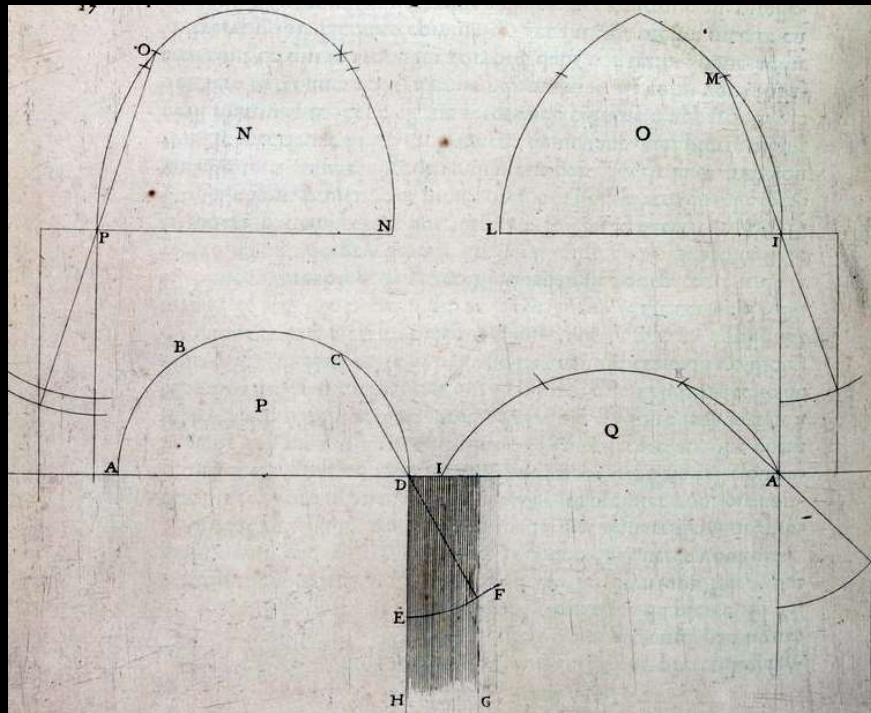




## Statik des Bogens und des Gewölbes

Stefan M. Holzer, ETH Zürich



## Tragverhalten des Bogens

Traditionelle Faustregeln zur Proportionierung von Bögen und Widerlagern

*Revue*

# L'ARCHITECTURE DES VOVTES, OV L'ART DES TRAITTS, ET COUPE DES VOVTES: TRAICTE

TRES-VTIL, VOIRE NECESSAIRE A TOVS ARCHITECTES,  
Maistres Maisons, Appareilleurs, Tailleurs de pierre,  
ET GENERALEMENT  
A TOVS CEVX QVI SE MESLENT DE L'ARCHITECTVRE,  
mesme Militaire.

Par le R. P. FRANÇOIS DERAND de la Compagnie de IESVS.

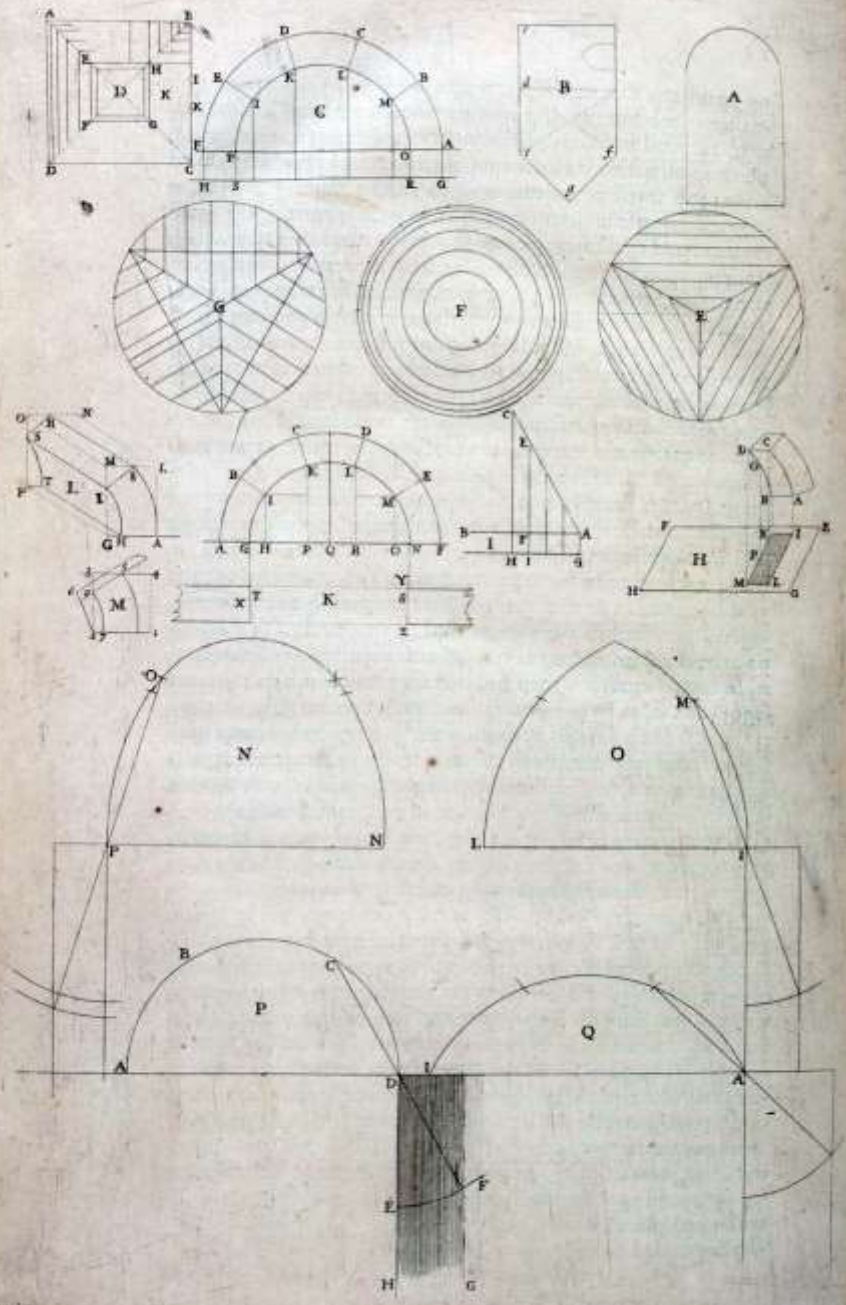


BIBLIOTHEQUE  
DE  
L'ARSENAL

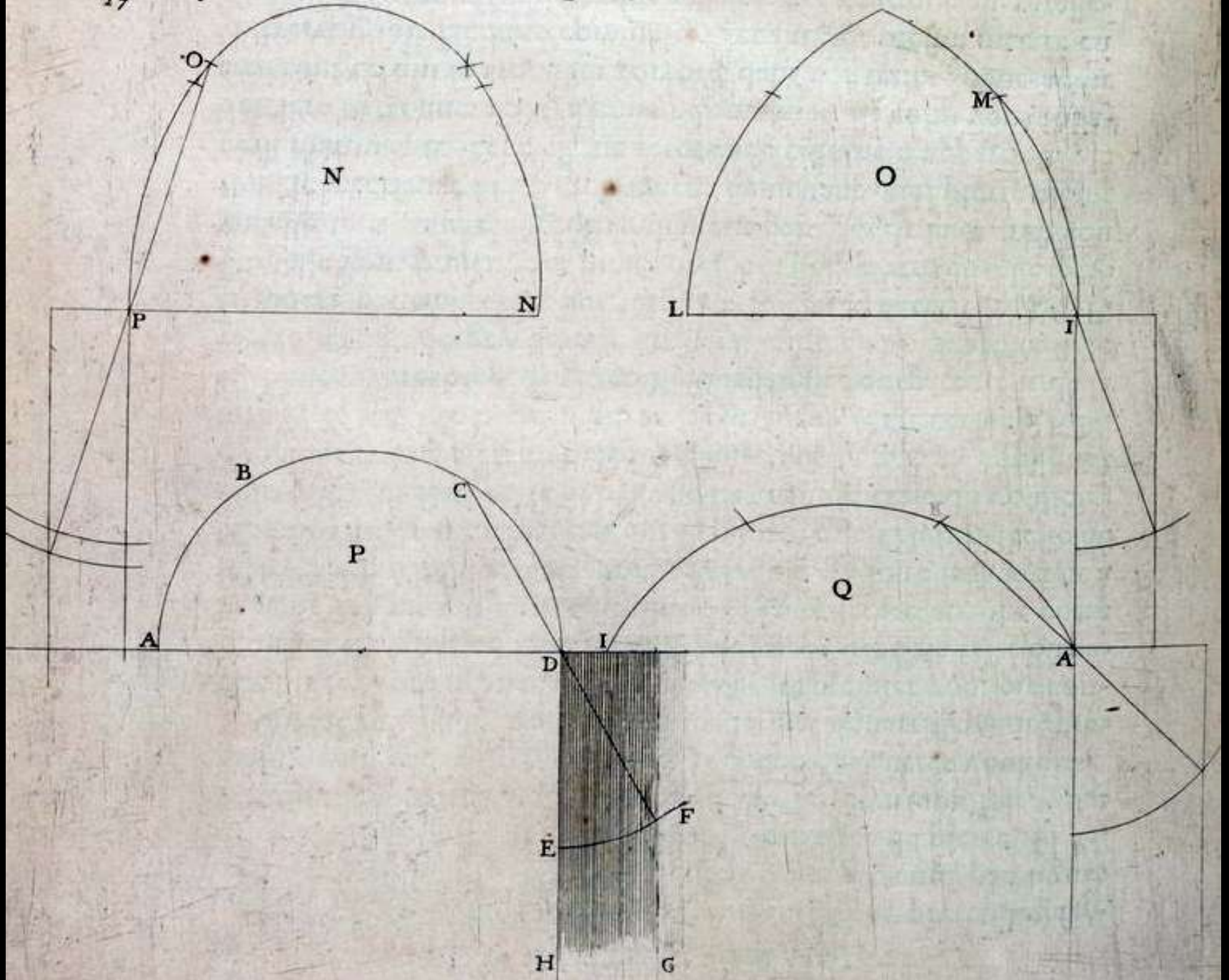
A PARIS,

Chez SEBASTIEN CRAMOISY, Imprimeur ordinaire du Roy,  
rue Saint Jacques, aux Cicognes.

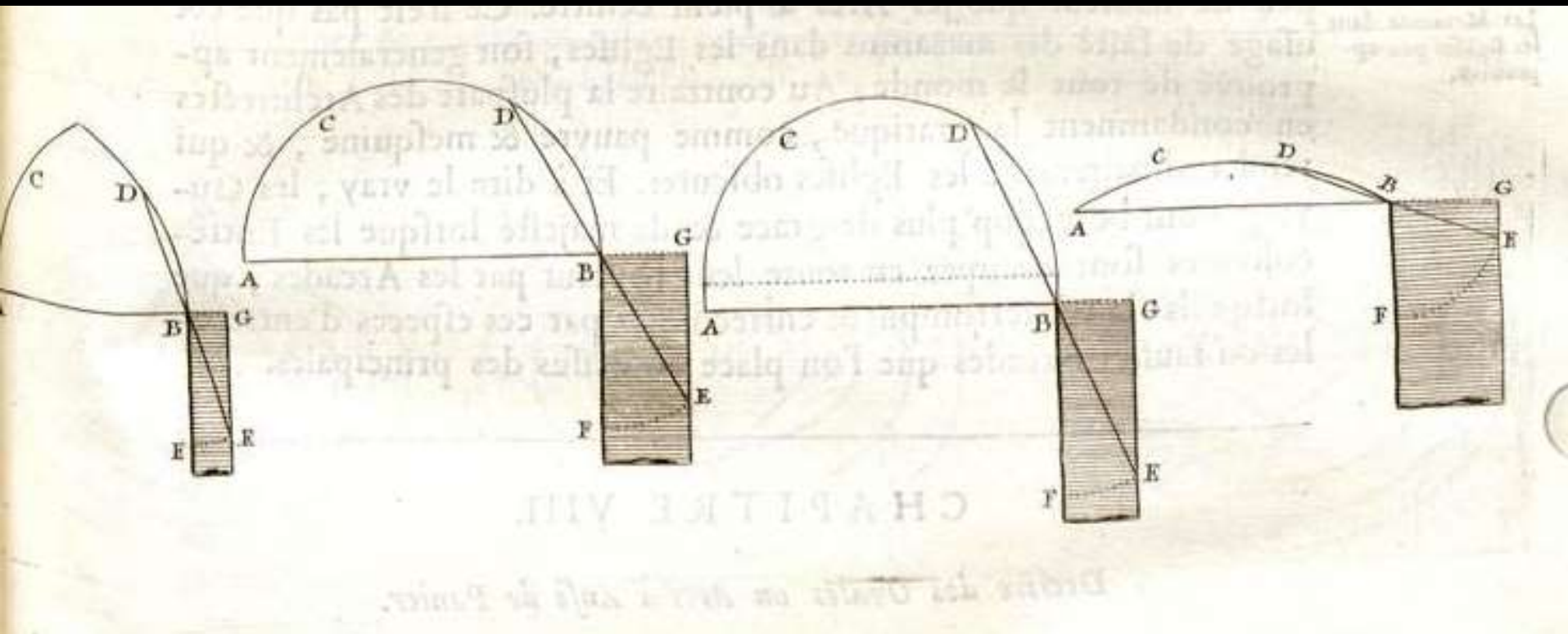
M. DC. XLIII.  
AVEC PRIVILEGE DE SA MAIESTE.



Der traditionelle Weg zur Bogenkonstruktion: empirische Proportionsregeln (Derand 1643)



„Blondel'sche Regel“ zur Ermittlung der Widerlagerstärke (Derand 1643)



„Blondel'sche Regel“ (Blondel 1683)

Tragverhalten des Bogens  
Ansätze zu einer Theorie zur Bestimmung des Gewölbeschubs und der erforderlichen  
Widerlagerstärke



Der Weg zu einer Theorie des Bogens: Beobachtungen am Bauwerk  
(fast eingestürzter, durch Vermauern gesicherter Bogen am Kolosseum in Rom)

**BERNARDINI  
BALDI VRBINATIS**  
GVASTALLÆ AB-  
B A T I S

**MECHANICA ARISTOTE-  
LIS PROBLEMATA**  
**EXERCITATIONES:**  
ADIECTA SUCCINCTA NAR-  
ratione de autoris vita & scriptis.



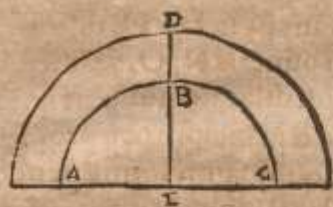
Ex dono D. ac M. Petri Frizon  
Pbr̄i Doct. Theol. in magna francie  
Eleemosinaria Vicarij generalis et quon-  
dam Can. Penitentiarij Ecclæ Remen. ibi

**MDCCXXII.**  
Typis & Sumptibus Viduæ Ioannis Albini.  
**M. DC. XXII.**

Anfänge der wissenschaftlichen Statik: Bernardino Baldi 1620

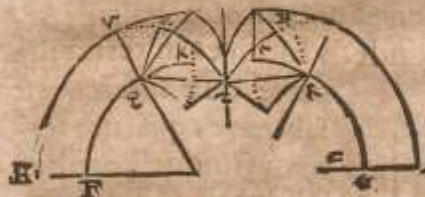


Cæterum admonet nos locus, vt aliquid de fornix cum dissolutionibus in medium afferamus: caussis enim morborum cognitis, facilius periti medici adhibere solent remedia.



Est enim semicircularis fornix ABC, cuius centrum E, perpendicularis vero quæ per centrum DBE, semicirculi ABC, diameter AEC, incumbat vtrinque A, C. Itaque si nulla fiat incumbarum repulsiō, stabit fornix; si verò fiat, ruinam faciet.

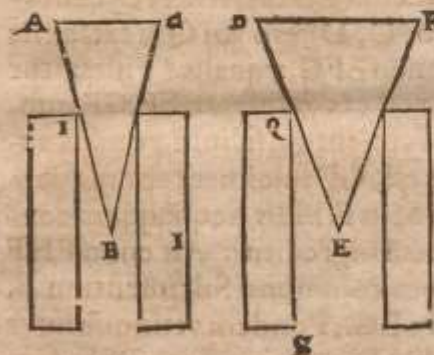
Pellantur itaque ad exteriores partes, vt in secunda figura, H in F, & G in G, ex qua pulsione cum maius fiat spatium quod in integro fornice implebatur, iam distractis vtrinque fornix partibus nō impletur, Diuiditur igitur locus maior factus in tres partes, quarum hinc inde duas replent fornix partes, tertiam verò quæ media est, replet insertus, ne vacuum detur, aër, vt in figura videre est, in qua solutæ vtrinque fornix partes HIKF, PMNG, aër autem medius spatium replens IKMN. Diuidantur singuli quadrantes FK, GN, in partes tres, quarum duæ sint hinc inde FQ, GR, & à centris, quæ separatim quadrantibus facta sunt in ST, rectæ ducantur SQV. TRX. Quoniam igitur tertiarum partem vtrinque VIKQ MNRX propria grauitate depressæ, nullum quo sustineantur fulcimentum habent, corruent quidem. Ducantur autem rectæ QI, RM, constituentes cum ipsis QV, RX pares angulos VQI MRX. Itaque centris QR partes QIRM ad inf,



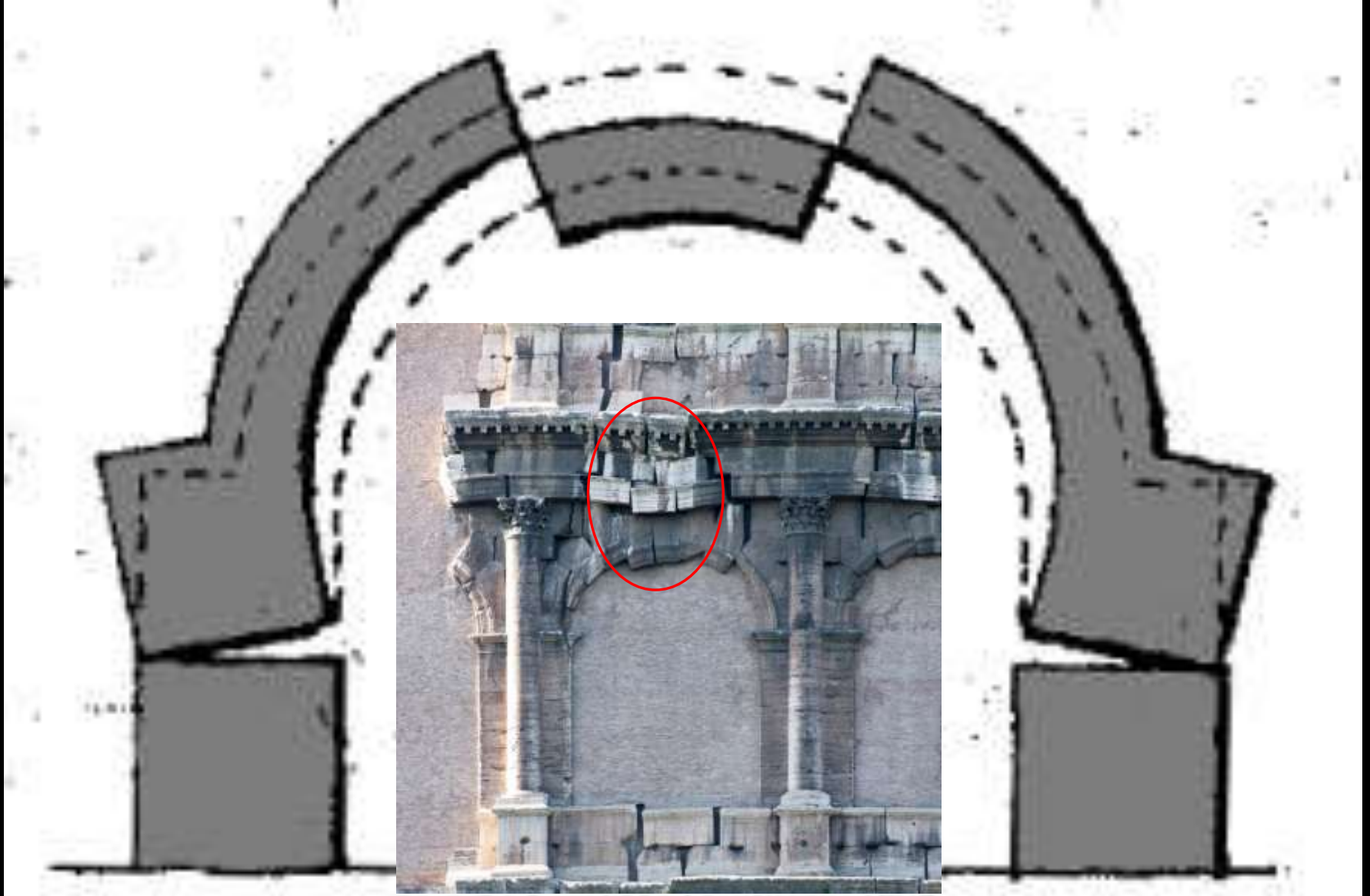
116

cuntur, vestes in cunco hoc pacto considerare videtur à veritate alienum. Aristotelis autem solutionem falsam esse, clarè patet. quo pacto enim F pellet ex fulcimento Hipsum ligni partem OS, & idem F ex fulcimento I pellet oppositam partem NS, si inuicem contendentes extremæ vectium partes in F, altera alteri ne quicquam operentur, est impedimento? Et sanè opinionis falsitas inde patet, quòd videamus materiae partes scissas, in ipso scissionis actu facta distractione à cunei vertice nequaquam tangi. At eiusmodi operationes per contactum fieri nulli est ignotum. Solutio igitur ista meo iudicio, tanto Philosopho prorsus videtur indigna.

Porrò G. Vbald. ijs quæ de diuaricatis vectibus in medium adduxerat non acquiescens alias quærit caussas, cur cuneus minoris anguli validius scindat. Idq; ex quodam lemmate demonstrare conatur, figura autem eius ita ferè se habet.



Est cuneus ABC, item alius DEF. Demonstrat igitur ex assumpto, quo acutior fuerit angulus BIM, eo facilius pondera moueri, & ideo facilius ceu veste AB moueri pondus I quàm veste DE pondus Q. Ingeniosè quidem. At magnam hæc apud me habent difficultatem. Si enim ita se habet AB, ad BI, vt DE, ad EQ (ipsæ enim DE, EQ supponuntur æquales) ergo eadem æqualisue potentia æqualiter mouebit pondera I & Q, quod ipsi eiusdem demonstrationi prorsus concludit contrarium. Nec meo quidem



„Keiltheorie“:

Der Schlussstein treibt als Keil die Widerlager auseinander  
(Kombination von Widerlagerrotation und Rutschen des Schlusssteines)

Zunächst setzt sich die „Keiltheorie“ durch

(Abb.: F.J.C. Schulz, Versuch einiger Beiträge zur hydraulischen Architektur, 1808, bearb.)



„Keiltheorie“ – durch Beobachtung gerechtfertigt?  
(Rom, Arco di Gallieno, 1. Jh. v. Chr.)

HISTOIRE  
DE  
L'ACADEMIE  
ROYALE  
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCXII. 1712

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique,  
pour la même Année.

*Tirés des Registres de cette Académie.*



A PARIS,  
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCXXXI.

DES SCIENCES. 69

point encore par elles-mêmes se présenter aux pores du Mercure dans ce temps propice, parce que le sel qui y est alors appliqué, les empêche d'y parvenir; & elles ne peuvent en approcher que quand le sel & le Mercure se sont séparés, & que les pores du Mercure ont eu le temps de se resserrer: si donc on considère en même temps & le défaut de détermination des parties de feu dont il s'agit vers le Mercure, & le peu de facilité qu'elles ont à y entrer, on conviendra facilement que dans le cas présent il n'en doit pas être plus sensiblement affecté que s'il n'y en avoit point dans la liqueur.

SUR LA CONSTRUCTION  
DES VOÛTES  
DANS LES EDIFICES.

PAR M. DE LA HIRE.

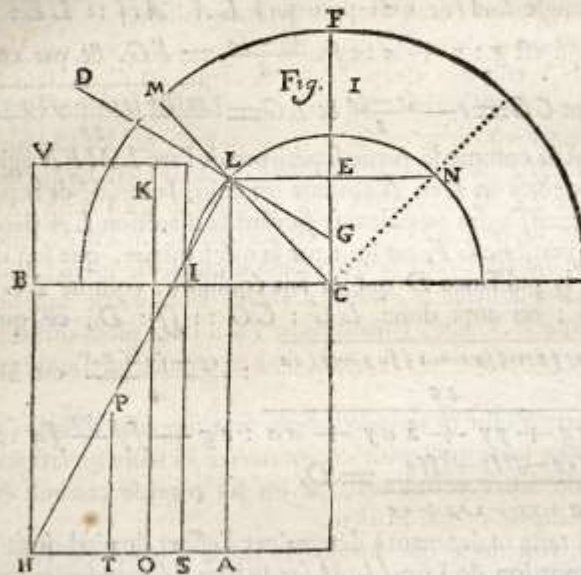
C'EST un Probleme des plus difficiles qu'il y ait dans l'Architecture, que de connoître la force que doivent avoir les pieds-droits des Voûtes pour en soutenir la poussée, & les Architectes n'ont trouvé jusqu'à présent aucune regle certaine pour la déterminer. Ce probleme appartient à la Mécanique, & c'est par son moyen que nous pouvons le résoudre, en faisant quelques suppositions, dont on convient aisément dans la construction de ces sortes d'ouvrages.

On appelle la *poussée* des Voûtes, l'effort que font toutes les pierres qui les forment & qui sont taillées en coin, qu'on appelle *Voussains*, pour écarter les jambages ou pieds-droits qui soutiennent ces Voûtes. Et comme ceux qui ont été les moins hardis dans leurs entreprises, ont donné une force extraordinaire à ces pieds-droits pour rendre leurs ouvrages plus durables, comme la plupart des anciens l'ont pratiqué; & que les autres au contraire ont été trop hardis en faisant ces pieds-droits

l'ij

Zunächst setzt sich die „Keiltheorie“ durch!  
(Philippe de la Hire 1712)

droit  $HI$  joint dans la place où il est à la portion de l'arc  $ILM$  aussi dans la place où elle est : mais comme la direction de ce poids est oblique à ce levier, nous la rapportons au bras horizontal  $HA$  où elle est perpendiculaire ; mais de l'autre côté la portion de l'arc  $LMF$  agissant par la face  $LM$  pour écarter le point  $L$  du bras  $HL$  du levier, nous lui opposons une puissance  $D$  qui pousse l'extrémité  $L$  de ce levier suivant la direction  $DL$  perpendiculaire à  $HL$ . Il faut donc chercher l'équilibre entre la puissance  $D$  contre l'extrémité  $L$  du bras  $HL$  du levier coudé  $LHA$ , & l'effort du pied-droit joint à l'arc  $ILM$  sur l'autre bras  $HA$  de ce même levier.



Cherchons premièrement l'effort de la partie supérieure de l'arc  $LMF$  contre le point  $L$ . Du point  $L$  soit mené la perpendiculaire  $LE$  sur  $CF$  rayon de l'arc qui le divise en deux également au point  $F$ ; & soit prolongé  $DL$  perpen-



LA SCIENCE  
DES  
INGENIEURS  
DANS LA CONDUITE DES TRAVAUX  
DE FORTIFICATION  
ET D'ARCHITECTURE CIVILE  
DEDIE' AU ROY.

Par M<sup>r</sup> BELIDOR, Commissaire Ordinaire de l'Artillerie, Professeur  
Royal des Mathématiques aux Ecoles du même Corps, membre des  
Academies Royales des Sciences d'Angleterre & de Prusse, Corres-  
pondant de celle de Paris.



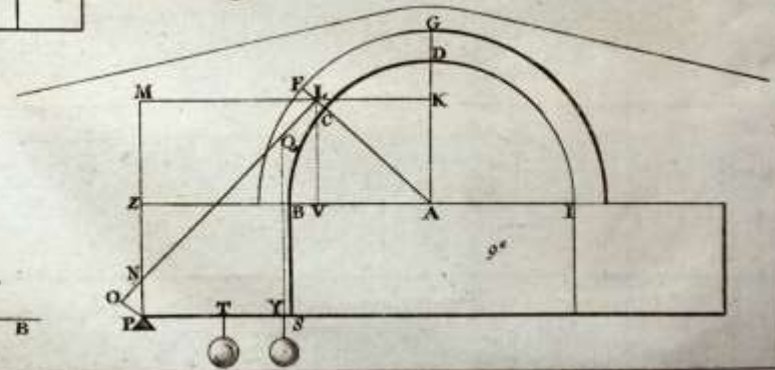
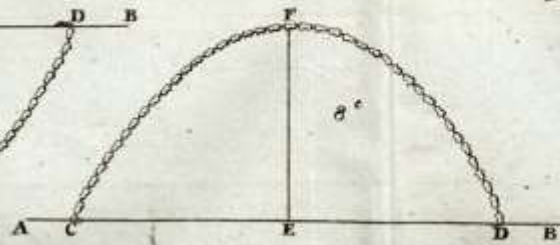
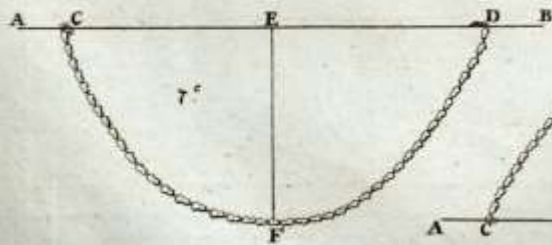
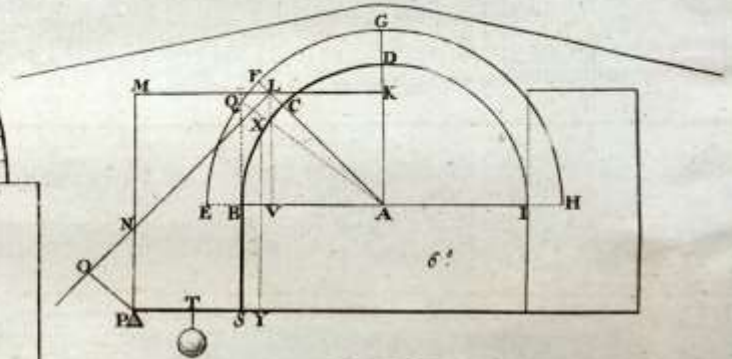
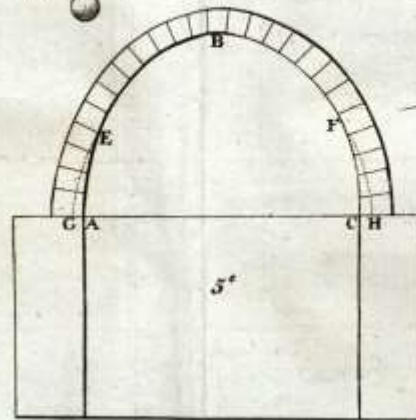
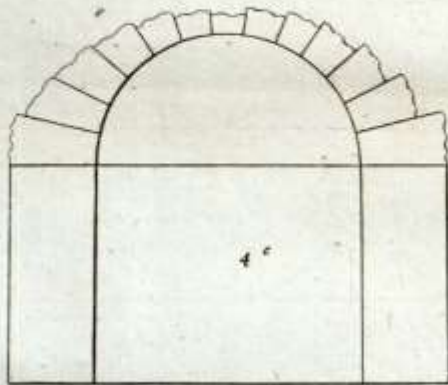
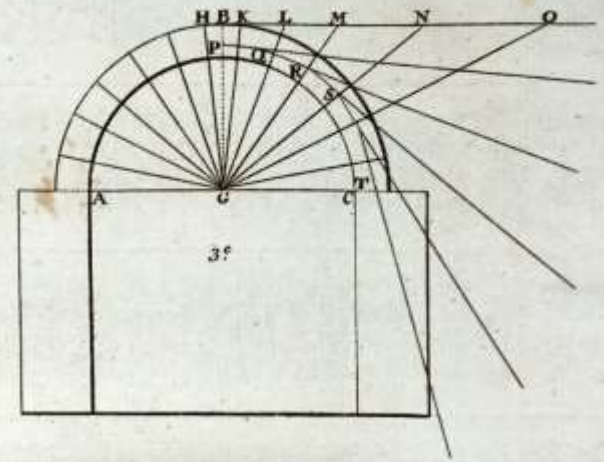
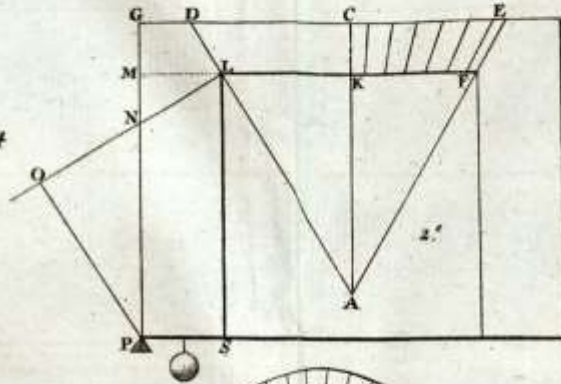
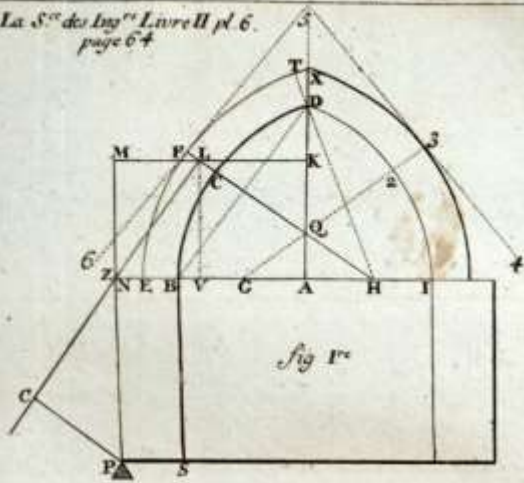
A PARIS, RUE S. JACQUES.  
Chez CLAUDE JOMBERT, au coin de la rue des Mathurins,  
à l'Image Nôtre-Dame.

M. D. CC. XXIX.

Avec Approbations & Privilège du Roy.

Anton Eberhard Schertel von Burtenbach  
acheté à Heylbronn.

Verbreitung der „Keiltheorie“ in der Praxis (vor allem beim Militär)  
(Bernard Forest de Bélidor 1729)

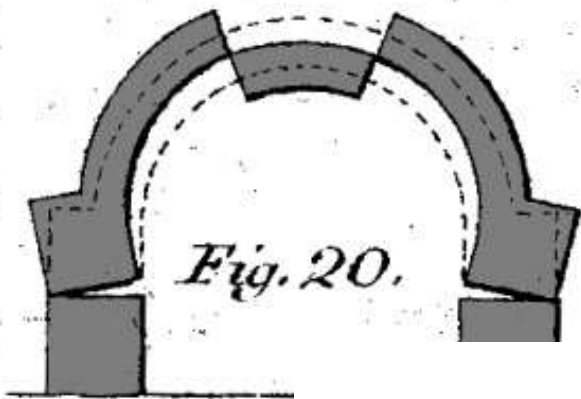




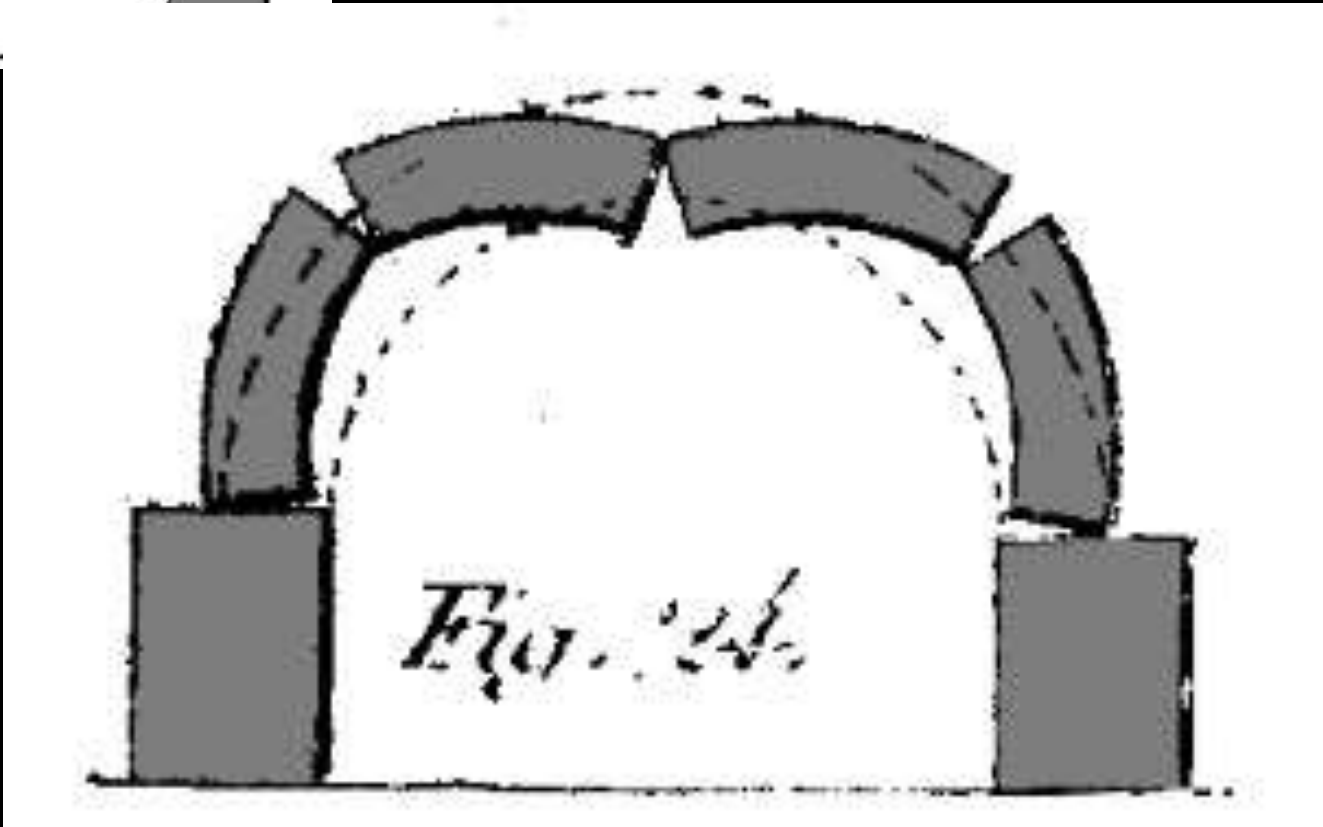
Verbreitung der „Keiltheorie“ durch Bernard Forest de Bélidor 1729:  
Anwendungsbeispiel „bombensicheres Munitionsmagazin“, hier Festung Brouage (Gironde)



Tragverhalten des Bogens  
Die „Keiltheorie“ ist nicht das letzte Wort  
Durchsetzung der „Kantungstheorie“

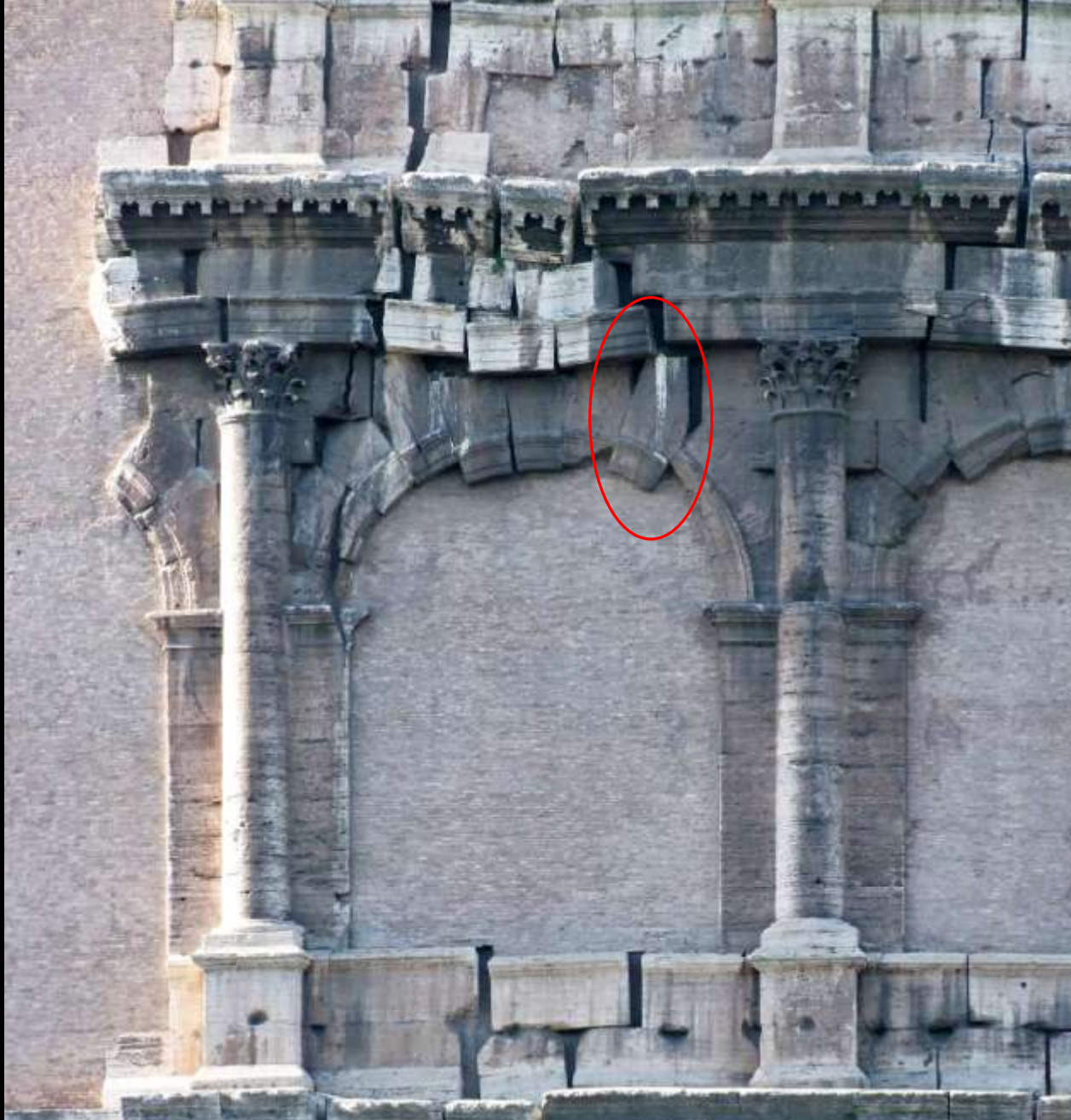


„Keiltheorie“:  
Schlussstein treibt als Keil die Widerlager  
auseinander (Kombination von Widerlagerrotation  
und Rutschen des Schlusssteines)

