

# 4 Vorspannung von Flächentragwerken

Ergänzung zu Stahlbeton II (Vorspannung)

## 4.1 Grundlagen / Stabtragwerke

In diesem Kapitel werden zuerst die Grundlagen der Vorspannung und ihre Anwendung auf Stabtragwerke zusammengestellt (Kapitel 4.1, Wiederholung aus Stahlbeton II).

Auf dieser Grundlage wird aufgezeigt, wie die Vorspannung bei Flächentragwerken berücksichtigt werden kann.

## Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)

- Vorspannung = kontrolliertes Aufbringen von Kräften auf Tragwerk oder Bauteil
- Zwischen Spannstahl und vom Spannstahl befreitem Tragwerk bzw. Bauteil wirken Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte
- Vorspannung erzeugt Eigenspannungszustand und verursacht Tragwerksverformungen.
- Bei statisch unbestimmten Systemen entstehen Zwangsschnittgrößen aus behinderter Verformung.
- Verhalten vorgespannter Stabtragwerke kann analog wie bei schlaff bewehrten Tragwerken mit Querschnittsanalysen untersucht werden
- Dabei ist zu beachten, dass die Dehnungsdifferenz  $\Delta\varepsilon$  zwischen Spannstahl und Beton bei der Injektion des Hüllrohrs «eingefroren» wird (Vordehnung des Spannstahls)

Wiederholung aus Stahlbeton I/II:

Die Spannweiten von Stahlbetonbauten sind wegen der Rissbildung und den Langzeitverformungen (Kriechen) begrenzt, da die Verformungen bei grossen Schlankheiten, wie sie weitgespannte Tragwerke erfordern, unzulässig gross werden.

Mit einer Vorspannung können diese Probleme gelöst werden, indem die Beanspruchung infolge ständiger Lasten – oder ein Teil davon – durch die Anker- und Umlenkkräfte der Vorspannung kompensiert wird. Die Vorspannung ist damit eine wesentliche Grundlage für weitgespannte, schlanke und wirtschaftliche Betontragwerke. Sie verhalf der Betonbauweise zum Durchbruch, insbesondere im Brückenbau.

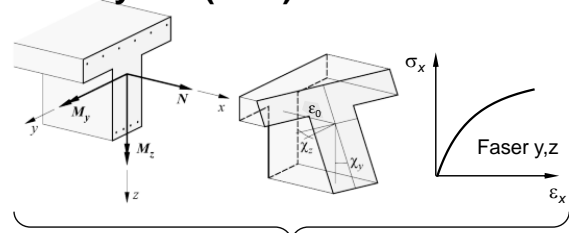
# Stabtragwerke: Querschnittsanalysen (SB I)

## Allgemeines

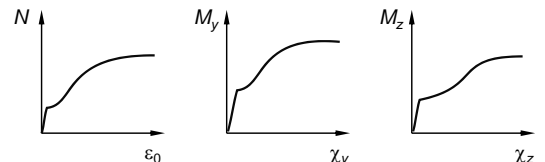
- Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte ermöglicht die Ermittlung des Tragverhaltens von Stäben bei gegebenem Baustoffverhalten (Spannungs-Dehnungsdiagramme)
- Schnittgrößen ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) folgen aus den Verformungsgrößen ( $\varepsilon_0$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$ ) einfach durch Integration, umgekehrt ist im allgemeinen eine Iteration erforderlich:

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{Integration}} \\ \xleftarrow{\text{Iteration}} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} N = \int_A \sigma_x dA \\ M_y = \int_A \sigma_x z dA \\ M_z = \int_A \sigma_x y dA \end{matrix} \right.$$

Statische Berechnung: ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) meist auf Hauptachsen Beton-QS bezogen, bei Berücksichtigung ideeller Querschnittswerte beachten!



