta} (\hat{x} \gamma_5 N)_\gamma . \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Jede der Funktionen \mathcal{V}_i hängt logarithmisch von der Abweichung vom Lichtkegel ab. Folgt man dem Vorgehen aus Kapitel 2, so können die invarianten Funktionen \mathcal{V}_i über die Beziehungen (2.32) durch die jeweiligen Kombinationen der vektorartigen Distributionsamplituden beschrieben werden, deren Darstellung in Termen der konformen Entwicklung auf dem Lichtkegel in Kapitel 3.2 explizit gegeben sind.

Die in (4.28) in der Lorentz-Struktur des führenden Twists auftretende zusätzliche Struktur \mathcal{V}_1^M ist die erste Korrektur der Ordnung $O(x^2)$ zur dort angegebenen Lorentz-Struktur. Diese Korrektur ist vom Twist-5 und im allgemeinen eine komplizierte Funktion von Distributionsamplituden. Im vorliegenden Fall macht man sich eine entscheidende Eigenschaft des Problems zu nutze und zwar, dass sich immer zwei der drei Quarks am gleichen Punkt in der Raum-Zeit befinden. In dieser speziellen Konfiguration kann \mathcal{V}_1^M mittels der in [20] für Mesonoperatoren erstellten Technik berechnet werden. Die Berechnung dieser Korrekturen werden in Kapitel 5.1 ausgeführt und die Ergebnisse für \mathcal{V}_1^M für die vorliegenden Konfigurationen stellt eines der neuen Ergebnisse dieser Arbeit dar.

Man verfährt nun weiter mit dem störungstheoretischen Anteil wie in Kapitel 4.2, verwendet jedoch die vollständige Entwicklung (4.28) anstelle der Beschränkung auf den führenden Twist. Damit ergibt sich als neues Resultat für die Entwicklung

des Korrelators (4.18),

$$\begin{aligned}
z_\nu T^\nu = & \left\{ e_d \left[- \int \mathcal{D}x \frac{\xi_3 V_1(\xi_i)}{(q - \xi_3 P)^2} \right. \right. \\
& + M^2 \int_0^1 d\xi_3 \xi_3^2 \frac{\left(2\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_4 - \tilde{V}_5 - \frac{2}{\xi_3} \mathcal{V}_1^{M(d)} \right) (\xi_3)}{(q - \xi_3 P)^4} \\
& + 2M^4 \int_0^1 d\xi_3 \xi_3^3 \frac{\left(\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_4 - \tilde{V}_5 + \tilde{V}_6 \right) (\xi_3)}{(q - \xi_3 P)^6} \left. \right] \\
& + 2e_u \left[\xi_3 \leftrightarrow \xi_2 \right] \left. \right\} 2(P \cdot z)^2 \hat{z} N(P) \\
& + \left\{ e_d \left[M^2 \int_0^1 d\xi_3 2\xi_3 \frac{\left(\tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 - \tilde{V}_1 \right) (\xi_3)}{(q - \xi_3 P)^4} \right. \right. \\
& - 4M^4 \int_0^1 d\xi_3 \xi_3^2 \frac{\left(\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_4 - \tilde{V}_5 + \tilde{V}_6 \right) (\xi_3)}{(q - \xi_3 P)^6} \left. \right] \\
& + 2e_u \left[\xi_3 \leftrightarrow \xi_2 \right] \left. \right\} \frac{(P \cdot z)^2}{M} \hat{z} \hat{q} N(P) + \dots \quad (4.29)
\end{aligned}$$

In (4.29) zeigt sich bereits, dass jetzt auch Beiträge zum Pauli Formfaktor $F_2(Q^2)$ enthalten sind. Die Darstellung der Funktionen $\mathcal{V}_1^{M(u)}$ und $\mathcal{V}_1^{M(d)}$ ist in den Gleichungen (5.15) und (5.16) gegeben. Die mit einer 'Tilde' versehenen Amplituden stehen für ein- bzw. zweifach partiell integrierte Amplituden bezüglich der Impulsanteilsvariablen ξ_2 und ξ_3 , je nach Beitrag. Sie sind definiert als

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(\xi_3) &= \int_1^{\xi_3} d\xi_3' \int_0^{1-\xi_3'} d\xi_1 V(\xi_1, 1 - \xi_1 - \xi_3', \xi_3'), \\
\tilde{V}(\xi_2) &= \int_1^{\xi_2} d\xi_2' \int_0^{1-\xi_2'} d\xi_1 V(\xi_1, \xi_2', 1 - \xi_1 - \xi_2'), \\
\tilde{\tilde{V}}(\xi_3) &= \int_1^{\xi_3} d\xi_3' \int_1^{\xi_3'} d\xi_3'' \int_0^{1-\xi_3''} d\xi_1 V(\xi_1, 1 - \xi_1 - \xi_3'', \xi_3''), \\
\tilde{\tilde{V}}(\xi_2) &= \int_1^{\xi_2} d\xi_2' \int_1^{\xi_2'} d\xi_2'' \int_0^{1-\xi_2''} d\xi_1 V(\xi_1, \xi_2'', 1 - \xi_1 - \xi_2''). \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Die partiellen Integrationen wurden durchgeführt, da beim Ersetzen der invarianten Funktionen \mathcal{V}_i durch die Lichtkegel Distributionsamplituden V_i in (4.29) Faktoren $1/(P \cdot x)^n$ auftreten und mittels dieses Rechenschrittes aus den Gleichungen eliminiert werden können. Die bei den partiellen Integrationen auftretenden

Randterme addieren sich zu Null. Als nächstes können die ξ -Integrationen ausgeführt werden.

Das Abschneiden des Kontinuumbeitrags bei s_0 und die Borel-Transformation sind neben (4.22) durch die folgenden Substitutionsregeln³ gegeben,

$$\begin{aligned}
\int d\xi \frac{\varrho(\xi)}{(q - \xi P)^4} &= \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi^2} \frac{\varrho(\xi)}{(s - P'^2)^2} \\
&\rightarrow \frac{1}{M_B^2} \int_{\xi_0}^1 \frac{d\xi}{\xi^2} \varrho(\xi) \exp\left(-\frac{\bar{\xi} Q^2}{\xi M_B^2} - \frac{\bar{\xi} M^2}{M_B^2}\right) + \frac{\varrho(\xi_0) e^{-s_0/M_B^2}}{Q^2 + \xi_0^2 M^2}, \\
\int d\xi \frac{\varrho(\xi)}{(q - \xi P)^6} &= - \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi^3} \frac{\varrho(\xi)}{(s - P'^2)^3} \\
&\rightarrow -\frac{1}{2M_B^4} \int_{\xi_0}^1 \frac{d\xi}{\xi^3} \varrho(\xi) \exp\left(-\frac{\bar{\xi} Q^2}{\xi M_B^2} - \frac{\bar{\xi} M^2}{M_B^2}\right) - \frac{1}{2\xi_0} \frac{\varrho(\xi_0) e^{-s_0/M_B^2}}{(Q^2 + \xi_0^2 M^2) M_B^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\xi_0^2}{Q^2 + \xi_0^2 M^2} \left[\frac{d}{d\xi_0} \frac{\varrho(\xi_0)}{\xi_0 (Q^2 + \xi_0^2 M^2)} \right] e^{-s_0/M_B^2}. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Anders als in Gleichung (4.25) beschränkt sich die Nukleonmasse jetzt auf die kinematische Region $s = ((1 - \xi)/\xi)Q^2 + (1 - \xi)M^2$ und die Größe ξ_0 ist die Lösung der dazu gehörenden quadratischen Gleichung für $s = s_0$

$$\xi_0 = \left[\sqrt{(Q^2 + s_0 - M^2)^2 + 4M^2 Q^2} - (Q^2 + s_0 - M^2) \right] / (2M^2). \tag{4.32}$$

Die in (4.31) auftretenden Beiträge $\sim e^{-s_0/M_B^2}$ gehören zu den Randtermen, die durch partielle Integrationen hinzukommen. Letztere sind notwendig, um schrittweise die Potenz in den Nennern $(q - \xi P)^{2n} = (s - P'^2)^{2n} (-\xi)^{2n}$ mit $n > 1$ zu reduzieren, bis man bei der gewünschten, weil üblichen, Dispersionsdarstellung des Nenners $\sim (s - P'^2)$ angekommen ist. Im Limes $s_0 \rightarrow \infty$, also bei Aufhebung des Kontinuum Cutoffs, verschwinden die Terme proportional zu e^{-s_0/M_B^2} .

Da bislang nur Korrekturen zur rechten Seite der Summenregeln berechnet wurden, kann man jetzt (4.16) und den neu bestimmten perturbativen Anteil zusammenfügen und erhält die zwei Summenregeln und damit die Endergebnisse für

³Die Substitutionsregeln (4.31) werden in Abschnitt 5.2 näher erläutert.

$F_1(Q^2)$ und $F_2(Q^2)$:

$$\begin{aligned}
F_1^{\text{P}}(Q^2) = & \frac{e_d}{f_N} \left\{ \int_{\xi_3^0}^1 d\xi_3 \exp \left(-\frac{\bar{\xi}_3 Q^2}{\xi_3 M_B^2} + \frac{\xi_3 M^2}{M_B^2} \right) \right. \\
& \times \left[\left(\int_0^{1-\xi_3} d\xi_1 V_1(\xi_1, 1-\xi_1-\xi_3, \xi_3) \right) \right. \\
& + \frac{M^2}{M_B^2} \left(2\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_4 - \tilde{V}_5 - \frac{2}{\xi_3} \mathcal{V}_1^{M(d)} \right) (\xi_3) \\
& + \left. \frac{M^4}{M_B^4} \left(\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_4 - \tilde{V}_5 + \tilde{V}_6 \right) (\xi_3) \right] \\
& + \frac{M^2 (\xi_3^0)^2}{Q^2 + (\xi_3^0)^2 M^2} e^{-(s_0 - M^2)/M_B^2} \\
& \times \left[\left(2\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_4 - \tilde{V}_5 - \frac{2}{\xi_3} \mathcal{V}_1^{M(d)} \right) (\xi_3^0) \right. \\
& + \frac{M^2}{M_B^2} \left(\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_4 - \tilde{V}_5 + \tilde{V}_6 \right) (\xi_3^0) \\
& - \left. M^2 \frac{d}{d\xi_3^0} \left(\frac{(\xi_3^0)^2 \left(\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_4 - \tilde{V}_5 + \tilde{V}_6 \right) (\xi_3^0)}{Q^2 + (\xi_3^0)^2 M^2} \right) \right] \left. \right\} \\
& + \frac{2e_u}{f_N} \left\{ \xi_3 \leftrightarrow \xi_2, \mathcal{V}_1^{M(d)} \rightarrow \mathcal{V}_1^{M(u)} \right\}, \tag{4.33}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
F_2^{\text{p}}(Q^2) = & \frac{e_d}{f_N} \int_{\xi_3^0}^1 \frac{d\xi_3}{\xi_3} \exp\left(-\frac{\bar{\xi}_3 Q^2}{\xi_3 M_B^2} + \frac{\xi_3 M^2}{M_B^2}\right) \\
& \times \left[\frac{2M^2}{M_B^2} \left(\tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 - \tilde{V}_1\right)(\xi_3) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2M^4}{M_B^4} \left(\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_4 - \tilde{V}_5 + \tilde{V}_6\right)(\xi_3^0) \right] \\
& + \frac{2M^2 \xi_3^0}{Q^2 + (\xi_3^0)^2 M^2} e^{-\frac{s_0 - M^2}{M_B^2}} \\
& \times \left[\left(\tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 - \tilde{V}_1\right)(\xi_3^0) \right. \\
& \quad - \frac{M^2}{M_B^2} \left(\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_4 - \tilde{V}_5 + \tilde{V}_6\right)(\xi_3^0) \\
& \quad \left. + M^2 \xi_3^0 \frac{d}{d\xi_3^0} \left(\frac{\xi_3^0 \left(\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_4 - \tilde{V}_5 + \tilde{V}_6\right)(\xi_3^0)}{Q^2 + (\xi_3^0)^2 M^2} \right) \right] \\
& + \frac{2e_u}{f_N} \left\{ \xi_3 \leftrightarrow \xi_2, \mathcal{V}_1^{M(d)} \rightarrow \mathcal{V}_1^{M(u)} \right\}. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Im asymptotischen Grenzfall, $Q^2 \rightarrow \infty$, vereinfachen sich die Summenregeln. Da nur vektorartige Distributionsamplituden Beiträge zu den Formfaktoren liefern und die Entwicklungskoeffizienten der Funktionen V_1, \dots, V_6 nicht von dem asymptotisch unbestimmten Parameter f_2^d und von λ_2 abhängen. Zur Erzeugung der Struktur bei $Q^2 \rightarrow \infty$ können die asymptotischen Werte für die nichtperturbativen Parameter eingesetzt werden (siehe Tabelle 2.6). Damit ergeben sich für den asymptotischen Grenzfall die folgenden Summenregeln für die Formfaktoren,

$$\begin{aligned}
F_1^p(Q^2) &= \left[\left(\frac{37}{3} + 2 \frac{\lambda_1}{f_N} \right) e_d + \left(\frac{37}{3} - 2 \frac{\lambda_1}{f_N} \right) e_u \right] \frac{M^2}{M_B^2} \\
&\quad \times \frac{1}{Q^6} \left(s_0^2 M^2 e^{-(s_0-M^2)/M_B^2} + \int_0^{s_0} ds s^2 e^{-(s-M^2)/M_B^2} \right), \\
F_2^p(Q^2) &= -2 \left[\left(\frac{1}{3} \left(10 - 11 \frac{M^2}{M_B^2} \right) - 2 \frac{\lambda_1}{f_N} \left(1 + \frac{4}{15} \frac{M^2}{M_B^2} \right) \right) e_d \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(5 - \frac{8}{9} \frac{M^2}{M_B^2} + \frac{\lambda_1}{f_N} \left(1 + \frac{2}{15} \frac{M^2}{M_B^2} \right) \right) e_u \right] \frac{M^2}{M_B^2} \\
&\quad \times \frac{1}{Q^8} \left(s_0^3 M^2 e^{-(s_0-M^2)/M_B^2} + \int_0^{s_0} ds s^3 e^{-(s-M^2)/M_B^2} \right). \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass pro Quark-Ladung zwei Beiträge auftreten, die beide im Fall von F_1 das asymptotische Verhalten $\sim 1/Q^6$ aufweisen. Zum einen erhält man den Beitrag $\sim 37/3$ aus dem $O(x^2)$ Massenkorrekturterm im führenden Twist und zum anderen den Term $\sim \lambda_1/f_N$ der zu den Beiträgen höheren Twists zum Drei-Quark Matrixelement gehört.

Wie jedoch bereits in der Einführung zu diesem Kapitel erwähnt wurde, würde man für das asymptotische Verhalten des Dirac Formfaktors eine Q^2 -Abhängigkeit von $1/Q^4$ erwarten und im Gegensatz zur Berechnung des asymptotischen Verhaltens im führenden Twist sind die Ergebnisse um eine Zweierpotenz besser. Man darf bei diesem Vergleich jedoch nicht vergessen, dass die Resultate (4.33) und (4.34) in führender Ordnung in α_s nur den „weichen“ oder Feynmann-Beitrag darstellen. Eine Berechnung der Korrekturen nächster Ordnung in α_s , $O(\alpha_s^2)$, einschließlich des Beitrags durch LCSR könnte das korrekte Verhalten von $F_1 \sim 1/Q^4$ erzeugen. Eine solche Rechnung stellt für Baryonen eines der zukünftigen Projekte dar und ist für das Pion bereits durchgeführt, sowie eingehend diskutiert worden [59, 60].

4.3.2 Numerische Ergebnisse und Diskussion

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse den experimentellen Daten gegenübergestellt und diskutiert. Für die numerische Auswertung der Formfaktoren verwenden wir den bereits in Abschnitt 4.2 eingeführten Cutoff unterhalb der Roper Resonanz $s_0 = 2.25 \text{ GeV}^2$. Um die Abhängigkeit der Ergebnisse (4.33) und (4.34) bezüglich des Borel-Parameters M_B zu testen, wurde dieser in folgendem Bereich variiert $1.5 \text{ GeV}^2 \leq M_B^2 \leq 2.5 \text{ GeV}^2$. Die Ergebnisse erwiesen sich als stabil gegenüber Änderungen von M_B und für die Grafen wurde der Borel-Parameter fest bei $M_B^2 = 2 \text{ GeV}^2$ gewählt. Auf den folgenden Beiden Seiten sind die Grafen zu den Ergebnissen abgebildet.