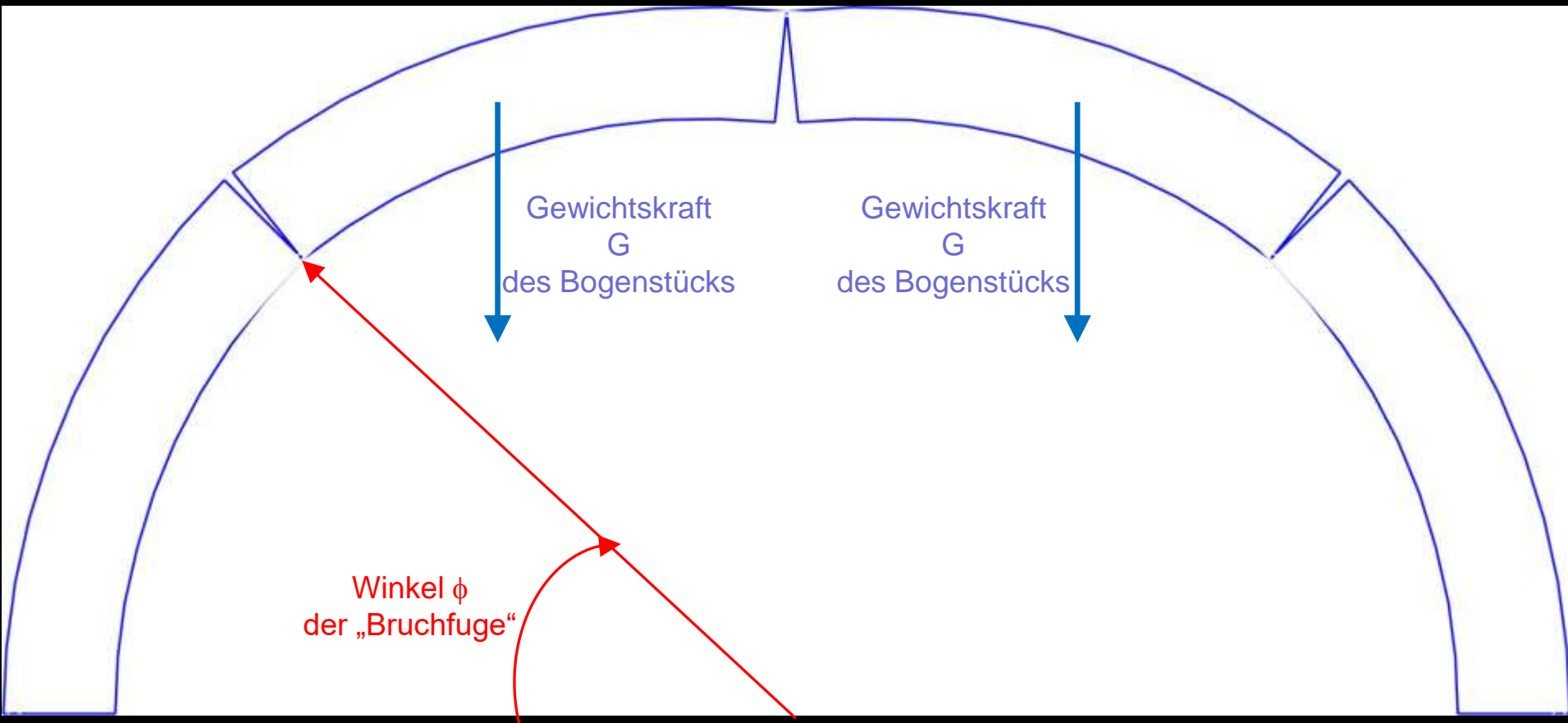


„Kantungstheorie“:  
Keilsteine rotieren um eine Berührungskante (reines Rotationsversagen des Bogens)

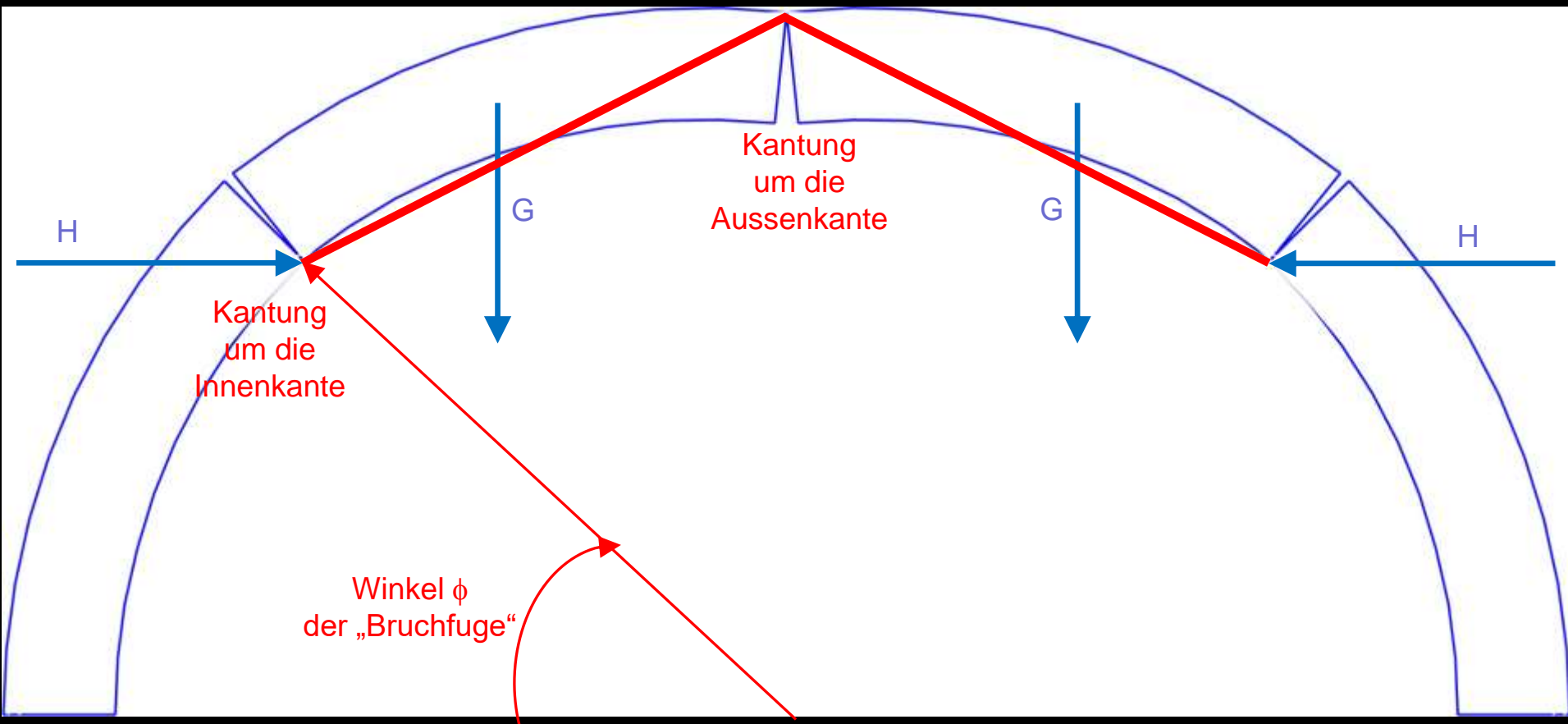
Zwei mögliche Theorien: Keiltheorie und Kantungstheorie  
(Abb.: F.J.C. Schulz, Versuch einiger Beiträge zur hydraulischen Architektur, 1808, bearb.)



Bogenversagen primär durch Keilsteinrotation ausgelöst?  
(fast eingestürzter, durch Vermauern gesicherter Bogen am Kolosseum in Rom)

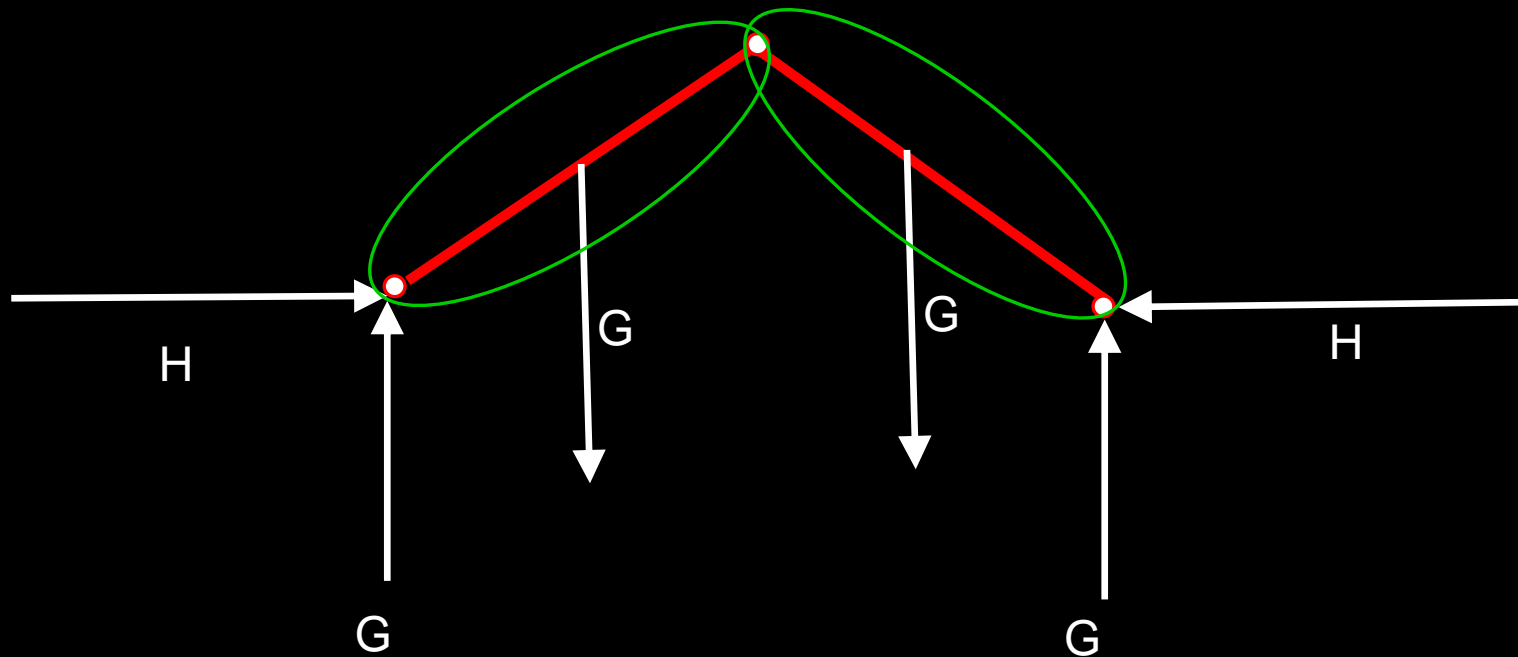


„Kantungstheorie (Rotation der Keilsteine)“  
Prinzipskizze der Kantung bei seitlich nachgebenden Widerlagern



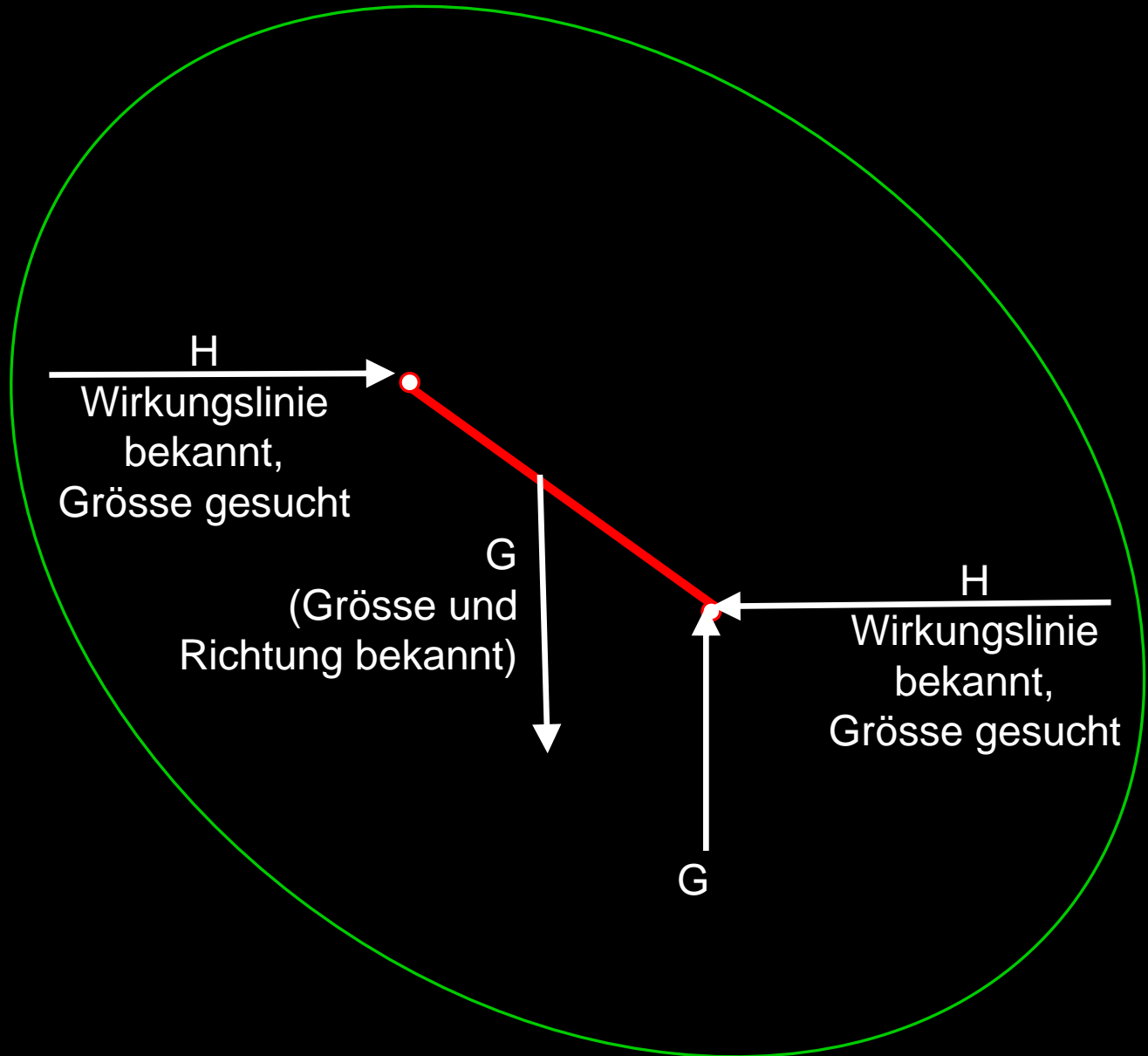
Kantungstheorie: Die Bogenschenkel stützen mit der **Horizontalkraft H** („Bogenschub“) ein flaches, aus zwei starren Stäben bestehendes Sprengwerk

**Horizontalkraft H** („Bogenschub“) ist die entscheidende Unbekannte, die berechnet werden muss!



### Kantungstheorie (Rotation der Keilsteine): Abstraktion

Bei Annahme der Kantungstheorie wird der Bogen zu einem ganz einfachen Fachwerk (Sprengwerk)  
Der Schub H auf die feststehenden Teile des Widerlagers kann ganz einfach ausgerechnet werden



Kantungstheorie (Rotation der Keilsteine): Gleichgewicht am Teilsystem (halber Bogen)

Bei Annahme der Kantungstheorie wird der Bogen zu einem ganz einfachen Fachwerk (Sprengwerk)

Der Schub H auf die feststehenden Teile des Widerlagers kann ganz einfach ausgerechnet (oder graphisch am Krafteck ermittelt) werden

# HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCXXX.

Avec les Mémoires de Mathématique & de  
Physique, pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Académie.



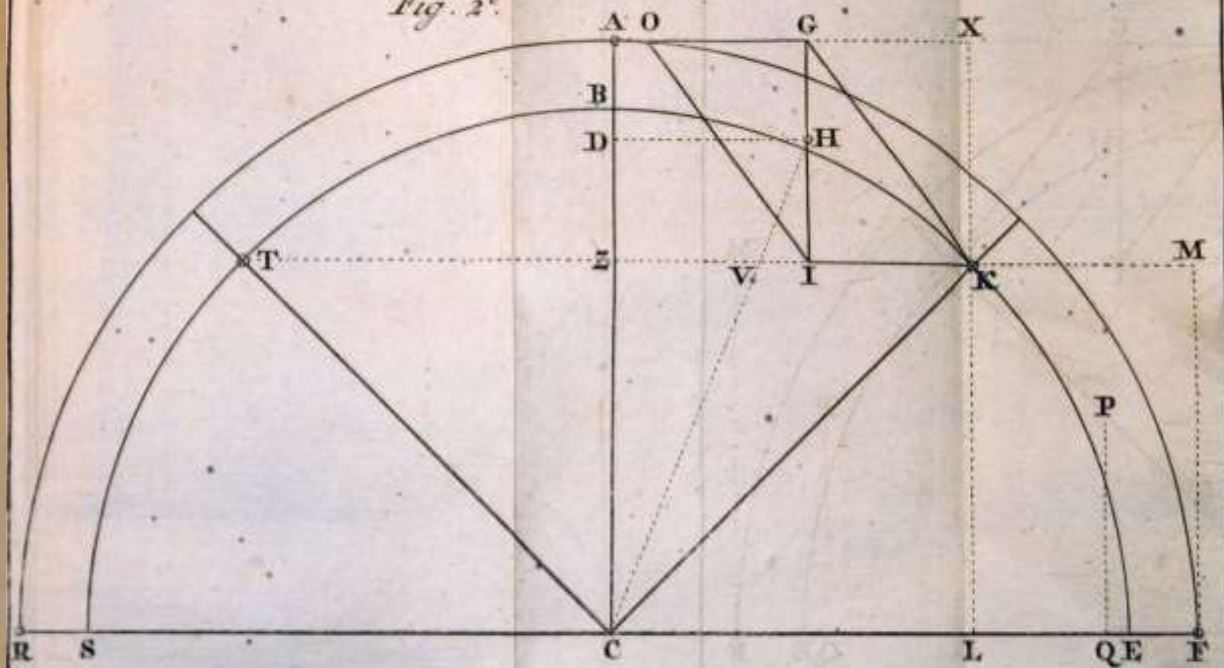
A AMSTERDAM,

Chez PIERRE MORTIER.

M. DCCXXXIII

Avec Privilège de N.S. les Etats de Hollande & de West-Frisse

*Fig. 2<sup>e</sup>*



Ein Meilenstein: rechnerische Behandlung der Kantungstheorie durch Pierre Couplet 1730

Annahme: Winkel der Bruchfuge ist 45° (Couplet 1730), Konstruktion des Kräftecks



# HISTOIRE DE L'ACADEMIE

ROYALE  
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCXXX.

Avec les Mémoires de Mathématique & de  
Physique, pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Académie.

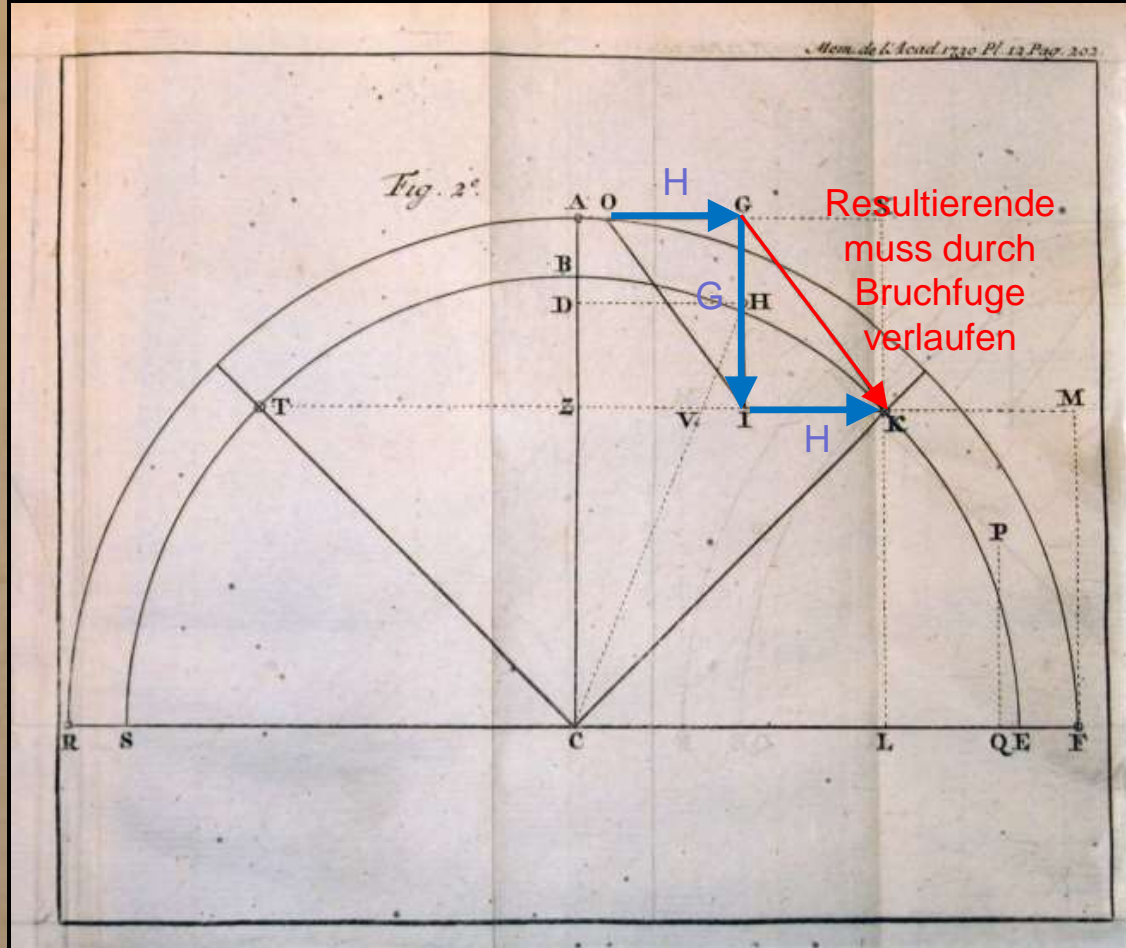


A AMSTERDAM,

Chez PIERRE MORTIER.

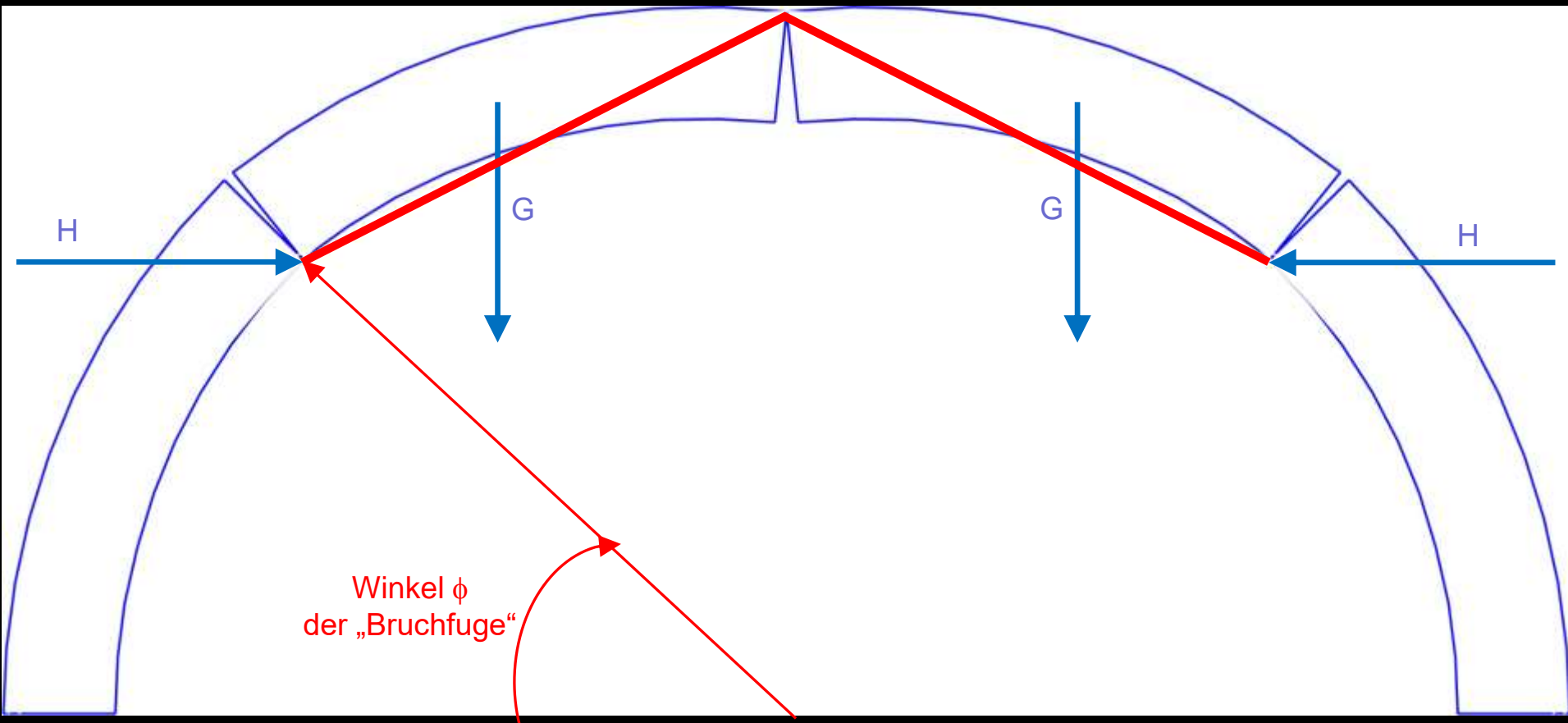
M. DCCXXXIII

Avec Privilège de N.S. les Etats de Hollande & de West-Frisse



rechnerische Behandlung der Kantungstheorie durch Pierre Couplet 1730

Annahme: Winkel der Bruchfuge ist  $45^\circ$  (Couplet 1730), Konstruktion des Kräftecks, H bekannt



Kantungstheorie: Es bleibt nur die (entscheidende) Frage: „Wie gross ist der Winkel der Bruchfuge?“  
Antwort: Schätzen oder neue, verbesserte Theorie!

M É M O I R E S  
D E  
M A T H É M A T I Q U E  
E T  
D E P H Y S I Q U E,

Présentés à l'Académie Royale des Sciences, par  
divers Savans, & lus dans ses Assemblées.

Année 1773.



A P A R I S,  
D E L ' I M P R I M E R I E R O Y A L E.

M. D C C L X X V I.

E S S A I

*Sur une application des règles de Maximis & Minimis  
à quelques Problèmes de Statique, relatifs à  
l'Architecture.*

Par M. COULOMB, Ingénieur du Roi.

I N T R O D U C T I O N.

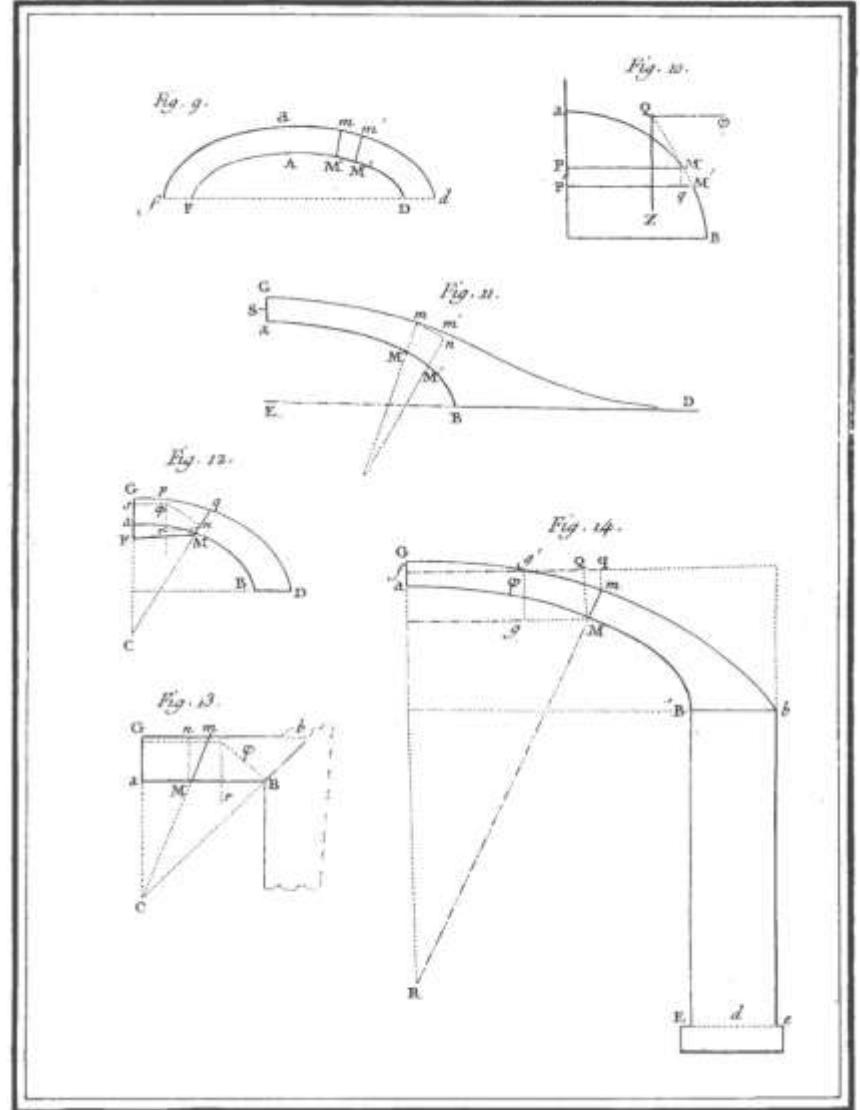
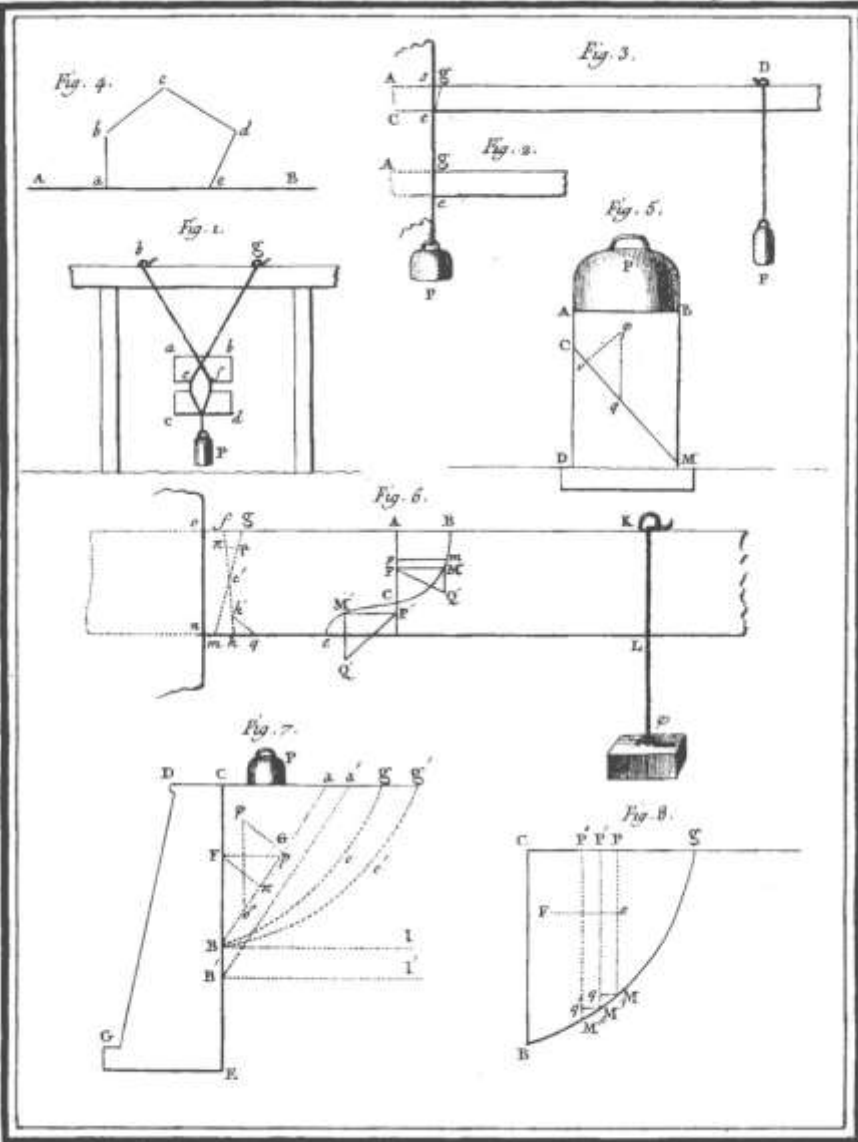
C E Mémoire est destiné à déterminer, autant que le mélange du Calcul & de la Physique peuvent le permettre, l'influence du frottement & de la cohésion, dans quelques problèmes de Statique. Voici une légère analyse des différens objets qu'il contient.

Après quelques observations préliminaires sur la cohésion, & quelques expériences sur le même objet, l'on détermine la force d'un pilier de maçonnerie; le poids qu'il peut porter, pressé suivant sa longueur; l'angle sous lequel il doit se rompre. Comme ce problème n'exige que des considérations assez simples, qui servent à faire entendre toutes les autres parties de cet Essai, tâchons de développer les principes de sa solution.

Si l'on suppose un pilier de maçonnerie coupé par un plan incliné à l'horizon, en sorte que les deux parties de ce pilier soient unies dans cette section, par une cohésion donnée, tandis que tout le reste de la masse est parfaitement solide, ou lié par une adhérence infinie; qu'ensuite on charge ce pilier d'un poids: ce poids tendra à faire couler la partie supérieure du pilier sur le plan incliné, par lequel il touche la partie inférieure. Ainsi, dans le cas d'équilibre, la portion de la pesanteur, qui agit parallèlement à la section, sera exactement égale à la cohérence. Si l'on remarque actuellement, dans le cas de l'homogénéité, que l'adhérence du pilier est réellement égale

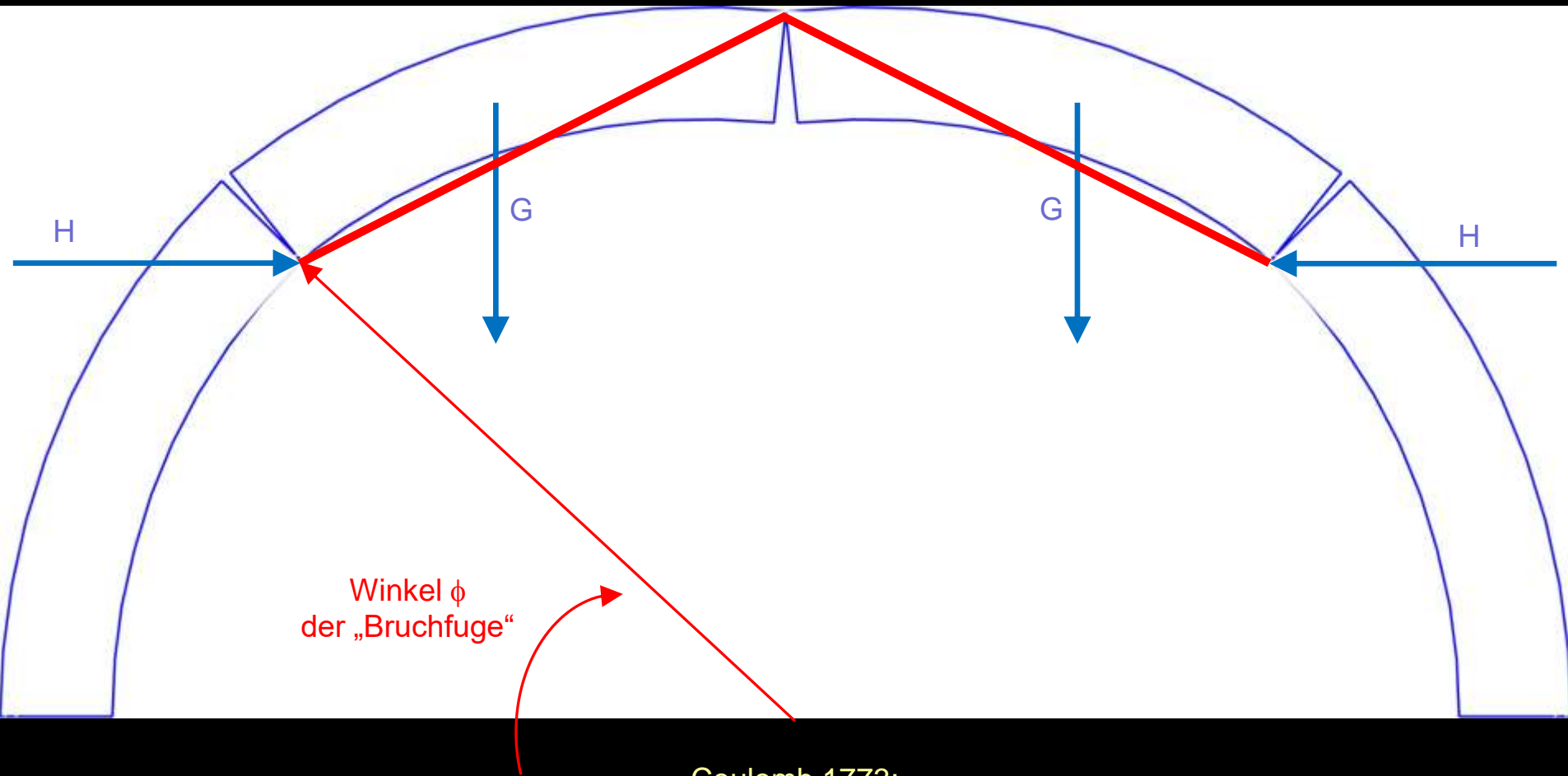
Charles Augustin de Coulomb 1773:

Anwendung von Extremalprinzipien auf verschiedene Aufgaben der Mechanik



Coulomb 1773:

Anwendung von Extremalprinzipien auf verschiedene Aufgaben der Mechanik: Reibung, Erddruck, Gewölbe

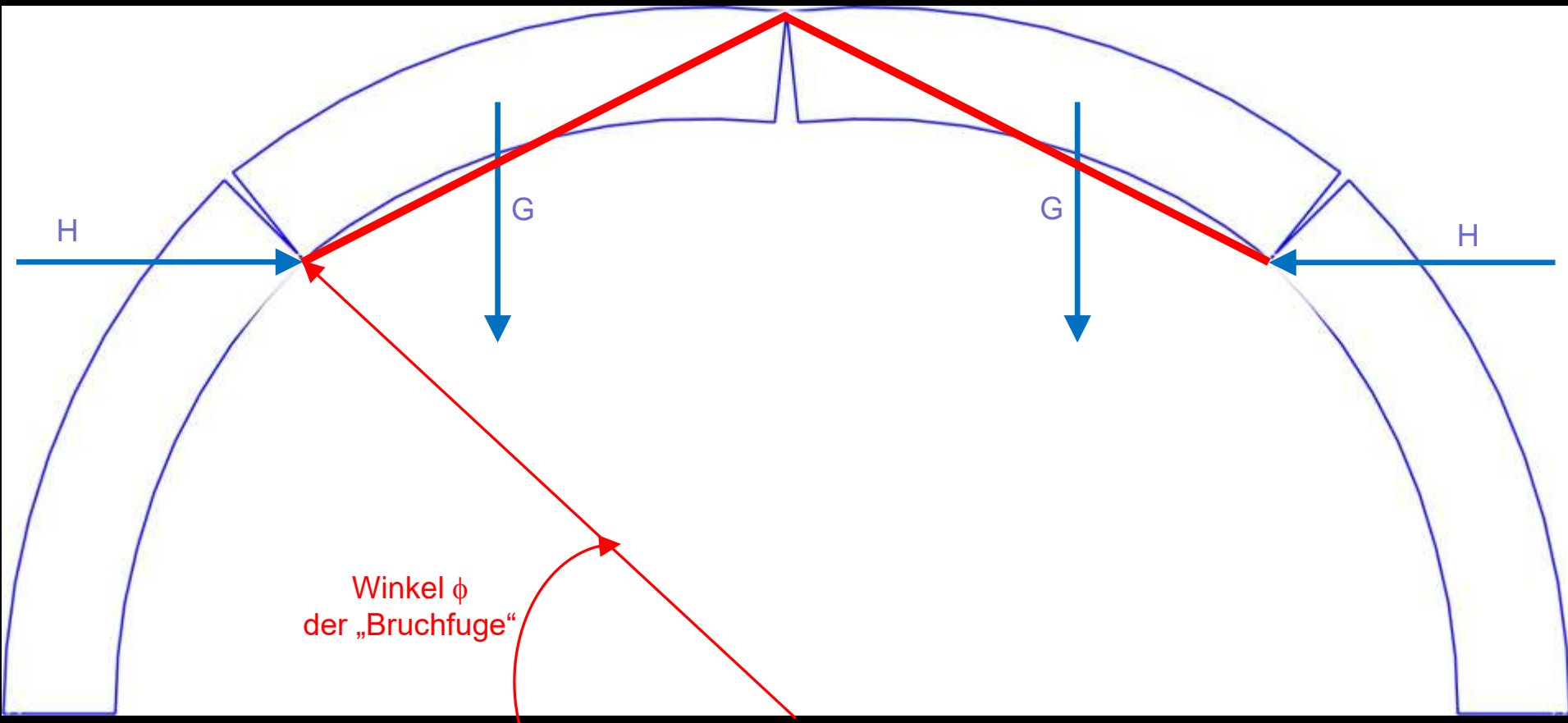


Coulomb 1773:

Anwendung eines Extremalprinzips auf die Kantungstheorie

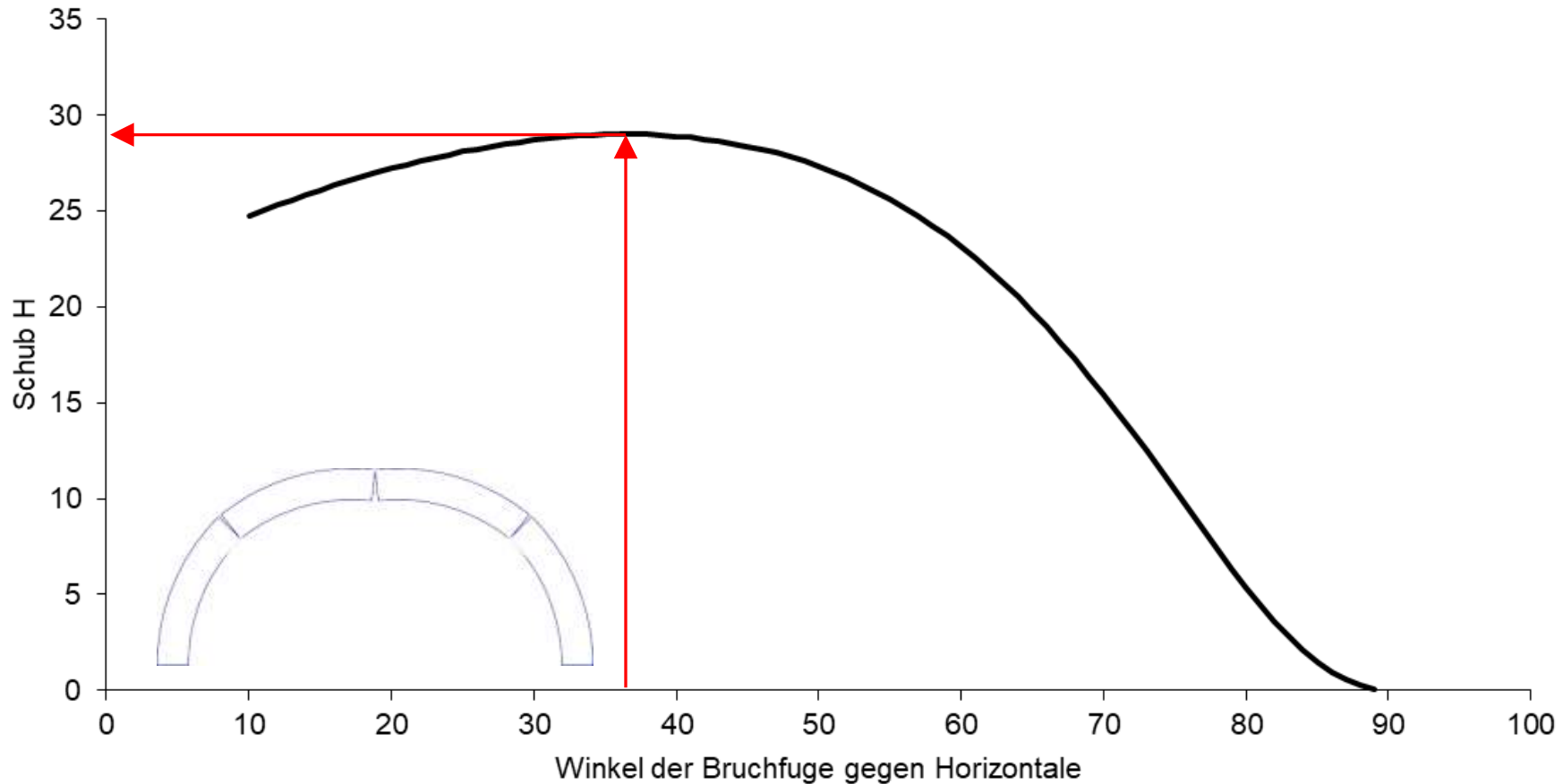
Grundidee: Der Winkel  $\phi$  kann *nicht* beliebig gewählt werden, sondern er wird sich automatisch so einstellen, dass die Horizontalkraft  $H$  auf die Widerlager *maximal* wird:

d.h.  $H$  ist der Schub für die ungünstigste mögliche Lage der Bruchfuge  
*„Der Bogen bricht immer an der ungünstigsten Stelle“*



Bei symmetrischer Situation  
 (Bogengeometrie, Lasten)  
 gibt es nur eine einzige Unbekannte in dieser Betrachtung – den Winkel  $\phi$   
 Daher ist eine Lösung durch „Ausprobieren“ („par tâtonnement“) möglich ...