Ermittlung des Tragverhaltens für beliebige Querschnittsgeometrie / Baustoffe möglich:



Normalkraft-Verlängerung

Momenten-Krümmung y

Momenten-Krümmung z

NB: Allgemein ist  $\chi_y (N, M_z) \neq 0$ ,  $\chi_z (N, M_y) \neq 0$  und  $\varepsilon_0 (M_y, M_z) \neq 0$  (auch für symmetrische QS)

## Wiederholung aus Stahlbeton I/II:

Unter der Annahme einer linearen Verteilung der Längsdehnungen («Ebenbleiben des Querschnitts») ist der Verformungszustand («Dehnungsebene») in jedem Querschnitt durch drei Verformungsgrößen («verallgemeinerte Dehnungen») eindeutig definiert. Üblicherweise verwendet man als verallgemeinerte Dehnungen die Dehnung der Schwerachse  $\varepsilon_0$  und die Krümmungen  $\chi_y$  und  $\chi_z$ .

Ist für jede Faser des Querschnitts das Materialverhalten bekannt (Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Beton und Bewehrung), können für einen beliebigen Verzerrungszustand ( $\varepsilon_0$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$ ) die zugehörigen Schnittgrößen resp. Spannungsergebnisse («verallgemeinerte Spannungen») durch Integration der Spannungen über den Querschnitt ermittelt werden. Üblicherweise verwendet man als Spannungsergebnisse die Normalkraft  $N$  und die auf die Schwerachse bezogenen Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$ .

Soll umgekehrt für eine gegebene Beanspruchung (Spannungsergebnisse  $N$ ,  $M_y$  und  $M_z$ ) der Verzerrungszustand ( $\varepsilon_0$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$ ) ermittelt werden, ist ausser in einfachen Spezialfällen ein iteratives Vorgehen erforderlich.

# Vorgespannte Stabtragwerke: Querschnittsanalysen (SB II)

## Vorgespannte Querschnitte

- Behandlung analog, Vordehnung des Spannstahls berücksichtigen

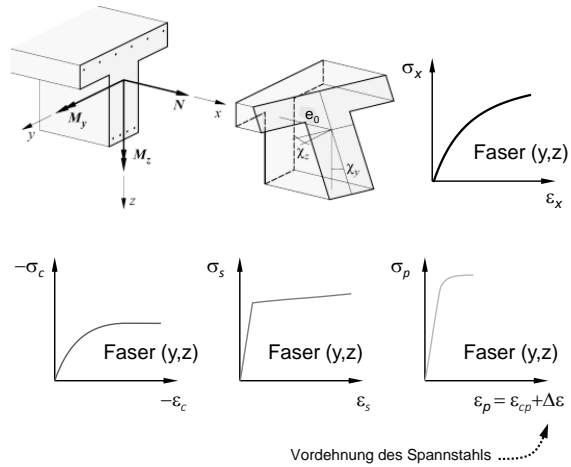
$$\varepsilon_x(y, z) = \varepsilon_0 + \chi_y \cdot z - \chi_z \cdot y$$

$$\varepsilon_c(y, z) = \varepsilon_x(y, z)$$

$$\varepsilon_s(y, z) = \varepsilon_x(y, z)$$

$$\varepsilon_p(y, z) = \varepsilon_x(y, z) + \Delta\varepsilon$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Integration}} \\ \xleftarrow{\text{Iteration}} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} N = \int_A \sigma_x dA \\ M_y = \int_A \sigma_x z dA \\ M_z = \int_A \sigma_x y dA \end{array} \right\}$$