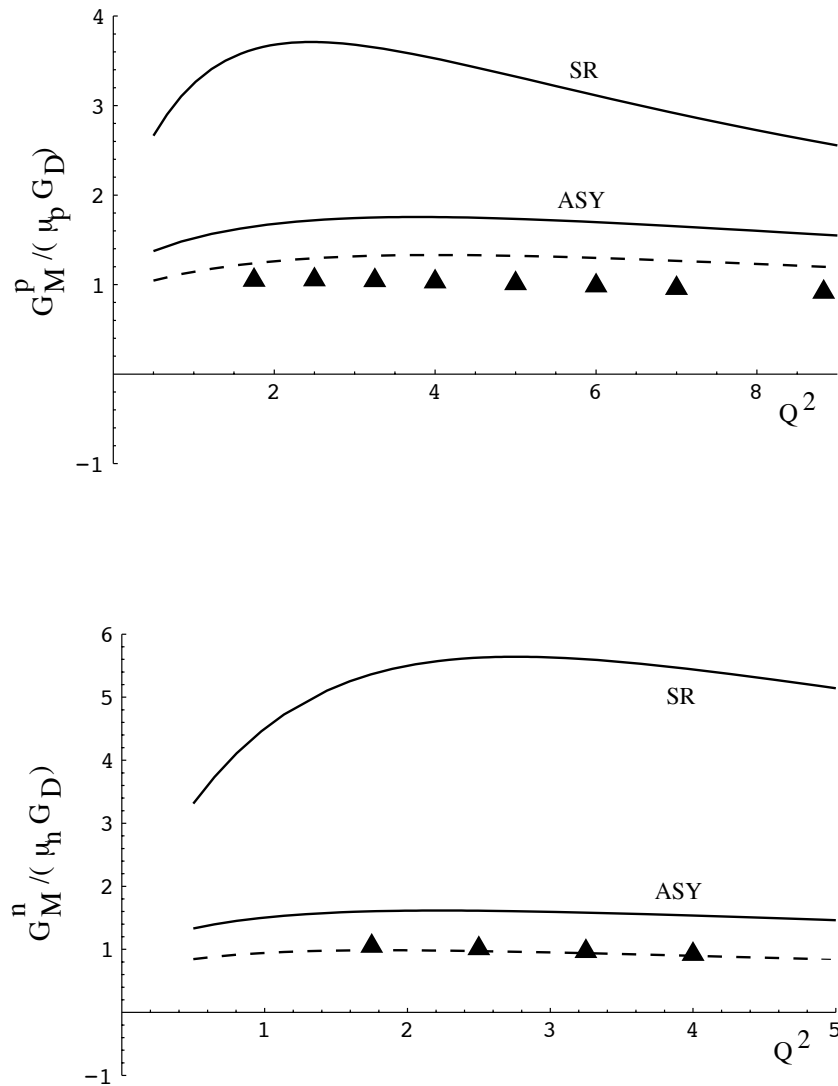


Abbildung 4.3: Die LCSR Vorhersagen für den „weichen“ Beitrag zum magnetischen Formfaktor des Protons und des Neutrons .

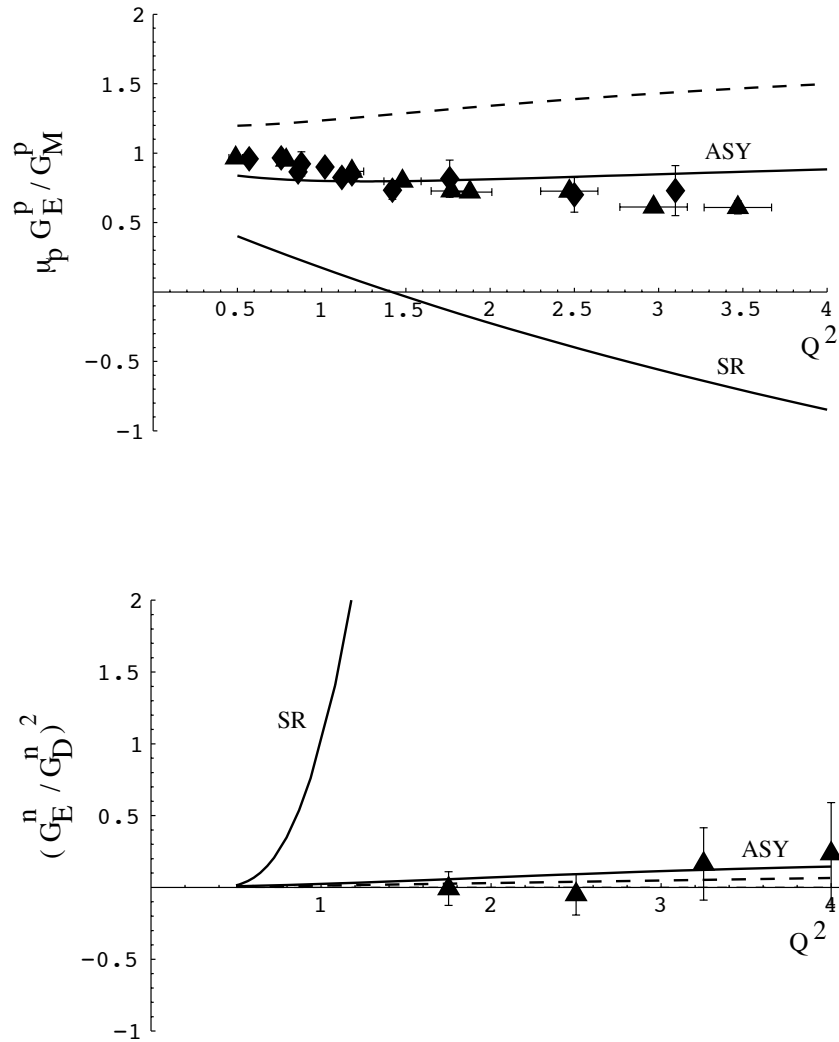


Abbildung 4.4: Vergleich der LCSR Vorhersagen für den elektrischen Formfaktor des Protons ($\mu_p G_E^p / G_M^p$) und des Neutrons $((G_E^n / G_D^n)^2)$ mit den experimentellen Daten.

In den Abbildungen 4.3 und 4.4 markieren die Abkürzungen „ASY“ (asymptotic) und „SR“ (sum rules) die Grafen, die man erhält indem man nur Beiträge des niedrigsten konformen Spins in die Formulierung der Formfaktoren einfließen läßt (ASY) bzw. wenn bei der konformen Entwicklung der Distributionsamplituden auch die „p“-Wellen Beiträge berücksichtigt (SR) werden. Die Datenpunkte für Abbildung 4.3 wurden den folgenden Veröffentlichungen von Arbeitsgruppen am SLAC [1, 2] entnommen. Für die Abbildung 4.4 beziehen sich die Datenpunkte auf die aktuellen Ergebnisse von Kollaborationen am JLAB [39, 40], sowie auf Ergebnisse der bereits genannten SLAC Arbeitsgruppen [2]. In den Abbildungen liegen zum Teil die Fehlerbalken für einige Messpunkte innerhalb der geplotteten Dreiecke. Die Grafiken für die magnetischen Formfaktoren des Protons und des Neutrons, sowie die Abbildung des elektrischen Formfaktors des Neutrons sind auf den Dipolfit (4.6) normiert.

Als Besonderheit der asymptotischen Fassung der Formfaktoren zeigt es sich, dass diese nur noch vom Verhältnis der Matrixelemente von Twist-4 und Twist-3 Operatoren abhängt (siehe hierzu auch (2.52) und (2.53)),

$$\frac{\lambda_1}{f_N} = -5.1 \pm 1.7. \quad (4.36)$$

Für den nicht asymptotischen Fall erhält man auch Beiträge der restlichen vier nichtperturbativen Parameter V_1^d , A_1^u , f_1^d , f_1^u , deren numerische Werte über QCD Summenregeln bestimmt wurden und in Tabelle 2.6 aufgelistet sind.

Bei der nun folgenden Interpretation der Ergebnisse sollte man bedenken, dass die in dieser Arbeit berechneten Ergebnisse nur für einen mittleren Impulsbereich Aussagekraft besitzen können. Für kleine $Q^2 < 1$ muss wegen der Twistentwicklung zu Abweichungen kommen und für $Q^2 > 2$ werden die „harten“, störungstheoretischen Effekte überwiegen.

Bei Betrachtung der Abbildungen 4.3 und 4.4 kann man unschwer erkennen, dass die Beschreibung der Formfaktoren, die Beiträge aus „p“-Wellen enthält, die Daten weit schlechter annähert, als im Vergleich dazu die asymptotische Fassung. Diese Ergebnis ist nicht ganz unerwartet, da schon aus Berechnungen für den Pion Formfaktor bekannt war, dass die Methode der QCD Summenregeln, basierend auf der lokalen Operator-Produkt-Entwicklung, dazu neigt, die Korrekturen höheren Spins zu überschätzen, siehe hierzu [66, 67]. Alles in allem erscheint es eher unwahrscheinlich, dass Terme höheren Twists große Beiträge zu den asymptotischen

Distributionsamplituden liefern werden.

In drei von vier Fällen ließ sich das asymptotische Ergebnis noch verbessern, indem das Verhältnis λ_1/f_N um 30% verringert wurde, was dem unteren Ende des Fehlerbereichs gleich kommt, siehe (4.36). Dieses Ergebnis ist durch die gestrichelten Linien in den Grafiken 4.3 und 4.4 dokumentiert. Nur für das Verhältnis von elektrischem zu magnetischem Formfaktor des Protons ergab sich keine Verbesserung. Um wirklich quantitative Aussagen machen zu können, wäre es notwendig Strahlungskorrekturen zu den Summenregeln von der Ordnung $O(\alpha_s)$ zu bestimmen, was nicht Teil dieser Arbeit sein wird.

Zusammenfassend ist in diesem Kapitel eine Methode zur Berechnung der elektromagnetischen Formfaktoren für Baryonen, basierend auf LCSR bereitgestellt worden. Die LCSR sind in führender Ordnung in der starken Kopplung berechnet und mit den experimentellen Daten verglichen worden. Es hat sich dabei gezeigt, dass nichtperturbative Beiträge eine bedeutende Rolle in der Beschreibung der Baryon Formfaktoren spielen, vor allem sind diese Beiträge zu den Drei-Quark Operator-Produkten, deren Helizität vom Beitrag führender Ordnung abweicht.

Kapitel 5

Detailbetrachtungen zu den Formfaktoren

In diesem Abschnitt werden all diejenigen Betrachtungen und Rechnungen zusammengefasst, die den Text im vorhergehenden Kapitel 4 nur unnötig belastet hätten und zu speziell sind als dass sie im allgemeinen Anhang untergebracht werden könnten.

5.1 Die $O(x^2)$ Korrekturen

Die im letzten Kapitel 4 in die Entwicklung des Drei-Quark Matrixelementes (4.28) eingegangenen $O(x^2)$ Korrekturen zur Lorentz-Struktur führenden Twists werden in diesem Kapitel berechnet und die Methode erläutert. Beginnen wollen wir mit den vektorartigen Anteilen der Lorentz-Projektion, da diese als einzige zu den Summenregeln in Kapitel 4 beitragen. Als entscheidende Vereinfachung gehen in führender Ordnung nur bilokale Operatoren in die Entwicklung der Korrelationsfunktion ein, bei denen entweder ein u - oder ein d -Quark nicht im Ursprung des Raumzeitgitters sitzt, siehe (4.18). Betrachten wir zuerst den d -Quark Beitrag

$$\begin{aligned} x^\alpha \langle 0 | \varepsilon^{ijk} [u^i C \gamma_\alpha u^j] (0) d_\gamma^k(x) | P \rangle = \\ - x^\alpha \left[\left(\mathcal{V}_1 + \frac{x^2 M^2}{4} \mathcal{V}_1^{M(d)} \right) P_\alpha (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_2 M P_\alpha (\hat{x} \gamma_5 N)_\gamma \right. \\ \left. + \mathcal{V}_3 M (\gamma_\alpha \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_4 M^2 x_\alpha (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_6 M^3 x_\alpha (\not{x} \gamma_5 N)_\gamma \right]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Es sei noch einmal daran erinnert, das \mathcal{V}_1 zum Twist-3 beiträgt und $\mathcal{V}_1^{M(d)}$ zum Twist-5. Die $O(x^2)$ Korrekturen zu den anderen Lorentz-Strukturen betrachten wir nicht, da diese von noch höherem Twist sind. Genaugenommen müssten wir um konsistent zu bleiben wenn wir die Korrekturen zu den anderen Lorentz-Strukturen unbeachtet lassen sämtliche Twist-6 Beiträge streichen, da die $O(x^2)$ Korrekturen zu \mathcal{V}_2 und \mathcal{V}_3 zum Twist-6 Beitragen. Glücklicher Weise ist der Twist-6 Beitrag numerisch klein, weshalb wir nur einen sehr geringen Fehler machen, wenn wir ihn nicht aus der Rechnung entfernen. Wie bereits in Kapitel 2.2 gezeigt wurde, können die invarianten Funktionen $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_6$ im Lichtkegel-Limes, $x^2 \rightarrow 0$, zu Distributionsamplituden mit definiertem Twist in Beziehung gesetzt werden, siehe (2.31), (2.32), (2.33), (2.34). Die Berechnung des Korrekturterms ist dagegen nicht offensichtlich, da er im Lichtkegel-Limes verschwindet. Der Beitrag von $\mathcal{V}_1^{M(d)}$ lässt sich aber sehr einfach verstehen, wenn man den Grenzübergang $x_\mu \rightarrow 0$ betrachtet. In diesem Limes kann der nicht lokale „String“ Operator auf der linken Seite von (5.1) in eine Taylor-Reihe entwickelt werden, mit Termen lokaler Operatoren mit drei Quarkfeldern und einer zunehmenden Anzahl von kovarianten Ableitungen des d -Quark Feldes. Die Abtrennung des Anteils führenden Twists eines jeden lokalen Operators ergibt sich aus der Symmetrisierung der Lorentz-Indizes und dem Subtrahieren von entstehenden Spuren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir das mit einem zusätzlichen Faktor x_α kontrahierte Matricelement (5.1) und erhalten so die gewünschte Symmetriebildung. Für die Subtraktion der Spuren kann man formal die Taylor-Entwicklung auch wie folgt schreiben

$$x_\alpha d(x)|_{\text{lt}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[x_\alpha x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} - \frac{x^2}{4} \left(\frac{2}{n+1} \right) \sum_{\mu_i, \mu_j} (x_\alpha \dots g_{\mu_i \mu_j} \dots x_{\mu_n}) \right] \times \partial^\alpha \dots \partial^{\mu_n} d(x) \Big|_{x=0}, \quad (5.2)$$

wobei „lt“ als Index den Anteil führenden Twists bezeichnet. Zusammen mit der Integralbeziehung $1/(n+1) = \int_0^1 dt t^n$ können die abzuziehenden Beiträge der Ordnung $O(x^2)$ wieder in Form von nicht lokalen Stringoperatoren ausgedrückt

werden,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varepsilon^{ijk} [u^i C \hat{x} u^j] (0) d_\gamma^k(x) | P \rangle &= \langle 0 | [\varepsilon^{ijk} [u^i C \hat{x} u^j] (0) d_\gamma^k(x)]_{1-t} | P \rangle \\ &+ \frac{x^2}{4} \int_0^1 dt \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha} \langle 0 | \varepsilon^{ijk} [u^i C \hat{x} u^j] (0) d_\gamma^k(tx) | P \rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Das gleiche Ergebnis erhält man wenn man beachtet, dass der nicht lokale Operator führenden Twists die homogene Laplace-Gleichung erfüllt [20].

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x^\lambda} \langle 0 | [\varepsilon^{ijk} [u^i C \hat{x} u^j] (0) d_\gamma^k(x)]_{1-t} | P \rangle = 0. \quad (5.4)$$

Verwendet man nun die QCD Bewegungsgleichungen im zweiten Term, von Gleichung (5.3), so vereinfacht sich dieser zu,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha} \varepsilon^{ijk} [u^i C \hat{x} u^j] (0) d_\gamma^k(tx) &= 2t \varepsilon^{ijk} [u^i C \gamma^\alpha u^j] (0) D_\alpha d_\gamma^k(tx) + \text{Gluonen} \\ &= 2t \partial_\alpha \varepsilon^{ijk} [u^i C \gamma^\alpha u^j] (0) d_\gamma^k(tx) + \text{Gluonen}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

wobei ∂_α die Ableitung bezüglich der Translation ist [20]; für das Matrixelement können wir nun substituieren $\partial_\alpha \rightarrow -iP_\alpha$. Setzt man die gefundenen Vereinfachungen in (5.3) ein, führt dieses auf

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varepsilon^{ijk} [u^i C \hat{x} u^j] (0) d_\gamma^k(x) | P \rangle &= \langle 0 | [\varepsilon^{ijk} [u^i C \hat{x} u^j] (0) d_\gamma^k(x)]_{1-t} | P \rangle \\ &+ \frac{x^2}{4} (-i2P_\alpha) \int_0^1 dt t \langle 0 | \varepsilon^{ijk} [u^i C \gamma^\alpha u^j] (0) d_\gamma^k(tx) | P \rangle \\ &+ \text{gluons}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die rechte Seite der Gleichung enthält damit, bis auf Korrekturen mit zusätzlichen Gluonen, nur Matrixelemente, deren Distributionsamplituden bereits bekannt sind. Über diese Gleichung (5.6) können wir jetzt $\mathcal{V}_1^{M(d)}$ bestimmen, welches über die linke Seite eingeht und zwar bis auf Beiträge die Gluonen enthalten.