## Coulomb: Extremalprinzip zur Bestimmung der Bruchfuge

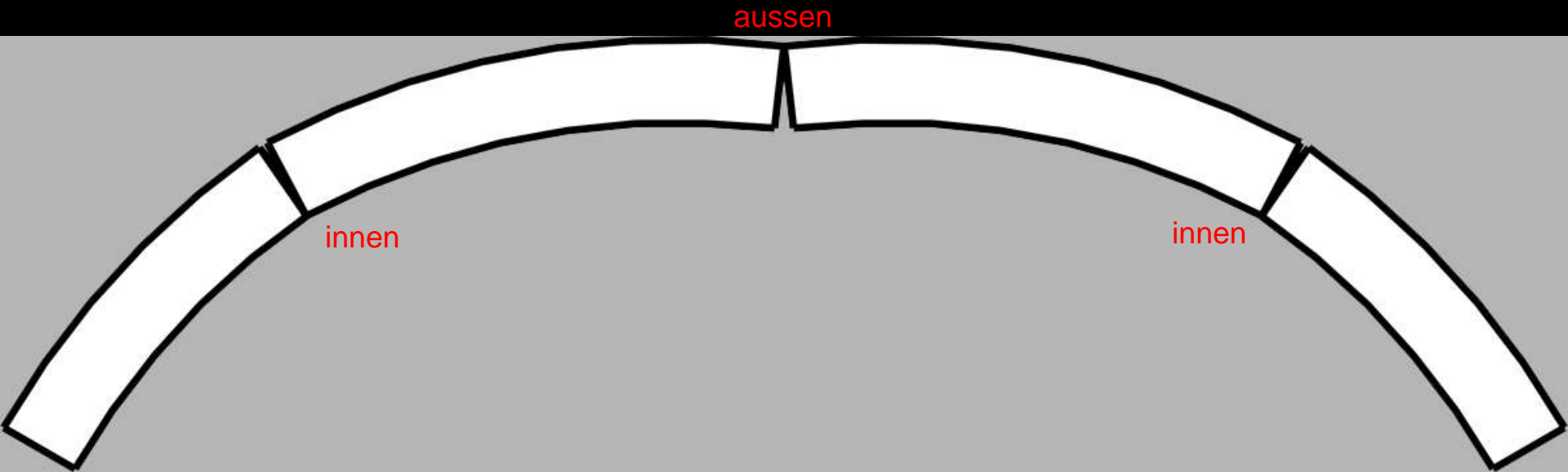


### Beispiel zur Methode von Coulomb

Berechneter Schub für verschiedene angenommene Lagen der Bruchfuge. Hier ungünstigster Winkel etwa  $36^\circ$

Dieser Schub ist  $H_{min}$  (grösste untere Schranke für den realen Schub  $H$ , „Infimum“)

gute und auf der sicheren Seite liegende Schätzung für den real auf die Widerlager wirkenden Schub

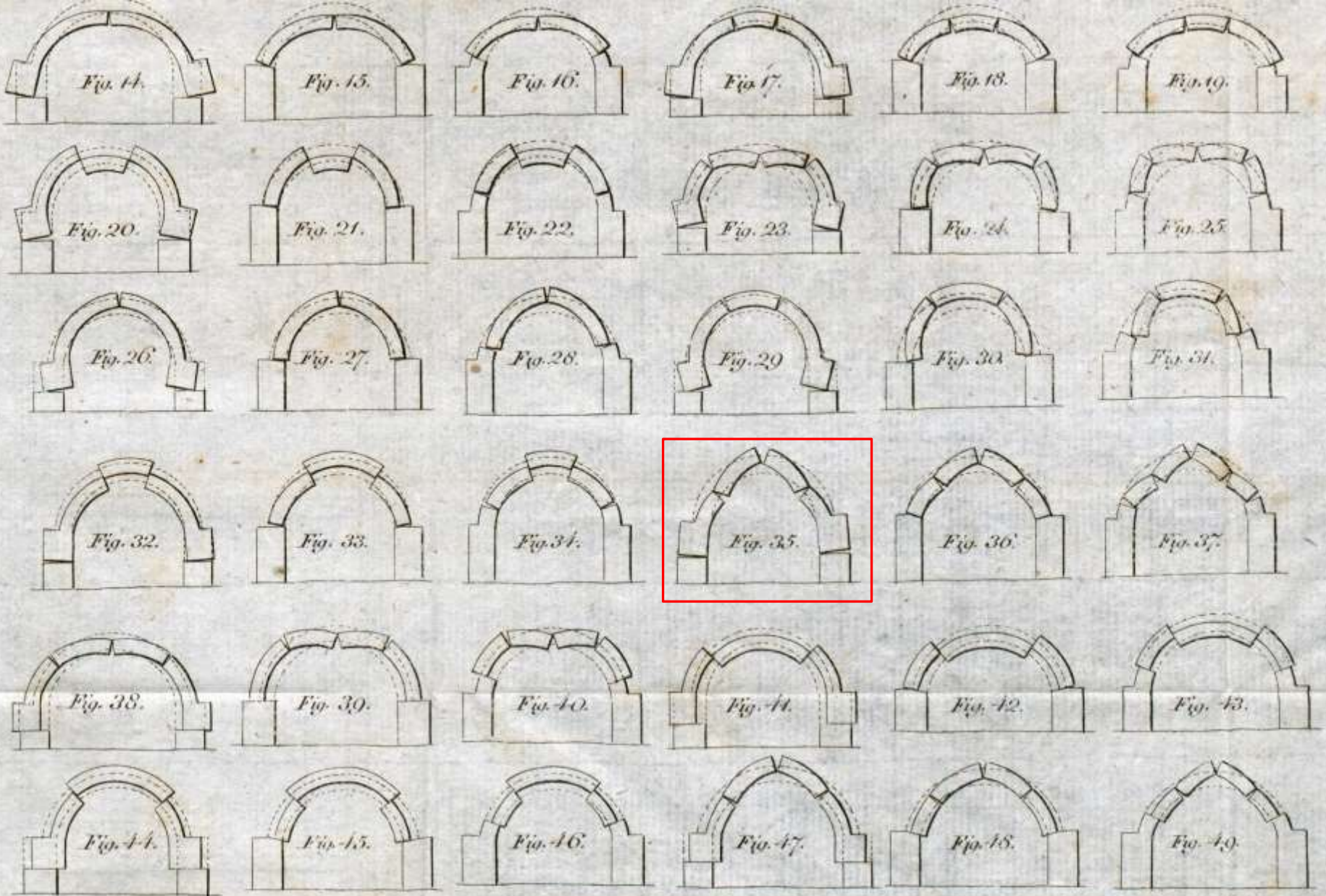


"nachgebende Widerlager"

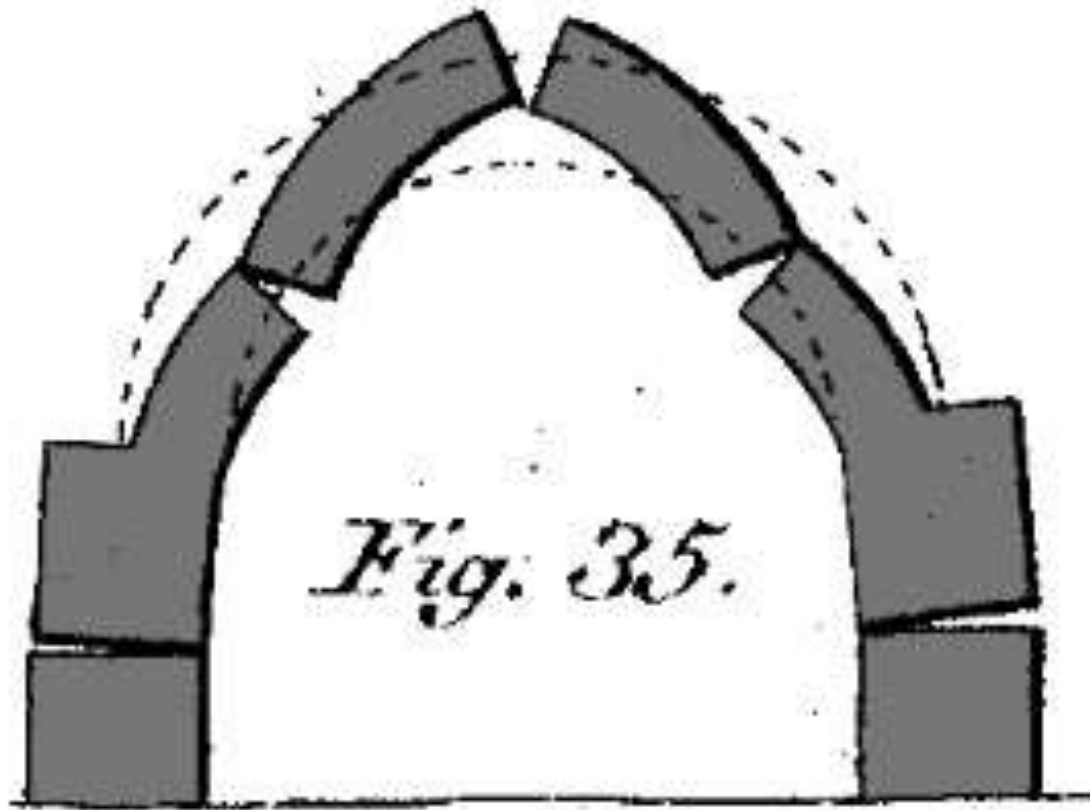
Gelenkfolge innen – ausser – innen

Methode von Coulomb  
Kantungstheorie, Situation „nachgebende Widerlager“





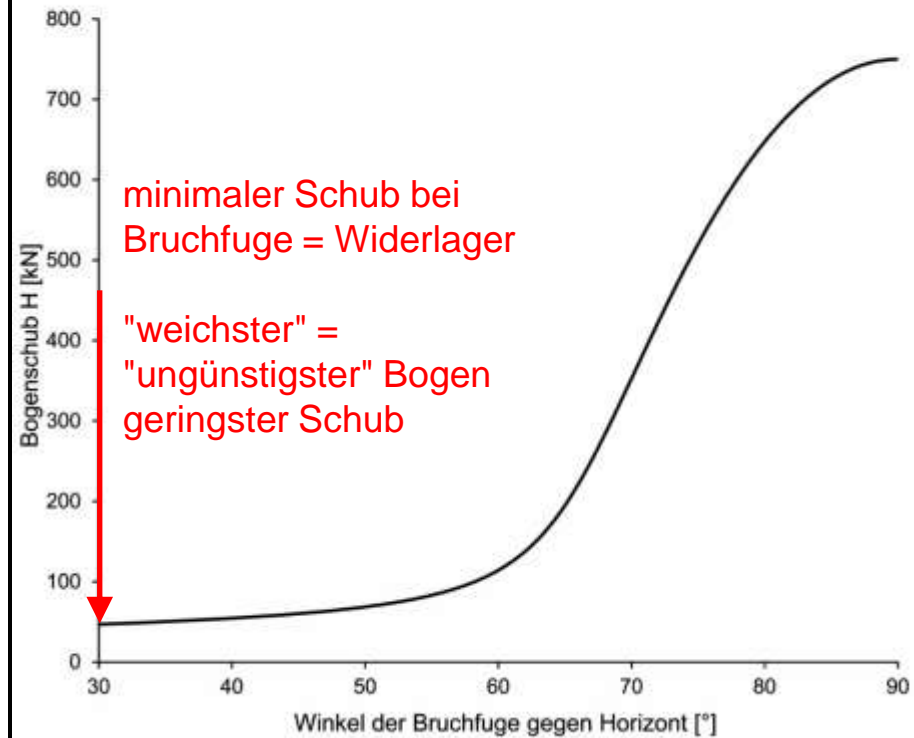
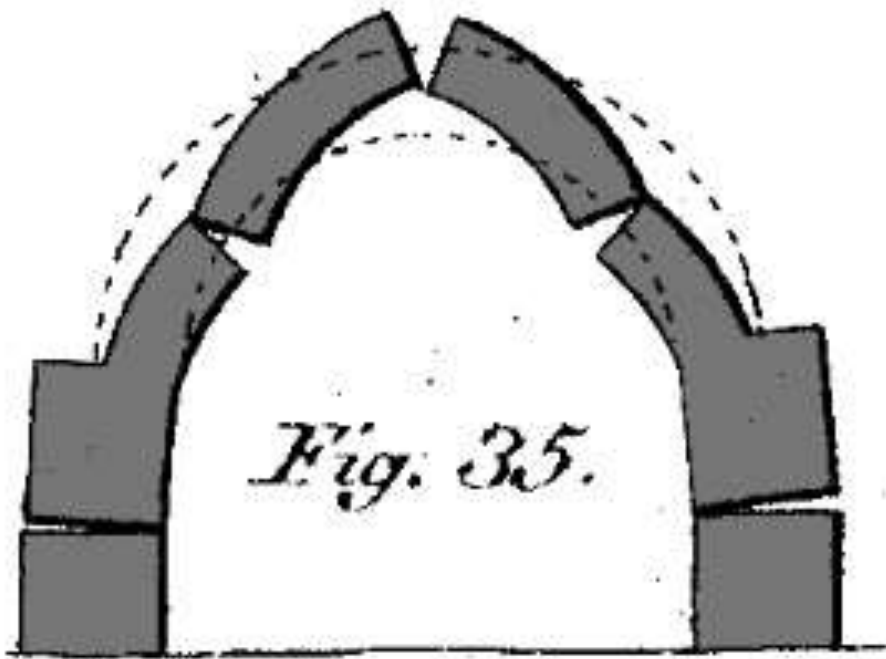
Schulz 1808  
diskutiert alle möglichen denkbaren Versagensformen



„zusammenrückende Widerlager“

Gelenkfolge aussen – innen - aussen

Methode von Coulomb  
Situation „Widerlagerbogen“

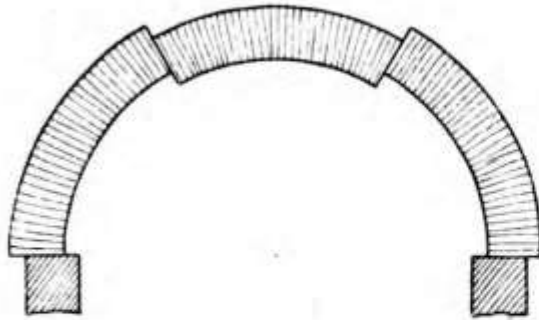


zusammenrückende Widerlager: der Bogen als gegenseitige „Verstrebung“ der Widerlager  
Dreigelenkbogen mit Gelenken aussen – innen – aussen

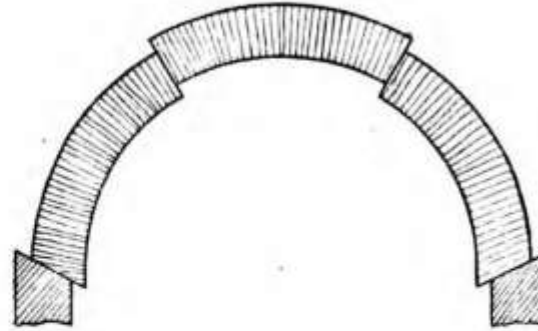
ungünstigster Fall ist nun der kleinste mögliche Schub:  
minimaler Schub  $H$  = nachgiebigster möglicher Bogen dieser Art

Dieser Schub ist  $H_{max}$  (kleinste obere Schranke für den realen Schub  $H$ , „Supremum“): gute und auf der sicheren Seite liegende Schätzung für den Widerstand, den der Stützbogen maximal aufnehmen kann

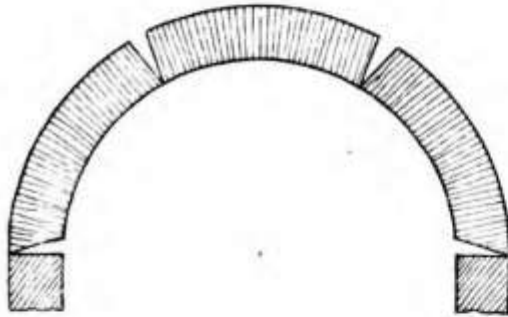
*Fig. 106.*



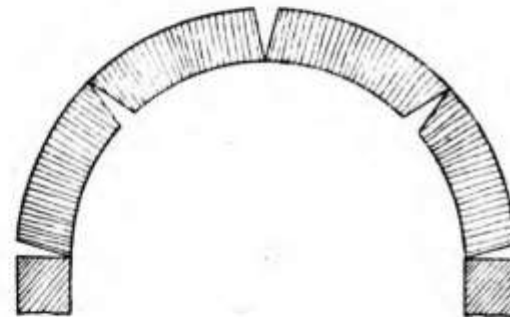
*Fig. 107.*



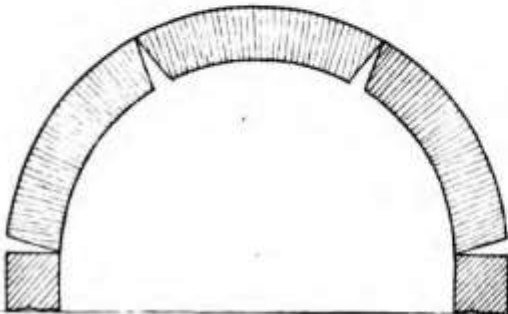
*Fig. 108.*



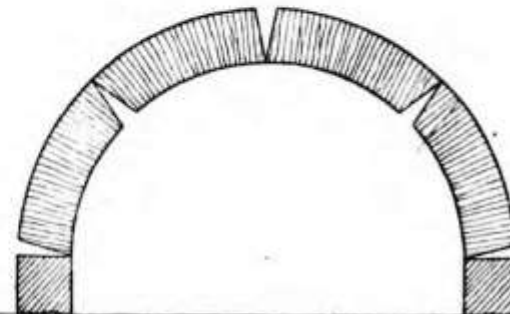
*Fig. 109.*



*Fig. 110.*

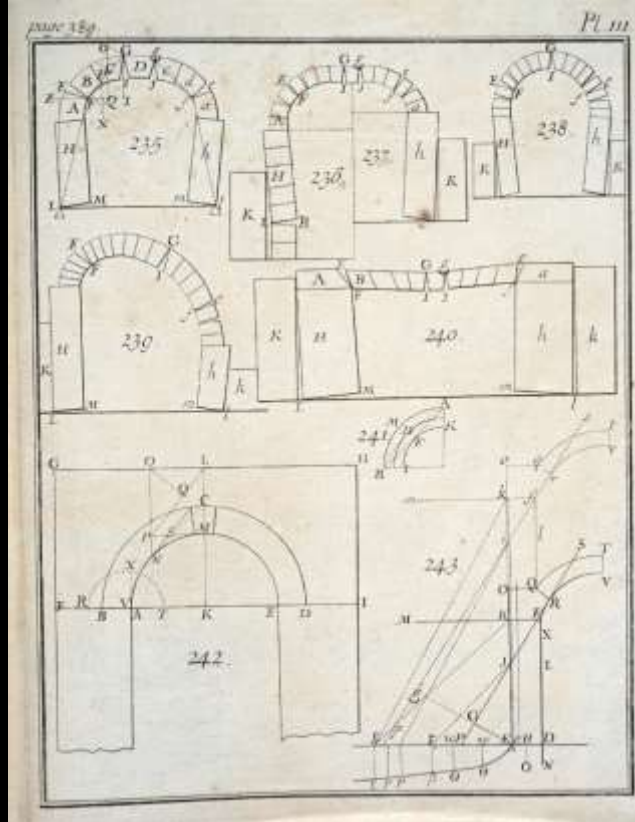


*Fig. 111.*



J. A. Borgnis, *Elementi di Statica Architettonica*, 1842

diskutiert alle möglichen denkbaren Versagensformen ... Bestätigung nur durch Experimente möglich!



Experimente und Beobachtungen, 1717–1810

# DISSERTATION

Sur l'ÉPAISSEUR des Culées des Ponts, sur la LARGEUR des Piles, sur la PORTE'E des Voussoirs, sur l'EFFORT & la PESANTEUR des Arches à differens surbaissemens, & sur les PROFILS de Maçonnerie qui doivent supporter des Chaussées, des Terrasses, & des Remparts, à quelque hauteur donnée que ce puisse estre. De plus, de la POUSSÉE DES CORPS differemment inclinez, & le moyen de la calculer.

Des differens DEGREZ DE FORCE que les Chevaux employent à tirer toute sorte de Voiture roulante sur differens Pavés, plus ou moins élevez ou inclinsz.

Des FROTTEMENS & de la RETENUE de toute sorte de Corps pesans, qu'on fait descendre par plusieurs tours de corde, autour d'un Essieu immobile, & la maniere de les déterminer.

Et enfin de la PERCUSSION des Corps que l'on fiche, comme Picux & Pilotis, comparée avec les charges qu'ils doivent supporter, & le moyen d'en supputer le poids.

Avec plusieurs TABLES dressées sur ces principes de Méchanique, où tous ceux qui se mêlent d'Architecture, trouveront en un moment la maniere de résoudre la plûpart de ces difficultez.

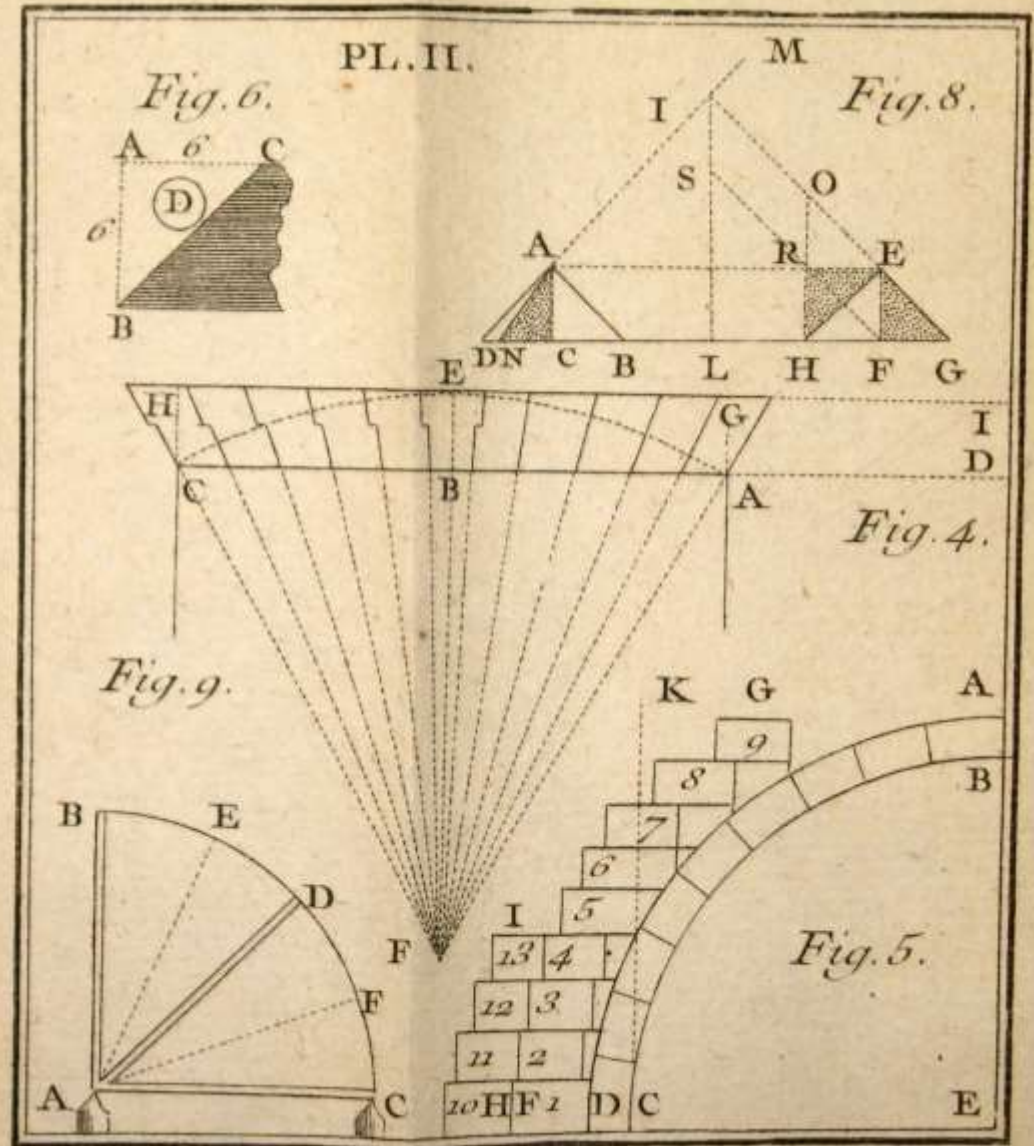
Par le Sieur GAUTIER, Architecte, Ingenieur & Inspecteur des grands Chemins, Ponts, & Chaussées du Royaume.

A PARIS,

Chez ANDRÉ CAILLEAU, Quay des Augustins, près la rue Pavée, à Saint André.

M. DCCXVII.

Avec Approbations & Privilège du Roy.



Modellexperimente von Gautier  
(Gautier, Dissertation sur l'épaisseur des culées des ponts, 1717)

LA THEORIE ET LA PRATIQUE  
DE LA  
**COUPE DES PIERRES  
ET DES BOIS**

POUR LA CONSTRUCTION DES VOUTES  
Et autres Parties des Bâtimens Civils & Militaires ,

ou

**TRAITÉ DE STEREOTOMIE**  
A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE,

Par **M. FREZIER**, Chevalier de l'Ordre Militaire de Saint Louis ,  
Ingenieur ordinaire du Roy en Chef à Landau.

**TOME TROISIEME,**

*Auquel on a joint une Dissertation sur les Ordres d'Architecture.*



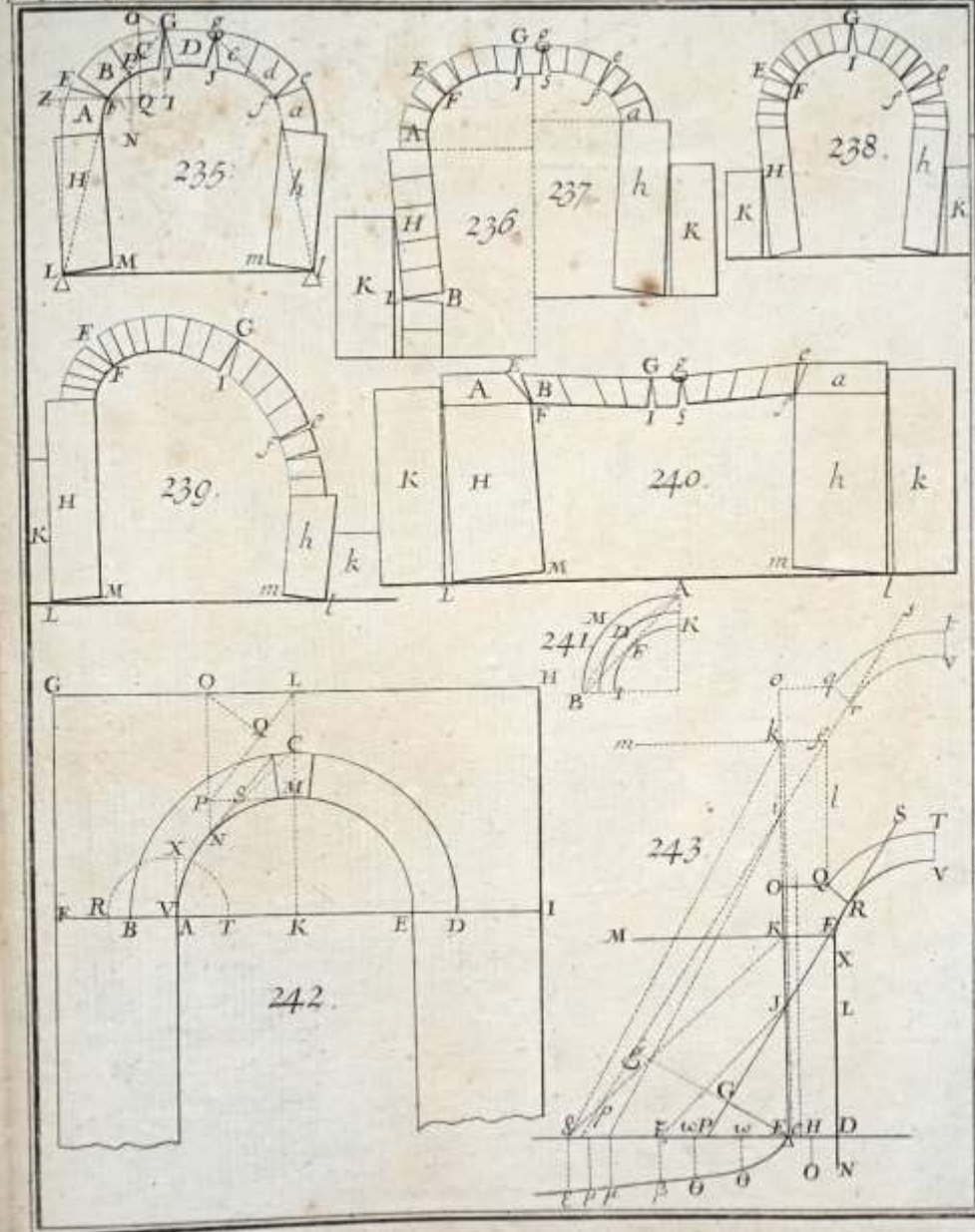
A STRASBOURG,

Chez **JEAN-DANIEL DOULSEKER** le Fils, Marchand Libraire  
à l'entrée de la Ruë dite Flader-Gals.

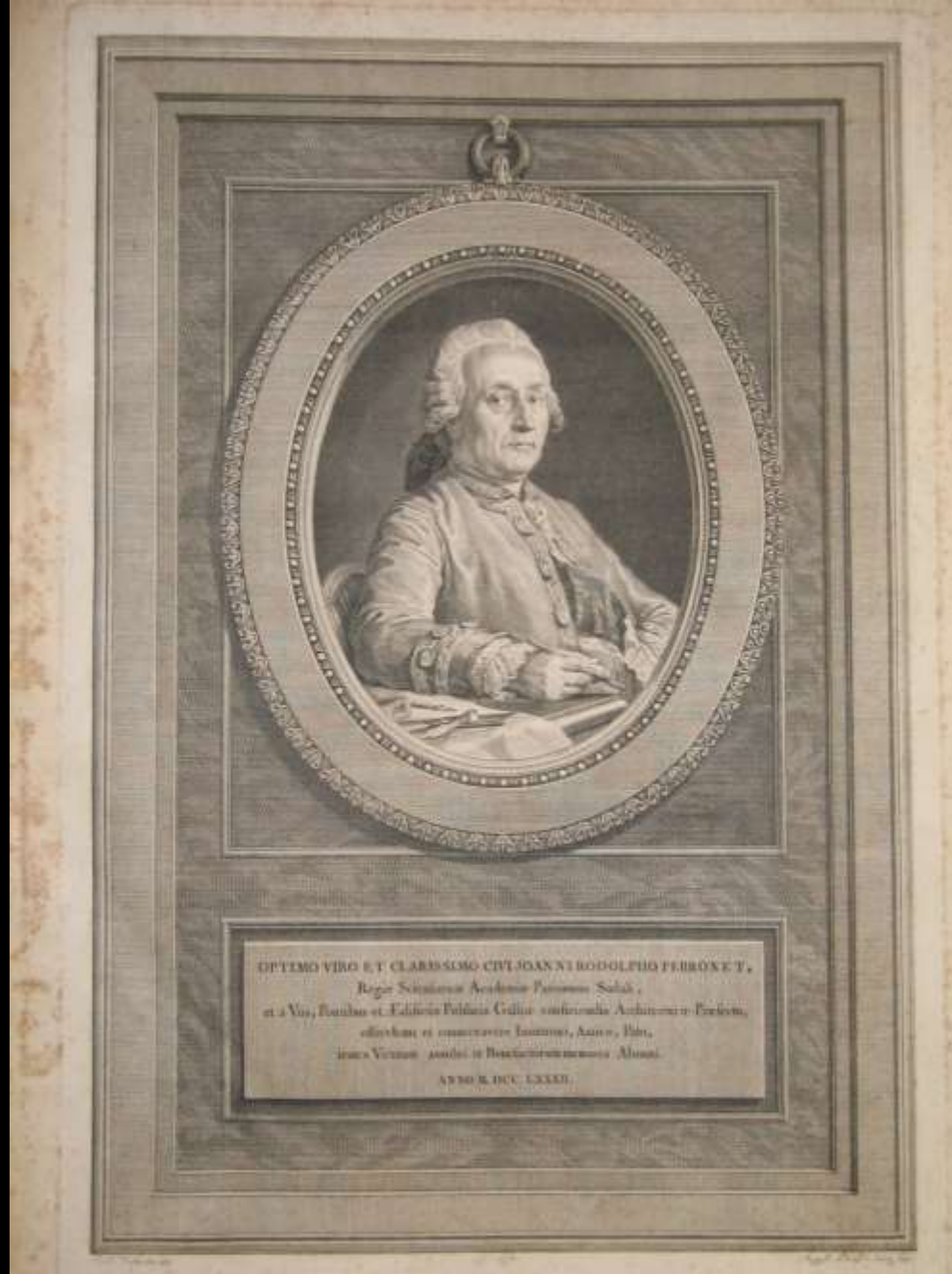
A PARIS,

Chez **CHARLES-ANTOINE JOMBERT** Libraire, Rue St.  
Jacques, au coin de la Ruë des Mathurins.

M DCC XXXIX.



Modellexperimente von Danizy/Montpellier 1732 deuten tatsächlich auf Korrektheit der Kantungstheorie!!!  
(erstmal veröffentlicht von Frézier 1739)



OPTIMO VIRO ET CLARISSIMO CIVI JOANNI RODOLPHO PERRONET,  
Regis Scientiarum Academiae Parisiensis Secretarius,  
et a Viro, Pontibus et Edificiis Publicis Galliarum inspectore Archibonorum Peritissimo,  
obsequium et amicitiam Insuetam, Annis, Pluribus,  
Inter Virescens, Amicos et Beneficentissimos Alumnos.  
ANNO M. DC. LXXXIII.

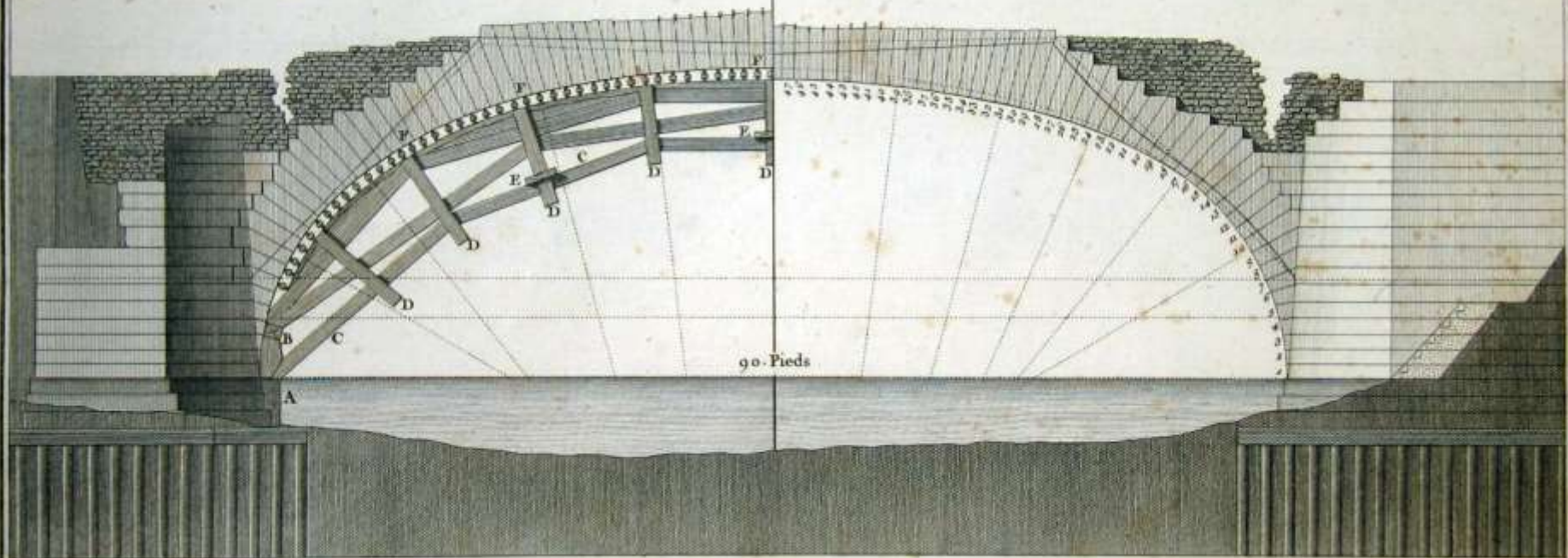
Jean-Rodolphe Perronet, Leiter des Corps des Ponts et Chaussées  
(Perronet 1788)



ARCHE S<sup>T</sup> EDME DE NOGENT SUR SEINE CONSTRuite EN 1768.

Vue avant le Décintrement.

Vue après le Décintrement.



90. Pieds



Le Brun del.

Beobachtungen zu Verformungen an Werksteinbrücken während des Baus (Perronet 1788)

# RECUEIL DE DIVERS MÉMOIRES

EXTRAITS DE LA BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE

DES PONTS ET CHAUSSÉES,

A L'USAGE DE MM. LES INGÉNIEURS,

PUBLIÉ PAR P. C. LESAGE,

Ingénieur en chef de première classe, Inspecteur de l'École impériale des Ponts et Chaussées de France, Membre de la Légion d'Honneur, des Académies des Sciences et Arts de Turin, Munich, de celles des Arcades de Rome, Dijon, Bordeaux, etc.

II<sup>e</sup> PARTIE.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

POUR L'ARCHITECTURE, LES MATHÉMATIQUES ET LA MARINE,

Rue de Thionville, n<sup>o</sup> 10.

1810.

# EXPÉRIENCES

SUR

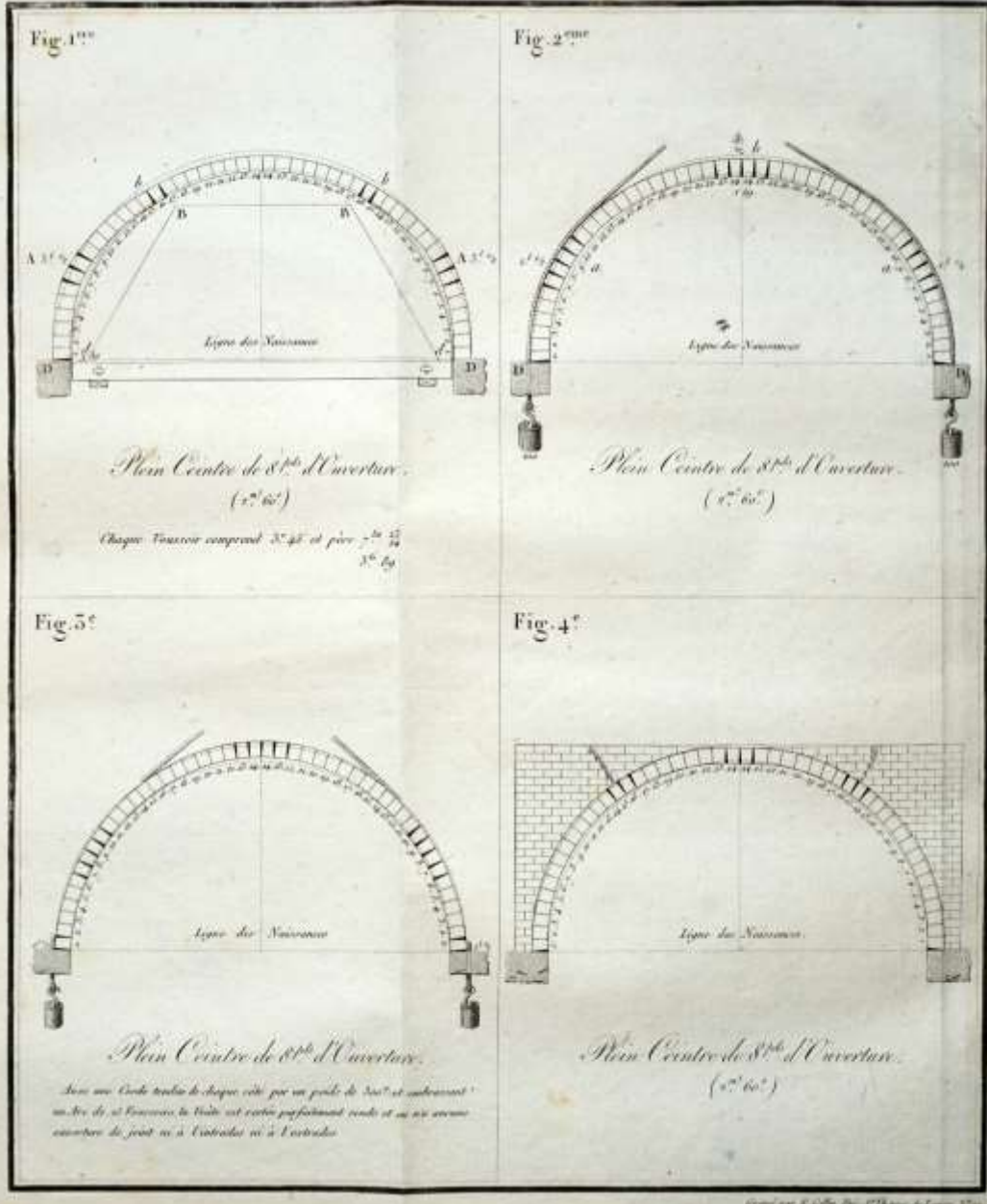
LA STABILITÉ DES VOÛTES,

PAR L. C. BOISTARD,

Ingénieur en chef du Corps impérial des Ponts et Chaussées, chargé de la direction des travaux maritimes des ports militaires d'Anvers et de Flessingue.