21.11.2016

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton III

4

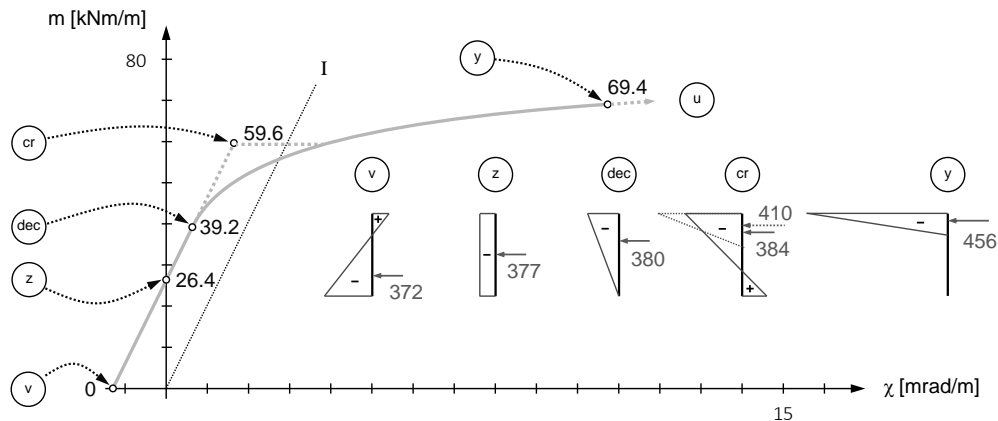
## Wiederholung aus Stahlbeton II:

Bei vorgespannten Querschnitten kann grundsätzlich gleich vorgegangen werden wie bei schlaff bewehrten Querschnitten. Der Unterschied besteht einzig darin, dass die vorgespannte Bewehrung (Spannstahl) eine Vordehnung  $\Delta\varepsilon$  aufweist. Die Dehnung in der vorgespannten Bewehrung ist um die Vordehnung  $\Delta\varepsilon$  grösser als die Dehnung  $\varepsilon_{cp}$  des Betons (resp. einer nicht vorgespannten Bewehrung) an gleicher Stelle des Querschnitts:  $\varepsilon_p = \varepsilon_{cp} + \Delta\varepsilon$ .

Während die Grösse von  $\varepsilon_{cp}$  aus der Dehnungsebene folgt, resultiert die Vordehnung  $\Delta\varepsilon$  aus dem Spannvorgang (Höhe der Vorspannkraft inkl. Reibungsverluste, Verkürzung des Betons auf Höhe der Vorspannung beim Spannvorgang). Unter der Annahme eines starren Verbunds zwischen Vorspannung und Beton (Vorspannung mit Verbund) bleibt der Wert von  $\Delta\varepsilon$ , unabhängig vom Verzerrungszustand, konstant.

# Vorgespannte Stabtragwerke – Biegetragverhalten (SB II)

## Biegetragverhalten auf Querschnittsebene: Zusammenfassung



- Bis zur Dekompression (resp. bei Erstbelastung bis zur Rissbildung) nimmt die Spannkraft nur wenig zu, der Hebelarm der inneren Kräfte wächst dagegen stark an
- Nach Überschreiten des Dekompressionsmoments (resp. bei Erstbelastung ab der Rissbildung) nimmt die Spannkraft stärker zu, der Hebelarm der inneren Kräfte wächst dagegen weniger stark an
- Nach der Dekompression nimmt die Biegesteifigkeit sukzessive ab, die Rotation nimmt entsprechend zu

21.11.2016

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton III

5

## Wiederholung aus Stahlbeton II:

Vorgespannte Querschnitte zeigen ein ähnliches Last-Verformungsverhalten (Momenten-Krümmungs-Beziehung) wie schlaff bewehrte Querschnitte unter kombinierter Beanspruchung durch Biegung und eine konstante Druckkraft.