Beginnen wir mit dem Beitrag führenden Twists,

$$\begin{aligned} \langle 0 | [\varepsilon^{ijk} [u^i C \hat{x} u^j] (0) d_\gamma^k(x)]_{1-t} | P \rangle &= - \int \mathcal{D}\xi [e^{-iP \cdot x \xi_3} P \cdot x]_{1-t} \mathcal{V}_1(\gamma_5 N)_\gamma \\ &- \int \mathcal{D}\xi [e^{-iP \cdot x \xi_3} (\hat{x} \gamma_5 N)_\gamma]_{1-t} P \cdot x \mathcal{V}_2 M \\ &- \int \mathcal{D}\xi [e^{-iP \cdot x \xi_3} (\hat{x} \gamma_5 N)_\gamma]_{1-t} \mathcal{V}_3 M + \dots, \end{aligned} \quad (5.7)$$

wobei $[e^{-iP \cdot x \xi_3}(P \cdot x)]_{\text{lt}}$ und $[e^{-iP \cdot x \xi_3} \hat{x}]_{\text{lt}}$ die Komponenten führenden Twists der freien Felder sind. Definiert sind diese als die Lösungen der zugehörigen homogenen Laplace-Gleichung. Man beachte, dass der Faktor $(P \cdot x)$ im zweiten Term von Gleichung (5.7) nicht mit unter der $[\dots]_{\text{lt}}$ Klammer steht. Letzteres kommt daher, dass $(P \cdot x) \mathcal{V}_2 = 1/2(V_1 - V_2 - V_3)$ ausschließlich eine Funktion der von den Valenzquarks getragenen Impulsanteile ist und damit unabhängig vom Ortsvierervektor x . Die eigentliche Lösung kann nun Ordnung für Ordnung in $(M^2 x^2)^n$ konstruiert werden und für unsere Zwecke ergibt sich als Resultat bis zur Ordnung $O(x^2)$

$$\begin{aligned} [e^{-iP \cdot x \xi_3}(P x)]_{\text{lt}} &= (P x) \left[e^{-iP \cdot x \xi_3} + \frac{x^2 M^2 \xi_3^2}{4} \int_0^1 dt e^{-iP \cdot x \xi_3 t} \right], \\ [e^{-iP \cdot x \xi_3} \hat{x}]_{\text{lt}} &= \hat{x} \left[e^{-iP \cdot x \xi_3} + \frac{x^2 M^2 \xi_3^2}{4} \int_0^1 dt t^2 e^{-iP \cdot x \xi_3 t} \right] + i \hat{P} \frac{\xi_3 x^2}{4} \int_0^1 dt t e^{-iP \cdot x \xi_3 t}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Der resultierende Beitrag zu $\mathcal{V}_1^{M(d)}$ ist proportional zum Quadrat der Nukleonmasse und enthält einen Beitrag von der Distributionsamplitude führenden Twists. Der zweite Term auf der Rechten Seite von Gleichung (5.6) ist eine Besonderheit für exklusive Prozesse, da er eine Ableitung bezüglich der Translation enthält, welche für longitudinale Matrixelemente verschwindet. Die explizite Form dieses Terms erhält man über die Kontraktion von (5.1) mit P_α anstelle von x_α und dem Einfügen des resultierenden Ausdrucks in (5.6). Es folgt hieraus,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} (-i2P_\alpha) \int_0^1 dt t \langle 0 | \varepsilon^{ijk} [u^i \gamma^\alpha u^j] (0) d_\gamma^k(tx) | P \rangle \\ = \frac{x^2 M^2}{4} i \int \mathcal{D}\xi \int_0^1 dt t e^{-iP \cdot x \xi_3 t} (V_1 + V_5) (\gamma_5 N)_\gamma + \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

Die Punkte stehen hier für weitere Lorenzstrukturen, die zu $\mathcal{V}_1^{M(d)}$ nicht beitragen. Setzt man alles in Gleichung (5.3) ein so führt dieses auf,

$$\begin{aligned} (P x) \int d\xi_3 e^{-i\xi_3 P \cdot x} \mathcal{V}_1^{M(d)}(\xi_3) &= P \cdot x \int \mathcal{D}\xi \xi_3^2 \int_0^1 dt e^{-iP \cdot x \xi_3 t} V_1 \\ &\quad - i \int \mathcal{D}\xi \xi_3 \int_0^1 dt t e^{-it\xi_3 P \cdot x} (V_1 - V_2) \\ &\quad + \frac{1}{P x} \int \mathcal{D}\xi e^{-i\xi_3 P \cdot x} (-2V_1 + V_3 + V_4 + 2V_5). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Um diese Gleichung lösen zu können, entwickeln wir das Ergebnis (5.10) für kleine Abstände und erhalten Momente von $\mathcal{V}_1^{M(d)}$ bezüglich der Impulsanteilsvariable ξ_3 . Das Ergebnis selber ist damit in Abhängigkeit von Momenten der Distributionsamplituden $V_i^{(d)(n)} = \int \mathcal{D}\xi \xi_3^n V_i(\xi_i)$ formuliert,

$$\begin{aligned} \int d\xi_3 \xi_3^n \mathcal{V}_1^{M(d)}(\xi_3) = & - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[(-2V_1 + V_3 + V_4 + 2V_5)^{(d)(n+2)} \right] \\ & + \frac{1}{(n+1)(n+3)} \left[(n+3)V_1^{(d)(n+2)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}(V_1 - V_2)^{(d)(n+2)} \right. \\ & \quad \left. - (V_1 + V_5)^{(d)(n+1)} \right]; \end{aligned} \quad (5.11)$$

hierbei wurden Distributionsamplituden, die zusätzlich Gluonen enthalten vernachlässigt.

Auf gleiche Weise führt man die Analyse des u -Quark Anteils durch. Hierbei betrachtet man zuerst das Matricelement

$$\begin{aligned} x^\alpha \langle 0 | \varepsilon^{ijk} [u^i(0) C \gamma_\alpha u^j(x)] d_\gamma^k(0) | P \rangle = \\ - x^\alpha \left[\left(\mathcal{V}_1 + \frac{x^2 M^2}{4} \mathcal{V}_1^{M(u)} \right) P_\alpha (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_2 M P_\alpha (\hat{x} \gamma_5 N)_\gamma \right. \\ \left. + \mathcal{V}_3 M (\gamma_\alpha \gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_4 M^2 x_\alpha (\gamma_5 N)_\gamma + \mathcal{V}_6 M^3 x_\alpha (\hat{x} \gamma_5 N)_\gamma \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Folgt man im Vorgehen den Schritten bis zu Gleichung (5.3), so erhält man ganz analog dazu,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \varepsilon^{ijk} [u^i(0) C \hat{x} u^j(x)] d_\gamma^k(0) | P \rangle = & \langle 0 | [\varepsilon^{ijk} [u^i(0) C \hat{x} u^j(x)] d_\gamma^k(0)]_{\text{lt}} | P \rangle \\ & + \frac{x^2}{4} \int_0^1 dt \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha} \langle 0 | \varepsilon^{ijk} [u^i(0) C \hat{x} u^j(tx)] d_\gamma^k(0) | P \rangle \\ = & \langle 0 | [\varepsilon^{ijk} [u^i(0) C \hat{x} u^j(x)] d_\gamma^k(0)]_{\text{lt}} | P \rangle + \text{gluons.} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Als einzigen Unterschied zum Ergebnis für das d -Quark zeigt sich, dass ein translationsabhängiger Term wie in (5.3) nicht auftaucht. Als Ergebnis in Abhängigkeit

von Momenten bezüglich ξ_2 ergibt sich damit

$$\int d\xi_2 \xi_2^n \mathcal{V}_1^{M(u)}(\xi_2) = \frac{1}{(n+1)(n+3)} \left[(n+3)V_1^{(u)(n+2)} - \frac{1}{2}(V_1 - V_2)^{(u)(n+2)} \right] \\ - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[(-2V_1 + V_3 + V_4 + 2V_5)^{(u)(n+2)} \right]. \quad (5.14)$$

Die finalen Ausdrücke für $\mathcal{V}_1^{M(d)}$ und $\mathcal{V}_1^{M(u)}$, formuliert als Polynome in den Impulsanteilsvariablen ξ_2 und ξ_3 , ergeben sich, indem man die konformen Entwicklungen für V_1, \dots, V_6 ((3.24), (3.25), (3.26) (3.27)) einsetzt und die Gleichung für die Momente invertiert. Diese Ausdrücke lauten dann

$$\mathcal{V}_1^{M(u)}(\xi_2) = \frac{\xi_2^2}{24} (\lambda_1 C_\lambda^u + f_N C_f^u), \\ \mathcal{V}_1^{M(d)}(\xi_3) = \frac{\xi_3^2}{24} (\lambda_1 C_\lambda^d + f_N C_f^d), \quad (5.15)$$

mit

$$C_\lambda^u = -(1 - \xi_2)^3 [13 - 20f_1^d + 3\xi_2 + 10f_1^u(1 - 3\xi_2)], \\ C_f^u = (1 - \xi_2)^3 [113 + 495\xi_2 - 552\xi_2^2 + 10A_1^u(-1 + 3\xi_2) + 2V_1^d(113 - 951\xi_2 + 828\xi_2^2)], \\ C_\lambda^d = -(1 - \xi_3) [11 + 131\xi_3 - 169\xi_3^2 + 63\xi_3^3 - 30f_1^d(3 + 11\xi_3 - 17\xi_3^2 + 7\xi_3^3)] \\ - 12(3 - 10f_1^d) \ln[\xi_3], \\ C_f^d = -(1 - \xi_3) [1441 + 505\xi_3 - 3371\xi_3^2 + 3405\xi_3^3 - 1104\xi_3^4 \\ - 24V_1^d(207 - 3\xi_3 - 368\xi_3^2 + 412\xi_3^3 - 138\xi_3^4)] - 12(73 - 220V_1^d) \ln[\xi_3]. \quad (5.16)$$

5.2 Borel-Transformation mit Cutoff

Die in Kapitel 4 durchgeführte Summenregelanalyse der Formfaktoren des Nukleons benötigte eine Formulierung der Borel-Transformation unter Einbeziehung des Cutoff-Parameter s_0 für den Beitrag führenden und die Beiträge höheren Twists. Die Borel-Transformation musste insgesamt auf Integrale der Form,

$$I) \quad \int_0^1 d\xi \frac{\rho(\xi)}{(q - \xi P)^2}, \\ II) \quad \int_0^1 d\xi \frac{\rho(\xi)}{(q - \xi P)^4}, \\ III) \quad \int_0^1 d\xi \frac{\rho(\xi)}{(q - \xi P)^6}, \quad (5.17)$$

angewandt werden. Damit war es notwendig, die gegebenen Integrale so umzuformulieren, dass sowohl eine Borel-Transformation durchgeführt werden konnte, als auch der Cutoff berücksichtigt wurde. Im folgenden soll diese Umformung schrittweise für einzelnen Integrale skizziert werden.

Im ersten Schritt kann man die Nenner der Propagatoren in Abhängigkeit vom Energieparameter $s = (q - P)^2$ notieren,

$$\frac{1}{(q - \xi P)^{2n}} \longrightarrow \frac{1}{(\tilde{s} + \bar{\xi} M^2 - s)^n (-\xi)^n},$$

mit $n \geq 1$, $\bar{\xi} = 1 - \xi$, $\tilde{s} = \frac{(1 - \xi)Q^2}{\xi}$. (5.18)

Gleichung (5.18) halbiert die Potenz des Nenners. Für das Integral führenden Twists (5.17) *I*) zeigt sich, das letzteres eine Form annimmt, auf die eine Borel-Transformation angewandt werden kann ¹,

$$\int_0^1 d\xi \frac{\rho(\xi)}{(q - \xi P)^2} \longrightarrow \int_0^1 d\xi \frac{\rho(\xi)}{-\xi} e^{-\left(\frac{\bar{\xi}Q^2 + \bar{\xi}M^2}{\xi}\right) \frac{1}{M_B^2}}. \quad (5.19)$$

Der Cutoff kann anschließend über eine Θ -Funktion, $\Theta(\xi - \xi_0)$, eingeführt werden, wobei ξ_0 die physikalisch relevante Lösung der Gleichung,

$$s_0 = \frac{\bar{\xi}}{\xi} Q^2 + \bar{\xi} M^2, \quad (5.20)$$

mit dem Cutoff-Parameter s_0 ist. Man beachte, dass ξ_0 als Lösung von (5.20) noch von dem Parameter des Impulsübertrags, Q^2 abhängt.

Für die verbleibenden zwei Integrationen ist es notwendig die Potenz des Nenners mittels Differentiation nach dem Parameter Q^2 weiter zu reduzieren,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dQ^2} \frac{1}{\frac{\bar{\xi}}{\xi} Q^2 + \bar{\xi} M^2 - s} &= -\frac{\bar{\xi}}{\xi} \frac{1}{\left(\frac{\bar{\xi}}{\xi} Q^2 + \bar{\xi} M^2 - s\right)^2} \\ \frac{d^2}{(dQ^2)^2} \frac{1}{\frac{\bar{\xi}}{\xi} Q^2 + \bar{\xi} M^2 - s} &= 2 \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{\bar{\xi}}{\xi} Q^2 + \bar{\xi} M^2 - s\right)^3}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Für die Integrale (5.17) *II*) und *III*) lassen sich jetzt die Borel-Transformationen durchführen. Die Θ -Funktion $\Theta(\xi - \xi_0)$ schneidet auch hier die Integrale bei s_0

¹siehe hierzu auch Anhang E.3

repspektive ξ_0 ab,

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\xi \frac{\rho(\xi)}{(q - \xi P)^4} &\longrightarrow \frac{d}{dQ^2} \int_0^1 d\xi \frac{-\rho(\xi)}{\bar{\xi}\xi} e^{-\left(\frac{\bar{\xi}}{\xi}Q^2 + \bar{\xi}M^2\right)\frac{1}{M_B^2}} \Theta(\xi - \xi_0) \\ \int_0^1 d\xi \frac{\rho(\xi)}{(q - \xi P)^6} &\longrightarrow \frac{d^2}{(dQ^2)^2} \int_0^1 d\xi \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\rho(\xi)}{\bar{\xi}^2\xi} e^{-\left(\frac{\bar{\xi}}{\xi}Q^2 + \bar{\xi}M^2\right)\frac{1}{M_B^2}} \Theta(\xi - \xi_0). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Differentiation kann ausgeführt werden und dabei ist zu beachten, dass das Differential auch auf die Θ -Funktion wirkt,

$$\frac{d}{dQ^2} \Theta(\xi - \xi_0(Q^2)) = -\delta(\xi - \xi_0(Q^2)) \frac{d\xi_0(Q^2)}{dQ^2}. \quad (5.23)$$

Für die Bestimmung der Ableitung des Parameters ξ_0 nutzt man aus, dass die Funktion

$$F(\xi_0(Q^2), Q^2) := \bar{\xi}\xi Q^2 + \bar{\xi}M^2 - s_0, \quad (5.24)$$

den Satz über implizite Funktionen erfüllt [68] und damit die Ableitung von $\xi_0(Q^2)$ auf folgende Weise bestimmt werden kann,

$$\frac{d\xi_0(Q^2)}{dQ^2} = -\frac{\frac{\partial}{\partial Q^2} F(\xi_0(Q^2), Q^2)}{\frac{\partial}{\partial \xi_0} F(\xi_0(Q^2), Q^2)} = \frac{\bar{\xi}_0 \xi_0}{(Q^2 - \xi_0^2 M^2)}. \quad (5.25)$$

Nach der sich anschließenden partiellen Integration erhält man die Ergebnisse (4.31).

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, die Methode der Lichtkegel Summenregeln, wie sie für die Beschreibung von Mesonen entwickelt wurden, auf die leichten Baryonen zu übertragen. Sie teilte sich dabei in zwei große Abschnitte.