DEPUIS le commencement du dernier siècle jusqu'à nos jours on a publié différents écrits sur la poussée et l'équilibre des voûtes. Les mémoires de l'Académie des sciences de Paris contiennent les recherches les plus intéressantes qu'on ait faites sur cette matière. Les premiers auteurs qui s'en soient occupés se sont bornés à déterminer la figure de l'extrados des voûtes circulaires pour le cas de l'équilibre, et les épaisseurs des pieds-droits, ou culées nécessaires pour résister à la poussée. A mesure que l'analyse s'est perfectionnée, on a envisagé la question sous un point de vue plus général; le dernier mémoire de M. Bossut semble avoir épuisé la matière en traitant tout ce qui est relatif à la figure et à la poussée d'une voûte pressée par des forces quelconques. M. Prony, dans son architecture hydraulique, et dans un manuscrit que nous avons lu à l'école des ponts et chaussées, a encore ajouté aux recherches de ceux qui l'ont précédé. Mais il faut l'avouer, tous ces écrits reposent sur une hypothèse qui n'est pas confirmée par l'expérience, en sorte qu'ils doivent être relégués parmi les recherches de pure spéculation, très-curieuses à la vérité, mais sans aucune utilité pour la pratique.

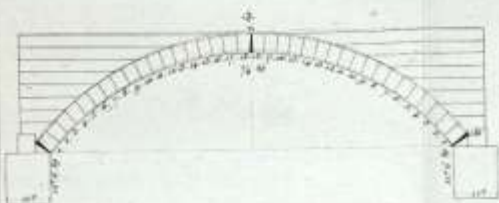
En effet, tous ces auteurs supposent que les voûtes sont composées de voussoirs parfaitement polis, sans aucun frottement, et qui glisseraient sur leurs joints, si les forces qui sollicitent le système ne se détruiraient pas mutuellement: d'où il suit que dans les voûtes en berceau,



*Construit par J. B. Boistard, P. 1<sup>er</sup> D'essai de Paris, 1792.*

Neue Experimente von Boistard 1800: Bögen ohne und mit Hintermauerung (Boistard 1810)

Fig. 17.



Couverture du cintre primitif 8<sup>h</sup> (2<sup>h</sup> 60')  
 Couverture de la voûte 8<sup>h</sup> 2' (2<sup>h</sup> 62')  
 Poids de la voûte 300<sup>t</sup> (120<sup>t</sup> 30<sup>l</sup>)

Les voûtes sont en briques posées à sec, le tablier est en fer, les piles sont en pierre. Les deux clés sont de même hauteur et se trouvent dans la même ligne horizontale à une distance de 120<sup>t</sup> 30<sup>l</sup>.

Fig. 18.



Couverture du cintre primitif 8<sup>h</sup> (2<sup>h</sup> 60')  
 Poids de la voûte 300<sup>t</sup> (120<sup>t</sup> 30<sup>l</sup>)

Fig. 19.



Couverture 8<sup>h</sup> (2<sup>h</sup> 60')  
 Flèche 1<sup>h</sup> (1<sup>h</sup> 00')  
 Rayon 8<sup>h</sup> 42' (2<sup>h</sup> 56')  
 Arc total 36<sup>h</sup> 8' 42"  
 Poids de la voûte 225<sup>t</sup>

Fig. 20.



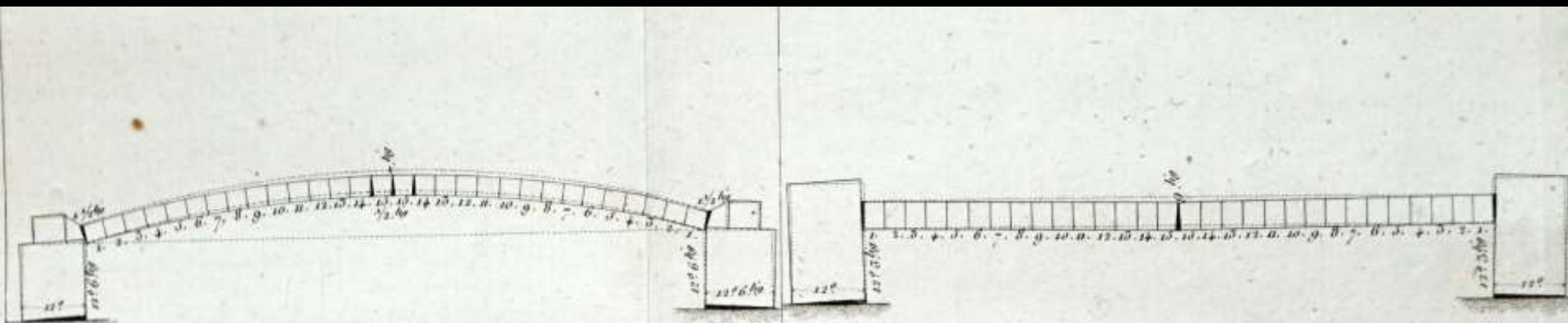
Couverture 8<sup>h</sup> (2<sup>h</sup> 60')  
 Flèche 1<sup>h</sup> 30' (1<sup>h</sup> 30') (Rayon 8<sup>h</sup> 62' (2<sup>h</sup> 66') Arc total 36<sup>h</sup> 8' 42"  
 Poids de la voûte

Les voûtes sont formées de 42 briques posées à sec de chaque côté - s'élevant daplomb sur le petit cintre et se trouvent placées en hauteur sur chaque côté de la voûte. Le petit cintre est d'une largeur de 4 toises.

Neue Experimente von Boistard 1800: flachgespannte Brückenbögen (Boistard 1810)



Tragverhalten des Bogens  
Ein einfaches Anwendungsbeispiel zur Coulomb-Methode:  
Der scheinrechte Bogen (Platebande)



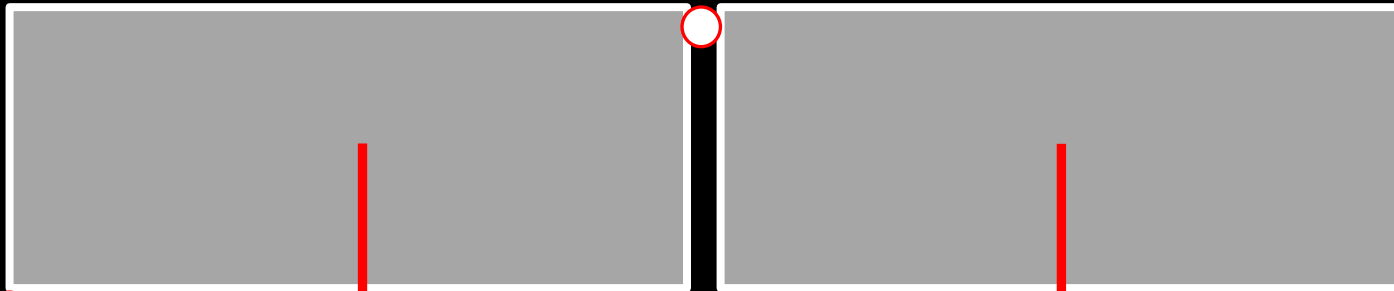
Ouverture  $8^{\text{ds}}$  ( $2^{\text{M}} 60^{\text{c}}$ )  
 Flèche  $= 0^{\text{d}} 6^{\text{p}} 6^{\text{li}} \frac{22}{25}$  ( $0^{\text{M}} 175^{\text{c}}$ )  
 Rayon  $14^{\text{d}} 10^{\text{p}} 6^{\text{li}} \frac{3}{4}$  ( $4^{\text{M}} 81^{\text{c}}$ )  
 Arc total  $31^{\circ} 16' 16''$

Poids de la voûte  $227^{\text{M}}$  ( $102^{\text{K}} 11^{\text{L}}$  deca)  
 Poids du bloc à gauche  $209^{\text{M}}$  ( $102^{\text{K}} 30^{\text{L}}$ )  
 Poids du bloc à droite  $205^{\text{M}}$  ( $99^{\text{K}} 17^{\text{L}}$ )  
 Le centre de gravité de chaque bloc répond à  $5^{\text{p}}$   
 $7^{\text{li}}$  de son arcade extérieure.

Nota: Les dimensions de cette voûte sont les  $\frac{4}{25}$  ou à peu près le  $\frac{1}{6}$  de celles du Pont de  
 Nîmes de  $50^{\text{ds}}$  d'ouverture ( $16,24,3,95^{\text{d}}$  ( $50^{\text{M}} 20^{\text{c}}$ ) de rayon, et  $5^{\text{d}} 5^{\text{p}} 1^{\text{li}} \frac{1}{4}$  ( $1^{\text{M}} 11^{\text{c}}$ ) de flèche.

Ouverture de la plate bande  $8^{\text{ds}}$  ( $2^{\text{M}} 60^{\text{c}}$ )  
 Poids des Clavans  $220^{\text{M}}$  ( $107^{\text{K}} 69^{\text{L}}$ )  
 Poids de la Culée à gauche  $209^{\text{M}}$  ( $102^{\text{K}} 30^{\text{L}}$  deca)  
 Poids de la Culée à droite  $205^{\text{M}}$  ( $99^{\text{K}} 17^{\text{L}}$  deca)  
 Poids sur le milieu de chaque Culée  $752^{\text{M}}$  ( $358^{\text{K}} 50^{\text{L}}$  deca)

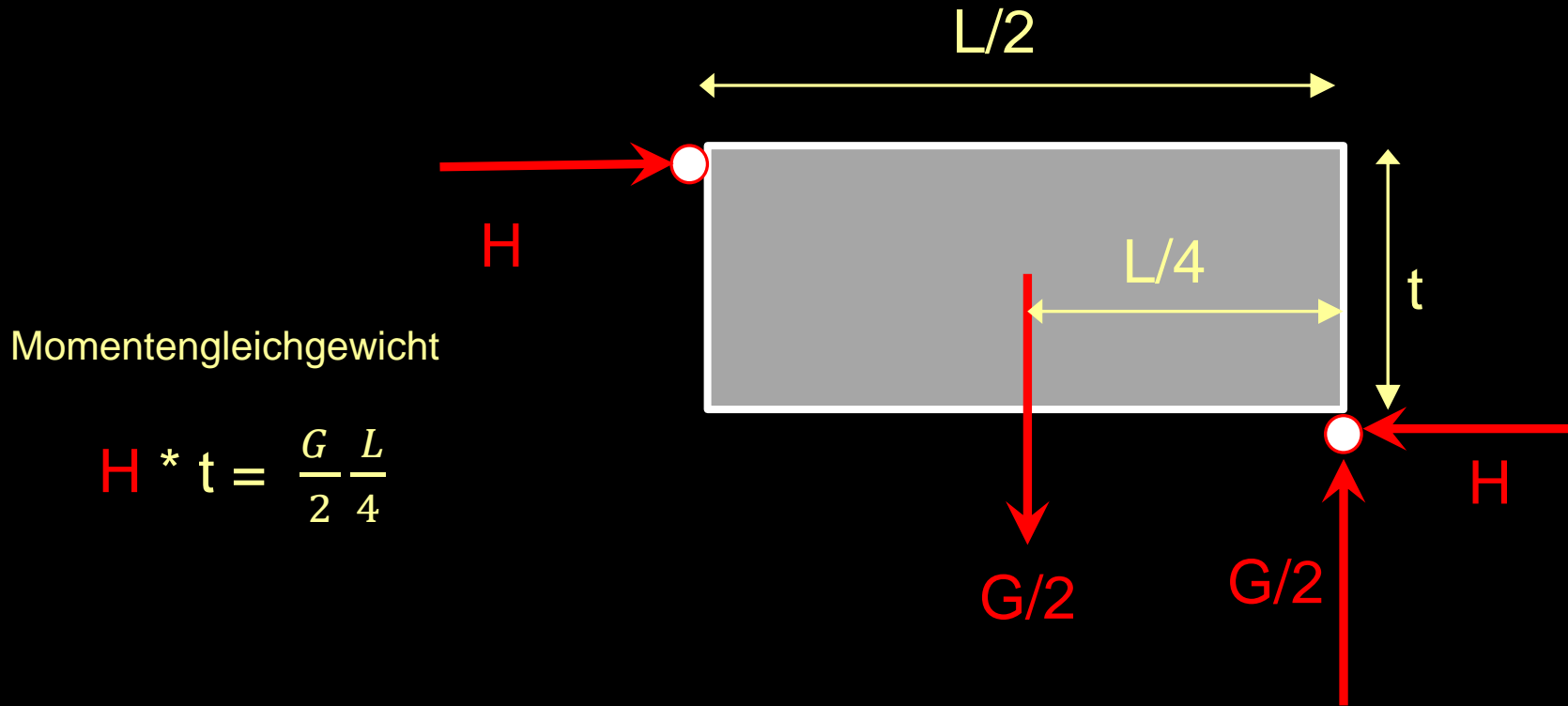
Spannweite L



t



Prinzip des „schiefechten Bogens“ („Platebande“, „piattabanda“) – ein einfacher Fall!  
Wie bestimmt man den Bogenschub H?



Momentengleichgewicht

$$H * t = \frac{G}{2} \frac{L}{4}$$

Bogenshub  $H = \frac{G L}{8 t}$  wirkt horizontal auf die Widerlager!

Prinzip des „scheitrechten Bogens“ („Platebande“, „piattabanda“)

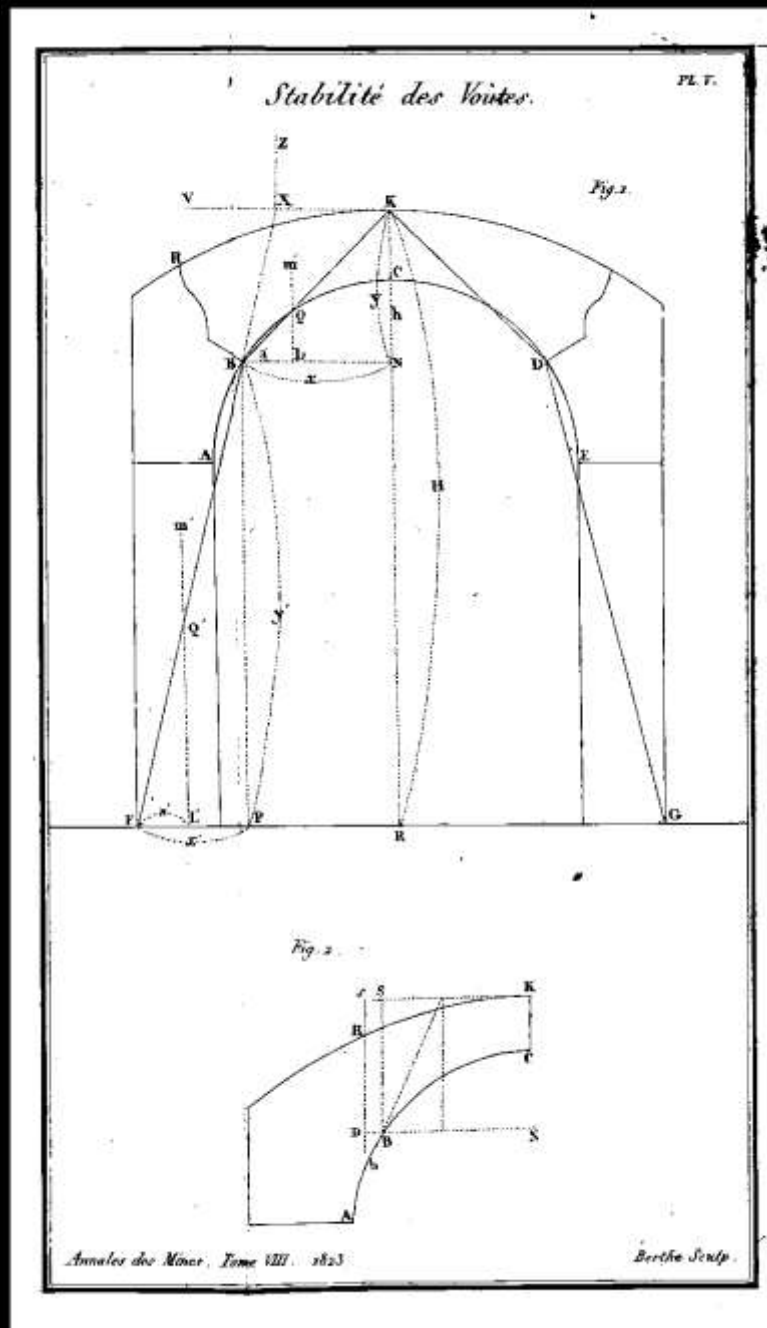




Zum Beispiel  $L = 4 t$ :

Bogenshub  $H = \frac{G L}{8 t} = G/2$  wirkt horizontal auf die Widerlager!

Prinzip des „schiefechten Bogens“ („Platebande“, „piattabanda“)



G. Lamé und E. Clapeyron, *Mémoire sur la stabilité des voûtes*, 1823  
stellen vereinfachte praktische Durchführung der Coulomb-Methode vor (mit vertikaler Bruchfuge ..)

# RÉSUMÉ DES LEÇONS

DOSSÉES

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

sur

## L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS

ET DES MACHINES.

### PREMIÈRE PARTIE,

CONTENANT LES LEÇONS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIEAUX, ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS EN TERRE, EN MAÇONNERIE ET EN CHARPENTE.

PAR M. NAVIER,

MEMBRE DE L'INSTITUT (ACADÉMIE DES SCIENCES), PROFESSEUR D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES.

DEUXIÈME ÉDITION,  
CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.

A PARIS,

CHEZ CARILIAN-GŒURY,

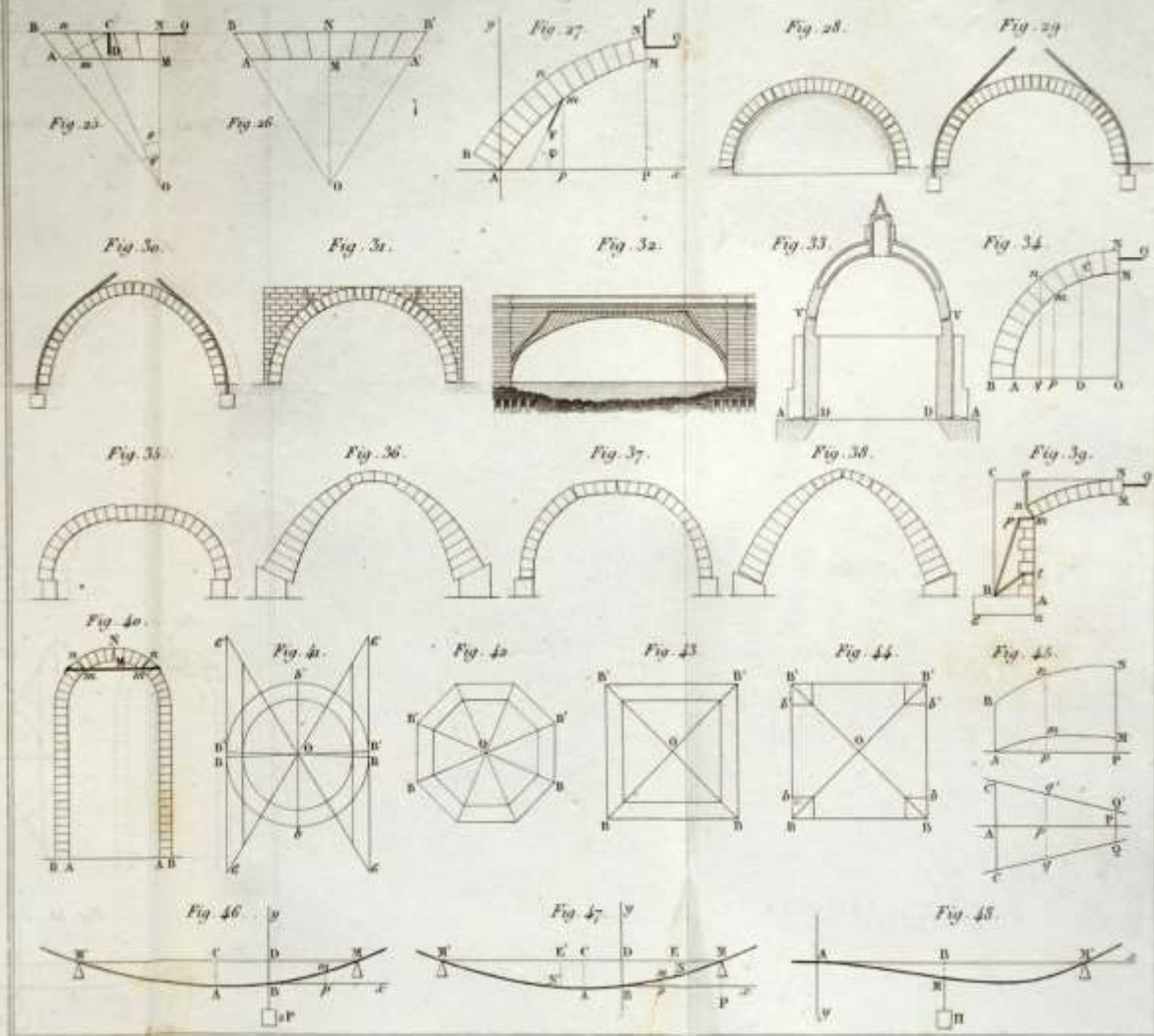
LIBRAIRE DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 41.

1833.

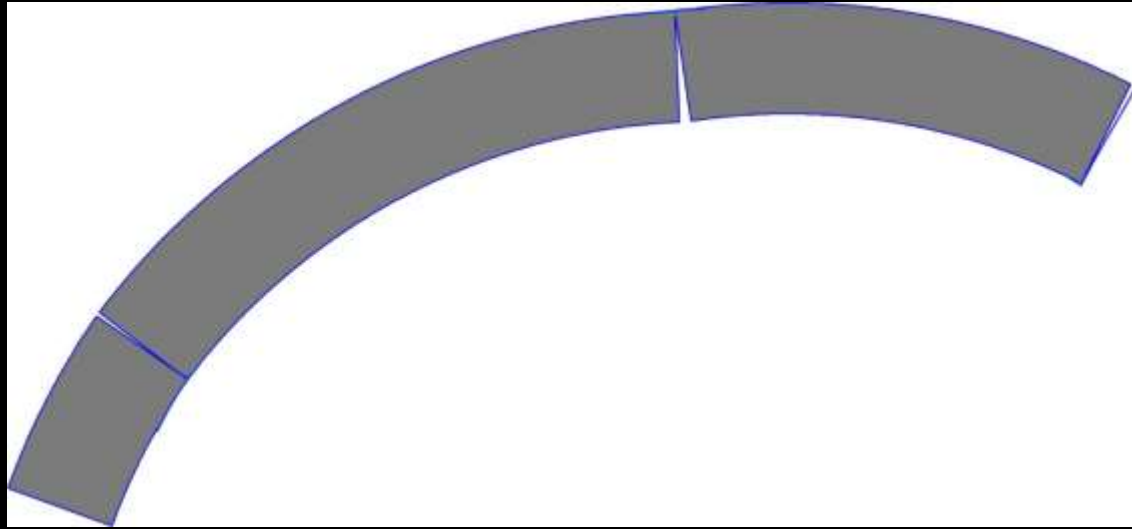
Leçons sur l'application de la mécanique, 1<sup>re</sup> partie.

Pl. II.



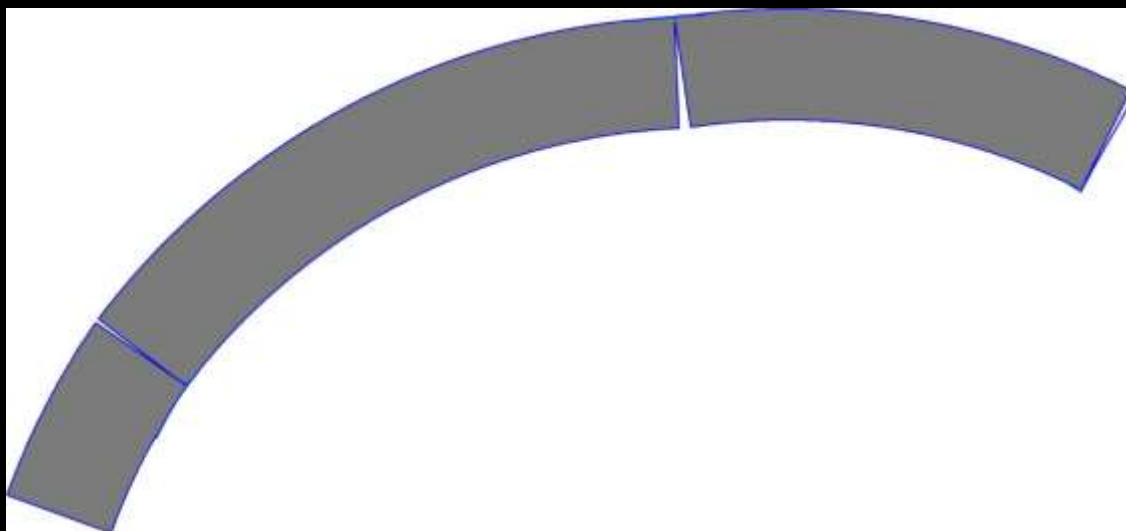
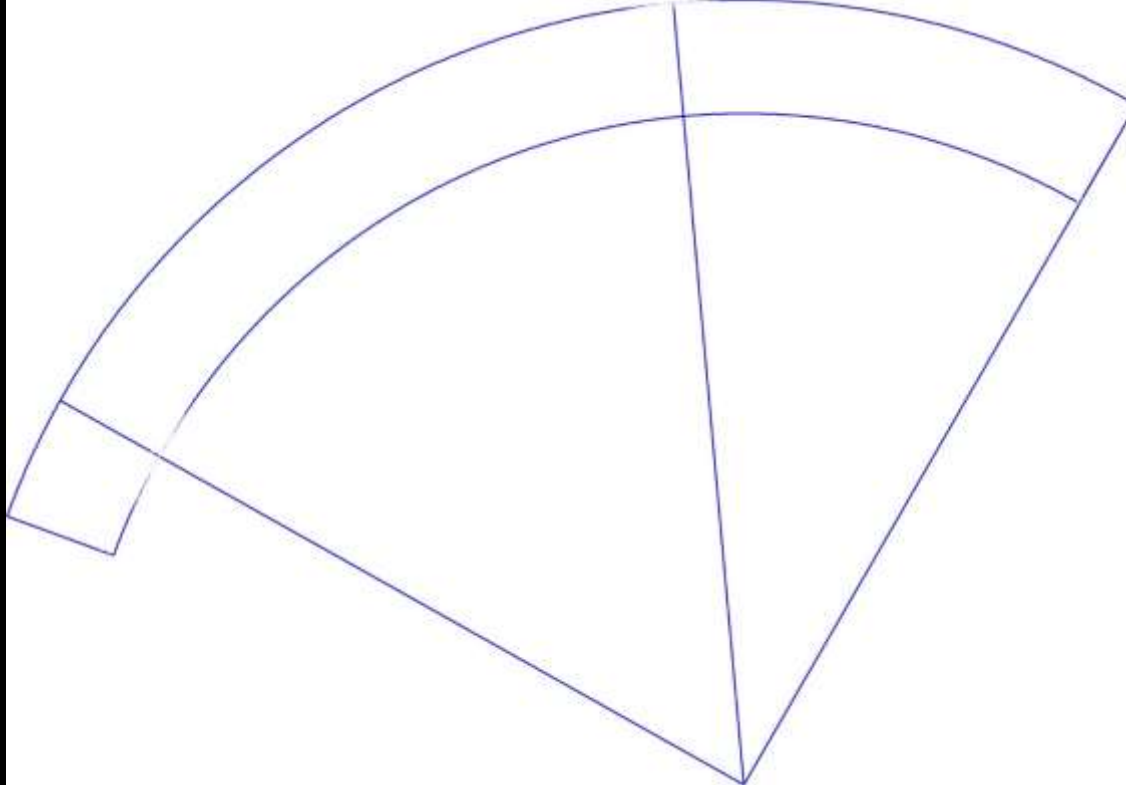
Navier 1826/1833

empfiehlt Verwendung der Methode von Coulomb zur Kantungstheorie

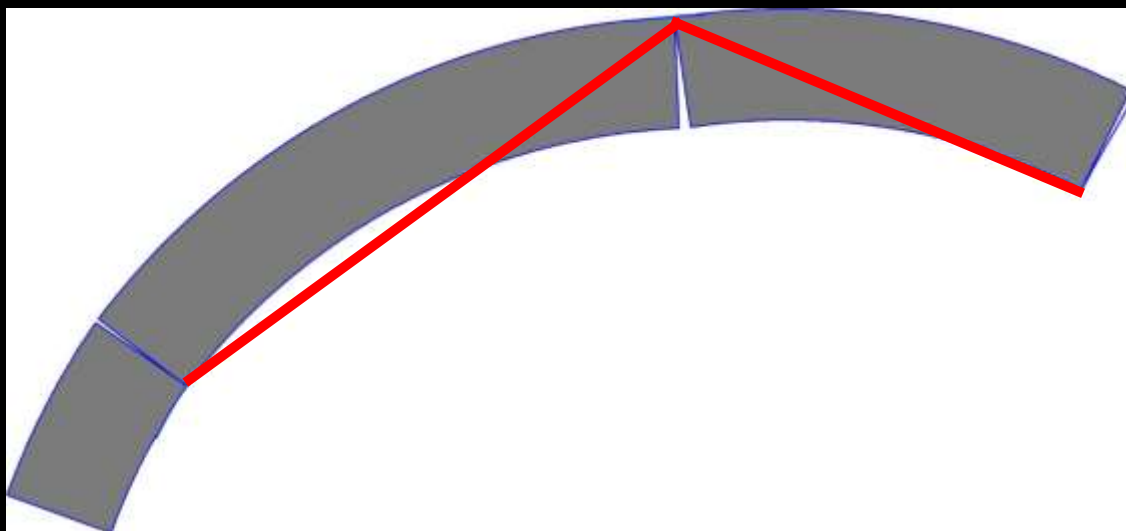
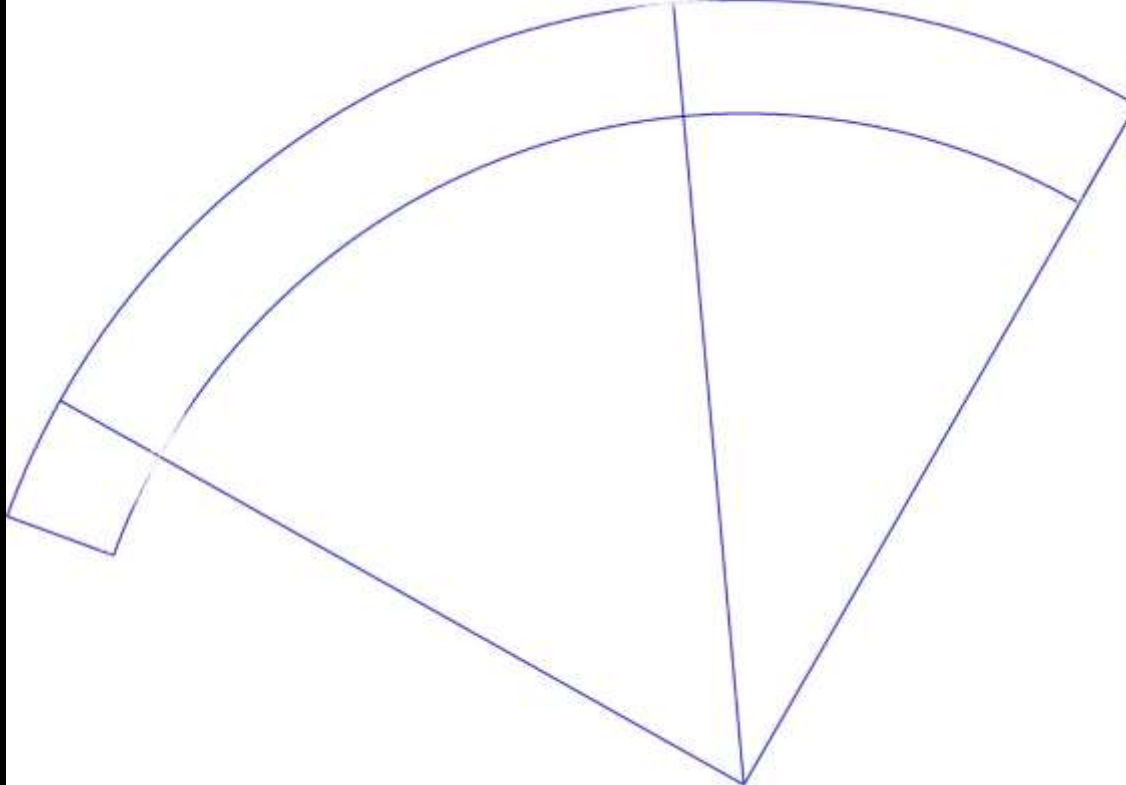


„Coulomb reloaded“:

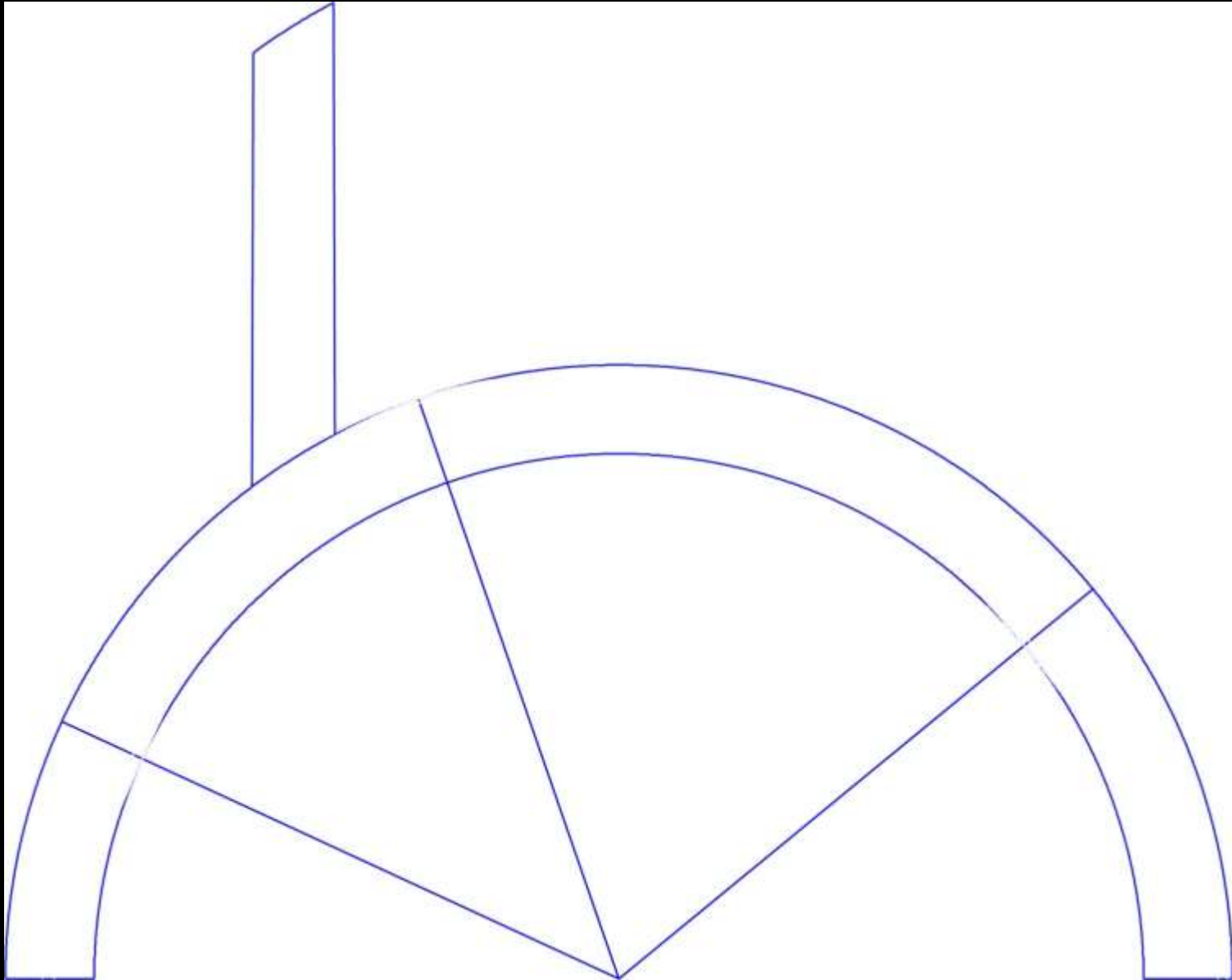
Anwendung der Extremalprinzipien mittels computergestützter Optimierungsverfahren erlaubt Ermittlung der ungünstigsten Gelenklage auch bei drei unbekannt Positionen



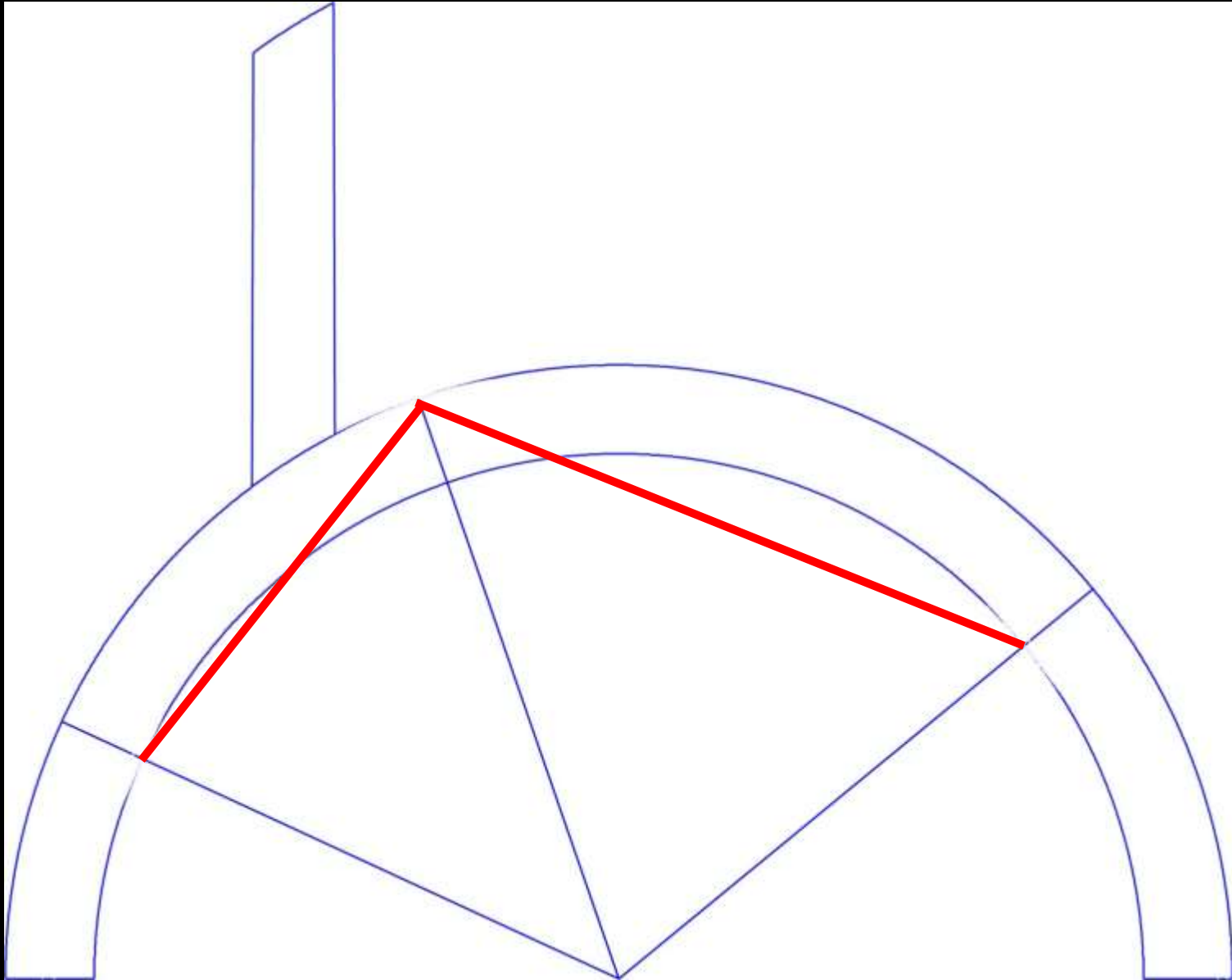
Unsymmetrischer Bogen: ungünstigste Gelenklage und zugehörige Gelenkfigur  
Bestimmung der ungünstigsten Lage der Gelenkfugen durch Optimierungsalgorithmus



Unsymmetrischer Bogen: ungünstigste Gelenklage und zugehörige Gelenkfigur  
Bestimmung der ungünstigsten Lage der Gelenkfugen durch Optimierungsalgorithmus



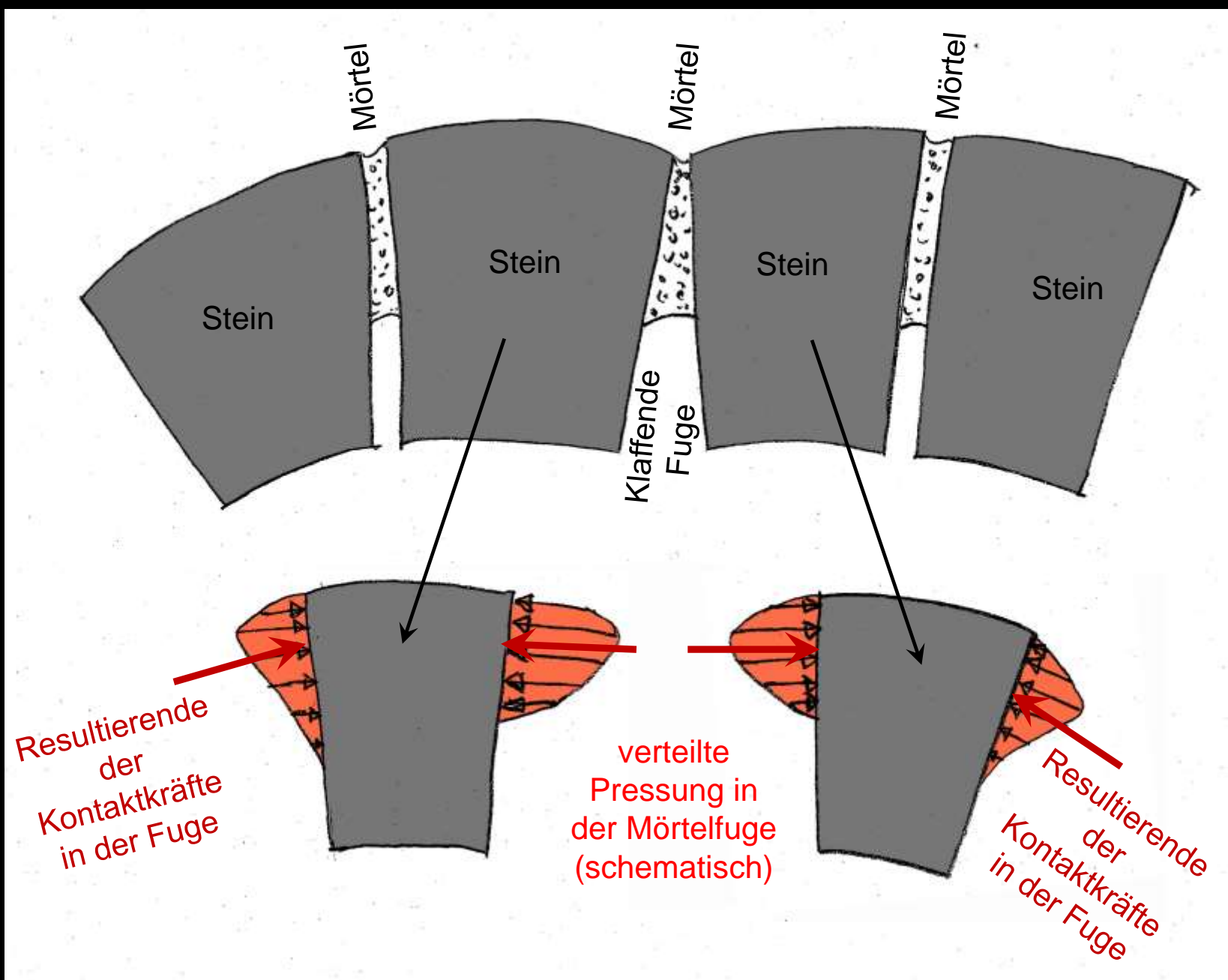
Bogen mit konzentrierter Auflast  
Bestimmung der ungünstigsten Lage der Gelenkfugen durch Optimierungsalgorithmus