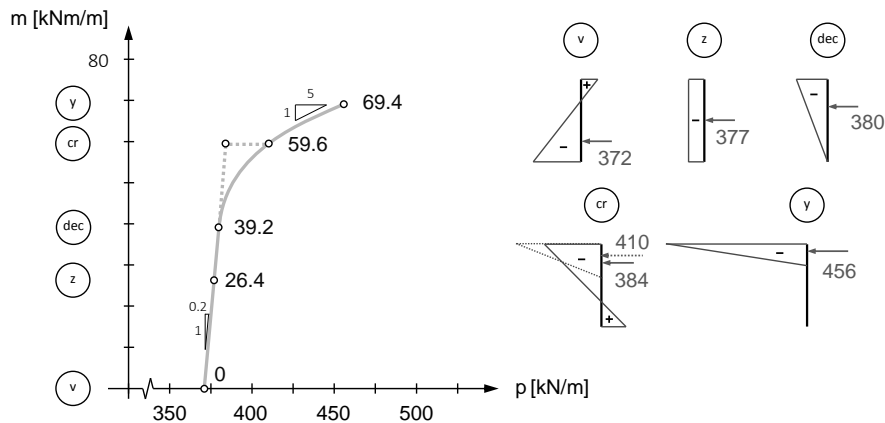
Im dargestellten Diagramm sind auf der Ordinate die Biegemomente infolge äusserer Beanspruchung dargestellt. Ist nur die Vorspannung wirksam (Punkt **v = Vorspannung**, keine äussere Beanspruchung) weist der Querschnitt eine negative Krümmung auf; in der Regel ist er in diesem Zustand – wie im Diagramm vorausgesetzt – ungerissen. Wird die äussere Beanspruchung gesteigert, erreicht man zunächst den Punkt **z = zentrische Beanspruchung**, in welchem der Querschnitt eine zentrische Stauchung erfährt und die Krümmung verschwindet, und dann den Punkt **dec = Dekompression**, in welchem die Spannung am Querschnittsrand gerade Null ist, d.h. der Querschnitt dekomprimiert. Bis zu dieser Beanspruchung ist das Verhalten linear, sofern sich die Baustoffe linear elastisch verhalten. Für höhere Beanspruchungen ist das Verhalten bei der Erstbelastung bis zur Rissbildung (Punkt **cr = cracking**) weiterhin linear, bei einer Wiederbelastung nach Überschreiten des Rissmoments resp. bei Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit dagegen nichtlinear (siehe Biegung mit Normalkraft), auch wenn sich die Baustoffe weiterhin linear elastisch verhalten bzw. verhalten würden. Nach der Dekompression resp. der Rissbildung nehmen die Krümmungen progressiv zu, bis schliesslich der Querschnittswiderstand erreicht wird (Punkt **y = yielding**, Fließen der Bewehrung, im Beispiel ausschliesslich der vorgespannten Bewehrung).

## Ergänzende Bemerkung:

- Schlaffe und vorgespannte Bewehrung erreichen die Fließgrenze i.A. nicht gleichzeitig → anstelle von **y** existieren zwei Punkte **y<sub>s</sub>** und **y<sub>p</sub>** mit Steifigkeitsabfall bei Fließen der ersten Bewehrung.

## Vorgespannte Stabtragwerke – Biegetragverhalten (SB II)

Biegetragverhalten auf Querschnittsebene



- Linearer Verlauf der Kraft im Spannstahl mit sehr geringer Zunahme bis zur Dekompression, anschließend nichtlinearer Verlauf mit deutlich stärkerem Spannkraftzuwachs
- Bei Ermüdungsbeanspruchung ist daher meist eine volle Vorspannung für ständige Einwirkungen + Ermüdungslasten (oder einen grossen Teil davon) sinnvoll

21.11.2016

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton III

6

Wiederholung aus Stahlbeton II:

Vorgespannte Querschnitte nehmen ein zunehmendes Biegemoment auf, indem der Hebelarm der inneren Kräfte und die Kraft in der vorgespannten Bewehrung zunehmen. Der Hebelarm der inneren Kräfte resultiert daraus, dass die Zugkraft in der vorgespannten Bewehrung in der Achse des Spannglieds wirkt, die zugehörige Druckkraft sich hingegen mit zunehmender Beanspruchung nach oben verschiebt. Im Träger resultiert eine Bogenwirkung (Drucklinie im Beton, Vorspannung als Zugband wirkend), siehe Modell in der Vorlesung Stahlbeton II.