Der erste Abschnitt beschäftigte sich mit der ersten systematischen Studie der Lichtkegel Distributionsamplituden höheren Twists zur Nukleon-Wellenfunktion in der QCD. Gefunden wurde, dass der Zustand des Nukleons aus drei Valenzquarks, bei kleinen transversalen Abständen durch acht unabhängige Distributionsamplituden beschrieben wird. Eine dieser Amplituden trägt zum Twist-3 bei, jeweils drei zum Twist-4 und Twist-5, sowie eine zum Twist-6. Es wurde ein vollständiger Satz von Distributionsamplituden konstruiert, welche Bewegungsgleichungen genügen und Bedingungen, die sich aus ihrer konformen Entwicklung ergaben. Die auftretenden nicht perturbativen Parameter sind über QCD Summenregeln abgeschätzt worden.

Im zweiten Abschnitt war die Zielsetzung mittels der Methode der Lichtkegel-Summenregeln die Beiträge der im ersten Abschnitt ermittelten Distributionsamplituden zu hadronischen Observablen des Nukleons, den elektromagnetischen Formfaktoren, zu bestimmen. Es zeigte sich, dass die Distributionsamplituden höheren Twists einen entscheidenden Beitrag zur Beschreibung der Nukleon Formfaktoren in einem Bereich mittleren Energieübertrags liefern. Unter den Beiträgen höheren Twists sind vor allem solche von Wichtigkeit, die Drei-Quark-Zustände mit einer Helizitätsstruktur beschreiben, die von der des führenden Twists abweicht. In diesem Zusammenhang wurden die Summenregeln für die Formfaktoren bestimmt und den experimentellen Daten gegenüber gestellt. Es zeigte sich, dass

die asymptotische Form der Summenregeln die experimentellen Daten am besten approximiert.

Der nächste Schritt zu einer Vertiefung des Verständnisses über die Summenregeln zur Nukleon Wellenfunktion besteht darin, die allgemeine Methode auf weitere Prozesse anzuwenden und z.B. die axialen Formfaktoren des Nukleons oder schwache Übergangsformfaktoren, z.B. des Neutronzerfalls, zu bestimmen. Letztere sind besonders interessant, da die auftretenden Matrixelemente über Isospin-Relationen miteinander verknüpft sind und so die Konsistenz des Modells und der Methode getestet werden können.

Ein weiterer wichtiger Schritt wäre die Berechnung der Beiträge nächster Ordnung in α_s zu den Formfaktoren des Nukleons zu berechnen, da man zusammen mit diesen ein korrektes asymptotisches Verhalten der Summenregeln erwarten würde.

Die Methode zur Bestimmung der Lichtkegel-Distributionsamplituden zur Nukleon Wellenfunktion kann im nächsten Schritt auf interpolierende Ströme anderer Baryonen angewandt werden. Zum einen wären da Ströme zu Baryonen mit drei identischen Quark-Flavours, so wie die Δ -Resonanz oder Baryonen mit einer Valenzquark-Struktur aus drei verschiedenen Quark-Flavours, wie das Λ . Hier böte sich die Δ -Resonanz unter anderem auch an, weil in die Berechnung nur leichte Quarks eingingen und sie die Bestimmung von Übergangsformfaktoren zu Prozessen wie $\Delta \rightarrow p\pi$ auf zwei Wegen ermöglicht, was ebenfalls ein Konsistenztest für Modell und Methode wäre.

Das Forschungsgebiet der Verknüpfung von perturbativen und nichtperturbativen Methoden der QCD mittlereenergetischer, exklusiver Prozesse ist ein spannendes und aktuelles Feld mit einem großen Potential, sich einer Formulierung des Confinement-Prozesse von theoretischer Seite her zu nähern.

Anhang A

Dirac-Algebra

Die kovariante Formulierung der Dirac-Gleichung erfolgt mittels der vier Gamma-Matrizen γ_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. In der Dirac-Darstellung sind die γ_μ gegeben via

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{E}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

, mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Die Gamma-Matrizen erfüllen die folgende Antikommutator Regel

$$\{\gamma_\nu, \gamma_\mu\} = g^{\nu\mu} \mathbf{1}. \quad (\text{A.3})$$

¹ Weitere Darstellungen finden sich z.B. in [10]. Zusammen mit dem vollständig antisymmetrischen Levi-Civita Tensors

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} = \begin{cases} +1 & \text{Wenn } \{\mu, \nu, \rho, \lambda\} \text{ eine gerade Permutation von } \{0, 1, 2, 3\} \text{ ist} \\ -1 & \text{Wenn } \{\mu, \nu, \rho, \lambda\} \text{ eine ungerade Permutation von } \{0, 1, 2, 3\} \text{ ist} \\ 0 & \text{Sonst} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

¹Hier und im Folgenden wird die Einheitsmatrix \mathbb{E}_4 mit $\mathbf{1}$ bezeichnet.

und den Identitäten

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\lambda'} &= -\det(g^{\alpha\alpha'}), & \alpha &= \mu, \nu, \rho, \lambda; & \alpha' &= \mu', \nu', \rho', \lambda' \\
\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\lambda'} &= -\det(g^{\alpha\alpha'}), & \alpha &= \nu, \rho, \lambda; & \alpha' &= \nu', \rho', \lambda' \\
\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\epsilon_{\mu'\nu'}\rho'\lambda' &= -2(g^{\rho\rho'}g^{\lambda\lambda'} - g^{\rho\lambda'}g^{\lambda\rho'}) \\
\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\epsilon_{\mu'\nu'\rho'}\lambda' &= -6g^{\lambda\lambda'} \\
\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\lambda'} &= -24
\end{aligned} \tag{A.5}$$

lassen sich weitere nützliche Beziehungen definieren und finden.

$$\begin{aligned}
\gamma_5 &= \gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda \\
&= -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5^\dagger \\
\gamma_5^2 &= \mathbf{1} \\
\{\gamma_5, \gamma_\mu\} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Kommutatorbeziehungen der Gamma-Matrizen und Produktidentitäten:

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu} &:= \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\
\gamma^\mu\gamma^\nu &= g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \\
[\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] &= 0 \\
\gamma_5\sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\sigma_{\rho\lambda} \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho &= g^{\mu\nu}\gamma^\rho - g^{\mu\rho}\gamma^\nu + g^{\nu\rho}\gamma^\mu + i\gamma_5\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_\lambda \\
\gamma^\lambda\sigma^{\mu\nu} &= i(g^{\mu\lambda}\gamma^\nu - g^{\nu\lambda}\gamma^\mu) + \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_5\gamma_\rho \\
\sigma^{\mu\nu}\gamma^\lambda &= -i(g^{\mu\lambda}\gamma^\nu - g^{\nu\lambda}\gamma^\mu) + \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_5\gamma_\rho \\
2i\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\gamma_5\gamma^\lambda &= \gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Kontraktionsidentitäten der Gamma-Matrizen:

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\gamma_\mu &= 4 \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma_\mu &= -2\gamma^\lambda\gamma^\rho\gamma^\nu \\
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2(\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma) \\
\gamma^\mu\sigma^{\nu\rho}\gamma_\mu &= 0 \\
\gamma^\mu\sigma^{\nu\lambda}\gamma^\rho\gamma_\mu &= 2\gamma^\rho\sigma^{\nu\lambda}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Spuren von Gamma-Matrix-Produkten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{1}) &= 4 \\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu) &= 0 \\
\mathrm{tr}(\gamma_5) &= 0 \\
\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) &= 0 \quad , n \quad \text{ungerade} \\
\mathrm{tr}(\gamma^5 \gamma^\nu) &= 0 \\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\
\mathrm{tr}(\sigma^{\mu\nu}) &= 0 \\
\mathrm{tr}(\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\mu) &= 0 \\
\mathrm{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda} - g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho}) \\
\mathrm{tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda) &= -4\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Zu jeder Darstellung der Dirac-Algebra existiert eine Matrix C , die die folgende Beziehung erfüllt.

$$C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^t \tag{A.10}$$

Es gibt mehr als eine Lösung für C und in der Dirac-Darstellung ist C gegeben durch $C = i\gamma^2 \gamma^0$. Wendet man die Matrix C auf ein Teilchenfeld an, so erhält man das Feld des Antiteilchens, weshalb C die Ladungskonjugationsmatrix genannt wird. Für C gilt $-C = C^{-1} = C^t = C^\dagger$. Unter der Ladungskonjugationsmatrix transformieren sich Gamma-Matrizen neben (A.10) wie folgt.

$$\begin{aligned}
C \gamma_5 C^{-1} &= \gamma_5^t \\
C \sigma_{\mu\nu} C^{-1} &= -\sigma_{\mu\nu}^t \\
C(\gamma_5 \gamma_\mu) C^{-1} &= (\gamma_5 \gamma_\mu)^t
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Zum Abschluß sollen noch einige wichtige Transpositionsidentitäten aufgelistet

werden.

$$\begin{aligned}
(C\gamma_\mu C)^t &= \gamma_\mu \\
(C\gamma_\mu\gamma_5 C)^t &= \gamma_\mu\gamma_5 \\
(C\gamma_\mu\gamma_\nu C)^t &= -\gamma_\nu\gamma_\mu \\
(C\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu C)^t &= -\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_5 \\
(\gamma_\mu\gamma_5 C)^t &= \gamma_5\gamma_\mu C \\
(\gamma_\mu\gamma_\nu C)^t &= -\gamma_\nu\gamma_\mu C \\
(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu C)^t &= -\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\mu C \\
(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho C)^t &= -\gamma_5\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\mu C
\end{aligned}$$

(A.12)

Anhang B

Lichtkegel Formalismus

Nach Dirac ist eine Lichtfront „... eine dreidimensionale Fläche in der Raum-Zeit, die durch die Front ebener Wellen gebildet wird, die sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen.“ [69]. Ein Beispiel für eine Lichtfront ist $x^+ = x^0 + x^3 = 0$. Ein klassisches dynamisches System wird durch die Größen Energie, Impuls, Drehimpuls und Boost beschrieben. In der üblichen hamiltonschen Formulierung für die Dynamik beziehen sich die Größen der Dynamik immer auf den physikalischen Zustand des Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt. Ein möglicher solcher Zeitpunkt wäre $x^0 = 0$. Nach Dirac sind auch andere Formulierungen der relativistischen Dynamik denkbar, z.B. eine dynamische Theorie an der Lichtfront $x^+ = 0$. Die resultierende Dynamik nennt man Lichtkegel Dynamik.

Die Variablen $x^+ = x^0 + x^3$ und $x^- = x^0 - x^3$ nennt man Zeitkomponente und Longitudinalkomponente. Der Parameter $x^\perp = (x^1, x^2)$ heißt Transversalkomponente. Damit läßt sich die folgende Notation für einen Vierervektor einführen

$$x^\mu = (x^0, x^3, x^1, x^2) = (x^+, x^-, x^\perp) \quad (\text{B.1})$$

und das Skalarprodukt formuliert sich neu

$$x \cdot y = x^0 y^0 - x^3 y^3 - x^\perp y^\perp = \frac{1}{2} x^+ y^- + \frac{1}{2} x^- y^+ - x^\perp y^\perp. \quad (\text{B.2})$$

Hieraus folgt, daß der metrische Tensor nicht mehr zu sich selbst invers ist

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Den Zusammenhang zwischen dem zeitartigen und dem longitudinalen Anteil eines Vierervektors vermittelt der metrische Tensor

$$x_- = \frac{1}{2}x^+, \quad x_+ = \frac{1}{2}x^-. \quad (\text{B.4})$$

Analog zu den Lichtkegel-Koordinaten in der Raum-Zeit lassen sich auch die Impulskoordinaten auf dem Lichtkegel definieren; der Longitudinalimpuls $p^+ = p^0 + p^3$, die Lichtfront Energie $p^- = p^0 - p^3$ und der Transversalimpuls $p^\perp = (p^1, p^2)$.

Auch die Algebra der Gamma-Matrizen läßt sich auf Lichtkegel-Koordinaten umschreiben. So definiert man wiederum

$$\gamma^\pm = \gamma^0 \pm \gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mp 1 \\ \mp 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

und als transversalen Anteil entsprechend $\gamma^\perp = (\gamma^1, \gamma^2)$. Zusammen mit den Operatoren der partiellen Ableitungen

$$\partial_+ = \frac{\partial}{\partial x^+}, \quad \partial_- = \frac{\partial}{\partial x^-} \quad \text{und} \quad \partial_\perp = (\partial_1, \partial_2) \quad (\text{B.6})$$

lautet die Dirac-Gleichung $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0$ als Bewegungsgleichung in Lichtkegel-Koordinaten wie folgt

$$\left(\frac{1}{2}\gamma^+ \partial^- + \frac{i}{2}\gamma^- \partial^+ - i\gamma^\perp \partial^\perp - m \right) \Psi = 0. \quad (\text{B.7})$$

Auch hierbei sind die longitudinalen und zeitartigen, partiellen Ableitungen , wie bereits die Koordinaten in (B.4), über den metrischen Tensor ineinander überführbar

$$\partial^+ = 2\partial_-, \text{ bzw. } \partial^- = 2\partial_+. \quad (\text{B.8})$$

In Zusammenhang mit der Formulierung der Dirac-Gleichung auf dem Lichtkegel hat es sich als nützlich erwiesen, ein Paar von Projektionsoperatoren zu definieren, das Spinoren auf ihre longitudinalen und zeitartigen Beiträge abbildet

$$\Psi^\pm = \Lambda^\pm \Psi. \quad (\text{B.9})$$

In unserer Darstellung ist ein solches Paar von Projektionsoperatoren gegeben durch

$$\Lambda^\pm = \frac{1}{4}\gamma^\mp\gamma^\pm = \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^\pm. \quad (\text{B.10})$$

Neben der Eigenschaft der Projektionsoperatoren $(\Lambda^\pm)^2 = \Lambda^\pm$, werden im folgenden noch weitere wichtige Eigenschaften der Λ^\pm aufgelistet.

$$\begin{aligned} (\Lambda^\pm)^\dagger &= \Lambda^\pm \\ \Lambda^+ + \Lambda^- &= \mathbf{1} \\ \gamma^\perp \Lambda^\pm &= \Lambda^\pm \gamma^\perp \\ \gamma^0 \Lambda^\pm &= \Lambda^\mp \gamma^0 \\ \gamma^5 \Lambda^\pm &= \Lambda^\pm \gamma^5 \\ \gamma^\pm &= 2\Lambda^\pm \gamma^0 = \gamma^\mp \Lambda^\mp \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Lichtkegel-Koordinaten werden heute in einer Vielzahl von Anwendungen genutzt. Ausführlichere Betrachtung hierzu finden sich in [70] und [71].

Anhang C

Propagatoren und Eichfaktoren

Da in dieser Arbeit immer wieder Quark- und Gluon-Operatoren im äußeren Feld vorkommen, sollen in diesem Abschnitt die wichtigsten Propagatoren in der gewählten Eichung bereitgestellt werden.

C.1 Die Fock-Schwinger Eichung

Die Korrelatoren in unseren Betrachtungen beschreiben die Wechselwirkung zweier nach außen hin farbloser Ströme zwischen zwei Zuständen und sind als solche eichinvariant. Je nachdem, wie die Eichung eines äußeren Feldes gewählt wird, hängen dann die Propagatoren für Quarks und Gluonen von dieser Eichung ab. Durch eine geschickte Wahl der Eichung lassen sich letztere in eine besonders einfache Form bringen. Die hierfür verwendete Eichung des Potentials ist die Fock-Schwinger Eichung,

$$(x - x_0)_\mu A^\mu(x) = 0. \quad (\text{C.1})$$

Eingeführt wurde diese Eichung von Fock [72] und später von Schwinger neu entdeckt [73]. Die Fock-Schwinger Eichung ist heutzutage die Standard Eichung der QCD Summenregeln. Der ausgezeichnete Raum-Zeit-Punkt x_0 geht als zusätzlicher Eichparameter in die Eichbedingung (C.1) ein und bricht als solcher die Translationsinvarianz. Die Wahl $x_0 = 0$ und die daraus folgende vereinfachte Eichbedingung

$$x_\mu A^\mu(x) = 0, \quad (\text{C.2})$$

ermöglicht es, das Viererpotential direkt durch den Feldstärketensor,

$$G_{\mu\rho}^A = \partial_\mu A_\rho^A - \partial_\rho A_\mu^A + g f^{ABC} A_\mu^B A_\rho^C, \quad (\text{C.3})$$

auszudrücken ¹. Hierfür betrachtet man das Produkt aus dem Feldstärketensor und einem beliebigen Ortsvektor

$$\begin{aligned} x^\rho G_{\rho\mu}^A(x) &= x^\rho \partial_\mu A_\rho^A(x) - x^\rho \partial_\rho A_\mu^A(x) \\ &= -A_\mu^A(x) - x^\rho \partial_\rho A_\mu^A(x) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

und substituiert $x^\rho = \alpha y^\rho$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (\alpha A_\mu^A(\alpha y)) &= A_\mu^A(\alpha y) + \alpha \frac{d}{d\alpha} A_\mu^A(\alpha y) \\ &= A_\mu^A(\alpha y) + \alpha \frac{\partial A_\mu^A(\alpha y)}{\partial \alpha y^\rho} y^\rho \\ &= \alpha y^\rho G_{\rho\mu}^A(\alpha y). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Die finale Formulierung des Potentials durch den Feldstärketensor ergibt sich nach Integration über α ,

$$A_\mu^A(x) = \int_0^1 d\alpha \alpha x^\rho G_{\rho\mu}^A(\alpha x). \quad (\text{C.6})$$

Die Taylor-Entwicklung von $G_{\rho\mu}^A(\alpha x)$ in αx um den Ursprung liefert dann

$$\begin{aligned} A_\mu^A(x) &= \frac{1}{2 \cdot 0!} x^\rho G_{\rho\mu}^A(0) + \frac{1}{3 \cdot 1!} x^\rho x^\delta (D_\delta G_{\rho\mu})^A(0) \\ &\quad + \frac{1}{4 \cdot 2!} x^\rho x^\delta x^\sigma (D_\delta D_\sigma G_{\rho\mu})^A(0) + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Die Entwicklung (C.7) enthält nur kovariante Ausdrücke, da bei der verwendeten Eichung in der Taylor-Entwicklung die normale Ableitung durch die kovariante ersetzt werden kann [75]. Des Weiteren folgt aus (C.7) direkt, dass $A_\mu^A(0) = 0$.