Bogen mit konzentrierter Auflast  
Bestimmung der ungünstigsten Lage der Gelenkfugen durch Optimierungsalgorithmus

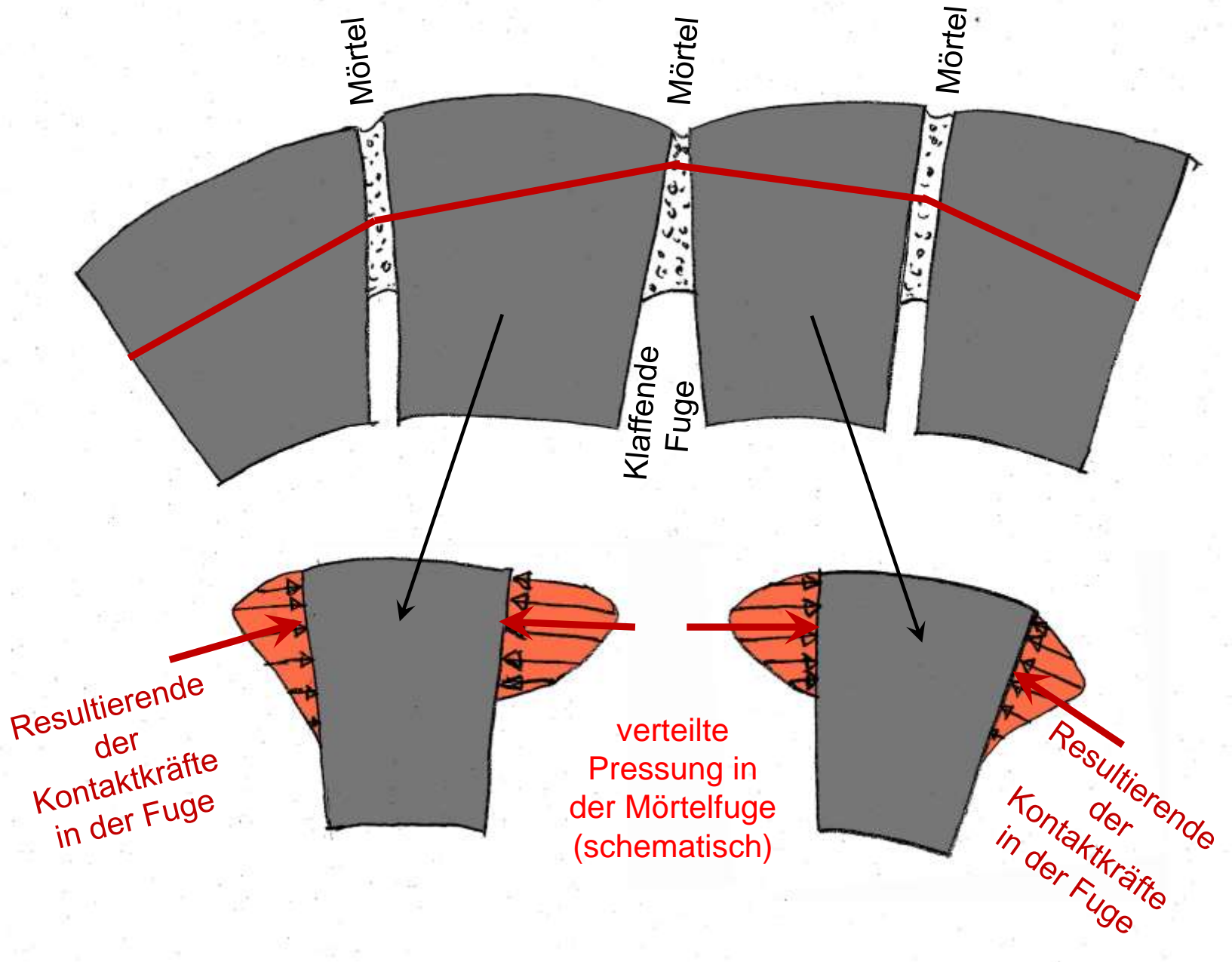


Untersuchung der Bogenstatik auf Basis der Elastizitätstheorie

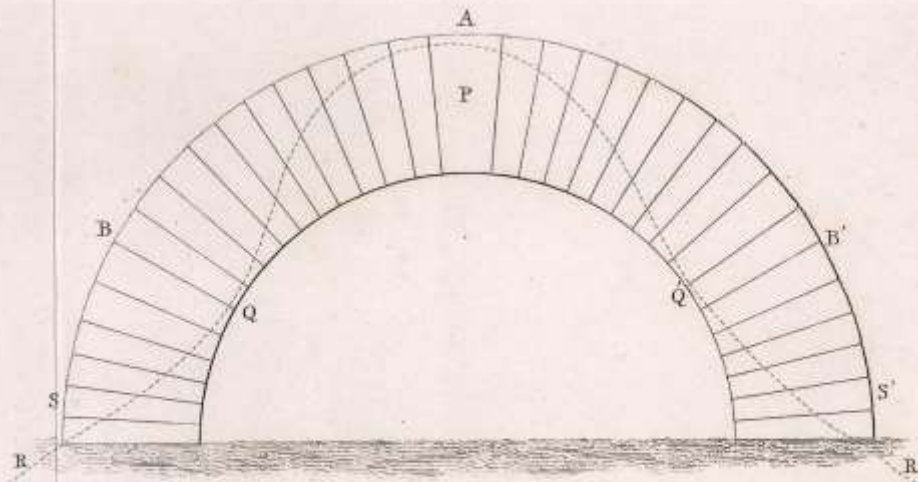


### Übertragung der Kräfte in einem Keilsteinbogen

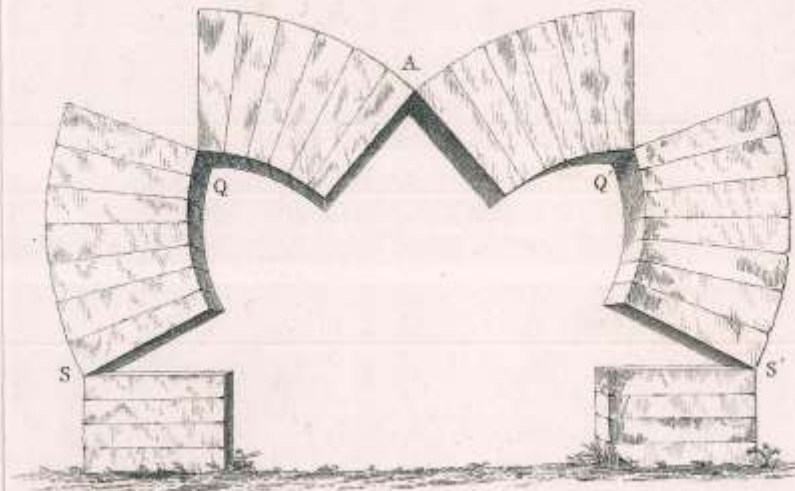
Schon vor dem Umkanten tritt eine Teilflächenpressung in teilweise klaffenden Fugen auf, Keilsteinrotation



Die Durchstosspunkte der resultierenden Druckkräfte in den Fugen können durch ein Polygon verbunden werden und zeigen dann die Kraftwirkungen im Bogen anschaulich auf -> sogenannte „Stützlinie“



*Fig. 15*

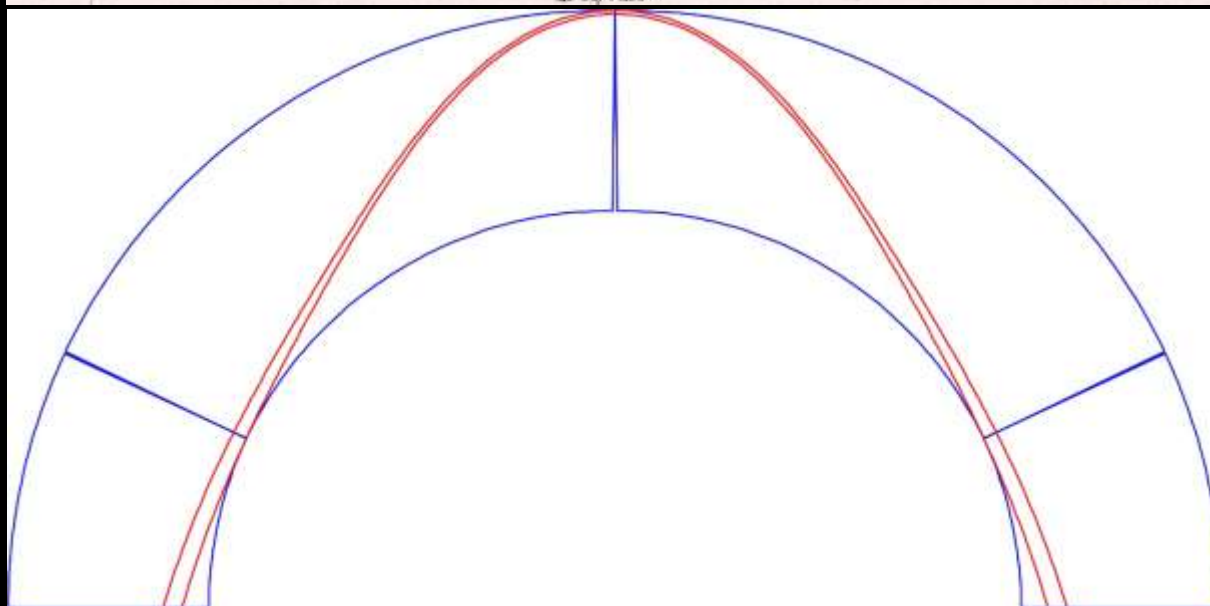
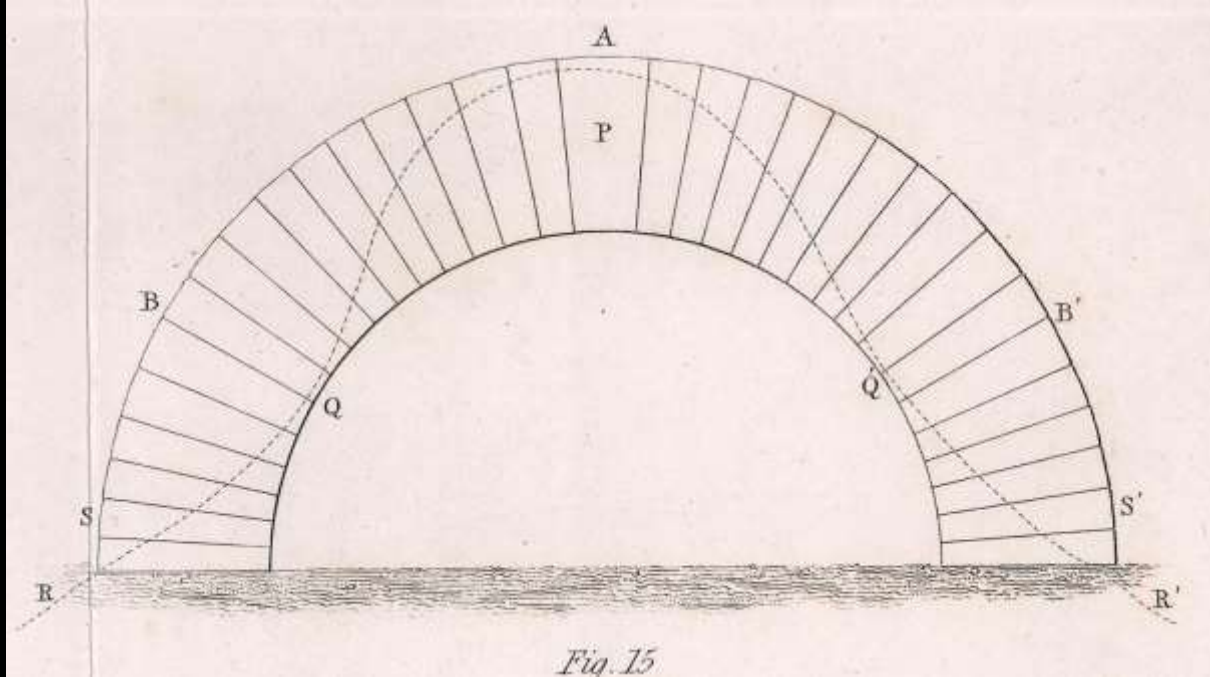


*Fig. 16*

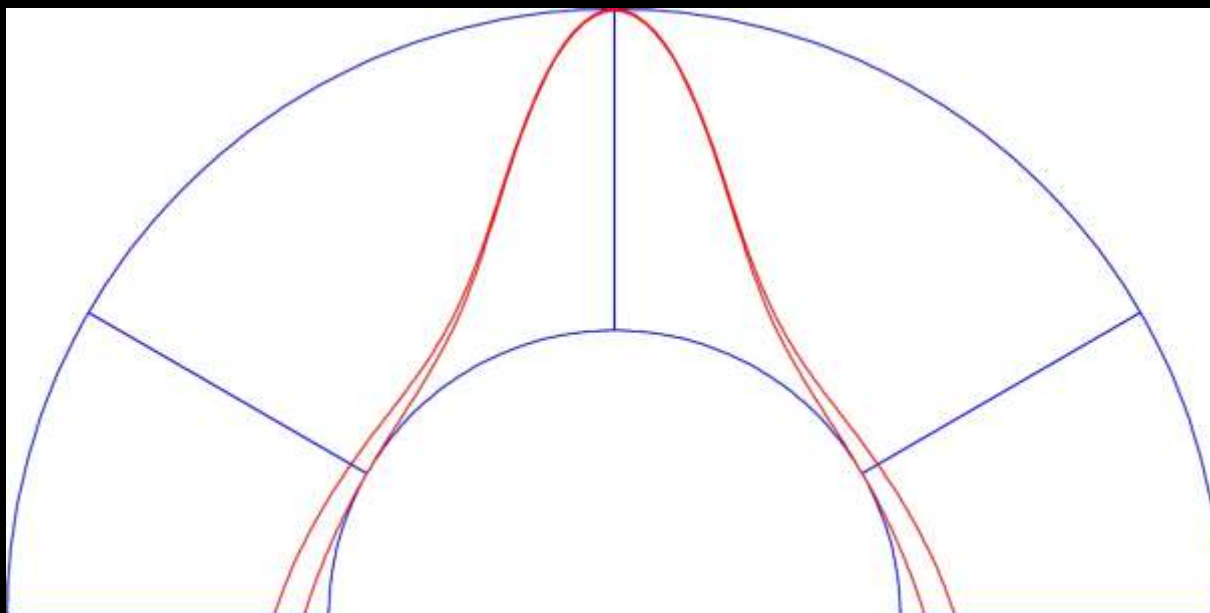
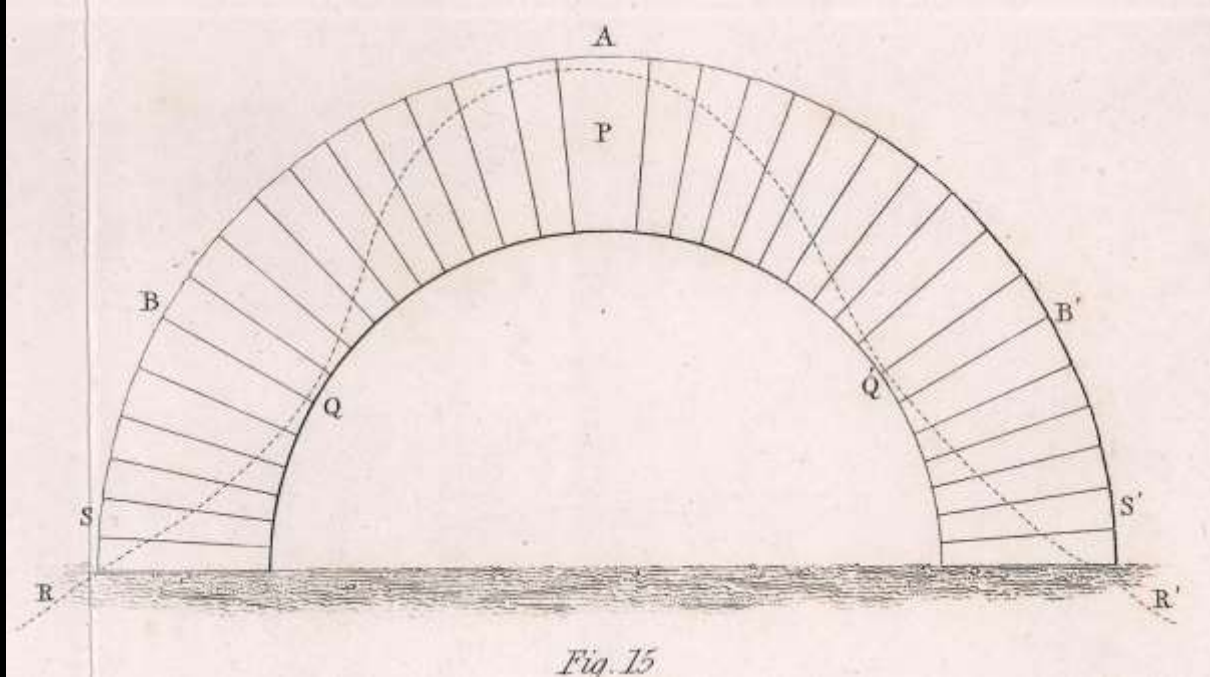
Moseley 1839:

„Line of resistance“ (Stützlinie) kurz vor dem Eintritt des Versagens

Wo die „line of resistance“ den Rand berührt, tritt Kantung ein -> Gelenke, Einsturz bei mehr als 3 Gelenken!



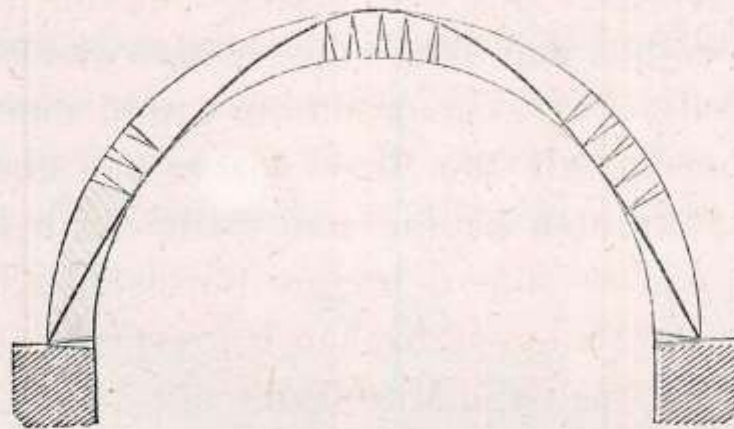
Wenn das Material des Bogens begrenzte Festigkeit hat, kann ein eigentliches „Kanten“ nicht erfolgen.  
 Dann muss das „Kanten“ um einen schmalen „Mörtelstreifen“ herum erfolgen.  
 Das rote Band gibt die erforderliche Breite des Mörtelstreifens an („Stützband“, „thrust zone“)



Bei sehr dickem Bogen nimmt die Stützlinie tatsächlich eine ähnliche Form an wie von Moseley 1839 angegeben

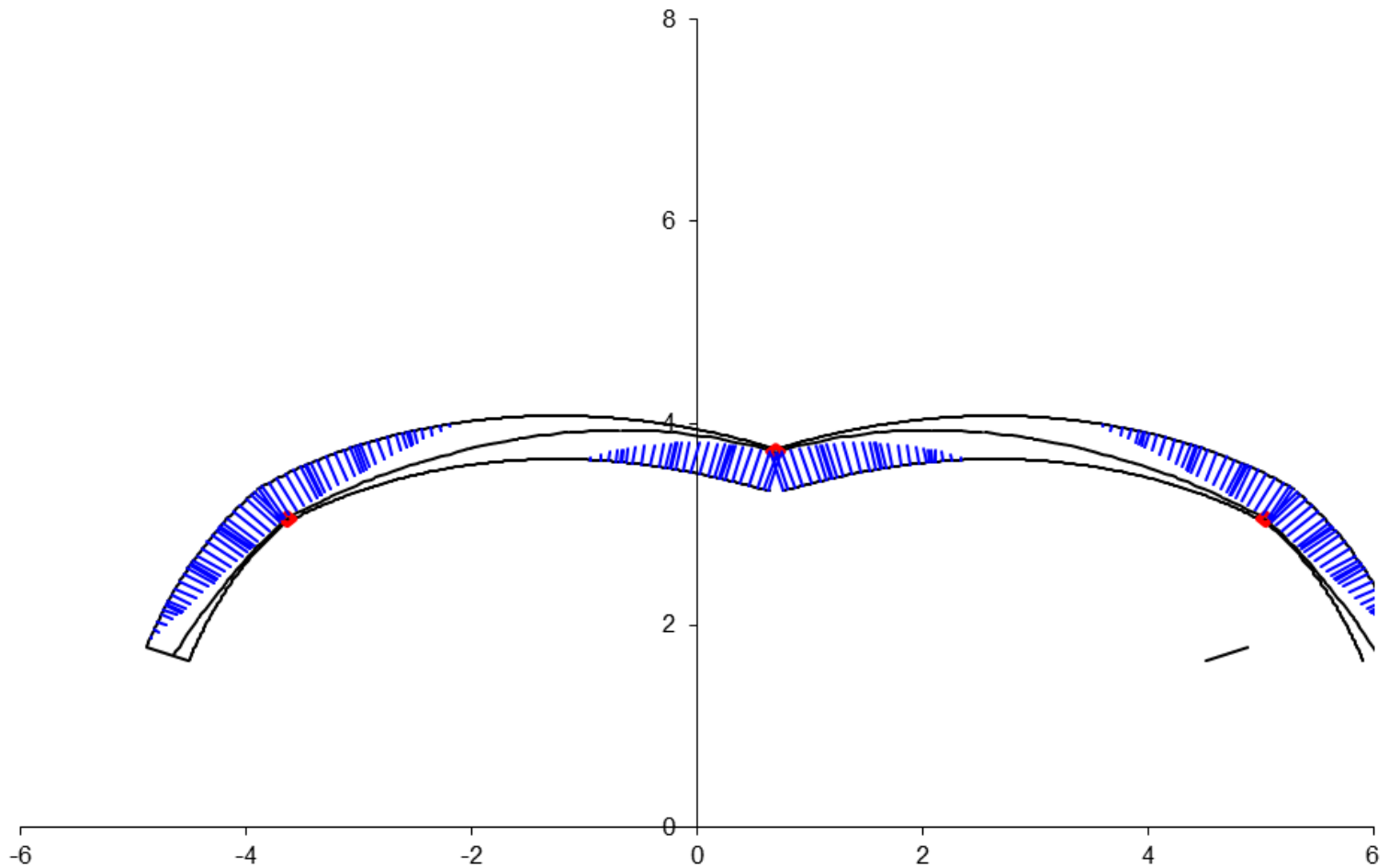
Fig. 174 zeigt ein Gewölbe, dessen mögliche Stützlinie im Scheitel und am Widerlager die äussere, zwischen beiden aber die innere Wölbfläche berührt; in Folge dessen wird an diesen Punkten ein Kanten stattfinden, bei dem sich die Gewölbefugen auf der

Fig. 174.



gegenüber liegenden Seite öffnen. Wird dies in der Figur angedeutet, so ergeben sich die dargestellten Brechungsverhältnisse. Es geht aus der Figur hervor, dass bei der angedeuteten Lage der Stützlinie der Scheitel sich senkt und dabei die Schenkel hinausgedrückt werden. Da im Scheitel und bei den Schenkeln die Stützlinie mit den Begrenzungsflächen des Gewölbes nahezu parallel läuft, so befinden sich dort mehrere Fugen in der gleichen Lage, und es werden daher auch mehrere derselben dort sich öffnen, wie es angedeutet ist.

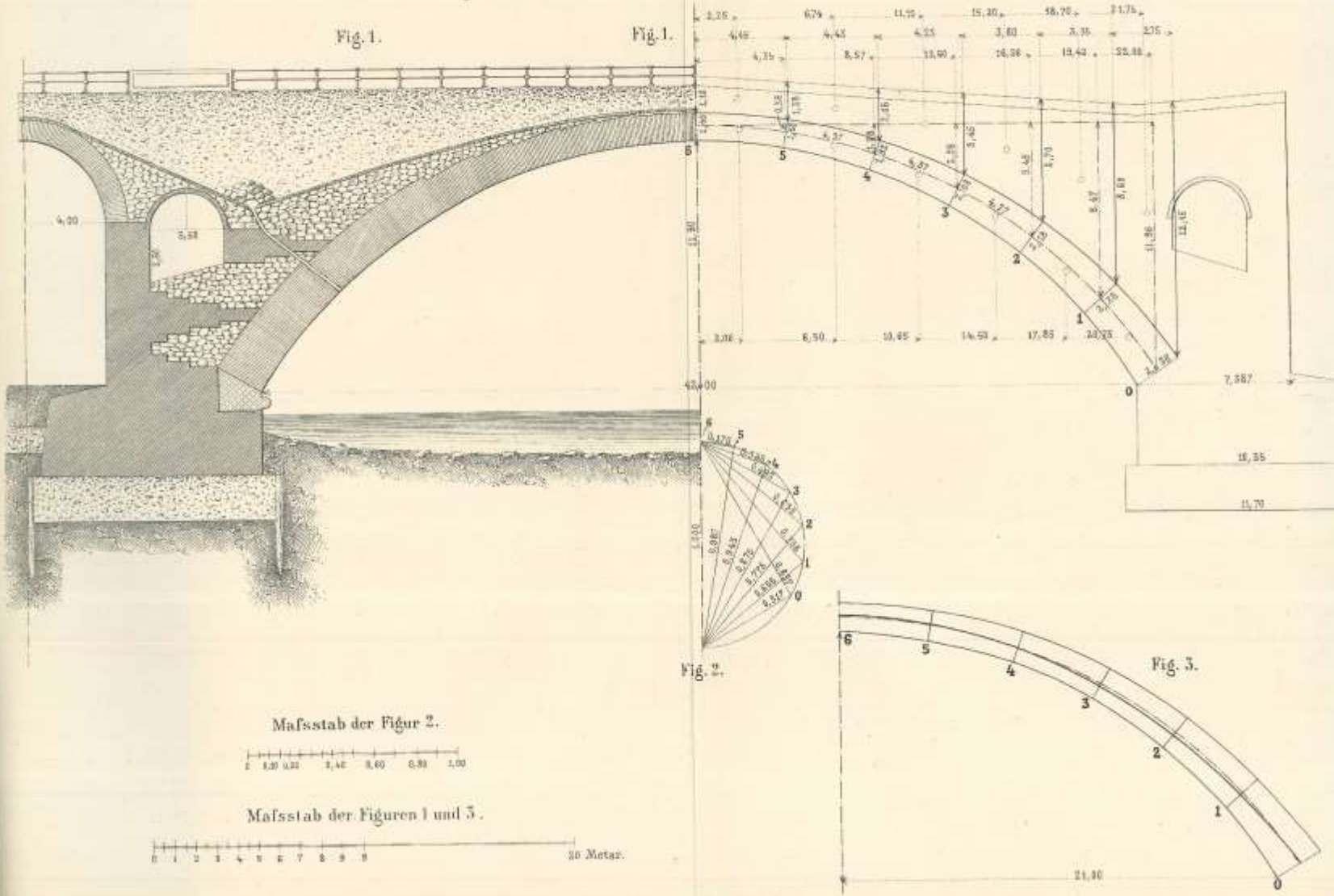
## verformtes System und Risse/Fliessgelenke



Kontinuumsmechanische Simulation aus moderner Sicht



# BRÜCKE AUS ZIEGELMAUERWERK über den Oglio für die directe Eisenbahnlinie von Mailand nach Venedig.



A.P. Castigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, 1879.

Nachrechnung einer gemauerten Eisenbahnbrücke als *elastischer Balken* – es tritt keine Fugenklaffung auf!

Der Ausdruck  $\frac{J'N}{\delta}$  nimmt jetzt den constanten Werth:

$$\frac{J \cos \varphi}{\delta} \frac{H}{\cos \varphi} = \frac{JH}{\delta} = \frac{H\delta^2}{12}$$

an, und man erhält, da ausserdem (vergl. Seite 110)

$$M = H(\eta - y)$$

gesetzt werden darf, die drei Elasticitätsgleichungen in der wesentlich einfacheren Form:

$$9) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\delta^2}{12} A + \int_0^l y dx &= \int_0^l \eta dx \\ -\frac{\delta^2}{12} B + \int_0^l yx dx &= \int_0^l \eta x dx \\ +\frac{\delta^2}{12} C + \int_0^l y^2 dx &= \int_0^l y \eta dx \end{aligned} \right.$$

wo

$$10) \quad A = \int_0^l \frac{ds}{\rho}, \quad B = \int_0^l \left( dy + x \frac{ds}{\rho} \right), \quad C = \int_0^l \left( dx - y \frac{ds}{\rho} \right).$$

Die Auswerthung der Integrale  $A$ ,  $B$  und  $C$  ist möglich, sobald die Gestalt der Bogenaxe gegeben ist.

Man zerlegt die Bogenaxe in Segmente von den Längen  $s_1, s_2, \dots$ , bestimmt die Coordinaten  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$  der Mitten der Segmente, ferner die diesen entsprechenden Krümmungsradien  $\rho_1, \rho_2, \dots$  und erhält genügend genau:

$$\begin{aligned} A &= \frac{s_1}{\rho_1} + \frac{s_2}{\rho_2} + \dots \\ B &= t + \frac{x_1 s_1}{\rho_1} + \frac{x_2 s_2}{\rho_2} + \dots \\ C &= l - \frac{y_1 s_1}{\rho_1} - \frac{y_2 s_2}{\rho_2} + \dots \end{aligned}$$

Dabei bedeutet  $t$  die Differenz der Ordinaten der Kämpfermittelpunkte (Fig. 137).

Für einen symmetrischen Kreisbogen ist mit den Bezeichnungen in Fig. 139 (Tafel 16):

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \rho \cos \varphi - \rho \cos \varphi_0, & dy &= -\rho \sin \varphi d\varphi \\ x &= \rho \sin \varphi_0 - \rho \sin \varphi, & dx &= -\rho \cos \varphi d\varphi \\ ds &= -\rho d\varphi, & \text{also:} & \end{aligned}$$

$$A = \int_0^l \frac{ds}{\rho} = -\int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} d\varphi = 2\varphi_0$$

$$B = \int_0^l (dy + x d\varphi) = -\int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} \rho \sin \varphi_0 d\varphi = +\rho \sin \varphi_0 2\varphi_0 = l\varphi_0$$

$$C = \int_0^l (dx + y d\varphi) = -\int_{+\varphi_0}^{-\varphi_0} (\rho \cos \varphi_0 - y_0) d\varphi = (\rho \cos \varphi_0 - y_0) 2\varphi_0 = 2H\varphi_0.$$

$$11) \quad A = 2\varphi_0, \quad B = l\varphi_0, \quad C = 2H\varphi_0.$$

Nach Berechnung der Integrale  $A$ ,  $B$  und  $C$  wird in die Gleichungen 9 der Werth:

$$\eta = z' + (z'' - z') \frac{x}{l} + \frac{H'}{H} \eta'$$

eingeführt, worauf sich  $z'$ ,  $z''$  und  $H$  bestimmen lassen.

Für die weitere Behandlung setzen wir ein in Bezug auf die Verticale durch die Mitte symmetrisches Gewölbe voraus.

### § 28. Das symmetrische Tonnengewölbe.

93) **Symmetrische Belastung.** Ist die Belastungsfläche eines Gewölbes symmetrisch in Bezug auf die Verticale durch die Mitte, so ist  $z' = z'' = z$  (Fig. 140). Die Schlusslinie liegt horizontal. Die 2<sup>te</sup> der drei Elasticitätsgleichungen erweist sich überflüssig.\*) Setzt man den Werth (vergl. Formel 1, Seite 104):

$$\eta = z + \frac{H'}{H} \eta'$$

in die 1<sup>te</sup> und 3<sup>te</sup> der Gleichungen 9, so erhält man:

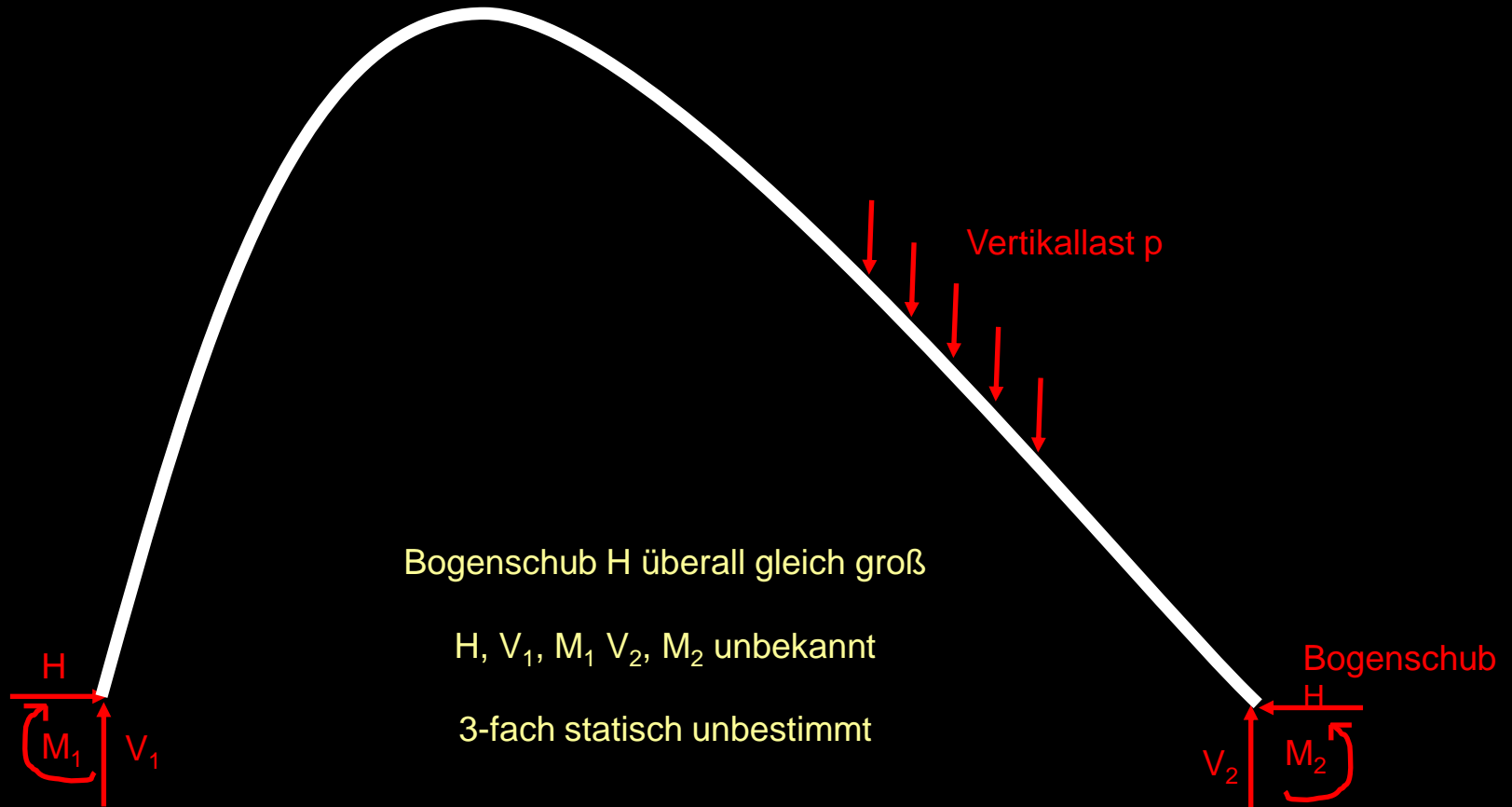
$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\delta^2}{12} A + \int_0^l y dx &= z l + \frac{H'}{H} \int_0^l \eta' dx \\ +\frac{\delta^2}{12} C + \int_0^l y^2 dx &= z \int_0^l y dx + \frac{H'}{H} \int_0^l y \eta' dx. \end{aligned} \right.$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Integrale lassen sich zwar construiren, doch ziehen wir es vor, dieselben mittelst der Simpson-Näherungsformeln zu berechnen. Wir setzen:

\*) Diese 2<sup>te</sup> Gleichung drückt die Bedingung aus, dass (Fig. 137) der Punkt  $b$  sich nicht in verticalem Sinne gegen Punkt  $a$  verschiebt; eine Bedingung, welche stets erfüllt wird, sobald die Belastungsfläche symmetrisch ist.

# Tragverhalten von Bögen und Gewölben unter Vertikallasten

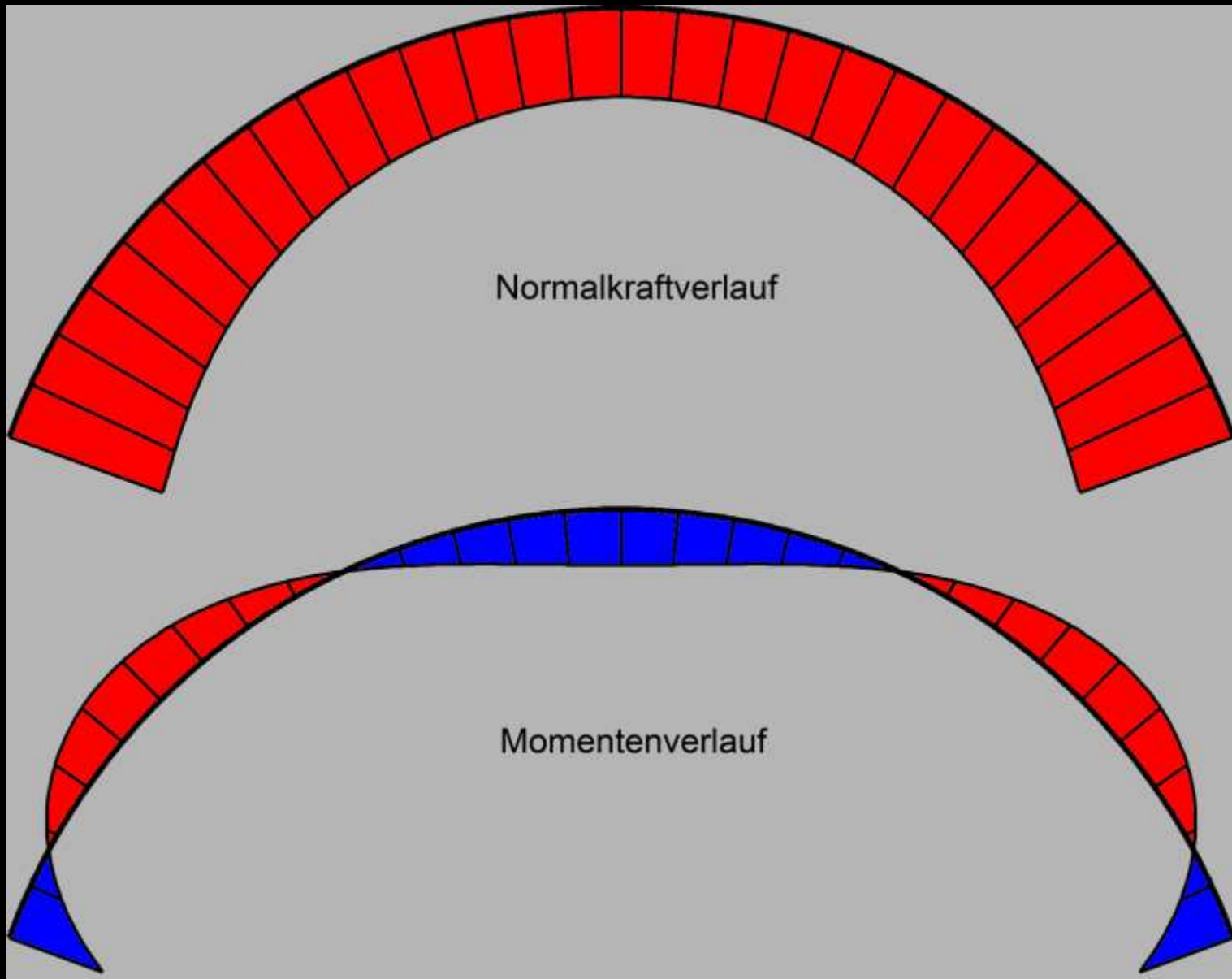
Eingespannter Bogen unter vertikalen Lasten