Da die Bogenwirkung im ungerissenen Zustand einen sehr steifen Lastabtragsmechanismus darstellt, ist die Zunahme der Vorspannkraft bis zur Dekompression **dec** (resp. Rissbildung **cr**) sehr gering, und die zunehmende Beanspruchung wird praktisch ausschliesslich durch eine Vergrösserung des Hebelarms der inneren Kräfte (Vergrösserung der Pfeilhöhe des Bogens) aufgenommen: Der Hebelarm wächst, ausgehend vom Punkt **v** (Druckkraft auf Höhe der Spanngliedachse wirkend, Hebelarm = 0) über den Punkt **z** (Druckkraft in der Schwerachse des Betonquerschnitts wirkend, Hebelarm = Exzentrizität des Spannglieds  $e_p$ ) bis zum Punkt **dec** (Druckkraft im Beispiel im oberen Kernpunkt des vom Spannglied befreiten Betonquerschnitts wirkend, Hebelarm = Exzentrizität des Spannglieds + Kernweite =  $e_p + k_{sup}$ ) stark an.

Bei weiterer Laststeigerung nach Überschreiten des Dekompressionsmoments kann der Hebelarm nur noch wenig zunehmen und die zunehmende Beanspruchung wird primär durch eine Vergrösserung der Kraft in der vorgespannten Bewehrung aufgenommen.

Im dargestellten Beispiel nimmt die Spannkraft zwischen Vorspannung und Dekompressionsmoment um gerade einmal 2.2% zu, vom Dekompressionsmoment bis zum Erreichen des Querschnittswiderstands dagegen um 20%.

## Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)

- Es gibt grundsätzlich zwei alternative Möglichkeiten für die rechnerische Behandlung der Vorspannung:

### **Eigenspannungszustand**

(wirkt am gesamten Tragwerk bzw. Bauteil inkl. Spannglied)

### **Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte**

(wirken auf das vom Spannglied befreite Tragwerk bzw. Bauteil)

- Beide Möglichkeiten führen (bei konsequenter Anwendung) zum identischen Resultat
- Der einzige Unterschied besteht in der Systemabgrenzung
- Je nach Fragestellung ist die eine oder andere Möglichkeit vorteilhaft in der Anwendung

### Wiederholung aus Stahlbeton II

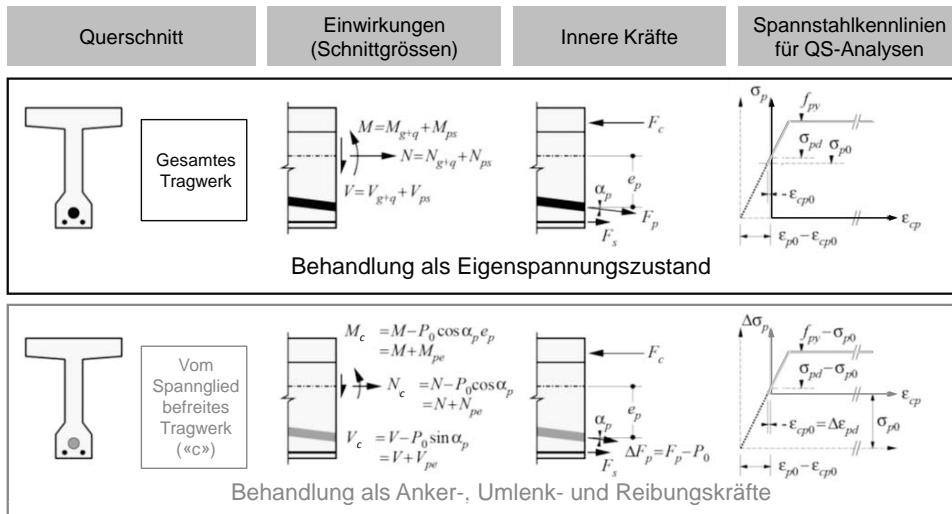
Die Vorspannung kann bei Stabtragwerken grundsätzlich auf zwei Arten berücksichtigt werden. Diese unterscheiden sich in der Systemabgrenzung.