Die Formulierung des Eichfeldes in Abhängigkeit von der Feldstärke ist die entscheidende Beziehung für die Operator-Produkt-Entwicklung einer Korrelationsfunktion, in der das Eichfeld $A_\mu^A(x)$ in lokale kovariante Operatoren entwickelt wird.

¹Die Indizes A, B, C bezeichnen im Folgenden die Farbladungen der jeweiligen Elemente, repräsentiert durch die Gruppe $SU(N)$. Die Generatoren der Gruppe werden hiernach mit t^A ($A = 1, \dots, N^2 - 1$) bezeichnet, deren Kommutator gegeben ist durch $[t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C$, zusammen mit der antisymmetrischen Strukturkonstanten f^{ABC} der Gruppe. Für eine Zusammenfassung der algebraischen Einzelheiten zu den Elementen der $SU(N)$ siehe z.B.: [74]

C.2 Der Quark Propagator im äußeren Feld

In vielen Berechnungen dieser Arbeit findet immer wieder der Quark-Propagator in der Ortsraumdarstellung Verwendung, so z.B. bei der Bestimmung der Korrelationsfunktion zwischen dem nukleoninterpolierenden Strom und dem elektromagnetischen Strom (4.18). Die Form dieses Propagators soll unter Berücksichtigung der Einflüsse des Gluon-Hintergrundfeldes in führender und nächster Ordnung bestimmt werden und dafür beginnen wir mit folgender Definition.

Der Quark-Propagator ist als Fermionpropagator das zeitgeordnete Produkt zweier Dirac-Feldoperatoren,

$$iS(x, y) = \langle 0|T\{q(x)\bar{q}(y)\}|0\rangle. \quad (\text{C.8})$$

Der Propagator beschreibt die Erzeugung eines Fermions am Ort y mit anschließender Vernichtung am Ort x . Formal ist $iS(x, y)$ als Greensfunktion eine Fundamentallösung der Dirac-Gleichung im externen Vakuumfeld $A_\mu(x) = A_\mu^A(x)t^A$,

$$(i\partial_x^\mu\gamma_\mu + gA^\mu(x)\gamma_\mu - m)iS(x, y) = i\delta(x - y). \quad (\text{C.9})$$

Für schwache externe Felder läßt sich der Propagator in eine Reihe mit zunehmender Anzahl an Wechselwirkungen mit dem externen Gluonfeld entwickeln,

$$\begin{aligned} iS(x, y) &= iS^{(0)}(x - y) + g \int d^4z iS^{(0)}(x - z)i\hat{A}(z)iS^{(0)}(z - x) \\ &+ g^2 \int d^4z' dz iS^{(0)}(x - z')i\hat{A}(z')iS^{(0)}(z' - z)\hat{A}(z)iS^{(0)}(z - x) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Hier bezeichnet $iS^{(0)}(x - y)$ den freien Dirac-Operator. Grafisch läßt sich die Entwicklung (C.10) auch wie folgt darstellen,

Abbildung C.1: Der Quark-Propagator im externen Gluonfeld

Für die Festlegung der Form des Propagators verwenden wir, dass in dieser Arbeit nur die leichten Quarks u und d verwendet wurden, deren Massen mit einigen

MeV vernachlässigt werden können gegenüber der hadronischen Skala $\mu \sim 1$ GeV. Damit kann die Masse in (C.9) vernachlässigt werden. In nullter Ordnung kann der Propagator freier, masseloser Fermionen in die Ortsraumdarstellung transformiert werden und erhält dort eine ähnlich einfache Struktur wie in der Impulsraumdarstellung,

$$\begin{aligned} iS^{(0)}(x, y) &= iS^{(0)}(x - y) \\ &= i \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{ip(x-y)} \frac{i}{\not{p}} \\ &= \frac{i\Gamma(d/2)}{2\pi^{(d/2)}} \frac{(x-y)_\mu \gamma^\mu}{(-(x-y)^2)^{(d/2)}}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Um den Term erster Ordnung zu bestimmen, nutzen wir die in vorigen Abschnitt behandelte Entwicklung des Eichfeldes (C.7). Betrachtet wird die Entwicklung bis zu Termen linear in $G_{\rho\mu}$,

$$A_\mu(x)\gamma^\mu = \frac{1}{2}x^\rho G_{\rho\mu}(0)\gamma^\mu. \quad (\text{C.12})$$

Setzt man (C.12) in die die Reihenentwicklung des Propagators (C.10) ein, so erhält man die erste Ordnung der Propagatorentwicklung,

$$iS^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2}gG_{\rho\mu}(0) \frac{1^3\Gamma(d/2)}{4\pi} \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\beta \int d^d z \frac{(x-z)^\alpha (z-y)^\beta z^\rho}{(-(x-z)^2)^{d/2} (-(z-y)^2)^{d/2}}. \quad (\text{C.13})$$

Um das Standardintegral zu lösen, folgt man dem in Renormierungsrechnungen üblichen Verfahren. Auf das Wesentliche Beschränkt lautet das zu betrachtende Integral,

$$I := \int d^d z \frac{(x-z)^\alpha (z-y)^\beta z^\rho}{(-(x-z)^2)^{d/2} (-(z-y)^2)^{d/2}}. \quad (\text{C.14})$$

Als ersten Schritt führt man die sogenannten Feynmann Parameter ein, die wie folgt definiert sind,

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{a_i^{A_i}} = \frac{\Gamma(A)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(A_i)} \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^n dx_i x_i^{A_i-1} \right) \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)}{[\sum_{i=1}^n x_i a_i]^A}, \quad (\text{C.15})$$

mit $A = \sum_{i=1}^n A_i$. Mit Hilfe dieser Parametrisierung verschwindet das Produkt aus dem Nenner von (C.14),

$$I = \frac{\Gamma(d)}{(-1)^d \Gamma^2(d/2)} \int_0^1 du (u\bar{u})^{d/2-1} \int d^d z \frac{(x-z)^\alpha (z-y)^\beta z^\rho}{(u(x-z)^2 + \bar{u}(z-y)^2)^d}. \quad (\text{C.16})$$

Zwischen den beiden Feynmann Parametern u, \bar{u} besteht dabei die Beziehung $u + \bar{u} = 1$. Im nächsten Schritt substituiert man mit $l = z - (ux + \bar{u}y)$ und aus dem z -Integral in Gleichung (C.16) wird,

$$\int d^d l \frac{(\bar{u}(x-y) - l)^\alpha (l + u(x-y))^\beta (l + ux + \bar{u}y)^\rho}{(l^2 + u\bar{u}(x-y)^2)^d}. \quad (\text{C.17})$$

Nach einer Wick-Rotation ²,

$$\int d^d l = -i \int d^d l_E, \quad (\text{C.18})$$

erhält man ausschließlich Standarintegrale (siehe [74]) der Form,

$$\begin{aligned} \int d^d l_E \frac{1}{(l_E^2 + u\bar{u}x_E^2)^A} &= -i\pi^{d/2} (u\bar{u}x_E^2)^{d/2-A} \frac{\Gamma(A-d/2)}{\Gamma(A)}, \\ \frac{1}{d} \int d^d l_E \frac{l^2}{(l_E^2 + u\bar{u}x_E^2)^A} &= -i\pi^{d/2} (u\bar{u}x_E^2)^{d/2+1-A} \frac{\Gamma(A-d/2-1)}{2\Gamma(A)}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Die verbleibenden u -Integration lassen sich mittels der Darstellung der Beta-Funktion,

$$\int_0^1 du u^{A-1} \bar{u}^{B-1} = \frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)}, \quad u + \bar{u} = 1, \quad (\text{C.20})$$

ausführen und man erhält als Lösung zu (C.13) den Quark-Propagator in erster Ordnung,

$$\begin{aligned} iS^{(1)}(x, y) &= -\frac{\Gamma(d/2)}{4\pi^{(d/2)}(-x-y)^2)^{d/2}} (\hat{x} - \hat{y}) y^\rho gG_{\rho\mu}(0) x^\mu \\ &+ \frac{i\Gamma(d/2-1)}{32\pi^{d/2}(-x-y)^2)^{(d/2-1)}} [(\hat{x} - \hat{y})\gamma^\mu \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\mu (\hat{x} - \hat{y})] gG_{\rho\mu}(0). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

An sich müsste der Quark-Propagator in jeder Ordnung noch mit Farbindizes versehen werden. Der Vollständigkeit halber sei hier der eingehende Gluon-Propagator mit seinen Farbindizes angegeben, $gG_{\rho\mu}(0) = gG_{\rho\mu}^A(0)t_{ab}^A$, mit den Generatoren, t_{ab}^A , der Farbgruppe. Bei einem Vergleich von (C.11) und (C.21) fällt auf, dass der Propagator 1.Ordnung nicht mehr translationsinvariant ist, $S^{(1)}(x, y) \neq S^{(1)}(x-y)$. Letzteres ist ein direkter Effekt der nicht translationsinvariant gewählten Eichung. durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystems, z.B. $x = 0$, läßt sich damit Gleichung (C.21) noch weiter vereinfachen.

²Man beachte bei der Wick-Rotation, dass sie das Produkt xp invariant läßt. Aus diesem Grund gilt für das dazu gehörende Integrationsmaß im Impulsraum $\int dp = i \int dp_E$.

C.3 Der Gluon Propagator im äußeren Feld

In diesem Abschnitt seien noch die analogen Formeln für den Gluon-Propagator im Hintergrundfeld angeben. Auch dieser läßt sich in eine Reihe bezüglich der Anzahl seiner Wechselwirkungen mit dem Feld entwickeln, die sich grafisch wie folgt darstellen läßt.

Abbildung C.2: Der Gluon-Propagator im externen Gluonfeld

Der Ausdruck für den freien Gluon-Propagator bestimmt sich analog zu (C.11) und lautet,

$$\langle 0|T\{A_\mu^A(x)A_\nu^B(y)\}|0\rangle^{(0)} = -\frac{g_{\mu\nu}\delta^{AB}}{4\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(d/2-1)}{(-(x-y)^2)^{d/2-1}}. \quad (\text{C.22})$$

In erster Ordnung in der Entwicklung des Propagators im äußeren Feld ist der Propagator gegeben durch,

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{A_\mu^A(x)A_\nu^B(y)\}|0\rangle^{(1)} &= \frac{\Gamma(d/2-2)}{8\pi^{d/2}(-(x-y)^2)^{d/2-1}} g G_{\mu\nu}^{AB}(0) \\ &+ \frac{\Gamma(d/2-1)}{8\pi^{d/2}(-(x-y)^2)^{d/2-1}} g_{\mu\nu} y^\rho g G_{\rho\sigma}^{AB}(0) x^\sigma. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Hierbei steht $G_{\mu\nu}^{AB}(0)$ für $G_{\mu\nu}^{AB} = f^{ABC} G_{\mu\nu}^C$. Auch für den Gluon-Propagator gilt ebenso wie für den Quark-Propagator, dass beide aufgrund der Wahl der Eichung in erster Ordnung nicht translationsinvariant formuliert werden können. Deshalb läßt sich auch (C.23) durch eine Wahl des Koordinatensystems mit $x = 0$ noch vereinfachen.

C.4 Eichfaktoren des Quark-Quark Matrixelements

Bei der Einführung des Quark-Propagators haben wir das Zugeständnis der Lokalität in nullter Näherung gemacht. Für das zeitgeordnete Produkt zweier lokaler

Quarkfelder gilt jedoch nicht ohne weiteres die lokale Eichinvarianz bezüglich der Farbeichgruppe $SU(3)$, mit der Eichtransformation

$$q(x) \rightarrow U(x, y)q(y). \quad (\text{C.24})$$

Um die Eichinvarianz des direkten Produktes zweier Quarkfelder an verschiedenen Orten x, y gewährleisten zu können müssen zwei Bedingungen vorausgesetzt werden. Zum einen gilt in den nichtabelschen Yang-Mills Theorien die Lokalität der Eichfelder nur bei kleinen Abständen und zum anderen folgt daraus, dass die Eichfunktion $U(x, y)$ so beschaffen sein muss, dass sie die Eichinvarianz des Produktes der Quarkfelder für alle Wege zwischen x und y gewährleistet und das gleiche Transformationsverhalten wie die kovariante Ableitung der Bewegungsgleichung besitzt. Speziell muss natürlich noch $U(x, x) = 1$ gelten³.

Für den Fall der skalaren Eichung gegebener Feldoperatoren

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\Psi(x), \quad (\text{C.25})$$

mit der lokalen Eichphase $\alpha(x)$, konstruiert man ausgehend vom Eichpotential A_μ und dessen Transformationsverhaltens,

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \quad (\text{C.26})$$

die Eichfaktoren so, dass sie der Eichtransformation,

$$U(x, z) \rightarrow e^{i\alpha(x)}U(x, y)e^{-i\alpha(y)}, \quad (\text{C.27})$$

genügen. Im skalaren Fall ist die Eichfunktion $U(z, y)$ allgemein gegeben durch den Exponenten des Pfadintegrals über das Eichfeld auf allen Wegen von y nach z ,

$$U(z, y) = \exp\left\{-ie \int_P dx^\mu A_\mu(x)\right\}. \quad (\text{C.28})$$

Mittels dieser Eichfunktion ergibt sich dann für sehr kleine Abstände die gewohnte kovariante Ableitung (hier in Richtung n^μ),

$$\begin{aligned} n^\mu D_\mu \Psi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\Psi(x + n\epsilon) - U(x + n\epsilon, x)\Psi(x)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\Psi(x + n\epsilon) - (1 - ie n^\mu \epsilon A_\mu(x) + \dots)\Psi(x)] \\ &= n^\mu [\partial_\mu + ie A_\mu(x)]\Psi(x). \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

³Je nach Eichung bezeichnet die 1 entweder einen Skalar oder eine Einheitsmatrix

Man beachte, dass hier noch keine Aussage über das Vorzeichen der Kopplungskonstante e gemacht wurde, weshalb es bei negativer Definition von e in der QED zu einem Vorzeichenwechsel beim Verbindungsterm kommt.

Für den nichtabelschen Fall wäre man im ersten Moment versucht, einfach die Ersetzung $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^A(x)t^A$ in Gleichung (C.28) durchzuführen. Dieses ist jedoch nicht korrekt, zumal die betrachteten Matrizen nicht notwendiger Weise an den einzelnen Raumpunkten auch kommutieren. Die korrekte Vorschrift zum Anordnen der einzelnen Pfade lautet wie folgt. Man parametrisiert den Weg zwischen x und y durch einen Parameter t , der stetig die Werte von 0 ($z = y$) bis 1 ($z = x$) durchläuft. Die Wilson-Linie wird dann als Potenzreihe der Exponentialfunktion definiert, wobei die Matrizen in jedem Term so angeordnet sind, dass sie für größere Werte von t weiter links stehen. Allgemein läßt sich die Eichfunktion wie folgt notieren,

$$U(x, y) = P \exp\left[ig \int_0^1 dt \frac{dz^\mu}{dt} A_\mu^A(z(t))t^A\right]. \quad (\text{C.30})$$

Für den Fall des in Kapitel 2 betrachteten Matrixelements dreier kollinearer Quarks vereinfacht sich die Eichfunktion noch zusätzlich, da der Weg zwischen den einzelnen Quarkfeldern ohne einschränkung linear gewählt werden kann. Die pfadgeordnete Eichfunktion hat dann die in Gleichung (2.4) angegebene Form,

$$U(x, y) := [x, y] = P \exp \left[\int_0^1 dt \quad (x - y)_\mu \mathbf{A}^\mu(tx + (1 - t)y) \right] \quad (\text{C.31})$$

Das Einfügen der Eichfunktionen stellt damit die Eichinvarianz des direkten Produktes dreier fermionischer Operatoren wie in (2.3) sicher ⁴.