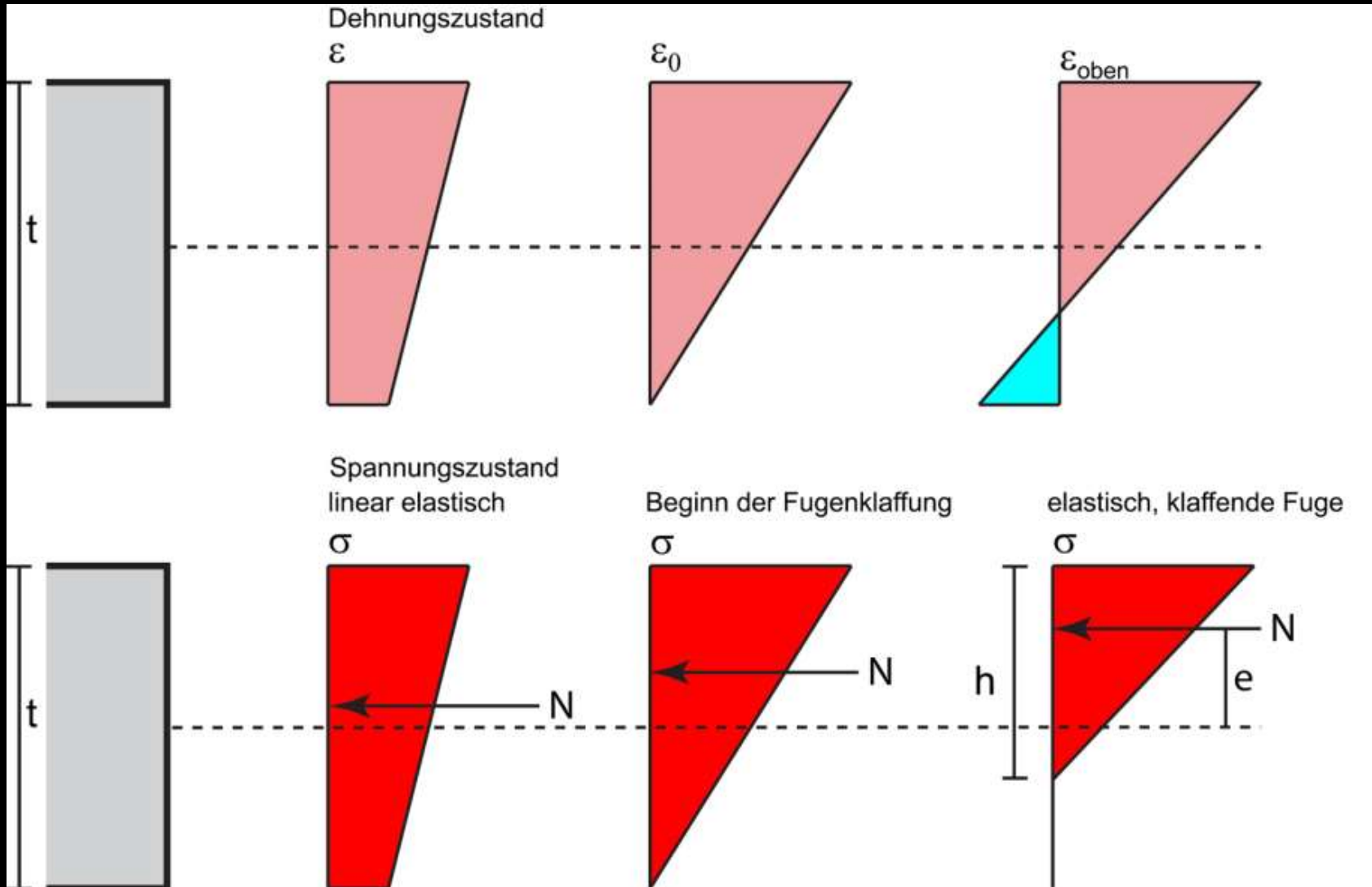
Bogen - Biegebeanspruchung

# Tragverhalten von Bögen und Gewölben unter Vertikallasten

## Eingespannter Bogen unter Eigengewicht



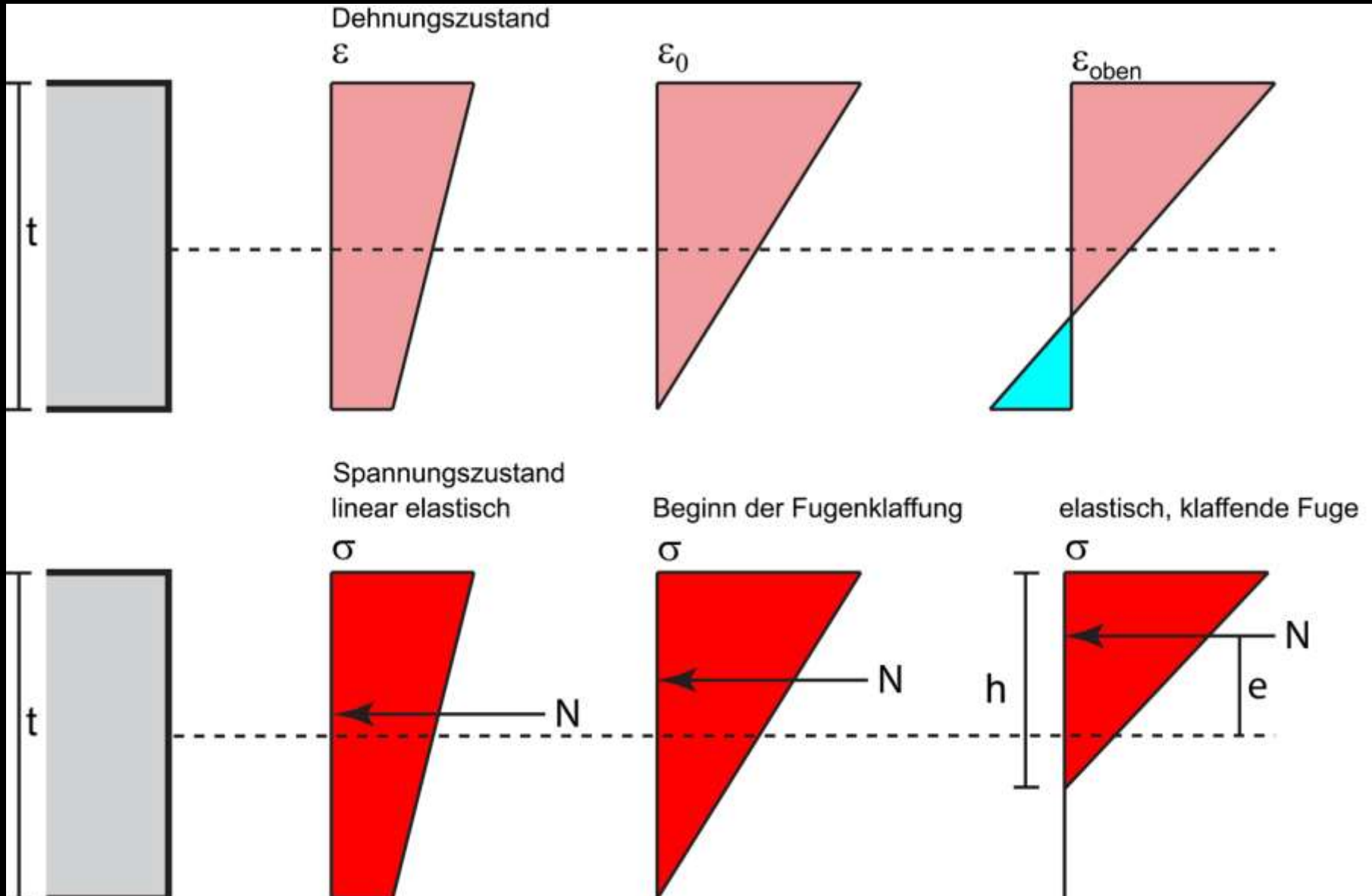
# Die "klaffende Fuge" beim Material ohne Zugfestigkeit



Mauerwerk:

Zugfestigkeit senkrecht zur Lagerfuge ist 0  
Abtrag der Biegestörung durch "klaffende Fuge"

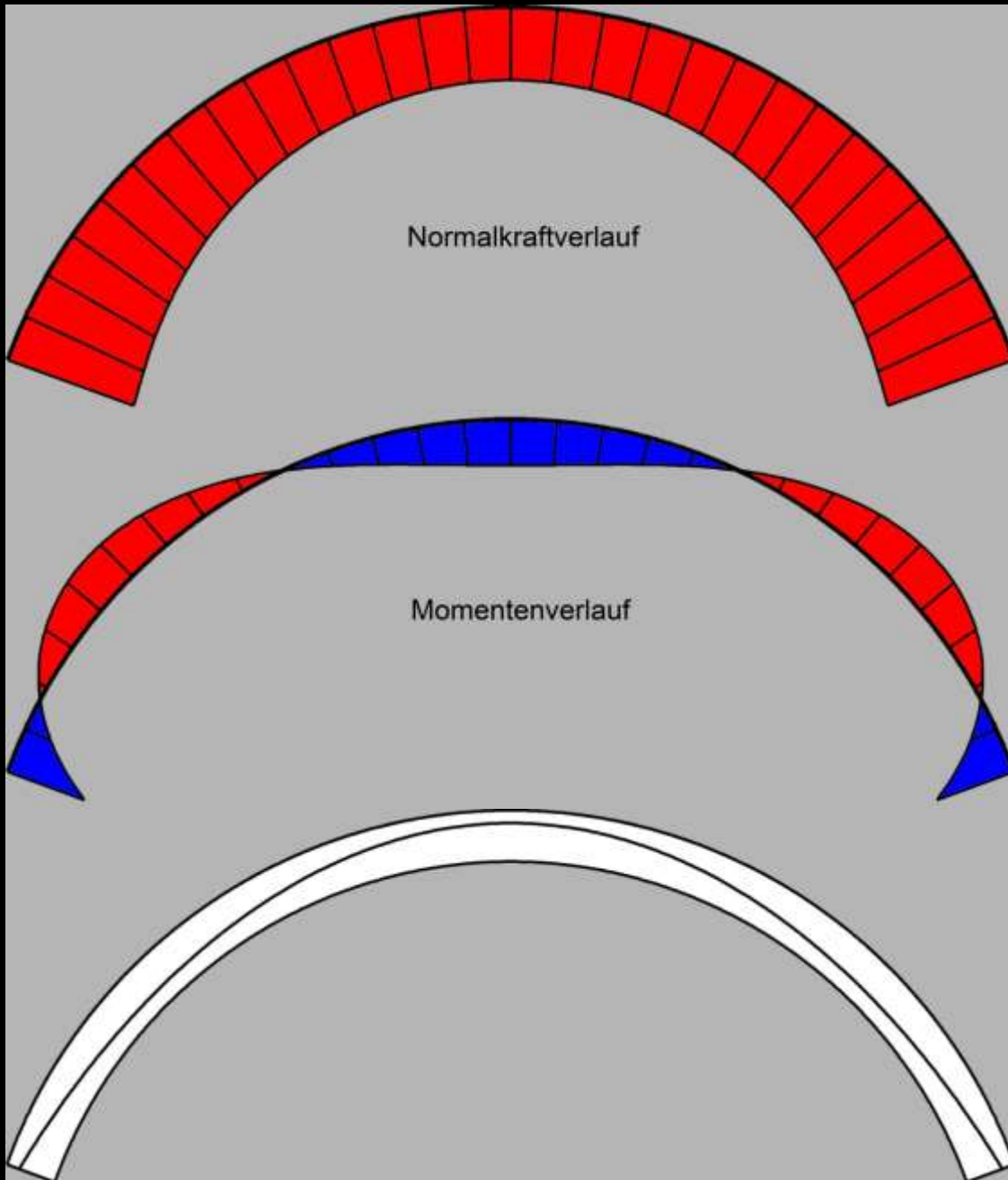
# Die "klaffende Fuge" beim Material ohne Zugfestigkeit



Kombination von Normalkraft  $N = \sigma h/2$  und Biegemoment  $M = Ne$

$e = M/N$  maßgebend für Bogenbeanspruchung, Gleichgewichtsbedingung  $e < t/2$ , d.h.  $M < Nt/2$

# graphische Darstellung des Beanspruchungszustands



unzweckmäßig:  
Schnittgrößenverläufe

sinnvoll:  
Exzentrizität

$$e = M/N$$

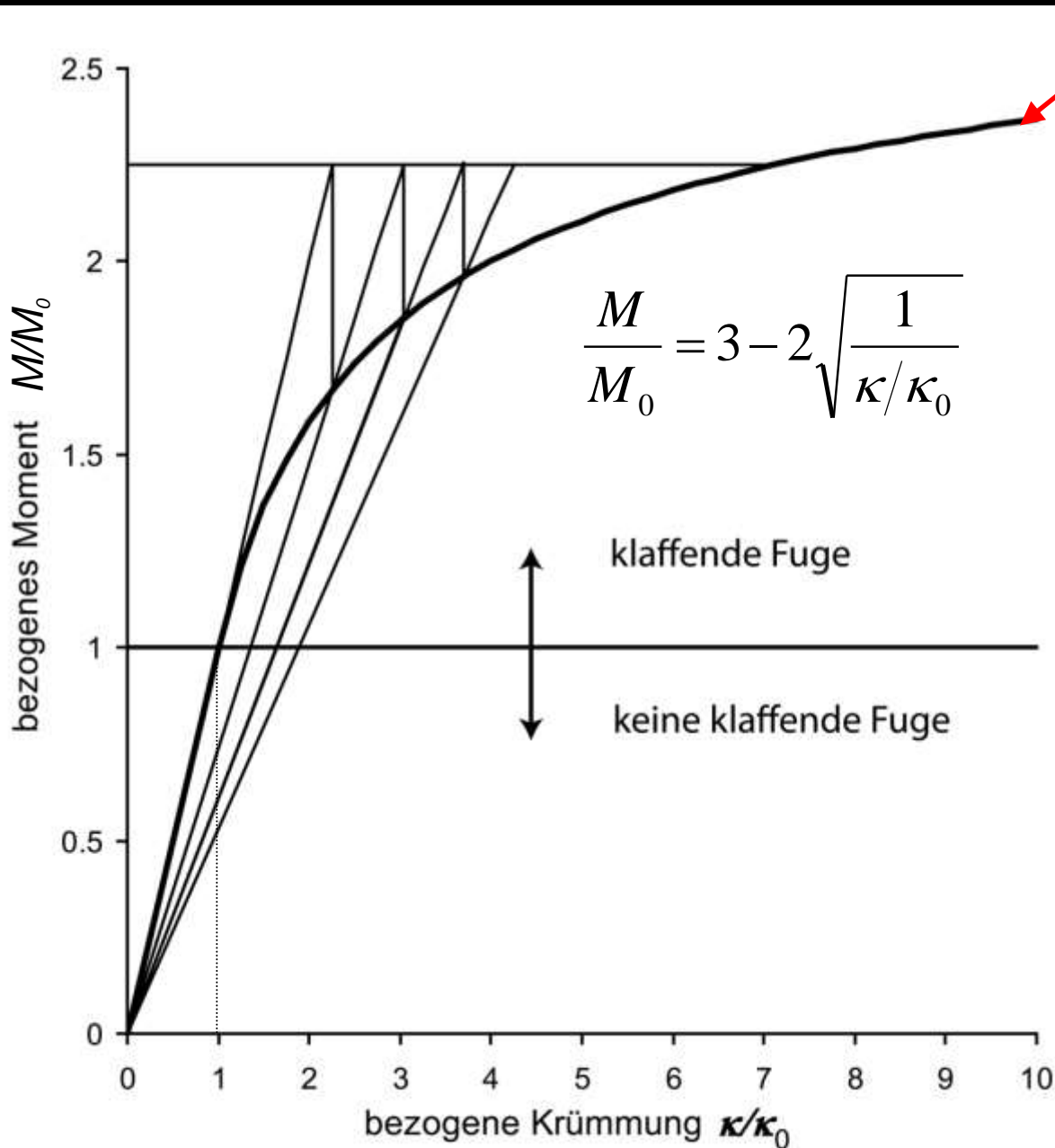
auftragen  
(= "Stützlinie")



Tragverhalten mit "klaffender Fuge,, im Gebrauchszustand



# "elastisch klaffende Fuge" - nichtlin. Momentenkrümmungsbeziehung



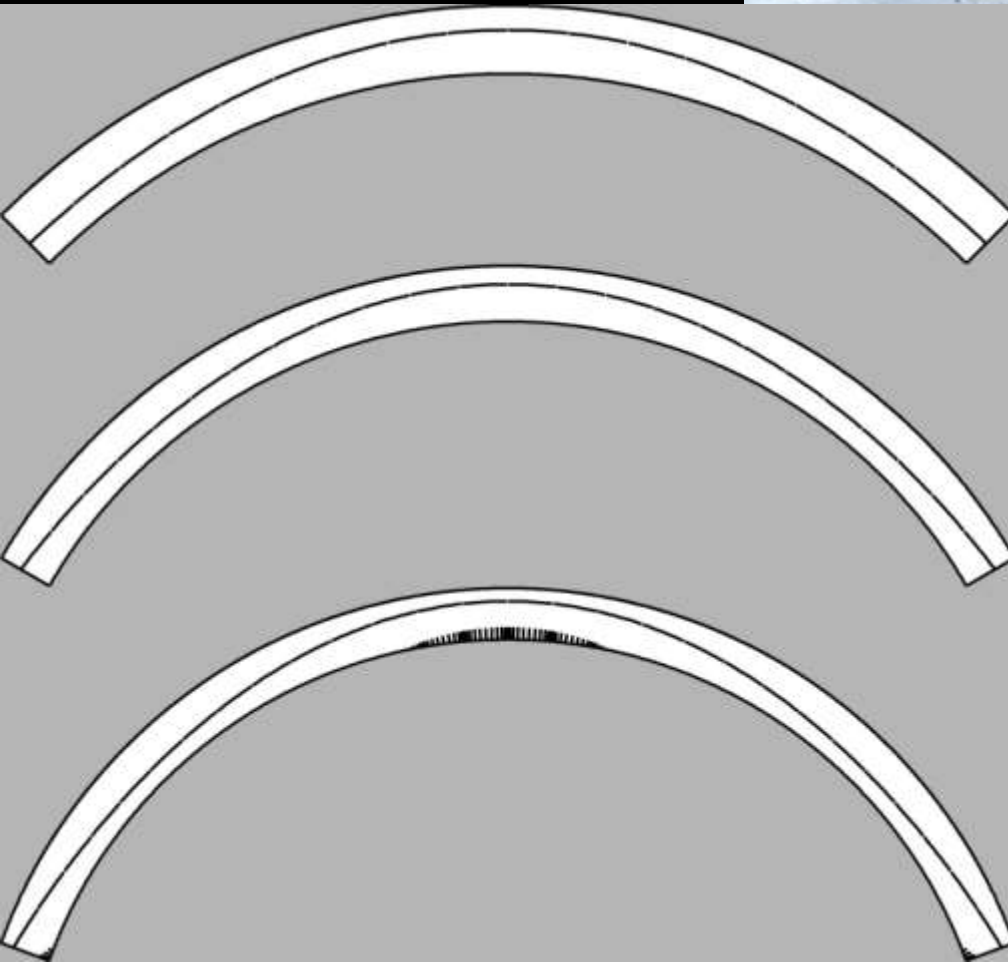
Momenten-  
Krümmungsbeziehung  
(festgehaltene Normalkraft)

Grenzwert  
 $M = Nt/2 = 3 Nt/6 = 3 M_0$

Der Grenzwert ist also das  
3fache des aufnehmbaren  
Momentes  $M_0$  bei Beginn der  
Klaffung

Iterative Lösung

# Linear elastisch klaffende Fuge: Lastfall Eigengewicht



FE-Simulation kontinuumsmechanisch:  
elastische Fugenklaffung

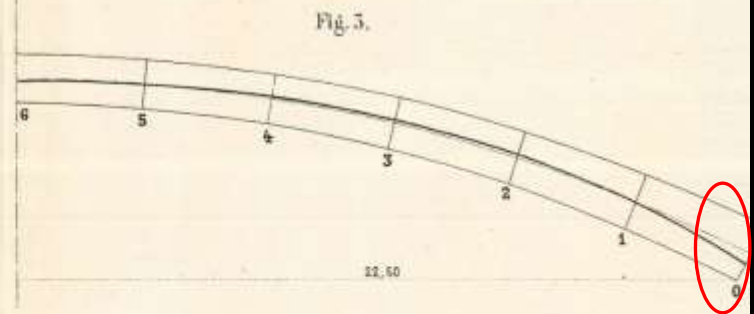
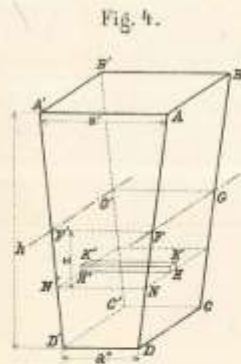
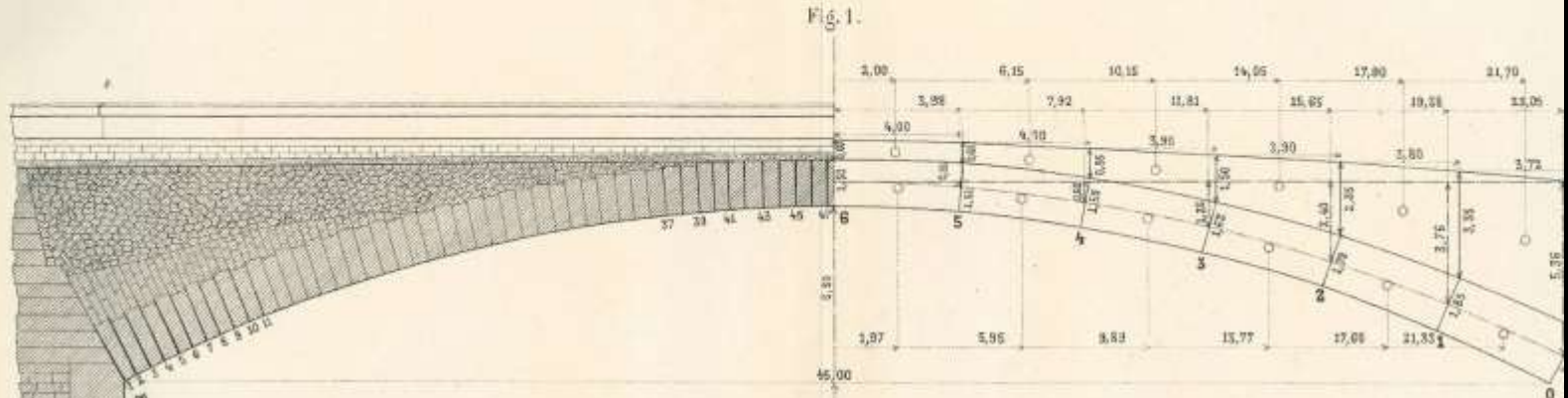
unter Eigengewicht je nach Bogenform  
weite Teile des Bogens "gerissen"  
aber reversibel!



A.P. Castigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, 1879.  
Nachrechnung des Ponte Mosca über die Dora Riparia in Turin (1823–30) als *elastischer Balken*

# BRÜCKE AUS HAUSTEINEN

über die Doire bei Turin von dem Ingenieur Charles Mosca.



Mafsstab der Figur 2.



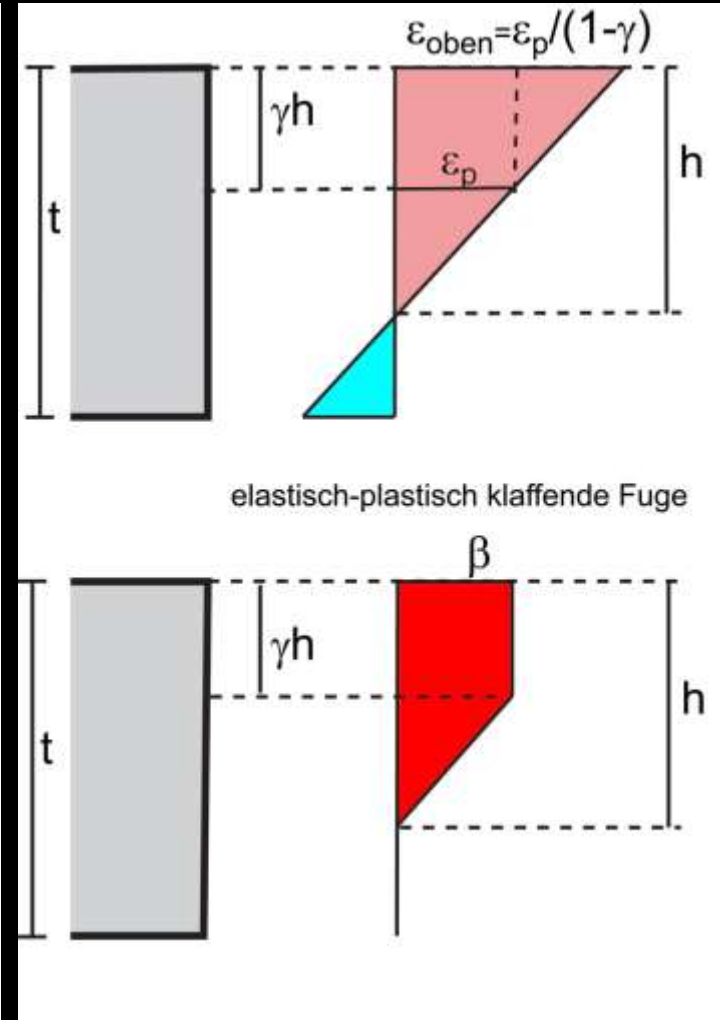
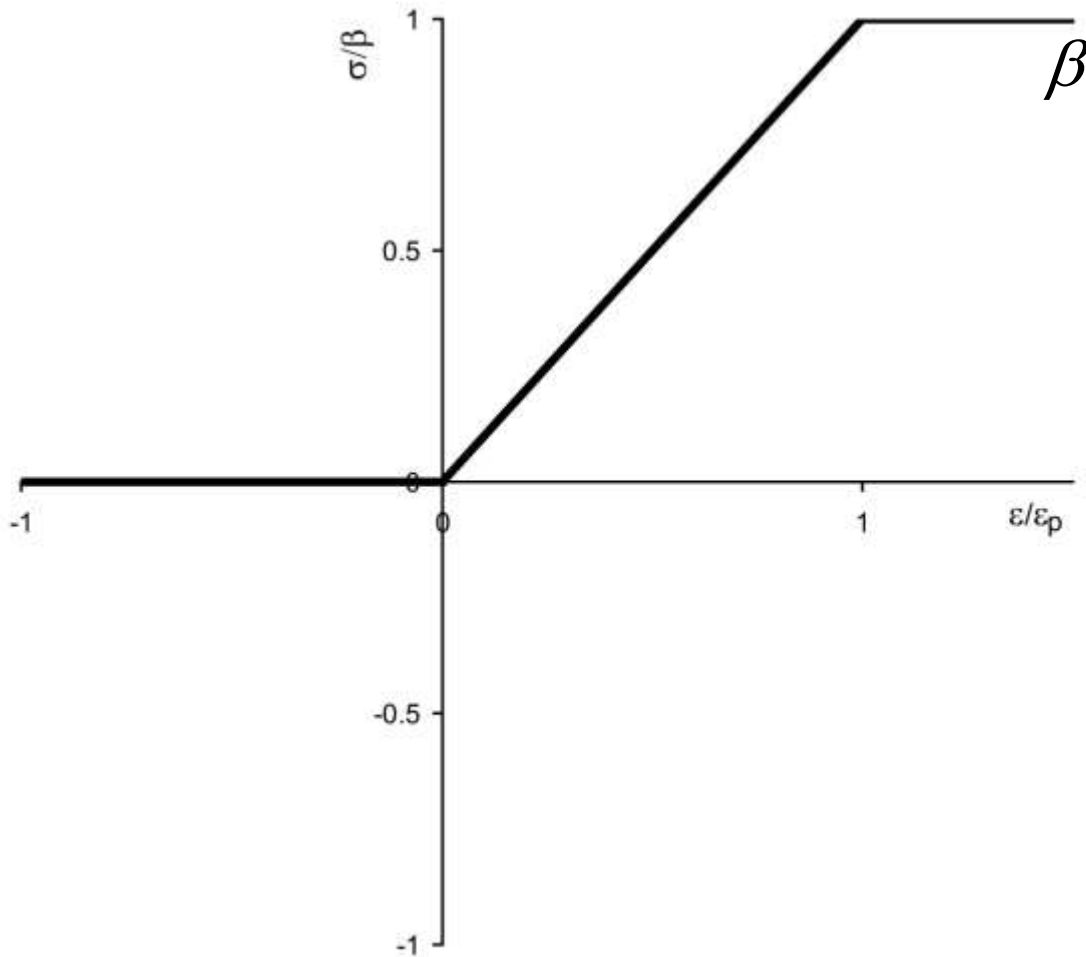
Mafsstab der Figuren 1 und 5.



A.P. Castigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, 1879.

Nachrechnung des Ponte Mosca über die Dora Riparia in Turin als *elastischer Balken*  
 Nichtlineare, iterative Berechnung unter Berücksichtigung der *klaffenden Fuge am Widerlager* bei „0“

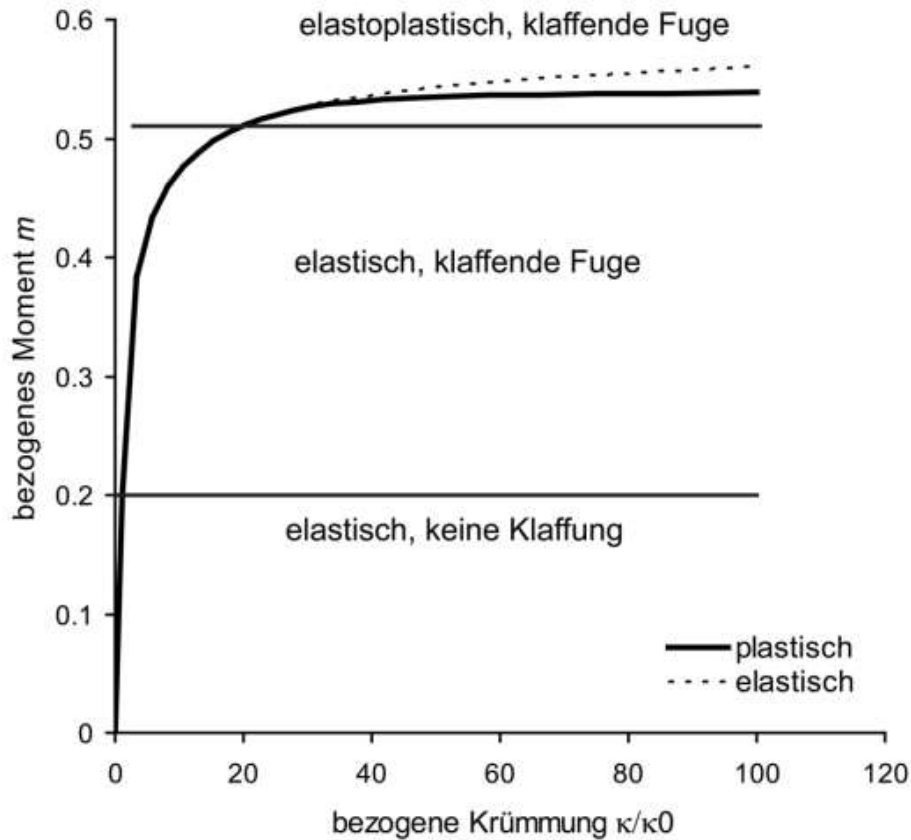
# Klaffende Fuge und endliche Mauerwerksdruckfestigkeit



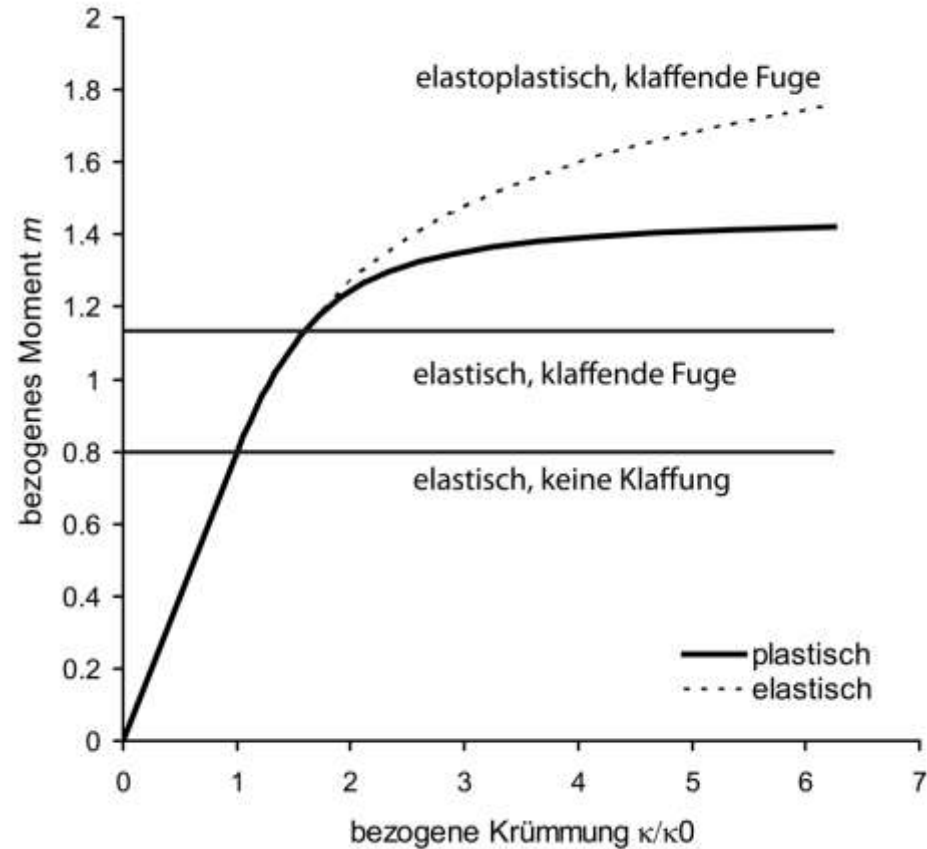
Modell "keine Zugfestigkeit – lineare Elastizität auf Druck – perfekte Plastizität auf Druck"  
(trilineares Materialgesetz)

einzigster Festigkeitsparameter:  $\beta = 1 - 2 \text{ MN/m}^2$  (typische Rechenannahme für Backsteinmauerwerk)  
(Druckfestigkeit der Steine ca.  $10\text{-}20 \text{ MN/m}^2$ , jedoch Versagen durch Querzug)

# Momentenkrümmungsbeziehung bei endlicher Druckfestigkeit



Situation "geringe Auslastung auf Druck",  $n = 0.1$   
(typisch bei hist. Bogentragwerk)

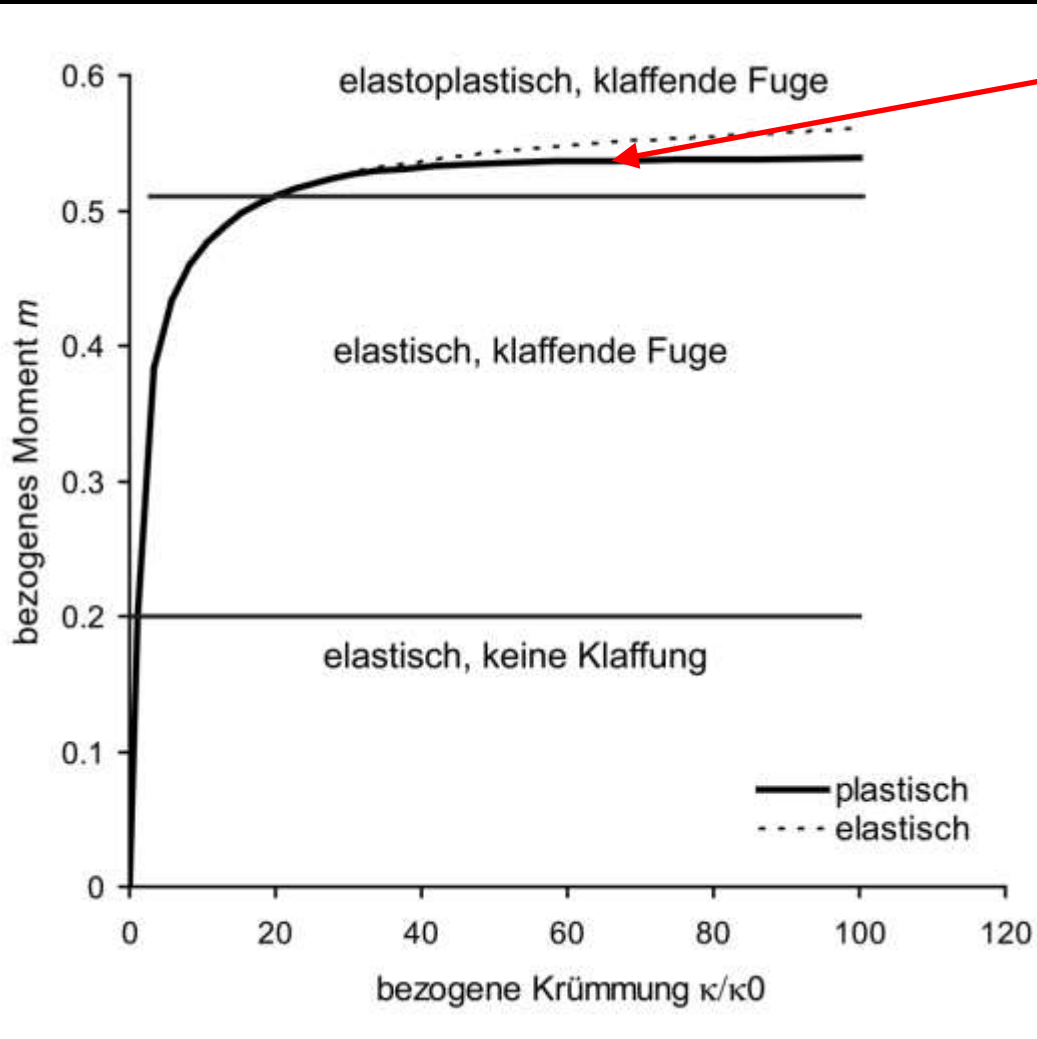


Situation "hohe Auslastung auf Druck",  $n = 0.5$   
(bei hist. Tragwerk praktisch nie vorkommend)

$$n = \frac{N}{\beta t}$$

$$m = \frac{M}{\beta t^2 / 12}$$

# Momentenkrümmungsbeziehung bei endlicher Druckfestigkeit

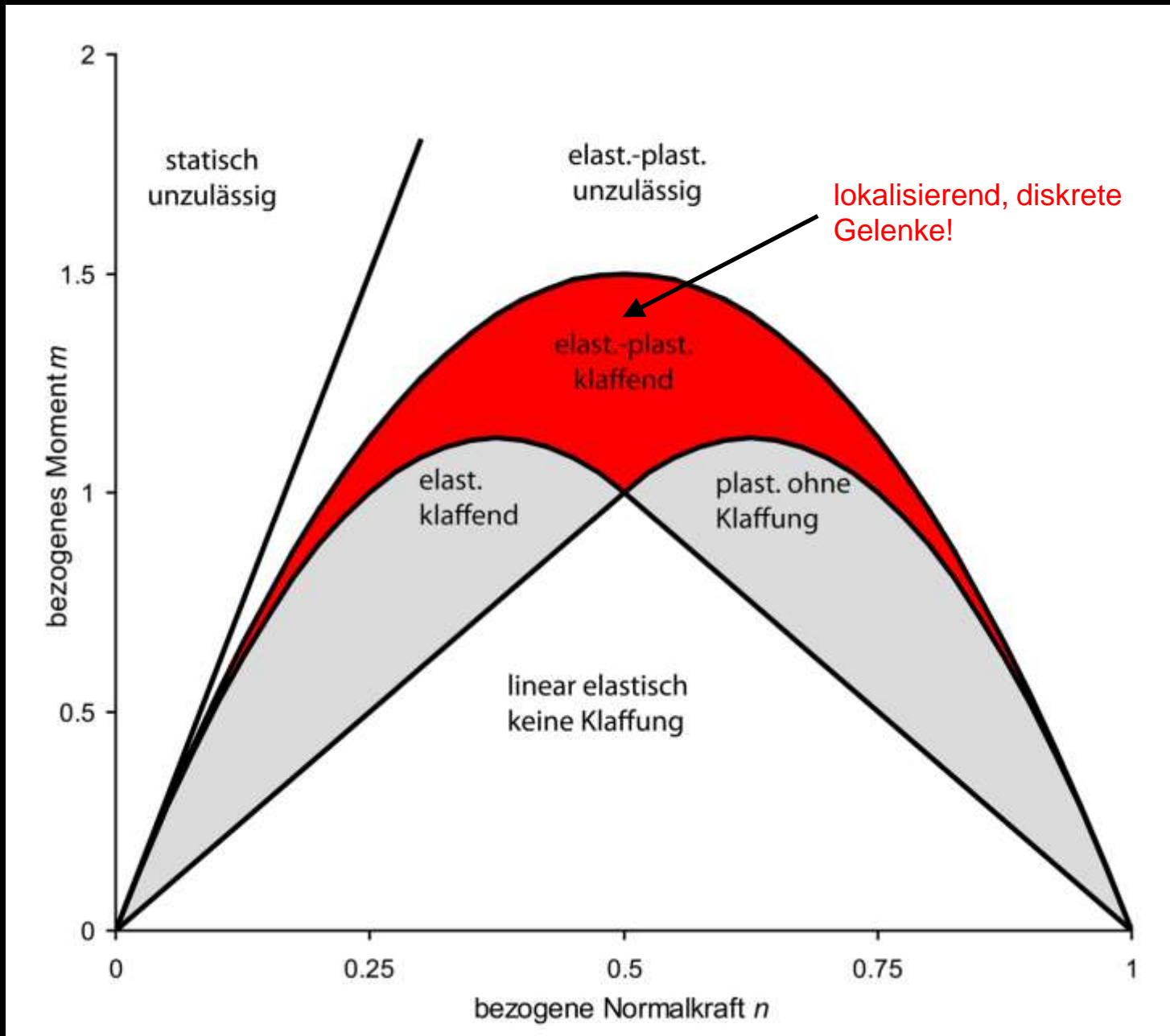


Sobald die Druckfestigkeit  $\beta$  am Druckrand überschritten wird, nimmt das aufnehmbare Moment kaum noch zu.

Somit entsteht kein "Fließzone", sondern ein lokal konzentriertes "Fließgelenk"



# Tragverhalten auf einen Blick: Momenten-Normalkraft-Interaktionsdiagramm

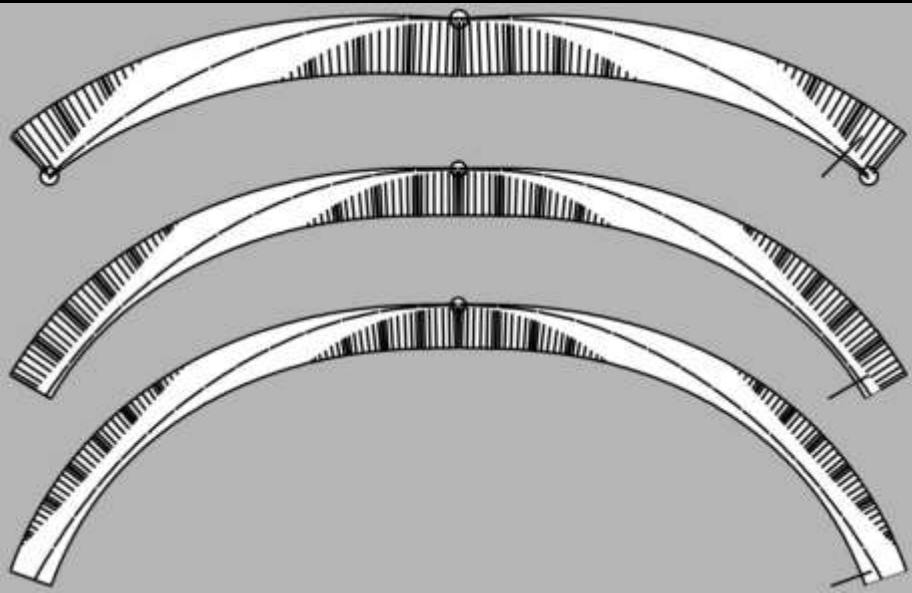




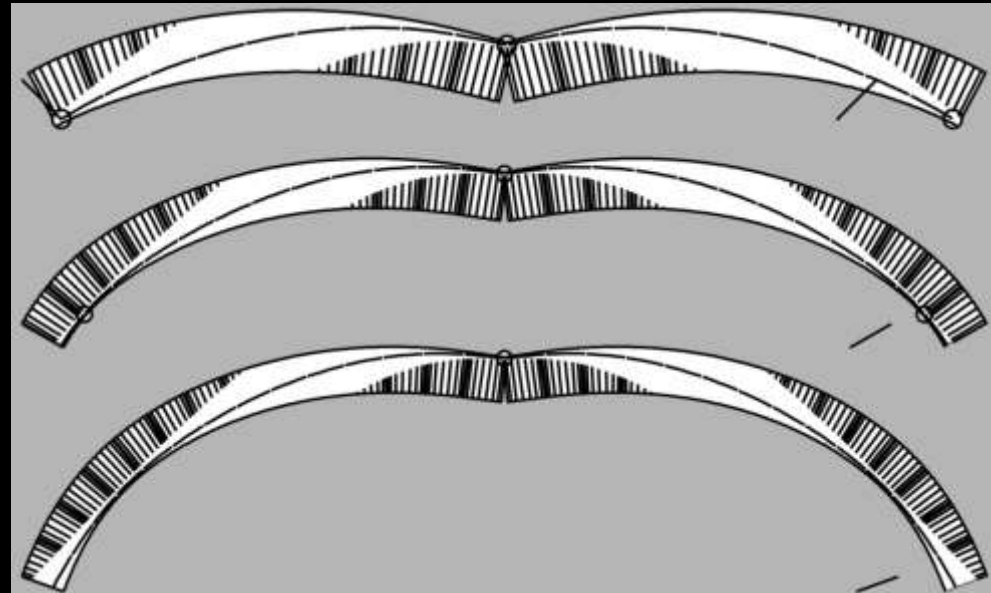
# Gelenkbildung im Lastfall "Eigengewicht und nachgebendes Widerlager"

Bogenradius  $R = 5\text{m}$ , Dicke  $t = 50\text{ cm}$ ,  $\beta = 2\text{ MN/m}^2$

verschiedene Öffnungswinkel ( $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $140^\circ$ )



2 mm Widerlagerverschiebung



5 mm Widerlagerverschiebung

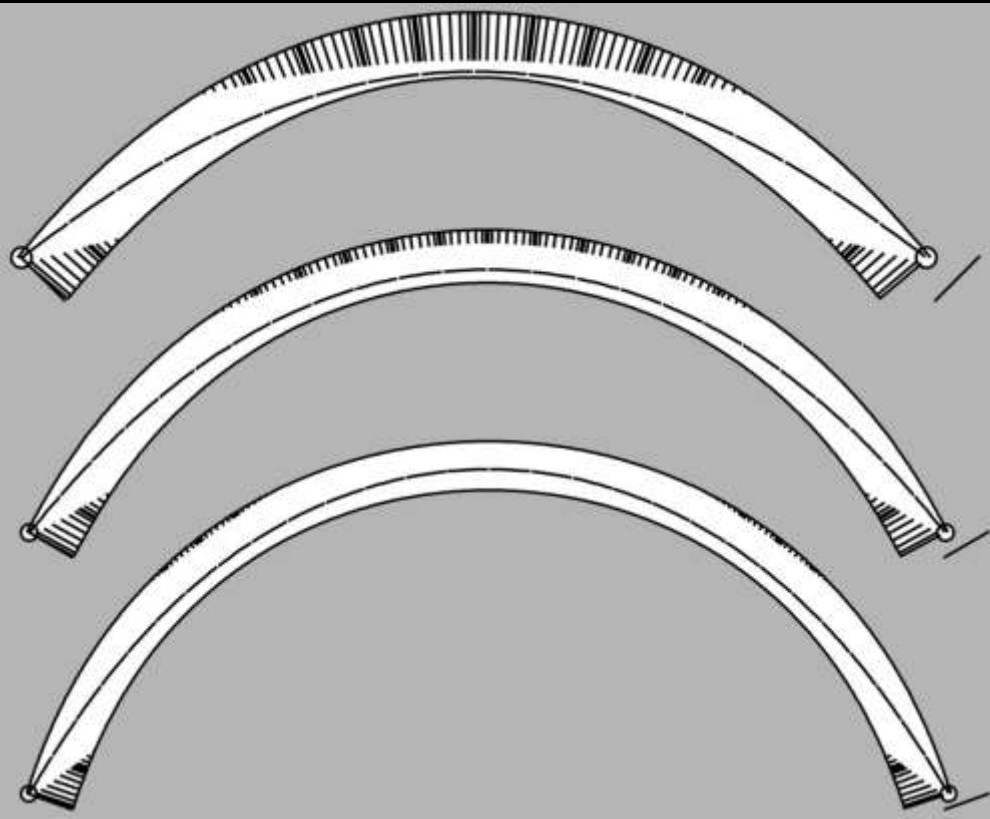
- selbst minimale Widerlagerverschiebungen erzeugen tief klaffende Fugen
  - Bestimmung der DIN 1053 "Klaffung höchstens bis Schwerachse" ist Unsinn!
- bei realistischen Abmessungen und Festigkeiten entstehen nahezu sofort Gelenke
- Rechnung ohne diskrete Gelenke ist nicht sinnvoll
- gerissener Zustand: Dreigelenkbogen (zunächst keine Einsturzgefahr trotz großer Risse!)