Betrachtet man das gesamte Tragwerk, inklusive Spannglied, bewirkt die Vorspannung einen Eigenspannungszustand in jedem Querschnitt. Die diesem Eigenspannungszustand entsprechenden Verformungen sind bei statisch unbestimmten Systemen nicht mit der Lagerung verträglich, weshalb Zwangsbeanspruchungen infolge der Vorspannung resultieren, welche zusammen mit der äusseren Beanspruchung (Eigenlast, Nutzlasten, ...) als Einwirkungen zu berücksichtigen sind. Der Querschnittswiderstand entspricht bei dieser Betrachtung dem Widerstand des gesamten Querschnitts inklusive Vorspannung, weshalb man von «Vorspannung auf der Widerstandsseite» spricht.

Alternativ kann man das vom Spannglied befreite Tragwerk betrachten, auf welches infolge der Vorspannung Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte wirken. Daher spricht man bei dieser Betrachtung von «Vorspannung auf der Lastseite». Die Beanspruchung der vom Spannglied befreiten Querschnitte entspricht dabei der Summe der Beanspruchungen aus dem Eigenspannungszustand (präziser ausgedrückt: dem auf den vom Spannglied befreiten Querschnitt wirkenden Teil des Eigenspannungszustands) gemäss der Betrachtung «Vorspannung auf der Widerstandsseite» und den Zwangsbeanspruchungen infolge der Vorspannung gemäss jener Betrachtung.

Auf den folgenden Seiten werden die beiden Betrachtungsweisen einander gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass – wie nicht anders zu erwarten – die beiden Herangehensweisen letztlich zum gleichen Resultat führen. Je nach Fragestellung ist jedoch die eine oder andere davon besser geeignet.

## Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)



21.11.2016

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton III

8

Wiederholung aus Stahlbeton II:

Erläuterungen siehe Folie.



# Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (1)

Bei der Behandlung von vorgespannten Tragwerken ist die Systemabgrenzung von zentraler Bedeutung. Dabei sind grundsätzlich zwei Betrachtungsweisen möglich, die zum gleichen Resultat führen.

Jede davon hat ihre Vor- und Nachteile, und je nach Fragestellung ist die eine oder andere Betrachtungsweise besser geeignet.

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil (Stahlbetonquerschnitt inkl. Spannglied)

Die Vorspannung bewirkt in den Querschnitten einen Eigenspannungszustand: Die Zugkraft im Spannglied ist mit den (Druck-)Kräften im Stahlbetonquerschnitt im Gleichgewicht. Der Eigenspannungszustand entspricht Dehnungen und Krümmungen → Tragwerksverformungen.

Bei statisch unbestimmt gelagerten Trägern sind diese Tragwerksverformungen im Allgemeinen nicht mit der Lagerung verträglich. Daher resultieren Reaktionen und Schnittgrößen. Diese werden als Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}(P)$ ,  $V_{ps}(P)$ ,  $N_{ps}(P)$  bezeichnet (s: «Sekundärschnittgrößen»).

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil (Stahlbetonquerschnitt allein)

Die Vorspannung entspricht Anker-, Umlenk- und Reibungskräften, die auf das vom Spannglied befreite Tragwerk wirken. Aus dieser Belastung resultieren die sogenannten Schnittgrößen infolge Vorspannung  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  und (mit der Lagerung verträgliche) Tragwerksverformungen.

Die auf das gesamte Tragwerk wirkenden Zwangsschnittgrößen werden durch die Ermittlung der Schnittgrößen aus den Anker-, Umlenk- und Reibungskräften direkt erfasst und sind somit in den Schnittgrößen infolge Vorspannung enthalten.