⁴Zum allgemeinen Beweis der Eichinvarianz siehe z.B. [74] oder [10].

Anhang D

Isospin

Ausgangspunkt für die Einführung des Isospin-Formalismus ist der Umstand, dass die starken Wechselwirkungen auf atomaren Skalen nicht zwischen Protonen und Neutronen unterscheiden. Für sie gibt es nur das Nukleon und in Analogie zu den zwei Spin-Einstellungen eines Elektrons im magnetischen Feld fasst man das Proton und das Neutron als die zwei Einstellungen des Spins eines Nukleons auf.

Bezeichnet man mit ψ_N die Wellenfunktion eines Nukleons als Dirac-Teilchen, so kann man die Proton- und Neutron-Wellenfunktion als Produkt aus ψ_N und einem „Isospinor“ schreiben,

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

Eine Isospin-Transformation wird durch eine unitäre 2×2 Matrix U vermittelt,

$$|N'\rangle = U|N\rangle. \quad (\text{D.2})$$

Aus der Unitarität der Matrix U ($UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{E}_2$) folgt die Phaseneigenschaft ihrer Determinante,

$$\det(UU^\dagger) = |\det(U)|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(U) = \exp(i\alpha). \quad (\text{D.3})$$

Die Matrix U wirkt nur auf den Isospinor $|N\rangle$ und vertauscht mit der Wellenfunktion des Nukleons ψ_N . Aus diesem Grund darf man U auf die gesamte Proton- bzw. Neutron-Wellenfunktion anwenden.

Die Menge aller 2×2 Matrizen U , mit $\det(U) = 1$, bilden die Darstellung der Gruppe $SU(2)$ mit der kleinstmöglichen Dimension. Betrachtet man infinitesimale

Transformationen,

$$U := \mathbb{E}_2 + i\eta, \quad (\text{D.4})$$

so folgt aus $UU^\dagger = \mathbb{E}_2$, dass die Matrizen η hermitisch sind. Die Eigenschaft der Determinante von U (D.3) bestimmt die Spurlosigkeit der Matrizen η . Es existieren genau drei linear unabhängige, hermitische 2×2 Matrizen mit Spur 0, die zusammen mit der Einheitsmatrix \mathbb{E}_2 die $SU(2)$ erzeugen. Symbolisch schreibt man dafür auch $2 \otimes 2 = 1 \oplus 3$. Üblicher Weise wählt man für die Matrizen η die drei Pauli-Matrizen und bezeichnet sie mit τ_i , um Verwechslungen mit den Spin-Matrizen σ_i vorzubeugen,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

Aus den τ_i können die Matrizen U und η wie folgt aufgebaut werden,

$$\eta = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cdot \tau_1 + \varepsilon_2 \cdot \tau_2 + \varepsilon_3 \cdot \tau_3), \quad U = \mathbb{E}_2 + \frac{i}{2}\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\tau}. \quad (\text{D.6})$$

Sei α ein endlicher Drehwinkel im Isospin-Raum, dann wird $\varepsilon = \alpha/n$ für hinreichend großes infinitesimal klein und man kann die gesuchte endliche Transformation durch n infinitesimale darstellen:

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E}_2 + \frac{i}{2} \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}{n} \right)^n = \exp \left(\frac{i}{2} \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} \right). \quad (\text{D.7})$$

Eine endliche Transformation entspricht einer Phasentransformation der Wellenfunktion,

$$\psi' = \exp \left(\frac{i}{2} \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau} \right) \psi. \quad (\text{D.8})$$

Aus Kombinationen der Isospin-Matrizen (D.5) lassen sich Auf- und Absteigeoperatoren auf dem Isospin-Raum definieren,

$$\tau_{\pm} := \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2), \quad (\text{D.9})$$

so dass

$$\tau_3|p\rangle = |p\rangle, \quad \tau_3|n\rangle = -|n\rangle, \quad \tau_-|p\rangle = |n\rangle, \quad \tau_+|n\rangle = |p\rangle. \quad (\text{D.10})$$

Der Absteigeoperator τ_- angewandt auf den Neutronzustand hat den Eigenwert Null und ebenso der Aufsteigeoperator τ_+ angewandt auf den Protonzustand. In

Abhängigkeit von der Isospin-Matrix τ_3 und der Baryonenzahl $B = 1$ definiert man die Ladung des Nukleons,

$$Q = \frac{1}{2}(B\mathbb{E}_2 + \tau_3). \quad (\text{D.11})$$

Vollständig analog läßt sich der Isospin-Formalismus auf das Isoduplet des u - und d -Quarks übertragen, indem man das Proton durch das u -Quark ersetzt und das Neutron durch das d -Quark. Die Baryonzahl beträgt für das Quark-Isoduplet $B = 1/3$.

Anhang E

QCD Summenregeln

In diesem Anhang sollen die wesentlichen Ideen und Konzepte der in dieser Arbeit oft verwandten Methode der QCD Summenregeln am Beispiel der Berechnung des Absolutbetrages des in Gleichung (2.70) definierten nichtperturbativen Parameters λ_1 erläutert werden.

Die ursprüngliche Formulierung der Methode der QCD Summenregeln geht auf [64, 76] zurück. Ihr Ziel ist es, ausgehend von der Lagrangefunktion der QCD und einer phänomenologischen Beschreibung des QCD Vakuums, Eigenschaften der Hadronen, wie zum Beispiel Massen, Formfaktoren, Zerfallsbreiten oder Strukturfunktionen, zu berechnen.

In QCD Summenregelberechnungen werden Hadronen zum einen durch interpolierende Ströme aus Quarkfeldern bei großen virtuellen Energien dargestellt. Zum anderen nutzt man die Beschreibung der Hadronen mittels Dispersionsrelationen und stellt in einem mittleren Energiebereich beide Beschreibungen einander gegenüber. Das Zentrale Objekt ist hierbei die in Kapitel 4 eingeführte Korrelationsfunktion des jeweiligen Prozesses.

Diese Korrelationsfunktionen werden bei QCD Summenregel-Rechnungen im Rahmen der Wilson-Operator-Produkt-Entwicklung (OPE) näher betrachtet, wobei die kurz- und langreichweitigen Quark-Gluon-Wechselwirkungen separiert werden können. Erstere können dann mit den Methoden der störungstheoretischen QCD berechnet werden und letztere werden mittels universeller Vakuumkondensate oder Lichtkegel Distributionsamplituden parametrisiert. Die Ergebnisse der QCD Berechnung können dann über eine Dispersionsrelation einer Summe über alle hadronischen Zustände gleichgesetzt werden.

Die Summenregeln, die man auf diese Weise erhält, erlauben es, die Eigenschaften des jeweiligen hadronischen Grundzustandes zu berechnen. Sehr wichtig ist dabei, dass die Wechselwirkungen von Quark-Gluon Strömen mit QCD Vakuumfeldern direkt von den Quantenzahlen der jeweils verwendeten Ströme abhängt. Aus diesem Grund ist man durch die Formulierung von Hadronen über interpolierende Ströme in der Lage zu verstehen, weshalb Hadronen mit unterschiedlichen Quantenzahlen nicht die gleichen Eigenschaften haben.

Die Methode der QCD Summenregeln ist eine der verlässlichsten, wann immer ein unbekannter hadronischer Parameter bestimmt werden soll.

E.1 Herleitung der Dispersionsrelation

Zur Diskussion der Methode beziehen wir uns auf den Korrelator zweier Drei-Quark-Ströme.

$$T(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \eta_I(x) \bar{\eta}_I(0) \} | 0 \rangle. \quad (\text{E.1})$$

Der Strom, η_I , wie er in Gleichung (2.70) eingeht wurde zuerst von B.L.Ioffe untersucht und zur Berechnung der Massen der leichten Baryonen via QCD Summenregeln verwendet [26, 27]. Dieser Strom und sein Antistrom sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \eta_I(x) &= (u_\alpha^i(x) C \gamma_\mu u_\beta^j(x)) \gamma_5 \gamma^\mu d_\gamma^k(x) \epsilon^{ijk} \\ \bar{\eta}_I(x) &= \bar{d}_\gamma^k(x) \gamma_\mu \gamma_5 (\bar{u}_\beta^j(x) C \gamma_\mu \bar{u}_\alpha^i(x)) \epsilon^{ijk}. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Normiert werden die Ströme bezüglich ihrer Nukleon-zu-Vakuum Matrixelemente

$$\langle 0 | \eta_I(0) | P \rangle = \lambda_1 M N(P), \quad \langle P | \bar{\eta}_I(0) | 0 \rangle = \lambda_1^* M \bar{N}(P), \quad (\text{E.3})$$

in die der nicht perturbative Parameter λ_1 als Kopplungskonstante für das Nukleon an den Strom η_I eingeht. Um die Dispersionsrelation abzuleiten, wird zuerst das zeitgeordnete Produkt der beiden Stromoperatoren in Gleichung (E.1) durch zwei Θ -Funktionen dargestellt,

$$T \{ \eta_I(x) \bar{\eta}_I(0) \} = \Theta(x_0) \eta_I(x) \bar{\eta}_I(0) + \Theta(-x_0) \bar{\eta}_I(0) \eta_I(x). \quad (\text{E.4})$$

Im nächsten Schritt fügt man einen vollständigen Satz von Einteilchenzuständen unterschiedlicher Helizität λ in das Stromprodukt ein

$$1 = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} |k, \lambda\rangle \langle k, \lambda|. \quad (\text{E.5})$$

Der niedrigste Zustand erfüllt dabei die Massenschalenbedingung $k^2 = m^2$. Mit Hilfe des Translationsoperators läßt sich die Ortsabhängigkeit von den Strömen innerhalb der Matrixelemente separieren,

$$\eta_I(x) = e^{ipx} \eta_I(0) e^{-ipx} \quad (\text{E.6})$$

und man erhält für den Korrelator (E.1) nach dem Ausführen der Ortsintegration

$$\begin{aligned} T(q) = i \int dx_0 \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{2k_0} \\ \left[\Theta(x_0) e^{i(q_0 - k_0)x_0} \langle 0 | \eta_I | k, \lambda \rangle \langle k, \lambda | \bar{\eta}_I | 0 \rangle \delta(\vec{q} - \vec{k}) \right. \\ \left. + \Theta(-x_0) e^{i(q_0 + k_0)x_0} \langle 0 | \bar{\eta}_I | k, \lambda \rangle \langle k, \lambda | \eta_I | 0 \rangle \delta(\vec{q} + \vec{k}) \right]. \quad (\text{E.7}) \end{aligned}$$

Mit der Integraldarstellung der Θ -Funktion,

$$\Theta(x_0) = \frac{-1}{2\pi i} \int d\omega \frac{e^{-i\omega x_0}}{\omega + i\epsilon}, \quad (\text{E.8})$$

lassen sich die verbleibenden Integrationen ausführen. Trennt man sich noch von unphysikalischen Anteilen ($k = -q$), so ergibt sich,

$$T(q) = \sum_{\lambda} \frac{1}{2k_0} \frac{1}{(q_0 - k_0) + i\epsilon} \langle 0 | \eta_I | k, \lambda \rangle \langle k, \lambda | \bar{\eta}_I | 0 \rangle \Big|_{\vec{k}=\vec{q}}. \quad (\text{E.9})$$

Über die Massenschalenbedingung, $k^2 = m^2$,

$$\begin{aligned} k^2 = m^2 &\Rightarrow m^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = k_0^2 - (q_0^2 - q^2) \\ &\Rightarrow m^2 - q^2 = k_0^2 - q_0^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{q_0 - k_0} = \frac{2k_0}{m^2 - q^2}, \quad (\text{E.10}) \end{aligned}$$

die Spinor-Projektion $\sum_{\lambda} \bar{N} N = \hat{q} + M$ und die Normierungsbedingung der Ströme erhält man die Darstellung des Korrelators als Dispersionsrelation

$$i \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | \eta_I(x) \bar{\eta}_I(0) | 0 \rangle = |\lambda_1|^2 M^2 \frac{(\hat{q} + M)}{M^2 - q^2} + \dots \quad (\text{E.11})$$

Die Punkte auf der rechten Seite von Gleichung (E.11) stehen für angeregte Zustände und den Kontinuumsbeitrag. Speziell gilt diese Dispersionsrelation nur für den niedrigsten betrachteten Zustand, in diesem Fall der des Protons. Um Komplikationen bei der Aufstellung der Summenregeln auszuschließen, wird es notwendig sein, einen Kontinuums-Cutoff s_0 einzuführen und Beimischungen aus höheren Resonanzen und Kontinuumstermen zu unterdrücken. Die Unterdrückung wird durch Anwenden der Boreltransformation (siehe Abschnitt E.3) erreicht.

E.2 Operator-Produkt-Entwicklung und Vakuum-Kondensate

Die Auswertung der Korrelationsfunktion (E.1) von der theoretischen (QCD) Seite her, geschieht im Rahmen der Operator-Produkt-Entwicklung (OPE). Dabei trennt die OPE die Anteile des Produktes der beiden Ströme in (E.1) in die kurzreichweitigen und die langreichweitigen Quark-Gluon-Wechselwirkungen. Erstere werden mittels der QCD Störungstheorie bestimmt und letztere werden hier durch universelle Vakuum-Kondensate, sonst aber auch durch Lichtkegel-Distributionsamplituden parametrisiert ¹. Die OPE faktorisiert das Produkt zweier Operatoren in divergente Koeffizientenfunktionen $C_i(x)$, die auftreten da das Produkt von zwei Operatoren am selben Raum-Zeit-Punkt nicht frei von Divergenzen definiert werden kann und in lokale Operatoren, die nicht mehr von x abhängen,

$$\int dx e^{iqx} T\{\eta_I(x)\eta_I(0)\} = \int dx e^{iqx} \sum_i C_i(x, \mu^2) O_i(\mu^2) = \sum_i C(q, \mu^2) O_i(\mu^2). \quad (\text{E.12})$$

Der eingeführte Faktorisierungspunkt μ^2 trennt die beiden Bereiche der OPE. Die Koeffizientenfunktionen sind nur sensitiv auf den Bereich $Q^2 > \mu^2$. Die lokalen Operatoren umfassen die Beiträge von Impulsen kleiner als μ^2 . Man beachte dabei, dass diese Entwicklung unabhängig von den Zuständen formuliert wurde, zwischen denen das Operatorprodukt eingebunden ist. Die Koeffizienten $C_i(x, \mu^2)$ als reine c-Zahlen sind damit prozessunabhängig, ganz gleich ob man ein Nukleon-zu-Vakuum Matrixelement oder ein Nukleon-zu-Nukleon Matrixelement betrachtet. Die Prozessabhängigkeit ist einzig und allein in den Operatoren wiederzufinden. Als Faktorisierungspunkt wird der QCD im allgemeinen die hadronische Skala $\mu^2 = 1 \text{ GeV}^2$ gewählt. Die im kurzreichweitigen Bereich angesiedelten Koeffizientenfunktionen werden störungstheoretisch berechnet und die Matrixelement der Operatoren sind nur nicht perturbativen Methoden zugänglich. Für die Bestimmung der Matrixelemente der Operatoren stehen entweder Modelle, wie das MIT Bag-Modell, Berechnungen via Gittereichtheorien, Berechnungen über QCD-Summenregeln oder aber experimentelle Daten zur Disposition. Die O_i 's die auftreten können müssen dabei Quantenzahlen besitzen, die denen der

¹siehe Kapitel 4

Ströme η_I und $\bar{\eta}_I$ auf der linken Seite von (E.12) entsprechen.