# Gelenkbildung im Lastfall "Eigengewicht und nachgebendes Widerlager"

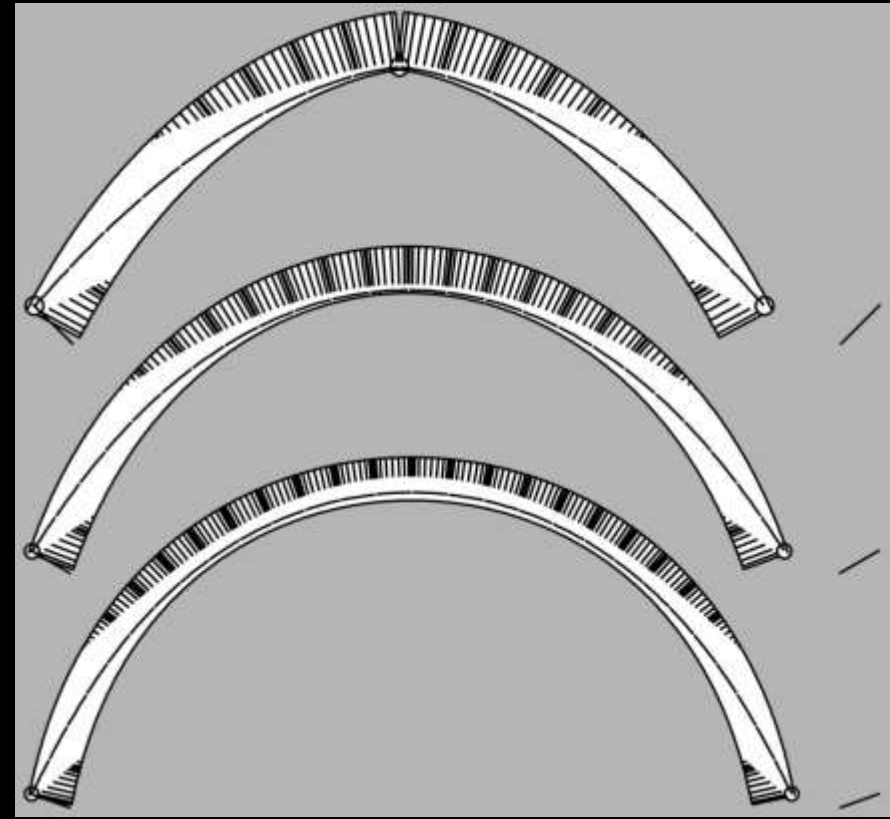


typisch für "plastisches Gelenk": weit klaffender Einzelriss im Scheitel

## Lastfall "Eigengewicht und zusammenrückendes Widerlager"



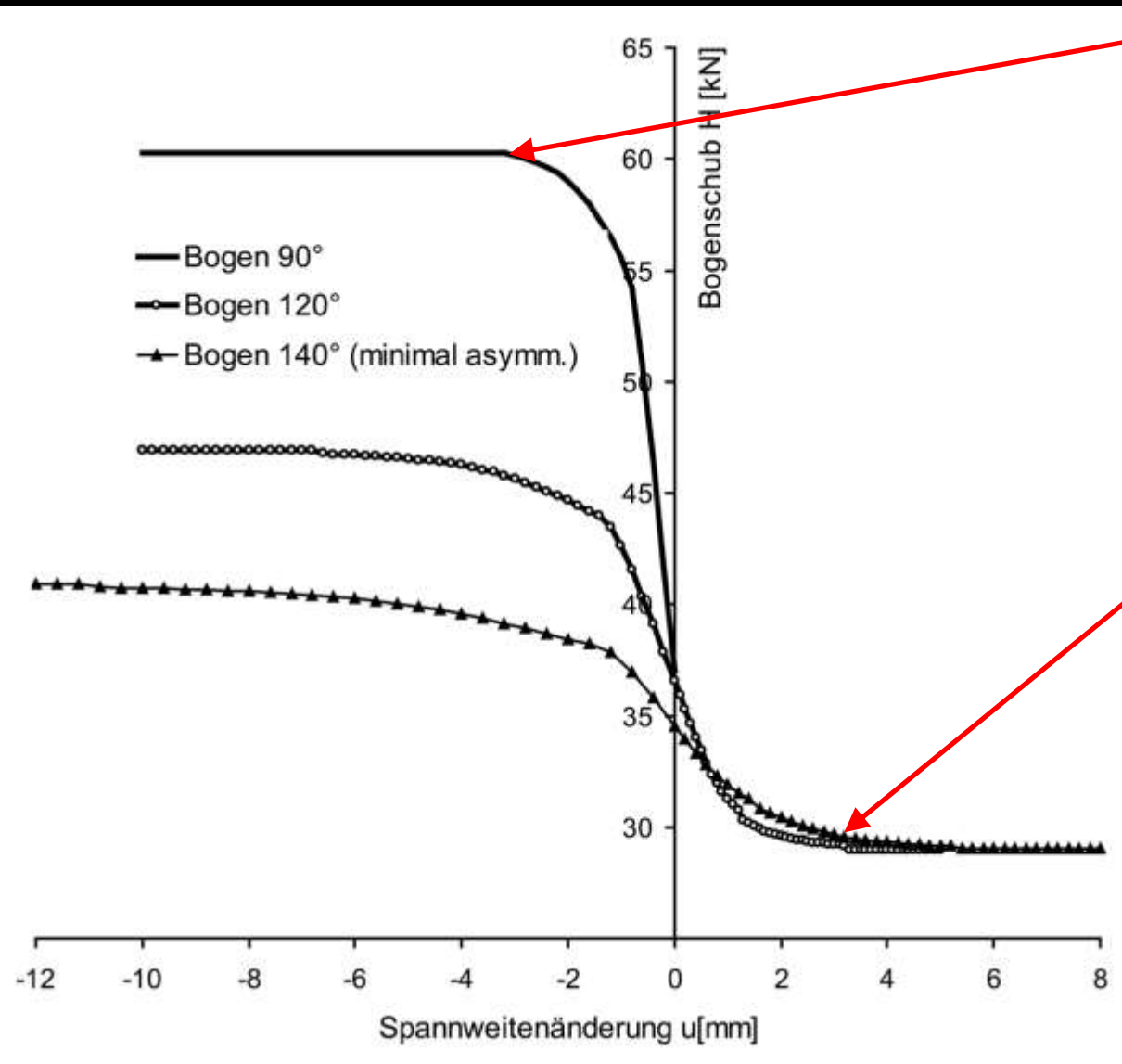
-2 mm Widerlagerverschiebung



-5 mm Widerlagerverschiebung

- auch in diesem Fall entstehen zunächst Bereiche klaffender Fugen
- dann Gelenkbildung

# Widerlagerverschiebung und Bogenschub



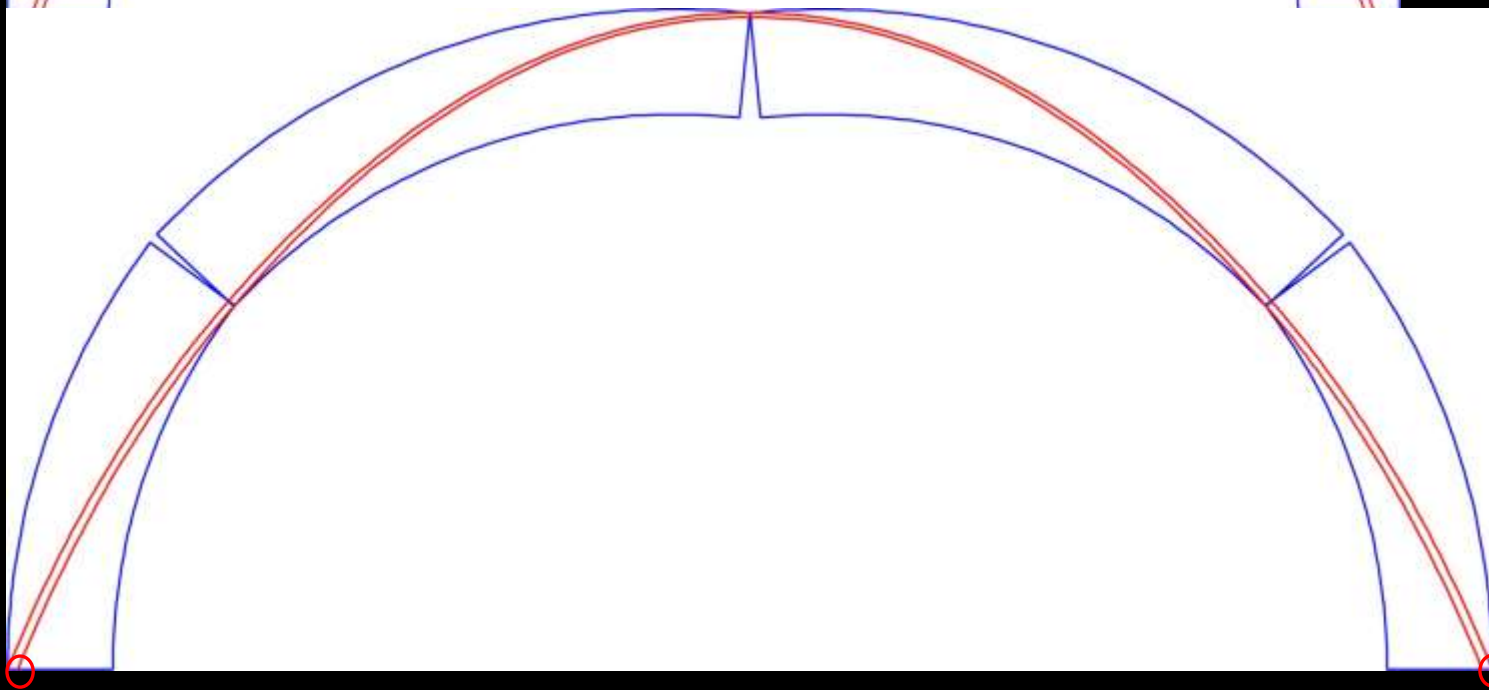
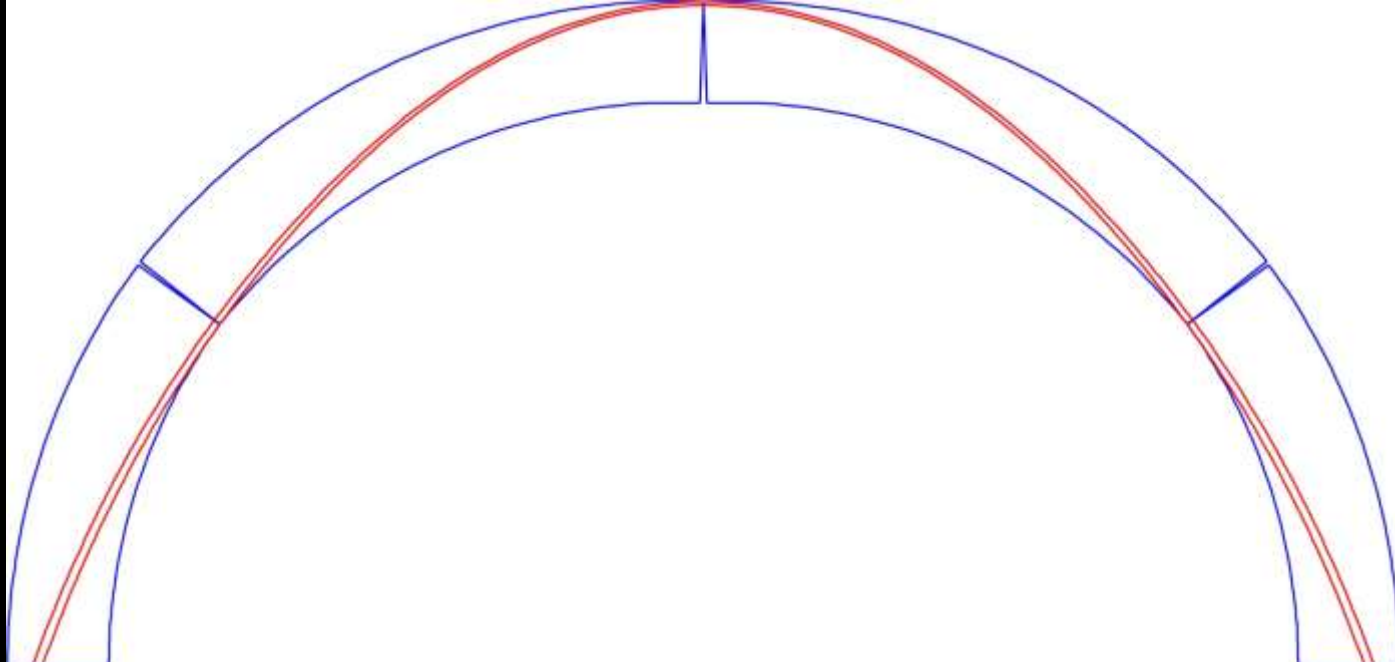
"zusammenrückende Widerlager":

Bogenschub nähert sich asymptotisch einem Maximum (vgl. "passiver Erddruck")

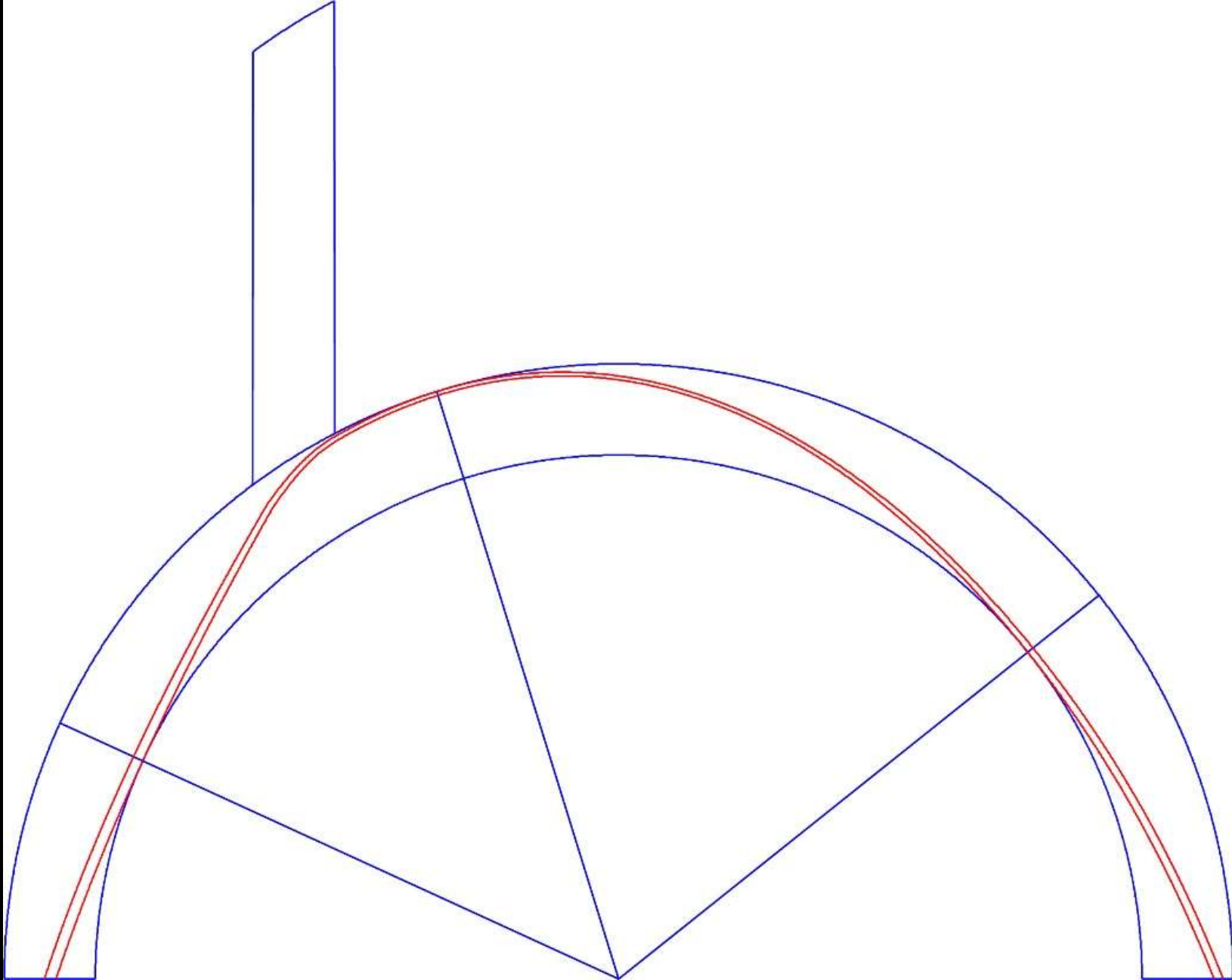
"nachgebende Widerlager":  
Bogenschub nähert sich asymptotisch einem Minimum (vgl. "aktiver Erddruck")



Vom „Dreigelenkbogen“ zum Einsturz

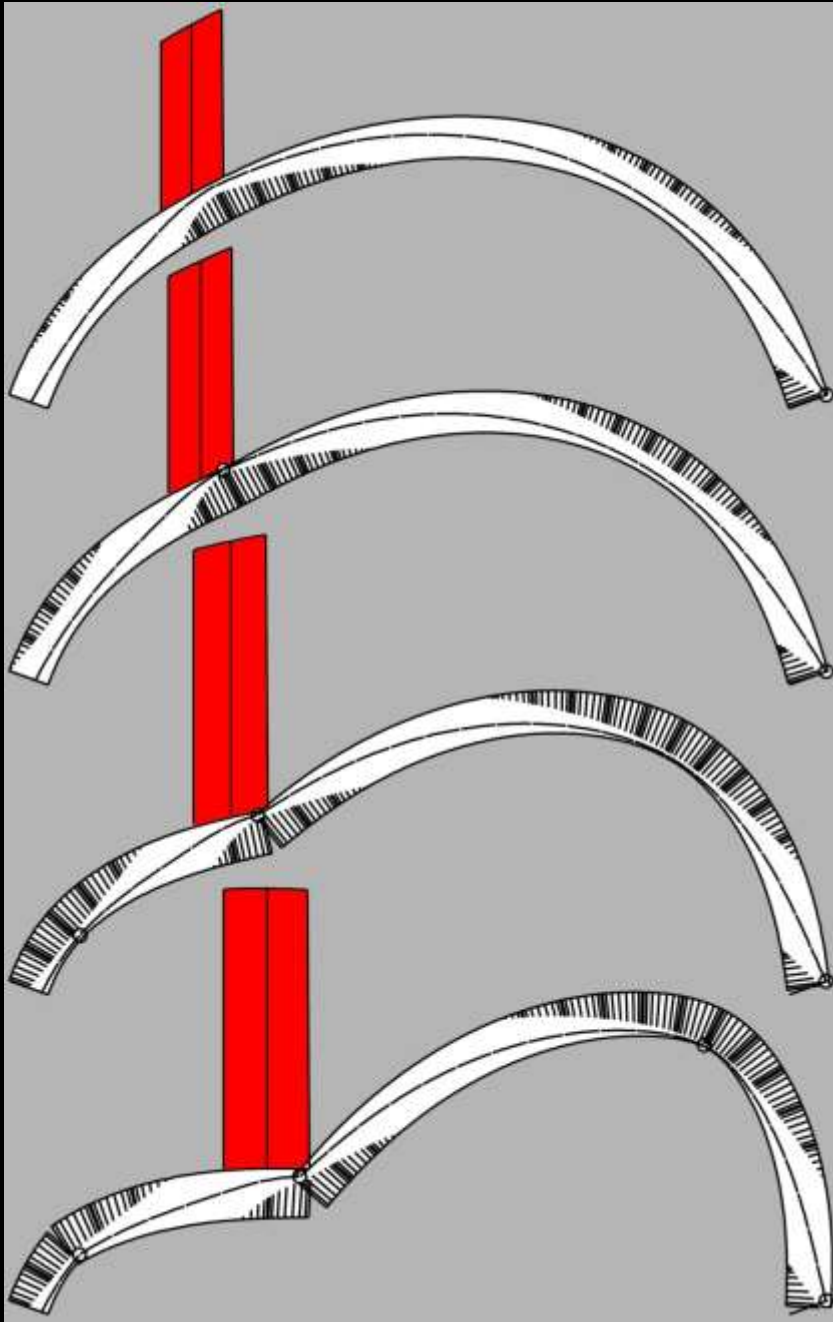


Durch starkes Steigern der **Widerlagerverschiebung** lässt sich nachvollziehen, wie der Bogen vom „Gebrauchszustand“ (mit 3 Gelenken) schliesslich in den „Bruchzustand“ (mit 4 oder 5 Gelenken) übergeht.



Durch Steigern der **Auflast** lässt sich nachvollziehen, wie der Bogen vom „Gebrauchszustand“ (mit 3 Gelenken) in den „Bruchzustand“ (mit 4 oder 5 Gelenken) übergeht (hierbei evtl. nur geringe Verformung → Gefahr!).

## Lastfall "Auflast"



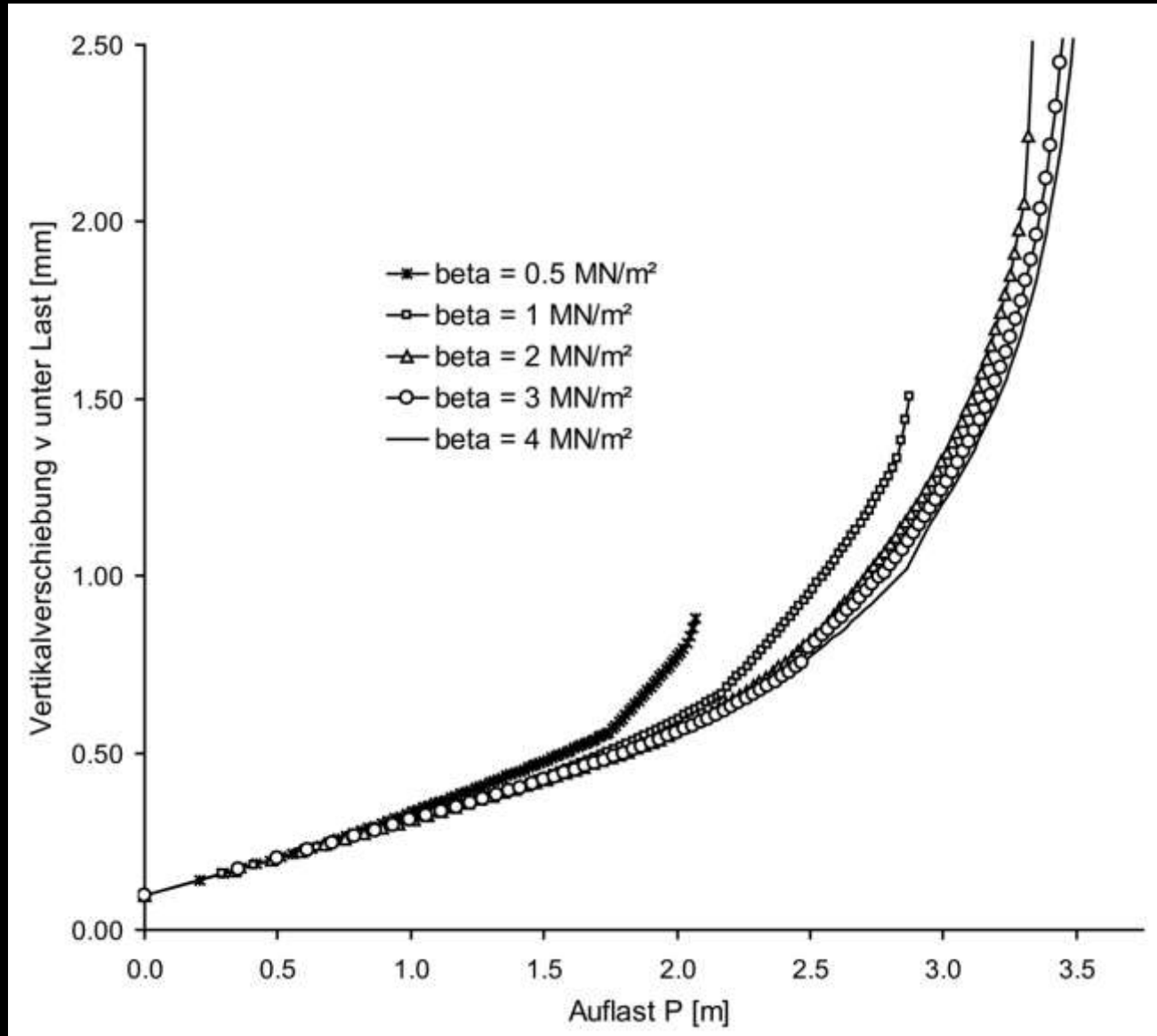
asymmetrische, konzentrierte Auflast = gefährlichste Belastungssituation des gemauerten Bogens!

Gelenkbildung bis zur Viergelenkkette, jedoch nur geringe Verformungen!



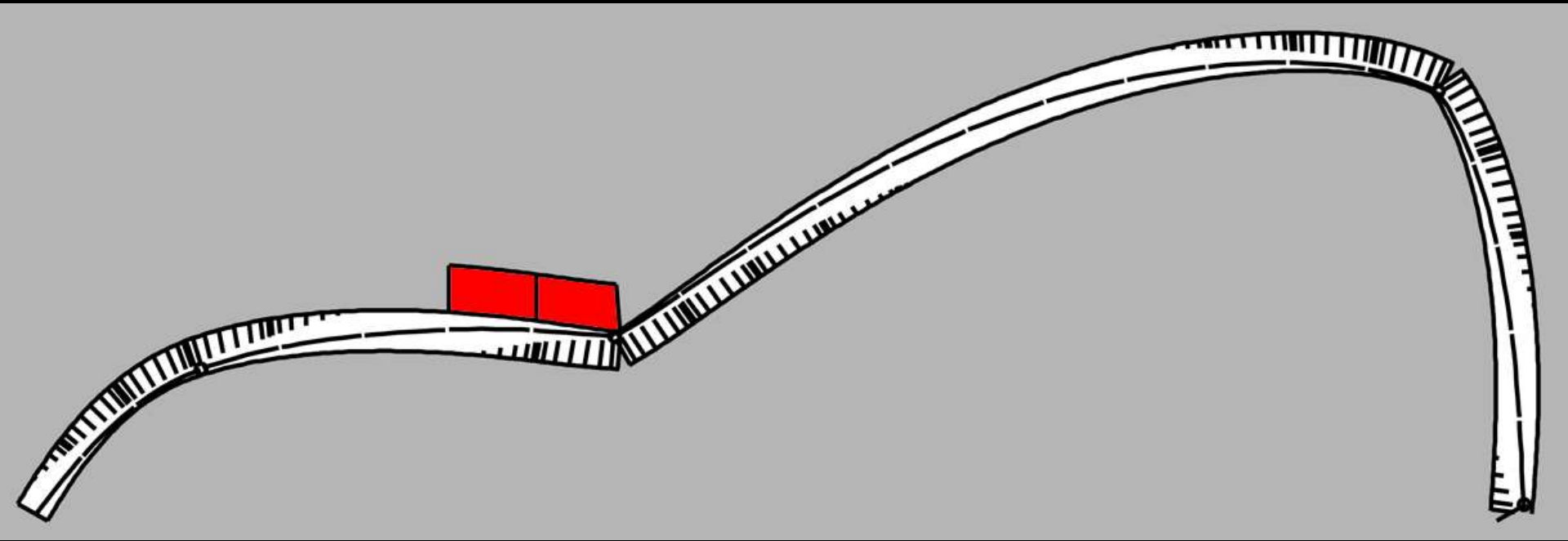


# Lastfall "Auflast" – FE-Simulation



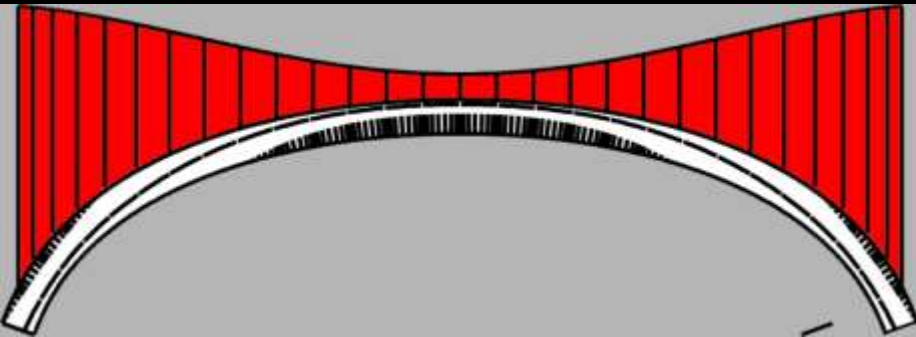
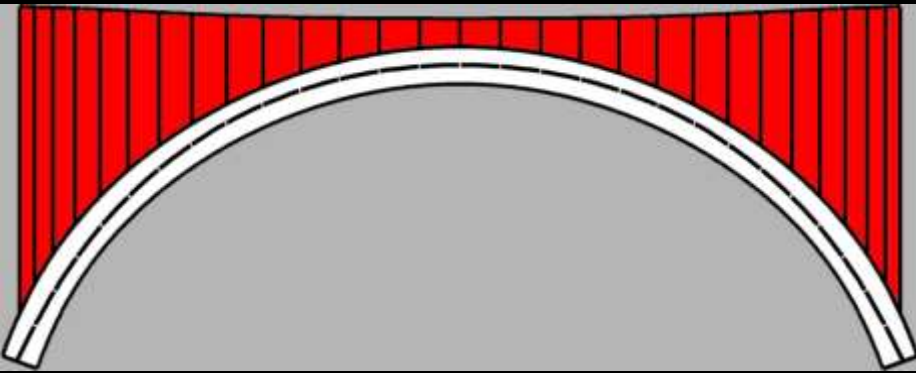
Einfluss der Druckfestigkeit  $\beta$  wenig signifikant – grobe Abschätzung reicht aus!

Lastfall "Auflast"

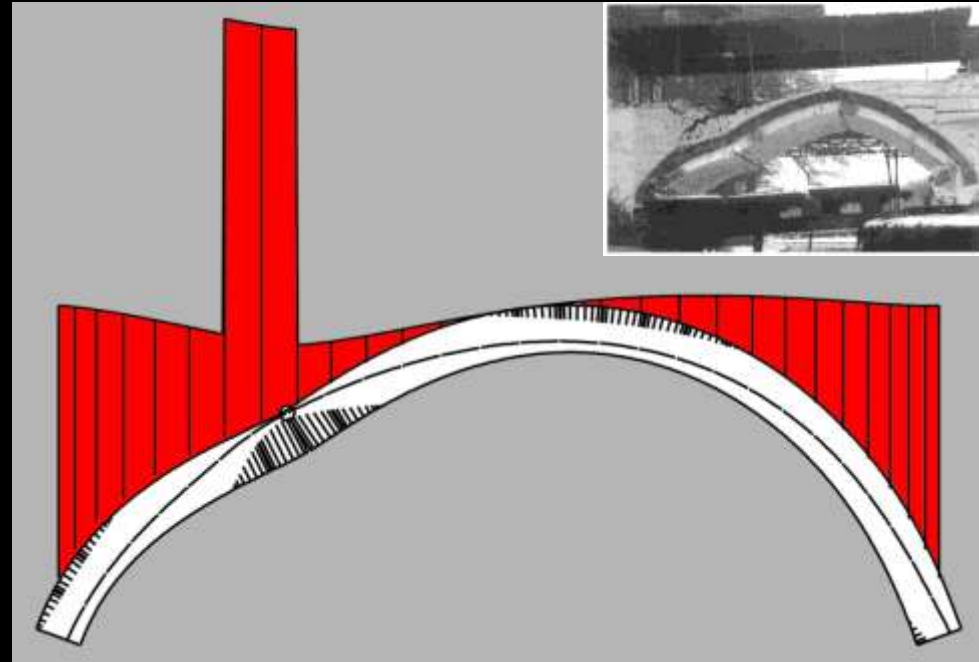


Lastfall "4 Personen auf einem realen Hochbau-Gewölbe"

# Bogen mit Hintermauerung/Hinterfüllung



Lastfall "Widerlager gibt nach"



Lastfall "Auflast"

Hinterfüllung wirkt immer günstig (hier im Beispiel nur 0 bis 1 Gelenke)

Tragverhalten der Kreuzgewölbe und Tonnen mit Stichkappen

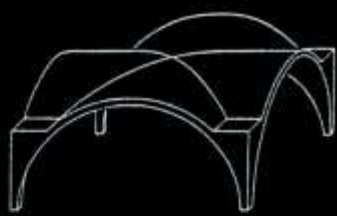
Vom Rissbild zum Verständnis des Tragverhaltens



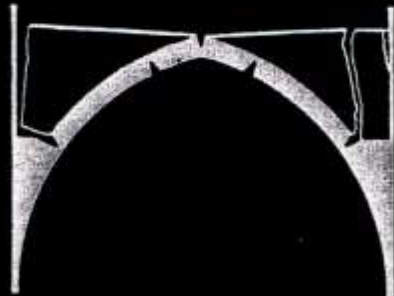
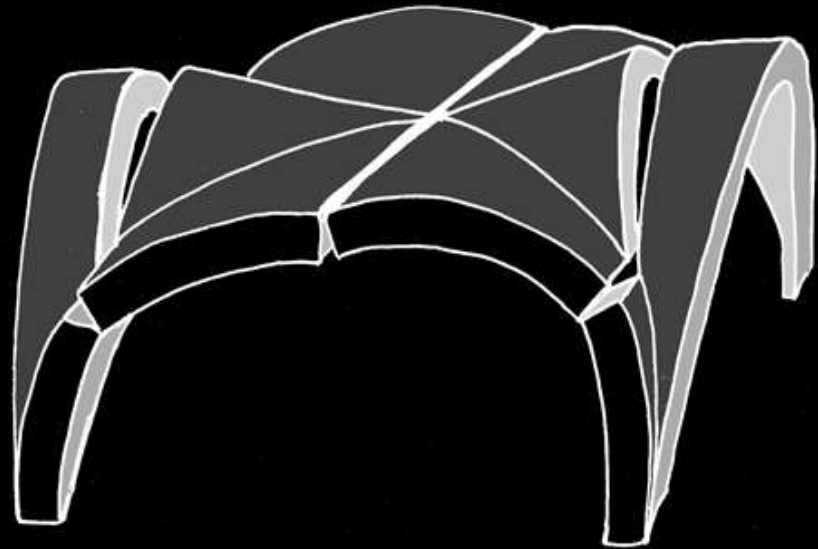
Scheitelrisse in einer Stichkappentonne (Paris, Saint Roch, 17. Jh.)



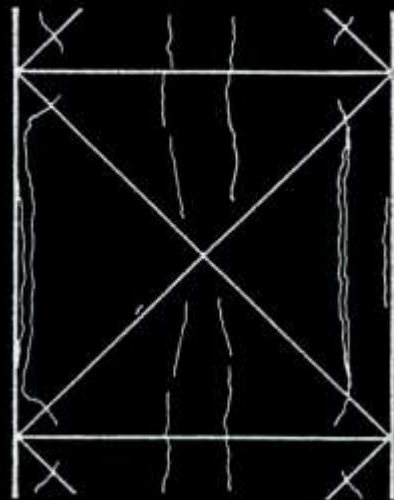
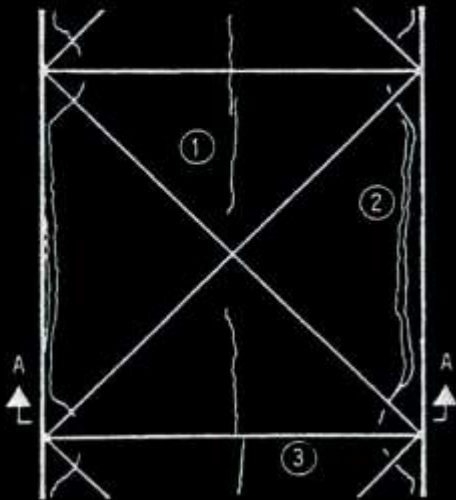
Scheitelriss in einer Stichkappentonne (Kreuz b. Glonn/Oberbayern, 17. Jh.)



GEWÖLBETYP

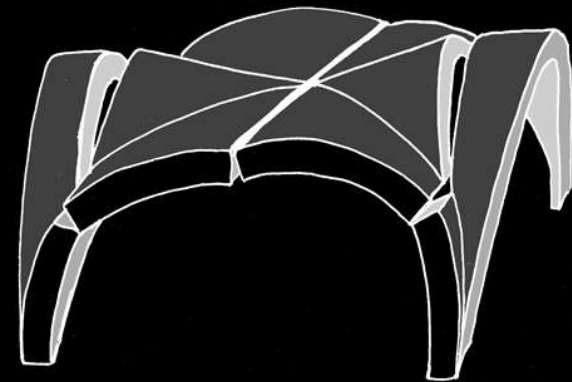


SCHNITT A-A



UNTERSEITE

Sog. „Sabouret-Risse“ bei stärkerer Widerlagerverschiebung (Barthel 1993 und Holzer 2015)



Sabouret-Risse und Scheitelriss in einem romanischen Kreuzgewölbe (Ely, 12. Jh.)





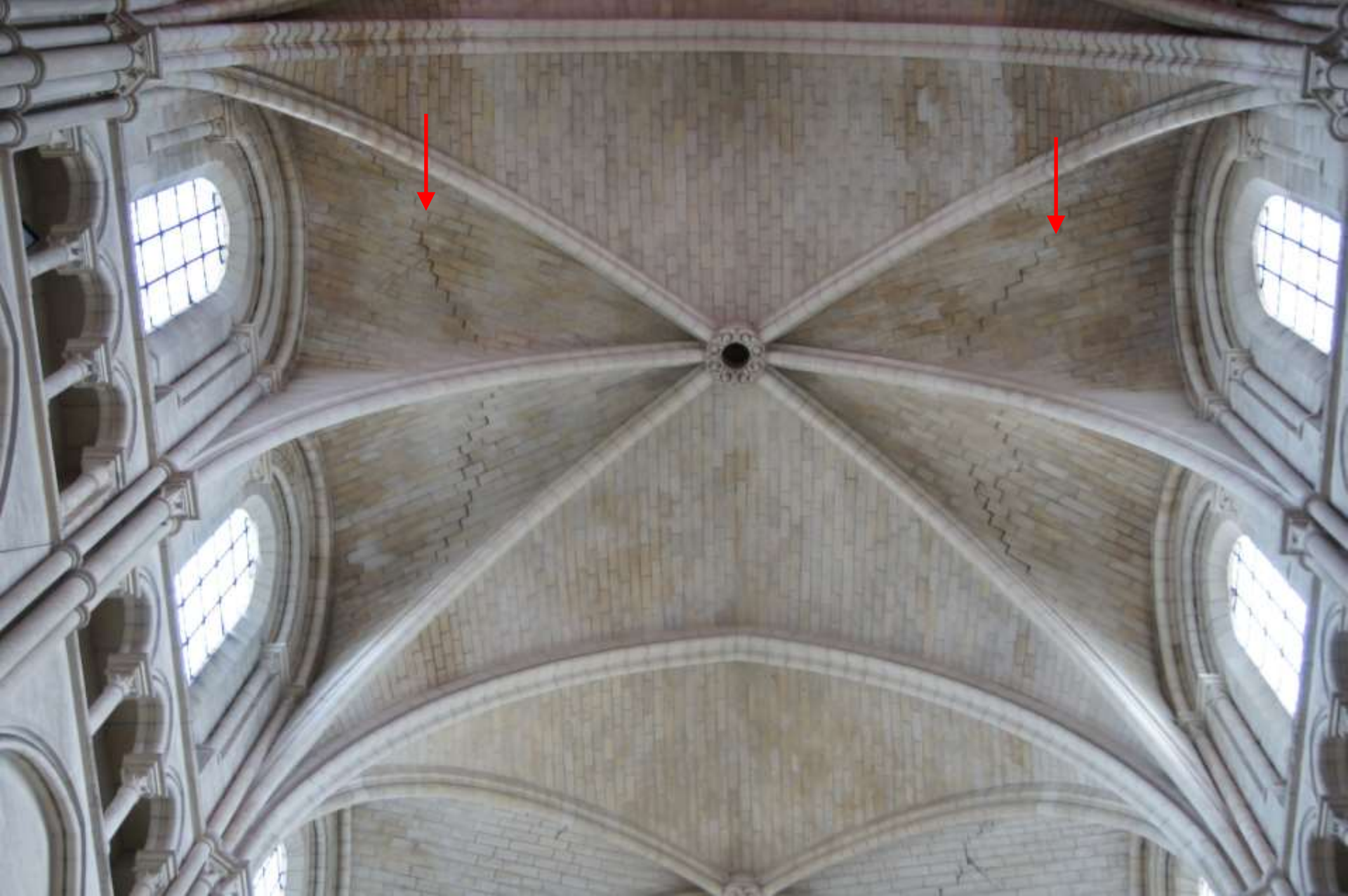
Sabouret-Risse in den Schildkappen eines Kreuzrippengewölbes (Moret-sur-Loing, 13. Jh.)