Im vorliegenden Fall werden die Forderungen an die physikalischen Zustände, deren Matrixelemente in die OPE eingehen, besonders einfach, da die Operatoren zwischen zwei Vakuumzustände eingebunden sind. Die Operatoren müssen folglich die Quantenzahlen des Vakuums tragen und hier insbesondere Spin-0, so wie positive Parität. Die gesuchten lokalen Operatoren können nach ihren naiven Dimensionen geordnet werden ($\dim[q] = 3/2$, $\dim[G_{\mu\nu}] = 2$, $\dim[m] = 1$) und sind bis zur Dimension 6 durch folgenden Satz gegeben,

$$\begin{aligned}
d = 0 & \quad , \quad \mathbf{1} , \\
d = 4 & \quad , \quad m\bar{q}q , \\
d = 4 & \quad , \quad G_{\mu\nu}^A G_{A\mu\nu} , \\
d = 6 & \quad , \quad \bar{q}\Gamma q\bar{q}\Gamma q , \\
d = 6 & \quad , \quad m\bar{q}\sigma_{\mu\nu}t^A q G_{\mu\nu}^A , \\
d = 6 & \quad , \quad f_{ABC} G_{\mu\nu}^A G_{\nu\rho}^B G_{\rho\mu}^C .
\end{aligned} \tag{E.13}$$

Andere Operatoren der Dimension 3 bis 6 lassen sich mittels der QCD Bewegungsgleichungen immer auf die in (E.13) angegebenen zurückführen. Da Operatoren höherer Dimension im QCD-Vakuum nur kleine numerische Beiträge liefern [75, 77], können diese über Faktorisierung auf Produkte von Operatoren aus (E.13) zurückgeführt werden. Als ein Beispiel sei hier der Vakuum-Erwartungswert des Spin-0 Vier-Quark-Operators genannt, der wie folgt approximiert wird,

$$\langle 0 | \bar{q}\Gamma_i q \bar{q}\Gamma_j q | 0 \rangle \simeq \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle^2 Tr(\Gamma_i \Gamma_j) . \tag{E.14}$$

Die OPE reduziert damit das unbekannte Produkt der beiden Ströme (E.12) auf die universellen Vakuum-Erwartungswerte von nur vier Operatoren. Da das Drei-Gluon-Kondensat nur sehr selten auftritt, sind es in den meisten Fällen nur drei. Für eine freie Feldtheorie verschwinden per definitionem die Vakuum-Erwartungswerte der Operatoren in (E.12). In der QCD hingegen wird die Natur des Vakuums von nicht perturbativen Effekten so verändert, dass die Induzierung nicht verschwindender Vakuumkondensate der Veränderung der freien Quark- und Gluon-Propagatoren Rechnung trägt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von dem QCD-Vakuum. Auf diese Weise parametrisieren die Vakuum-Erwartungswerte den Bereich großer Abstände und enthalten alle nicht perturbativen Beiträge.

Die Koeffizientenfunktionen lassen sich damit rein störungstheoretisch in einer Entwicklung der Kopplungskonstanten α_s im Rahmen der diagrammatischen Technik der Feynmann-Grafen berechnen.

Für die praktische Rechnung beginnt man mit der Operatordarstellung der beiden Ströme (E.2) und erhält unter Anwendung des Wickschen Theorems eine Einteilung in Terme bestehend aus normal geordneten Produkten von Operatoren und Propagatoren. Der Beitrag der Propagatoren wird mit den Koeffizientenfunktionen $C_i(x, \mu^2)$ identifiziert und die normalgeordneten Quarkfeldoperatoren, die zwischen den Vakuum-Zuständen ausgewertet werden, bilden die nicht perturbativen Beiträge. Genau genommen handelt es sich jedoch bei dieser Zerlegung nicht um eine OPE im engeren Sinne, da hier nicht die Bereiche kurzer und langer Skalen getrennt wurden, sondern nur die perturbativen von den nicht perturbativen Anteilen. Die entstehenden Fehler fallen jedoch klein gegen die Unsicherheiten bei der Erstellung der Summenregeln aus und können deshalb vernachlässigt werden. Um die vorausgesetzte Lokalität der normalgeordneten Operatoren zu gewährleisten, entwickelt man die verbleibenden ortsabhängigen Quark-Felder in eine Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung,

$$q(x) = q(0) + x_\mu D^\mu q(x)|_{x=0} + \frac{1}{2!} x_\mu x_\nu D^\nu D^\mu q(x)|_{x=0} + \dots \quad (\text{E.15})$$

Der Term erster Ordnung verschwindet, da das Vakuum-Kondensat keinen äußeren Impuls zum Erhalt der Lorentz-Invarianz zur Verfügung stellt. Der Term zweiter Ordnung führt über die Bewegungsgleichung auf Beiträge zum Quark-Antiquark-Kondensat,

$$\langle 0 | \bar{q}_\delta^{k'} (D_\rho D_\sigma + D_\sigma D_\rho) q_\alpha^k | 0 \rangle = \frac{\delta^{k'k} \delta_{\delta\alpha}}{3 \cdot 2^4} g_{\rho\sigma} m_0^2 \langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle. \quad (\text{E.16})$$

Um das Matrixelement auswerten zu können benötigt man noch eine systematische Entwicklung der beteiligten Propagatoren vor dem Hintergrundfeld. Diese Entwicklung wird möglich, da der hier vorgestellte Ansatz die Vakuumstruktur nicht erklärt, sondern nicht perturbative Effekte nur parametrisiert und die nichtperturbativen Vakuumfluktuationen wie ein klassisches Feld behandelt. Damit werden können der Quark- und der Gluonpropagator in der Entwicklung vor diesem Hintergrundfeld berechnet werden. Die in der Fixpunkteichung gegebene explizite Form wurde bereits in Anhang C.1 angegeben [77].

Grafisch läßt sich die OPE des Korrelators (E.1) wie folgt veranschaulichen,

$$\begin{aligned}
 \text{Blue blob} &= \text{Diagram 1} + \\
 &\left\{ \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots \right\} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle + \\
 &\left\{ \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \dots \right\} \langle 0 | GG | 0 \rangle + \\
 &\left\{ \text{Diagram 6} + \dots \right\} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle^2 + \\
 &\left\{ \text{Diagram 7} + \dots \right\} \langle 0 | \bar{q}gGq | 0 \rangle + \dots \quad (\text{E.17})
 \end{aligned}$$

Die durchgezogenen Linien stehen für die freien Propagatoren und die unterbrochenen Linien für die Vakuum-Kondensate. Die gewundenen Linien stehen für Gluonen. Als Beispiel sei hier die Umsetzung eines Grafens mit einem Vakuum-Kondensat angegeben,

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram with } d, u, \bar{u} &= (C\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_5 \gamma^\mu)_{\gamma\sigma} (\gamma^\nu \gamma_5)_{\lambda\epsilon} (C\gamma_\nu)_{\rho\delta} \epsilon^{ijk} \epsilon^{i'j'k'} \\
 &\left\{ \overline{u_\alpha^i u_\beta^j \bar{u}_\rho^{j'} \bar{u}_\delta^{k'}} + \overline{u_\alpha^i u_\beta^j \bar{u}_\rho^{j'} \bar{u}_\delta^{k'}} \right\} \langle 0 | : \bar{d}_\lambda^{k'} d_\sigma^k : | 0 \rangle. \quad (\text{E.18})
 \end{aligned}$$

Die einzelnen Beiträge können damit berechnet werden und man erhält, wenn man sich auf Beiträge bis zur Dimension 6 beschränkt,

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= \frac{(-q^2)^2}{4(2\pi)^4} \log \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) \hat{q} \\
 \text{Diagram 2} &= \frac{(-q^2)^2}{(2\pi)^2} \langle \bar{q}q \rangle \log \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} \times \quad \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \end{array} &= \frac{2}{3} \langle \bar{q}q \rangle^2 \left(\frac{1}{-q^2} \right) \hat{q} \\
\begin{array}{c} \times \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \times \end{array} &= \frac{1}{2^7 \pi^4} \langle g^2 GG \rangle \log \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) \hat{q} \\
\begin{array}{c} \times \quad \times \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \end{array} &= -\frac{1}{2(2\pi)^2} \langle \bar{q}q \rangle \log \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) m_0^2. \tag{E.19}
\end{aligned}$$

In (E.19) wurden die Kondensate wie folgt parametrisiert,

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \bar{q}_\alpha^{i'} q_\beta^i | 0 \rangle &= -\frac{\delta^{i'i} \delta_{\alpha\beta}}{3 \cdot 2^2} \langle \bar{q}q \rangle \\
\langle 0 | g G_{\mu\nu}^A g G_{\alpha\beta}^B | 0 \rangle &= \frac{\delta^{AB}}{3 \cdot 2^5} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) \langle g^2 GG \rangle \\
\langle 0 | q_\alpha^i g G_{\mu\nu}^A \bar{q}_\beta^{i'} | 0 \rangle &= -\frac{1}{3 \cdot 2^6} m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle t_{ii'}^A [\sigma_{\mu\nu}]_{\alpha\beta} \tag{E.20}
\end{aligned}$$

Die in dieser Arbeit verwendeten numerischen Werte der hierbei auftretenden Kondensate sind die auf den Faktorisierungspunkt $\mu^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$ skalierten Standardwerte aus der Datenbank des ITEP,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{q}q \rangle &= (-0.257 \text{ GeV})^3 \\
\langle \frac{\alpha_s}{\pi} GG \rangle &= 0.012 \text{ GeV}^4 \\
\frac{\langle \bar{q}\sigma \cdot gGq \rangle}{\langle \bar{q}q \rangle} = m_0^2 &= 0.8 \text{ GeV}^2. \tag{E.21}
\end{aligned}$$

Die Kopplungskonstante der starken Kopplung ist für die Werte in (E.21) zu

$$\alpha_s(\mu^2/\Lambda^2) = \frac{g^2(\mu^2/\Lambda^2)}{4\pi} = 0.37, \tag{E.22}$$

mit $\Lambda = 150 \text{ MeV}$, bestimmt. Die Summenregel ergibt sich aus der Zusammensetzung von (E.11) und der Summe der Beiträge aus (E.19) bezüglich der Struktur \hat{q} . Diese Form wäre jedoch nicht die endgültige, da es notwendig ist sicher zu stellen, dass eventuell vorhandene Beiträge von anderen Resonanzen als dem Grundzustand systematisch unterdrückt werden. Dieses geschieht mittels einer Borel-Transformation.

E.3 Die Borel-Transformation

Die Analyse der Korrelationsfunktion (E.1) auf hadronischer Seite und theoretischer Seite führt auf die Aufstellung einer Summenregel, die beide Darstellungen miteinander verbindet. Um die Summenregel zu optimieren, wird auf beiden Seiten eine Borel-Transformation durchgeführt [64],

$$\mathfrak{B}[T(s)](M_B^2) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ s \rightarrow \infty \\ s/n = M_B^2}} \frac{s^{n+1}}{n!} \left(-\frac{d}{ds} \right)^n T(s), \quad s = -p^2. \quad (\text{E.23})$$

Die Borel-Transformation bringt folgende Verbesserungen. Auf der Seite der Dispersionsrelation werden alle unbekannt Subtraktionskonstanten zum Verschwinden gebracht. Jedes Polynom in s verschwindet. Beimischungen höherer Resonanzen werden exponentiell mit ihrer Masse unterdrückt. Auf der theoretischen Seite wird die Konvergenz der Entwicklung in $(1/s)$ durch eine faktorielle Wichtung mit $(1/n!)$ verbessert. Im einzelnen lauten die Transformationen, [75],

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \left[\frac{1}{s^n} \right] (M_B^2) &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{(M_B^2)^{n-1}} \\ \mathfrak{B} \left[\frac{1}{(M^2 + s)^n} \right] (M_B^2) &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{(M_B^2)^{n-1}} e^{-M^2/M_B^2} \\ \mathfrak{B} \left[s^n \log(s/\mu^2) \right] (M_B^2) &= (-1)^{n+1} n! (M_B^2)^{n+1} E_{n+1} \\ \mathfrak{B} \left[\frac{1}{s} \log(s/\mu^2) \right] (M_B^2) &= \log(M_B^2/\mu^2) + \gamma_E, \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

wobei γ_E die Eulersche Zahl ist. Die Funktion E_k ist wie folgt definiert,

$$E_k = 1 - e^{(-s_0/M_B^2)} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} \left(\frac{s_0}{M_B^2} \right)^l \quad (\text{E.25})$$

und s_0 ist die Kontinuumsgrenze im Modell der Spektraldichte.

Wählt man den Kontinuums-Cutoff bei $s_0 = 2.25 \text{ GeV}^2$, dass er das Spektrum unterhalb der Roper-Resonanz abschneidet, so erhält man die Summenregel für den Parameter λ_1 ,

$$\begin{aligned} 2(2\pi)^4 M^2 |\lambda_1|^2 = \exp(M^2/M_B^2) \left\{ M_B^6 E_3(s_0/M_B^2) + \frac{b}{4} M_B^2 E_1(s_0/M_B^2) \right. \\ \left. + \frac{a^2}{3} \left(4 - \frac{m_0^2}{M_B^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

Mit den in Kapitel 3.1 angegebenen Werten für den Borelparameter $1 \text{ GeV}^2 \leq M_B^2 \leq 2 \text{ GeV}^2$ läßt sich das Betragsquadrat des gesuchten Parameters zu $|\lambda_1| = 0.027 \pm 0.009 \text{ GeV}^2$ abschätzen.

Anhang F

Fouriertransformationen

Bei der Berechnung von Integrationen im Ortsraum, speziell bei der dimensionalen Regularisierung, treten immer wieder d -dimensionale Integrale der Form

$$\int d^d x e^{ipx} \frac{1}{(-x^2)^\alpha} = -i\pi^{d/2} \left(\frac{-p^2}{4}\right)^{\alpha-d/2} \frac{\Gamma(d/2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \quad (\text{F.1})$$

auf. In dieser Arbeit finden die im folgenden näher betrachteten Integrationen vor allem in Kapitel 4 ihre Anwendung bei der Erstellung der Summenregeln für die Formfaktoren des Nukleons.

Die zentrale Gleichung ist (F.1). Sie läßt sich wie folgt überprüfen. Als erstes führt man nach der üblichen Wick-Rotation einen sogenannten Schwinger Parameter u ein,

$$\frac{1}{(-x^2)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty du u^{\alpha-1} e^{-u(-x^2)}. \quad (\text{F.2})$$

Im einzelnen ergibt sich,

$$\int d^d x \frac{e^{ipx}}{(-x^2)^\alpha} = -i \int d^d x_E \frac{e^{ip_E x_E}}{(-x_E^2)^\alpha} = \frac{-i}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty du u^{\alpha-1} \int d^d x_E e^{-ux_E^2 + ip_E x_E}. \quad (\text{F.3})$$

Mittels quadratischer Ergänzung schreibt sich der x_E -Anteil als Gaußintegral, welches in d Dimensionen definiert ist als,

$$\int_{-\infty}^\infty d^d s e^{-as^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2}. \quad (\text{F.4})$$

Man erhält,

$$\int d^d x \frac{e^{ipx}}{(-x^2)^\alpha} = \frac{-i\pi^{d/2}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty du u^{\alpha-1-d/2} \exp\left(\frac{-p_E^2}{4u}\right) \quad (\text{F.5})$$

und ist nun in der Lage, das verbleibende, von u abhängige Integral nach der Substitution $t = P_E^2/(4u)$ als Gammafunktion zu schreiben, via

$$\int_0^\infty dt t^{y-1} e^{-t} = \Gamma(y). \quad (\text{F.6})$$

Der Letzte Schritt führt dann auf (F.1),

$$\begin{aligned} \int d^d x \frac{e^{ipx}}{(-x^2)^\alpha} &= \frac{-i\pi^{d/2}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dt \left(\frac{p_E^2}{4}\right)^{\alpha-d/2} \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+1-d/2} e^{-t} \\ &= -i\pi^{d/2} \left(\frac{p_E^2}{4}\right)^{\alpha-d/2} \frac{\Gamma(d/2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Aus (F.1) lassen sich nun weiter nützliche Relationen ableiten, indem beiden Seiten nach dem Parameter p_μ abgeleitet werden. Dabei gilt für die Gamma-Matrizen die auf d Dimensionen erweiterte Dirac-Algebra

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= d \\ \gamma_\mu \gamma^\mu &= d \\ \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2g_{\mu\nu} \\ \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] &= 4g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Man erhält nach einfacher Differentiation,

$$\int d^d x e^{ipx} \frac{x_\mu}{(-x^2)^\alpha} = -\frac{1}{2}\pi^{d/2} \left(\frac{-p^2}{4}\right)^{\alpha-1-d/2} \frac{\Gamma(d/2 + 1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} p_\mu, \quad (\text{F.9})$$

nach zweifacher,

$$\begin{aligned} \int d^d x e^{ipx} \frac{x_\mu x_\nu}{(-x^2)^\alpha} &= i\frac{1}{4}\pi^{d/2} \left(\frac{-p^2}{4}\right)^{\alpha-2-d/2} \\ &\left[\frac{\Gamma(d/2 + 2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} p_\mu p_\nu + \left(\frac{-p^2}{2}\right) g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(d/2 + 1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

nach dem dritten Differenzierungsschritt,

$$\begin{aligned} \int d^d x e^{ipx} \frac{x_\mu x_\nu x_\rho}{(-x^2)^\alpha} &= \frac{1}{8}\pi^{d/2} \left(\frac{-p^2}{4}\right)^{\alpha-3-d/2} \\ &\left[\frac{\Gamma(d/2 + 3 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} p_\mu p_\nu p_\rho \right. \\ &\left. + \left(\frac{-p^2}{2}\right) (g_{\mu\nu} p_\rho + g_{\mu\rho} p_\nu + g_{\rho\nu} p_\mu) \frac{\Gamma(d/2 + 2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

und als letztes noch die Formel nach dem vierfachen differenzieren nach nach p_μ ,

$$\begin{aligned}
\int d^d x e^{ipx} \frac{x_\mu x_\nu x_\rho x_\sigma}{(-x^2)^\alpha} &= i \frac{1}{16} \pi^{d/2} \left(\frac{-p^2}{4} \right)^{\alpha-4-d/2} \\
&\left[\frac{\Gamma(d/2 + 4 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{-p^2}{2} \right) (g_{\mu\nu} p_\rho p_\sigma + g_{\mu\rho} p_\nu p_\sigma + g_{\rho\nu} p_\mu p_\sigma + g_{\sigma\nu} p_\rho p_\mu) \frac{\Gamma(d/2 + 3 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \right] \\
&\quad \left. + \left(\frac{-p^2}{2} \right)^2 (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \frac{\Gamma(d/2 + 2 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \right]. \quad (\text{F.12})
\end{aligned}$$

Danksagung

Sehr herzlich möchte ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. V.M. Braun für die Aufnahme in sein internationales QCD-Team bedanken, sowie für seinen fundierten wissenschaftlichen Rat, der jeder Zeit zugänglich war. Es war für mich eine große Bereicherung unter seiner Leitung diese Arbeit anfertigen zu können.

Weiterhin bedanke ich mich bei Dr. habil. E. Stein für die kurzen und längeren Diskussionen in denen ich immer von seinem Verständnis der Physik und seiner Intuition habe profitieren können und natürlich für das Erdbeereis.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. A. Schäfer, für sein dauerhaftes Engagement zur Förderung der Physik und die Unterstützung, sowie die Förderung des Linux Administrationsteams.

Nicht vergessen möchte ich alle Mitglieder der Arbeitsgruppen Braun und Schäfer, einschließlich der Sekretärinnen G. Heyer und M. Maschek, die ein aktives und lebendiges Umfeld für die Physik boten. Ganz besonders gilt mein Dank auch Dr. A. Lenz, dessen Ruhe und Professionalität mir ein Vorbild waren, sowie meinem Zimmerkollegen Dr. Heribert Weigert, der immer ein offenes Ohr hatte und oft den entscheidenden physikalischen oder netzwerkinternen Hinweis zur richtigen Zeit gab, als auch bei manch einer Linuxneuerung das Leid der Bugs mit mir teilte.

Danken möchte ich auch den stillen Kräften, die sich in so vielen Stunden um den reibungslosen Ablauf des Physik-Netzwerkes bemühen, allen voran Dr. Fritz Wünsch und Rudolf Holzer, den verlässlichen Köpfen unseres Linux-Teams, sowie Dr. Holger Hehl für seine Professionalität und Freundschaft, Wolfgang Kugler, für seine Unterstützung und den großen Schritt die Betreuung alleine weiterzuführen, sowie den neuen/alten Herren des Linux-Bereiches, Christoph Bauer, Christian Guggenberger und Wolfgang Pulina, die bei mir noch mindestens eine Tüte Gummibärchen gut haben.

Persönlich geht mein Dank uneingeschränkt an meine Frau für ihre Unterstützung und den gemeinsamen Weg, sowie an meine Eltern, ohne die mein Studium nicht möglich gewesen wäre.

Literaturverzeichnis

- [1] Andivahis, L. et al., *Measurement of the electric and magnetic Form Factors of the Proton from $Q^2 = 1.75$ to 8.83 (GeV/c)²*, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 5491.
- [2] Lung, A. et al., *Measurement of the electric and magnetic Form Factors of the Neutron from $Q^2 = 1.75$ to 4.00 (GeV/c)²*, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 718.
- [3] C. Yang and R. Mills, *Conservation of isotropic Spin and isotropic Gauge Invariance*, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.
- [4] Chambers, E.E. and Hofstadter, R., *Structure of the Proton*, *Phys. Rev.* **103** (1956) 1454.
- [5] Brodsky, S.J. and Lepage, G.P., *Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics: The Form Factors of Baryons at large Momentum Transfer*, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 545.
- [6] G. Sterman and P. Stoler, *Hadronic Form Factors and perturbative QCD*, <http://arXiv.org/abs/hep-ph/9708370>.
- [7] Efremov, A.V. and Radyushkin, A.V., *Factorization and asymptotic Behaviour of Pion Form Factors in QCD*, *Phys. Lett. B* **94** (1980) 245.
- [8] Goldstein, J.S., *Properties of the Salpeter-Bethe Two-Nucleon Equation*, *Phys. Rev.* **91** (1953) 1516–1524.
- [9] Henriques, A.B. and Kellett, B.H. and Moorhouse, R.G., *General Three-Spinor Wave Functions and the Relativistic Quark model*, *Ann. Phys.* **93** (1975) 125–151.

- [10] Itzykson, C. and Zuber, J.B., *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, 1980.
- [11] J.B.Kogut and D.E.Soper, *Quantum Electrodynamics in the Infinite-Momentum Frame*, *Phys. Rev. D* **1** (1970) 2901.
- [12] Chernyak, V.L. and Zhitnitsky, I.R., *Nucleon Wave Function and Nucleon Form Factors in QCD*, *Nucl. Phys. B* **246** (1984) 52–74.
- [13] King I.D. and Sachrajda C.T., *Nucleon Wave Function and QCD Sum Rules*, *Nucl. Phys. B* **279** (1987) 785–803.
- [14] Chernyak, V.L. and Ogloblin, A.A. and Zhitnitsky, I.R., *On the Wave Function of the Nucleon*, *Soc. J. Nucl. Phys.* **48** (1988) 536.
- [15] Chernyak, V.L. and Ogloblin, A.A. and Zhitnitsky, I.R., *Wave Functions of Octet Baryons*, *Z. Phys. C* **42** (1989) 569–582.
- [16] Braun, V.M. and Derkachov, S.E. and Korchemsky, G.P. and Manashov, A.N., *Baryon Distribution Amplitudes in QCD*, *Nucl. Phys. B* **533** (1999) 355–426.
- [17] Mack, G. and Salam, A., *Finite-Component Field Representation of the conformal Group*, *Ann. Phys.* **53** (1969) 174.
- [18] Braun, V.M. and Filyanov, I.E., *Conformal Invariance and Pion Wave Function of nonleading Twist*, *Z. Phys. C* **48** (1990) 239–247.
- [19] Ball, P., *Theoretical Update of pseudoscalar Meson Distribution Amplitudes of higher Twist: The nonsinglet Case*, *JHEP* **9901** (1999) 010.
- [20] Balitsky, I.I. and Braun, V.M., *Evolution Equations for QCD Operators*, *Nucl. Phys. B* **311** (1988) 541–584.
- [21] Brodsky, S.J. and Lepage, G.P., *Erratum*, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 1625.
- [22] Peskin, M.E., *Anomalous Dimensions of Three-Quark Operators*, *Phys. Lett.* **88B** (1979) 128.
- [23] Tesima, K., *The Operator Product Expansion of the Product of three local Fields*, *Nucl. Phys. B* **202** (1982) 523.

- [24] Nyeo, S.-L., *Anomalous Dimensions of nonlocal Baryon Operators*, *Z. Phys. C* **54** (1992) 615–619.
- [25] Chernyak, V.L. and Ogloblin, A.A. and Zhitnitsky, I.R., *Calculation of exclusive Processes with Baryons*, *Z. Phys. C* **42** (1989) 583–593.
- [26] Ioffe, B.L., *Calculation of Baryon Masses in Quantum Chromodynamics*, *Nucl. Phys. B* **188** (1981) 317–341.
- [27] Ioffe, B.L., *Erratum*, *Nucl. Phys. B* **191** (1981) 591–592.
- [28] Chung, Y. and Dosch, H.G. and Kremer, M. and Schall, D., *Baryon Sum Rules and chiral Symmetry Breaking*, *Nucl. Phys. B* **197** (1982) 55.
- [29] Kolesnichenko, A.V., *Second Moments of the Distribution Function of the Quarks and Gluons in the Proton from QCD Sum Rules*, *Yad. Fiz.* **39** (1984) 1527–1544.
- [30] Pivovarov, A.A. and Surguladze, L.R., *Anomalous Dimensions of octet Baryonic Currents in Two-Loop Approximation*, *Nucl. Phys. B* **360** (1991) 97.
- [31] Ball, P. and Braun, V.M. and Koike, Y. and Tanaka, K., *Higher Twist Distribution Amplitudes of Vector Mesons in QCD: Formalism and Twist Three Distributions*, *Nucl. Phys. B* **529** (1998) 323.
- [32] Ball, P. and Braun, V.M., *Higher Twist Distribution Amplitudes of Vector Mesons in QCD: Twist-4 Distributions and Meson Mass Corrections*, *Nucl. Phys. B* **543** (1999) 201.
- [33] Leinweber, D.B., *Nucleon Properties from unconventional interpolating Fields*, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 6383.
- [34] A. Akhiezer and M. Rekalov, *Photoproduction of neutral vector Mesons on light Nuclei*, *Sov. J. Part. Phys.* **3** (1974) 277.
- [35] R. Arnold, C. Carlson, and F. Gross, *Polarization Transfer in elastic Electron Scattering from Nucleons and Deuterons*, *Phys. Rev. C* **23** (1981) 363.

- [36] Thomas, A.W. and Weise, W., *The Structure of the Nucleon*. Wiley-VCH, 2001.
- [37] Walker, R.C. et al., *Measurements of the proton elastic form-factors for 1-GeV/c² q^2 = 3-GeV/c² at SLAC*, *Phys. Rev. D* **49** (1994) 5671.
- [38] Bartel, W. et al., *Measurement of Proton and Neutron electromagnetic Form Factors at squared Four-Momentum Transfer up to 3 (GeV/c)²*, *Nucl. Phys. B* **58** (1973) 429.
- [39] Jones, M.K. et al., *$G_E^p(Q^2)/G_M^p(Q^2)$ ratio by polarization transfer in $\vec{e}p \rightarrow e\vec{p}$* , *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 1398.
- [40] Gayou, O. et al., *Measurement of the electromagnetic form factor ratio $\mu_p G_E^p(Q^2)/G_M^p(Q^2)$ via polarization transfer*, *Phys. Rev. C* **64** (2001) 038202-1-4.
- [41] Chernyak, V.L. and Zhitnitsky, A.R., *Asymptotic Form of hadronic Form Factors in the Quark Model*, *JETP Lett.* **25** (1977) 510.
- [42] Brodsky, S.J. and Lepage, G.P., *Exclusive Processes in Quantum Chromodynamics: Evolution Equations for hadronic Wave Functions and the Form Factors of the Mesons*, *Phys. Lett. B* **87** (1979) 359.
- [43] Chernyak, V.L. and Serbo, V.G. and Zhitnitsky, A.R., *Asymptotic hadronic Form Factors in QCD*, *JETP Lett.* **26** (1977) 594.
- [44] Avdeenko, V.A. and Chernyak, V.L. and Korenblit, S.A., *Asymptotics of Nucleon Form Factors in Quantum Chromodynamics*, *YAD. Fiz.* **33** (1981) 481.
- [45] Brodsky, S.J. and Lepage, G.P. and Zaidi, A.A., *Weak and electromagnetic Form Factors of Baryons at large Momentum Transfer*, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 1152.
- [46] Brodsky, S.J. and Lepage, G.P. and Milshtein, A.I. and Fadin, V.S., *On double logarithmic Suppression of nonrenormalization Group Contribution to Baryon Form Factor*, *Yad. Fiz.* **35** (1982) 1603.

- [47] Isgur, N. and Llewellyn, C.H., *The Applicability of perturbative QCD to exclusive Processes*, *Nucl. Phys. B* **317** (1989) 526.
- [48] Isgur, N. and Llewellyn, C.H., *Perturbative QCD in exclusive Processes*, *Nucl. Phys. B* **217** (1989) 535.
- [49] Li, H.N. and Sterman, G., *The perturbative Pion Form Factor with Sudakov Suppression*, *Nucl. Phys. B* **381** (1992) 129.
- [50] Bolz, J. and Jakob, R. and Kroll, P. and Stefanis, N.G. , *A Critical analysis of the proton form-factor with Sudakov suppression and intrinsic transverse momentum*, *Z. Phys. C* **66** (1995) 267.
- [51] Radyushkin, A.V., *Hadronic Form Factors: Perturbative QCD vs. QCD Sum Rules*, *Nucl. Phys. A* **532** (1991) 141.
- [52] Belyaev, V.M. and Radyushkin, A.V., *Soft Contribution to Form Factors of $\gamma * p \rightarrow \Delta +$ Transition*, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 6509.
- [53] Kroll, P. and Schurmann, M. and Guichon, P.A., *Virtual Compton scattering off protons at moderately large momentum transfer*, *Nucl. Phys. A* **598** (1996) 435.
- [54] Radyushkin, A.V., *Nonforward parton densities and soft mechanism for form factors and wide-angle Compton scattering in QCD*, *Phys. Rev. D* **58** (1999) 114008.
- [55] Diehl, M. and Feldmann, T. and Jakob, R. and Kroll, P., *Linking parton distributions to form factors and Compton scattering*, *Eur. Phys. J. C* **8** (1999) 409.
- [56] Kroll, P., *Probing the nucleon at large momentum transfer*, *Nucl. Phys. A* **666/667** (2000) 3.
- [57] Balitsky, I.I. and Braun, V.M. and Kolesnichenko, A.V., *Radiative Decay $\Sigma^+ \rightarrow p\gamma$ in Quantum Chromodynamics*, *Nucl. Phys. B* **312** (1989) 509.
- [58] Chernyak, V.L. and Zhitnitsky, I.R., *B-Meson exclusive Decay into Baryons*, *Nucl. Phys. B* **345** (1990) 137.

- [59] Braun, V.M. and Halperin, I., *Soft Contribution to the Pion Form Factor from Light-Cone QCD Sum Rules*, *Phys. Lett. B* **328** (1994) 457.
- [60] Braun, V.M. and Khodjamirian, A. and Maul, M., *Pion Form Factor in QCD at intermediate Momentum Transfer*, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 073004.
- [61] Braun, V.M., *Light-Cone Sum Rules*, <http://arXiv.org/hep-ph/9801222>.
- [62] Colangelo, P. and Khodjamirian, A., *QCD Sum Rules, a modern Perspective*, <http://arXiv.org/hep-ph/0010175>.
- [63] Braun, V.M. and Fries, R. and Mahnke, N. and Stein, E., *Higher Twist Contributions to the Nucleon Wave Function*, *Nucl. Phys. B.* **598** (2000) 381.
- [64] Shifman, M.A. and Vainshtein A.I. and Zakharov, V.I., *QCD and Resonanz Physics (I),(II)*, *Nucl. Phys. B* **147** (1979) 385 and 448.
- [65] Drell, S.D. and Yan, T.M., *Connection of elastic electromagnetic Nucleon Form Factors at large Q^2 and deep inelastic structure functions near Threshold*, *Phys. Rev. Lett.* **24** (1970) 181.
- [66] Bakulev, A.P. and Radyushkin, A.V., *Nonlocal condensates and QCD sum rules for the pion form-factor*, *Phys. Lett. B* **271** (1991) 223.
- [67] Mikhailov, S.V. and Radyushkin, A.V., *The Pion wave function and QCD sum rules with nonlocal condensates*, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 1754.
- [68] Forster, O., *Analysis 2*. Vieweg, 1984.
- [69] Harindranath, A., *An Introduction to Light-Front Dynamics for Pedestrians*, [hep-ph/9612244](http://arXiv.org/hep-ph/9612244).
- [70] M. Johnson and L. Kisslinger, *Nuclear and Particle Physics on the Light Cone*. World Scientific, Singapore, 1989.
- [71] Glazek, D., *Theory of Hadrons and Light-Front QCD*. World Scientific, Singapore, 1995.
- [72] Fock, A.V., *Proper time in classical and quantum mechanics*, *Sovj. Phys.* **12** (1937) 404.

- [73] Schwinger, J., *On Gauge Invariance and Vakuum Polarization*, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.
- [74] Peskin, M.E. and Schroeder, D.V., *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison, Wesley, 1997.
- [75] Novikov, V.A. and Shifman, M.A. and Vainshtein, A.I. and Zakharov, V.I., *Calculations in external Fields in Quantum Chromodynamics, Technical Review.*, *Fortschr. Phys. B* **32, 11** (1984) 585.
- [76] Reinders, L.J. and Yazaki, S. and Rubinstein, H.R., *Hadron Properties from QCD Sum Rules*, *Phys. Rept.* **127** (1985) 1.
- [77] Novikov, V.A. and Shifman, M.A. and Vainshtein, A.I. and Zakharov, V.I., *Use and misuse of QCD sum rules, factorization and related topics.*, *Nucl. Phys. B* **237** (1984) 525.