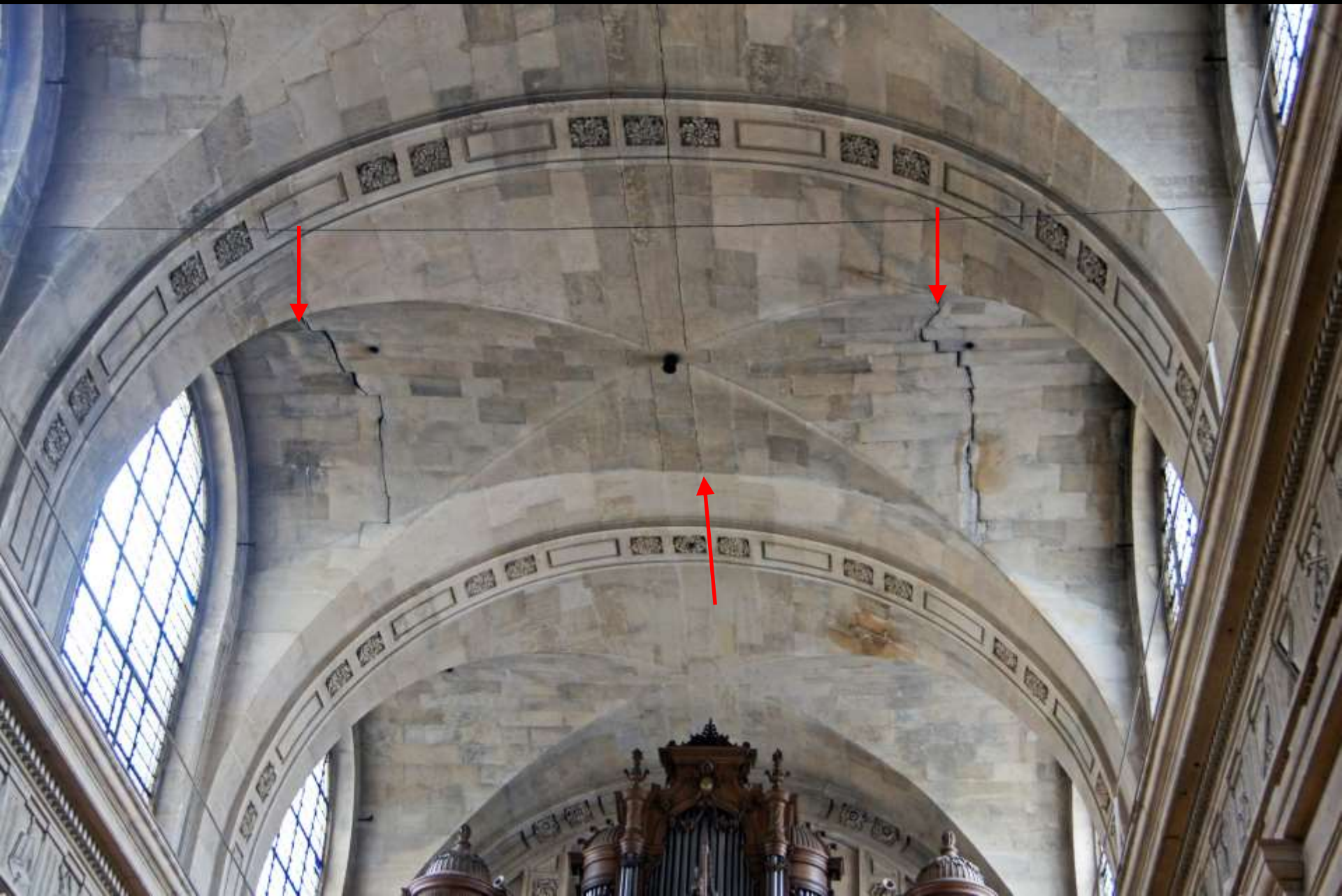
Sabouret-Risse in den Schildkappen eines Kreuzrippengewölbes (Kathedrale Rouen, 13. Jh.)



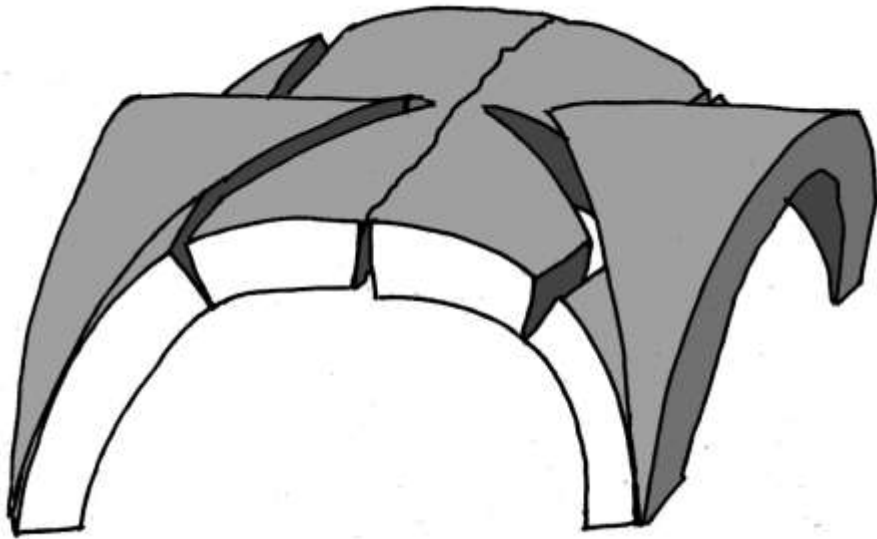
Sabouret-Risse in den Schildkappen eines Kreuzrippengewölbes (Kathedrale Amiens, 13. Jh.)



Sabouret-Risse in einem sechsteiligen Gewölbe (Laon, Kathedrale, 12. Jh.)

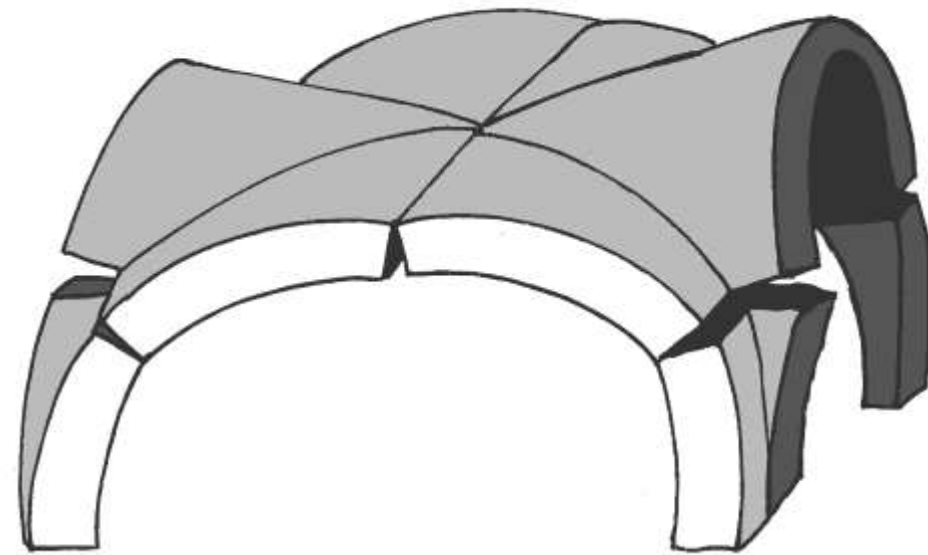


Sabouret-Risse in einer Stichkappentonne (Paris, Sainte Elisabeth, 17. Jh.)

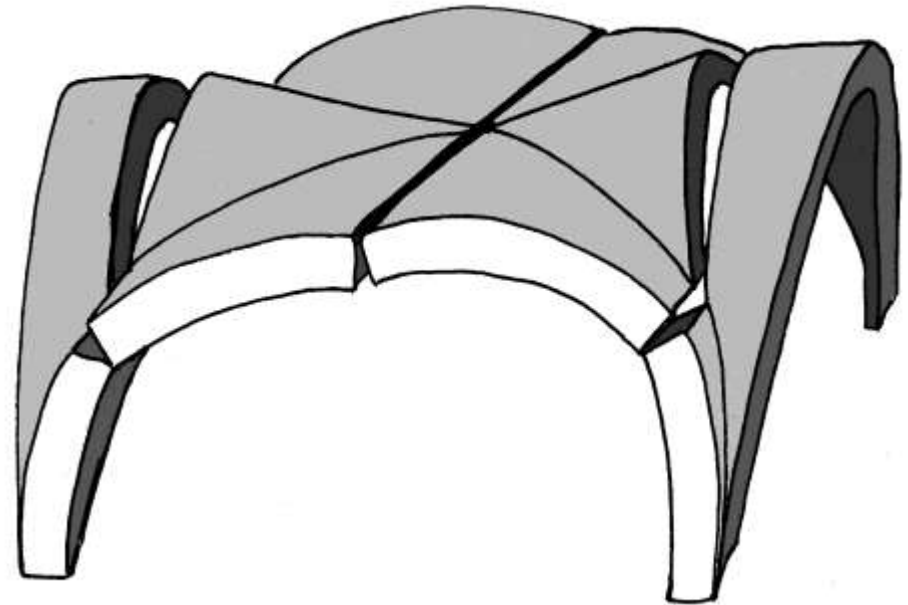


A: Kappe bleibt stehen

ebene Mechanismen dominieren bei Kreuzgewölben  
und Stichkappentonnen



B: Kappe rotiert mit Haupttonne



C: Kappe reißt durch

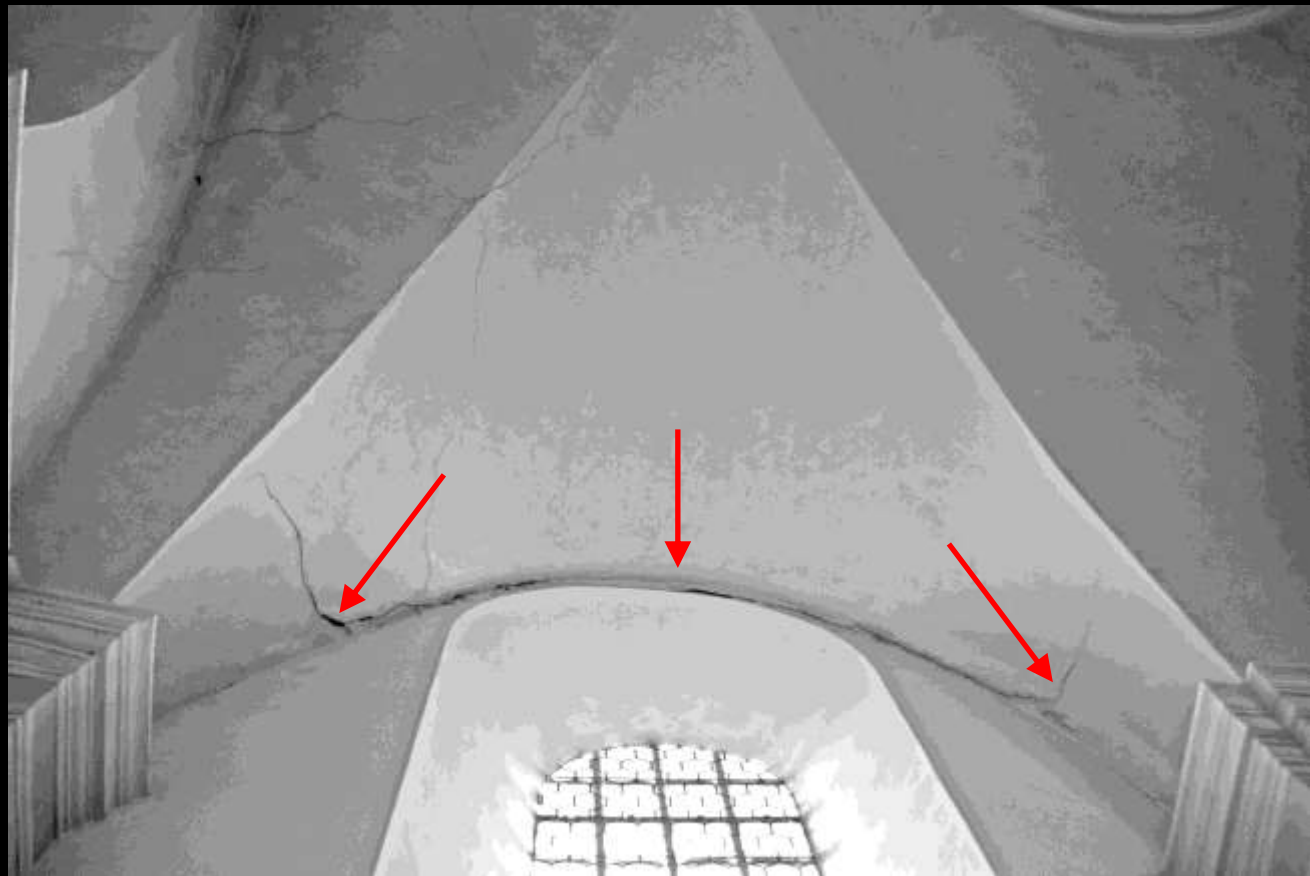
# ebene Mechanismen bei Kreuzgewölben und Stichkappentonnen



Mechanismus A: Kappe bleibt stehen

Längs des Kreuzgrates ist die Verzahnung schwierig  
Daher oft Abriss der Kappe längs des Grates

# ebene Mechanismen bei Kreuzgewölben und Stichkappentonnen



Mechanismus B: Kappe rotiert mit Haupttonne

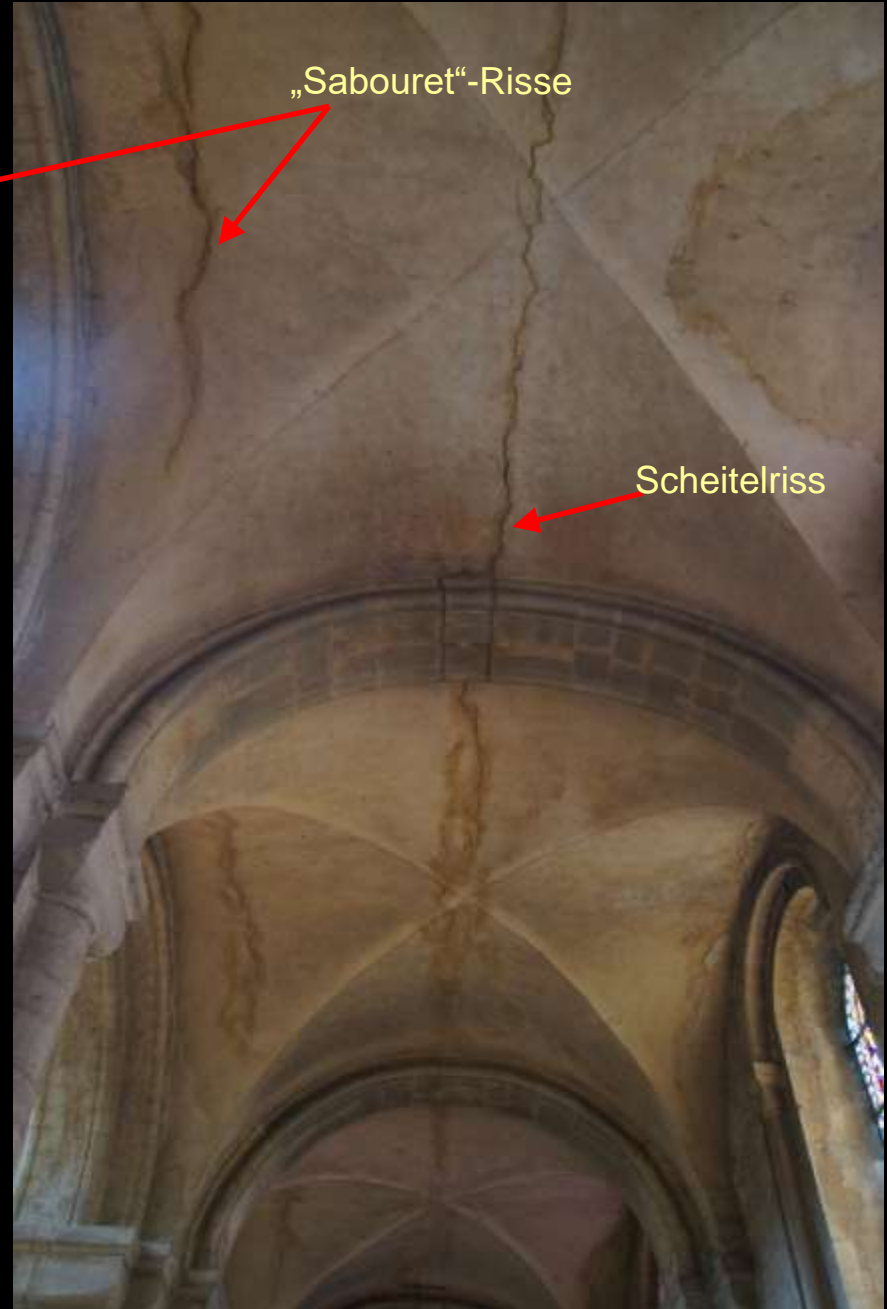
wird durch Zwickelausmauerung, fehlenden Verbund am Schildbogen und steile Stichkappenform begünstigt



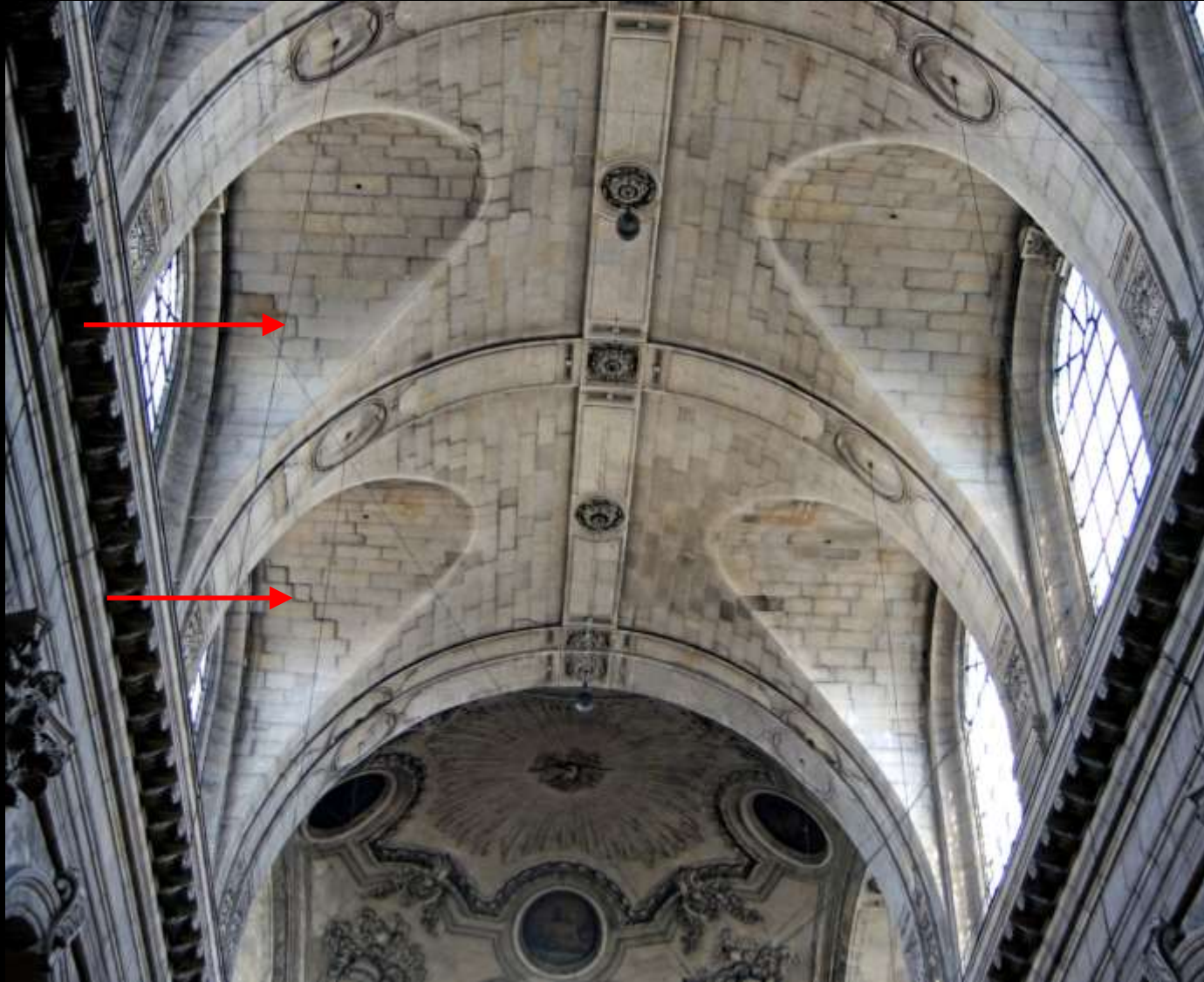
# ebene Mechanismen bei Kreuzgewölben und Stichkappentonnen



Mechanismus C: Kappe reißt durch  
(häufigster Mechanismus, "Sabouret")



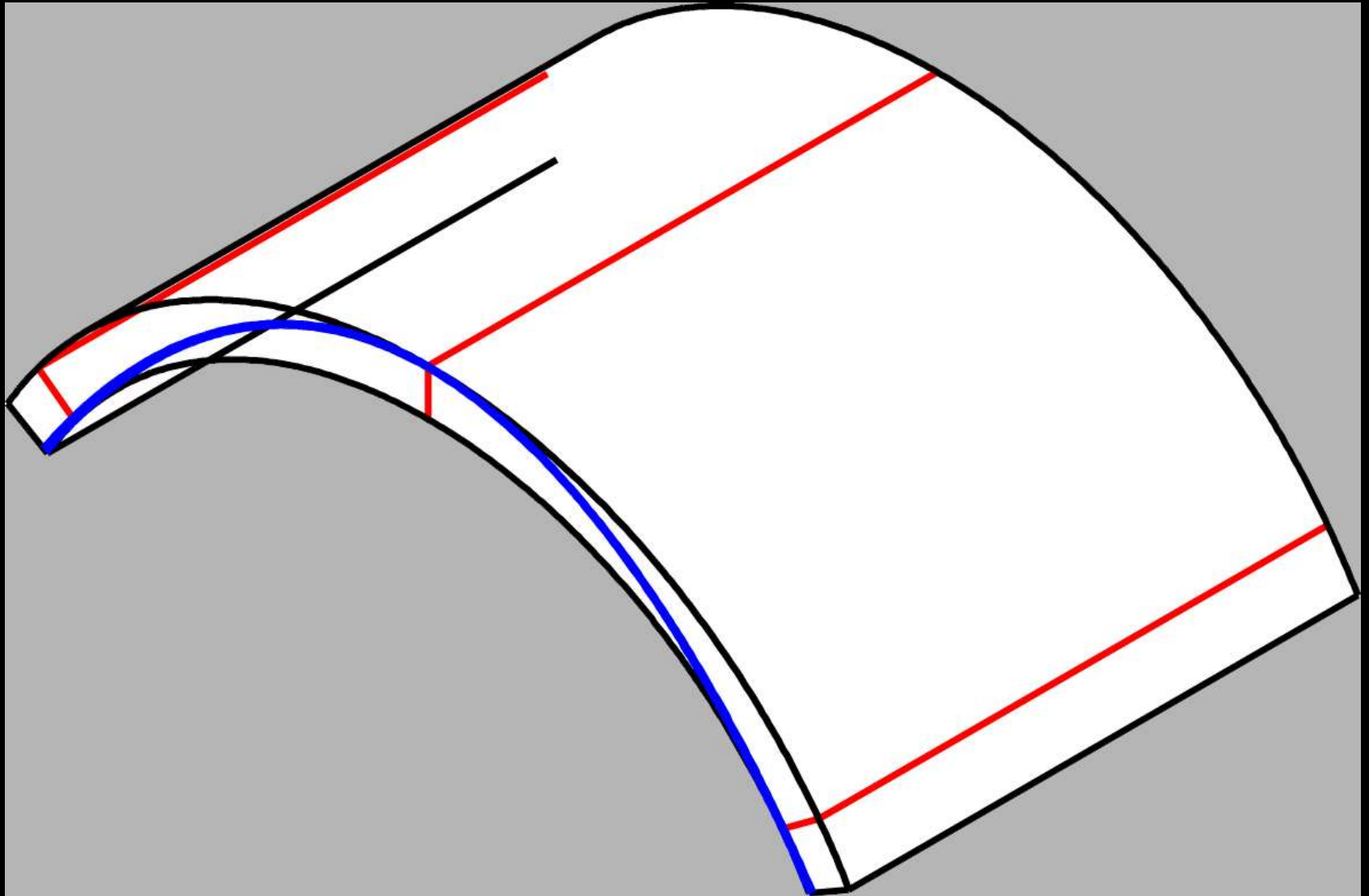
# ebene Mechanismen bei Kreuzgewölben und Stichkappentonnen



Mischung aus Mechanismus B und C (häufig anzutreffen)  
(St.-Sulpice, Paris, 17. Jh.)

# Stützzonen-Methode für Kreuzgewölbe

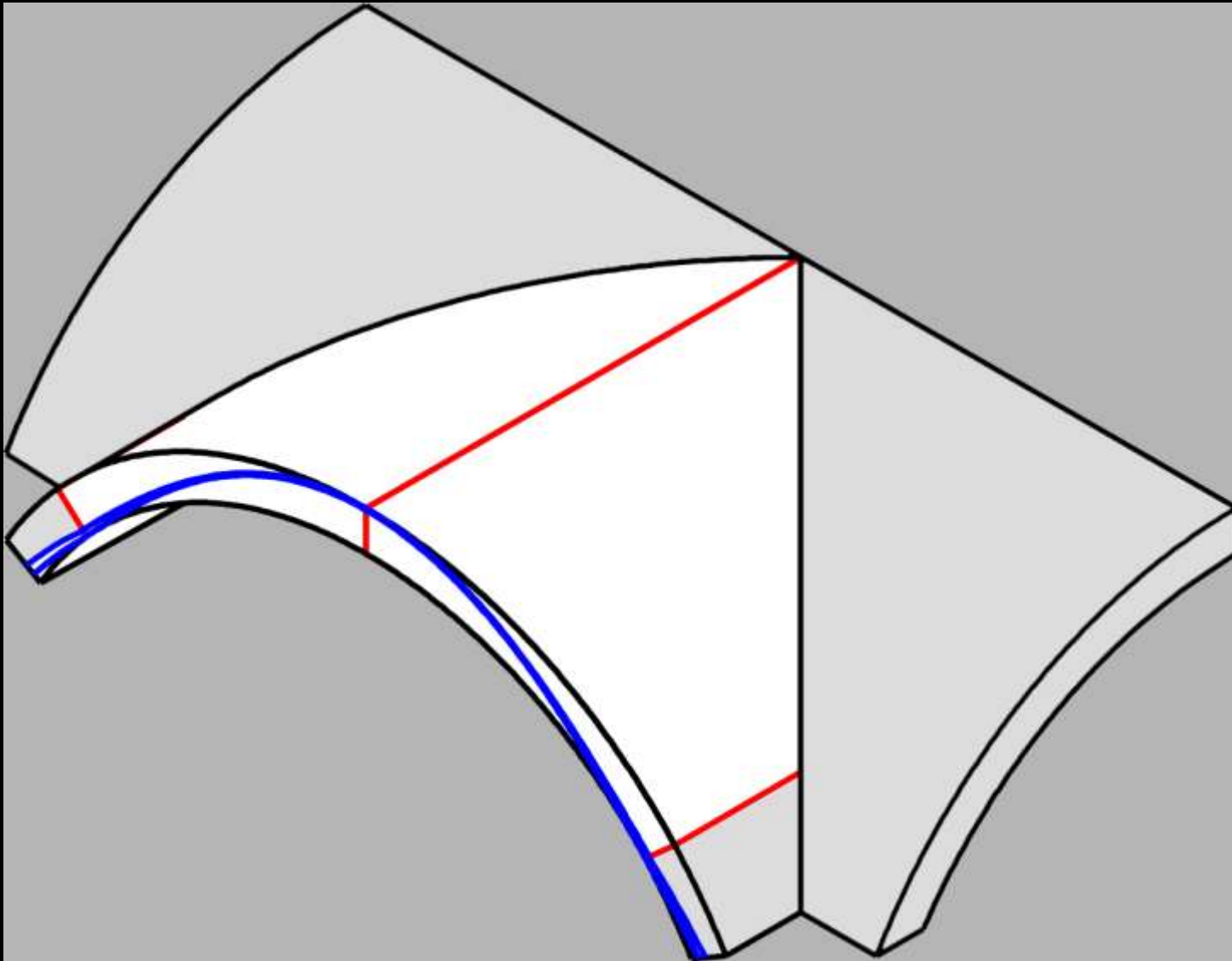
- Ansatz 1: Tonne, Stichkappen werden ignoriert!



Gelenklage durch Optimierungsalgorithmus, berechneter Schub  $H = 320 \text{ kN}$

## Stützzonen-Methode für Kreuzgewölbe

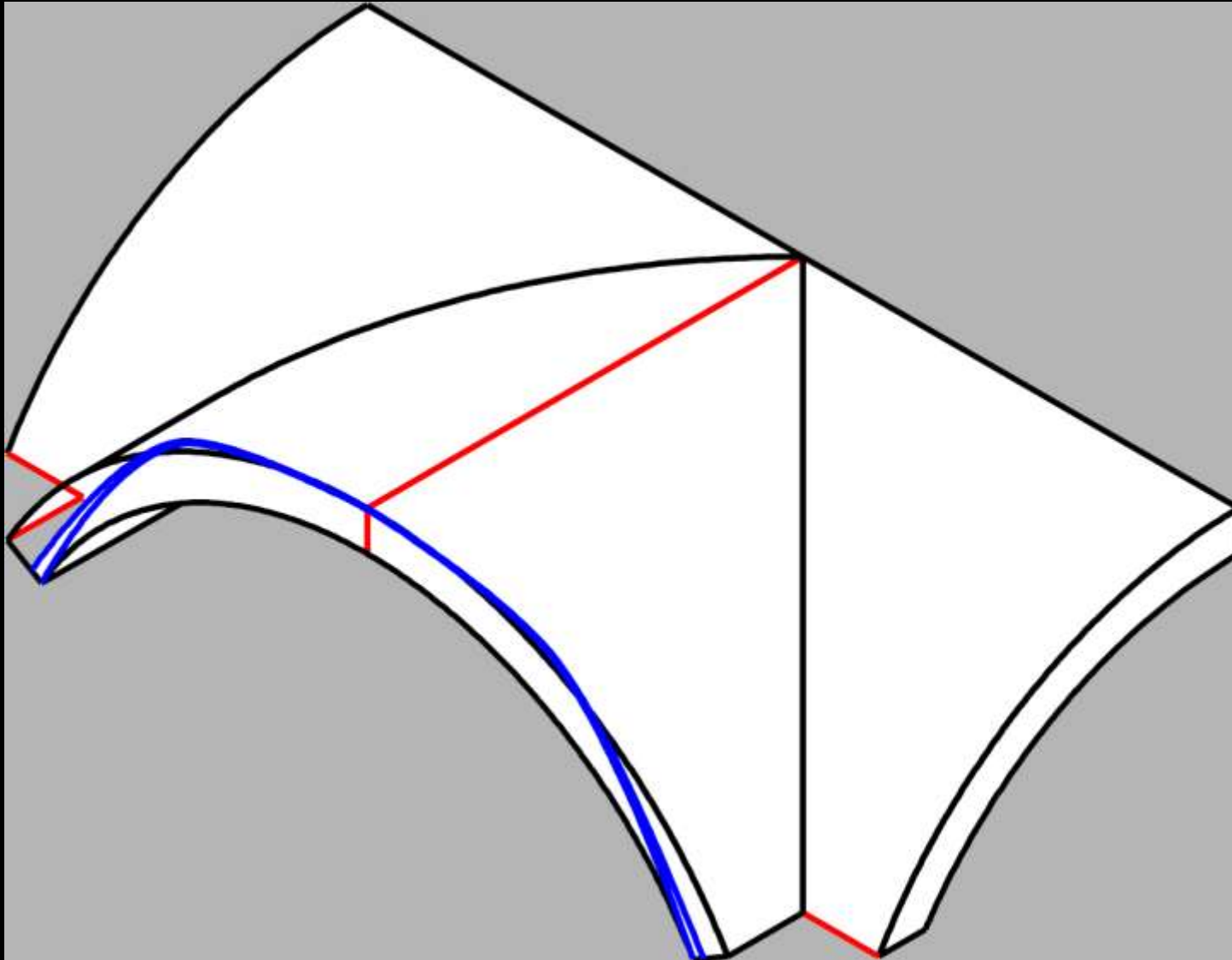
- Ansatz 2: Tonne, Stichkappe reißt am Grat ab (Mechanismus A)



Gelenklage durch Optimierungsalgorithmus, berechneter Schub  $H = 305 \text{ kN}$

## Stützzonen-Methode für Kreuzgewölbe

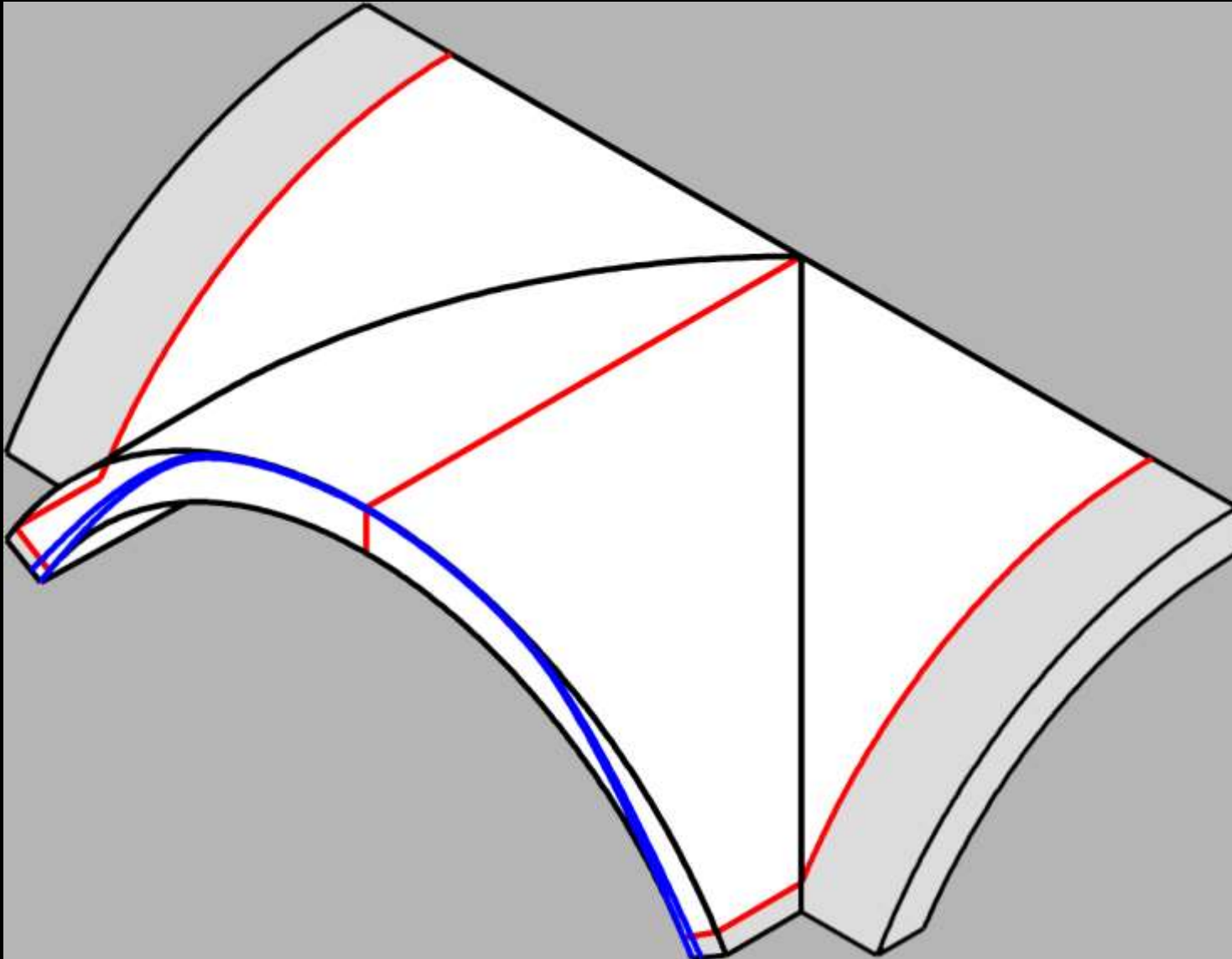
- Ansatz 3: Mechanismus B (Stichkappe rotiert mit)



Gelenklage durch Optimierungsalgorithmus, liefert hier keinen zulässigen Gleichgewichtszustand  
Stützzlinie tritt oben aus der Bogenkontur (berechneter Schub  $H = 314 \text{ kN}$ )

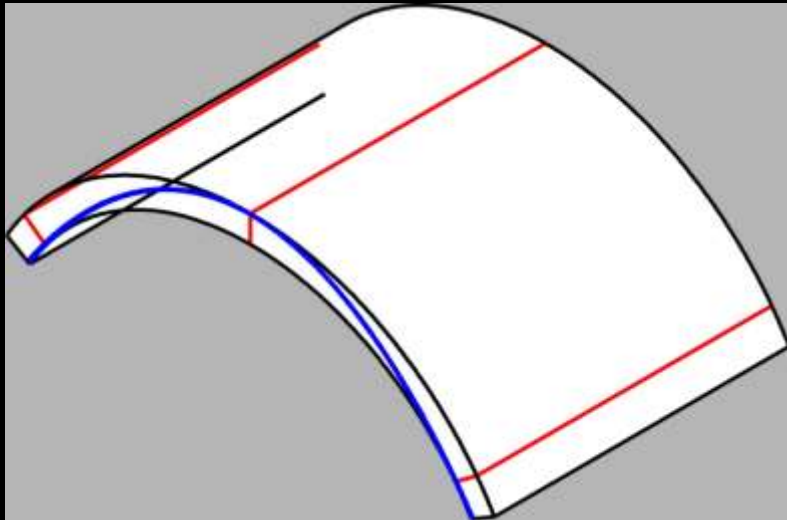
## Stützzonen-Methode für Kreuzgewölbe

- Ansatz 4: Stichkappe reißt durch (Mechanismus C, „Sabouret“)

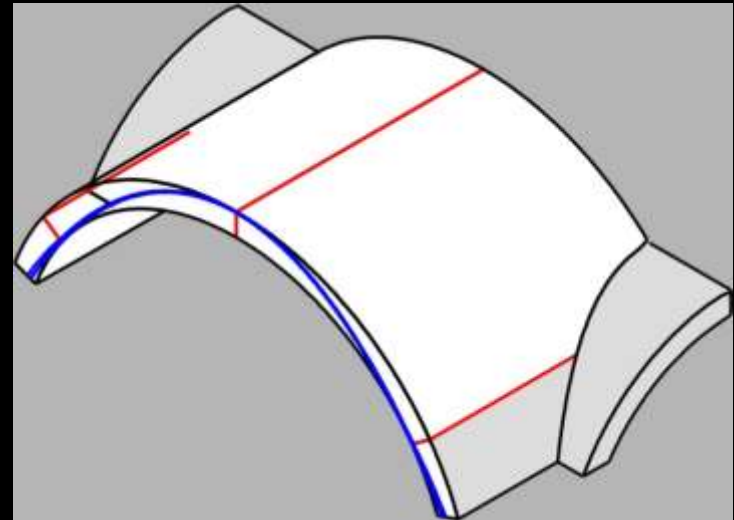


Gelenklage durch Optimierungsalgorithmus, berechneter Schub  $H = 338 \text{ kN}$

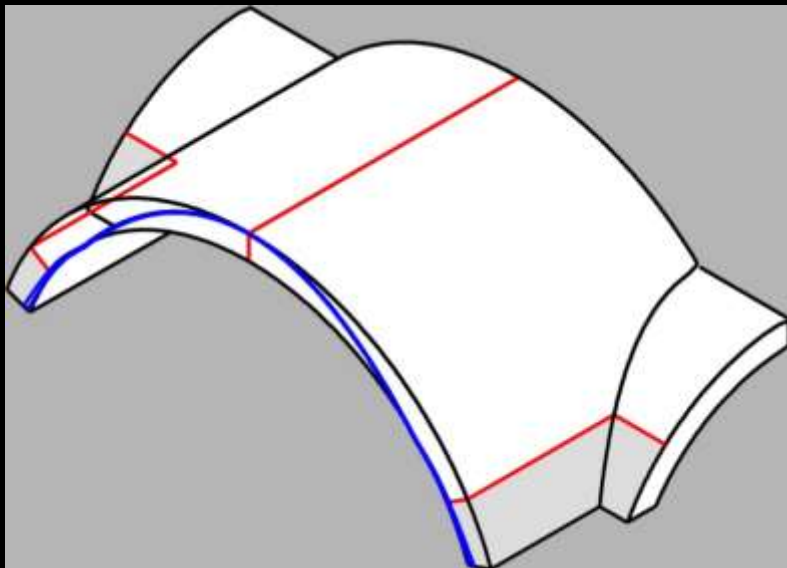
# Stützzonen-Methode für Stichkappentonne



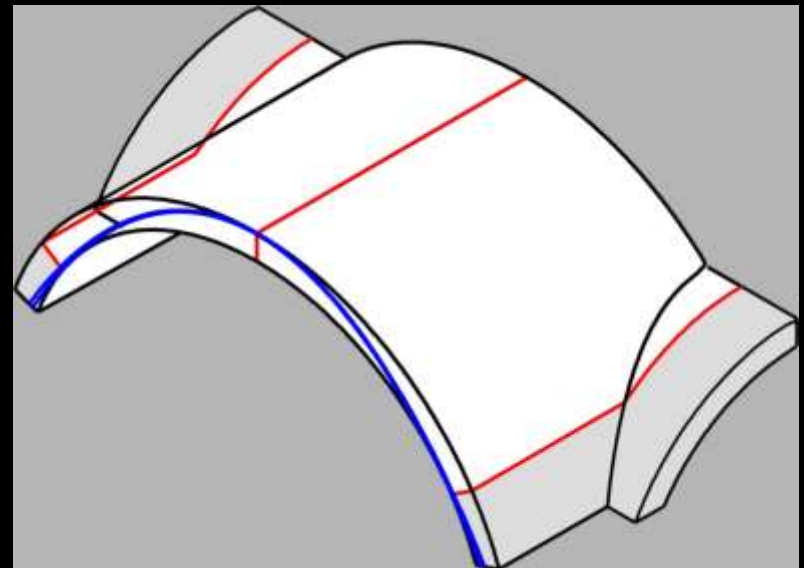
Reine Tonne  
(berechneter Schub  $H = 320$  kN)



Mechanismus A  
(berechneter Schub  $H = 320$  kN)



Mechanismus B  
(berechneter Schub  $H = 304$  kN)



Mechanismus C, Sabouret  
(berechneter Schub  $H = 319$  kN)