Wiederholung aus Stahlbeton II:

Erläuterungen siehe Folie.

# Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (2)

**Gesamtes Tragwerk / Bauteil**  
(Stahlbetonquerschnitt inkl. Spannglied)

Am Gesamtquerschnitt wirken folgende Schnittgrößen:

$$\begin{aligned} M &= M_{g,q} + M_{ps} \\ V &= V_{g,q} + V_{ps} \\ N &= N_{g,q} + N_{ps} \end{aligned}$$

**Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil**  
(Stahlbetonquerschnitt allein)

Am vom Spannglied befreiten Querschnitt wirken folgende Schnittgrößen:

$$\begin{aligned} M_c &= M_{g,q} + M_c(P) &= M_{g,q} + M_{ps} - P \cos \beta_p \cdot e \\ V_c &= V_{g,q} + V_c(P) &= V_{g,q} + V_{ps} - P \sin \beta_p \\ N_c &= N_{g,q} + N_c(P) &= N_{g,q} + N_{ps} - P \cos \beta_p \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -P \cos \beta_p \cdot e \approx -P \cdot e \\ -P \sin \beta_p \\ -P \cos \beta_p \approx -P \end{array} \right\}$$

Unterschied: Auf vom Spannglied befreites Tragwerk wirkender Teil des Eigenspannungszustands infolge Vorspannung

In den Einwirkungen sind somit nur die Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}(P)$ ,  $V_{ps}(P)$ ,  $N_{ps}(P)$  enthalten.

Neben der Bezeichnung Vorspannung als Eigenspannungszustand wird diese Betrachtung daher auch Vorspannung auf der Widerstandsseite genannt

In den Einwirkungen sind somit die gesamten Schnittgrößen infolge Vorspannung  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  enthalten.

Neben der Bezeichnung Vorspannung als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte wird diese Betrachtung daher auch Vorspannung auf der Lastseite genannt.

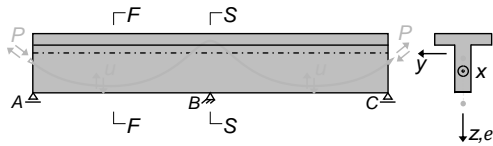
Wiederholung aus Stahlbeton II:

Erläuterungen siehe Folie.

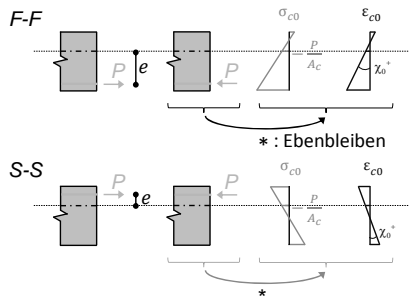
# Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (3)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

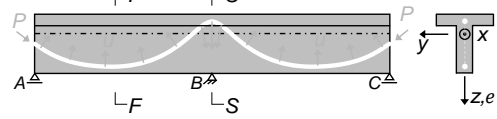


Eigenspannungszustand in Querschnitten:

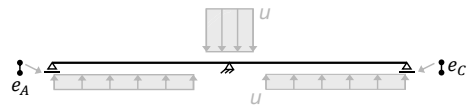


N.B.  $\sigma_{c0}(-P, -P \cdot e) \neq \text{eff. } \sigma_c$ , Anteil  $M_{ps}$  fehlt hier.

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil



Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte:



21.11.2016

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton III

11

## Wiederholung aus Stahlbeton II:

Auf dieser und den folgenden Folien werden die beiden Betrachtungsweisen am Beispiel eines symmetrischen Zweifeldträgers mit parabolischer Spanngliedführung illustriert und miteinander verglichen.

### Ergänzende Bemerkungen:

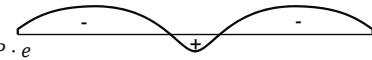
- Im Beispiel ist vorausgesetzt, dass sich der Träger in Längsrichtung unbehindert verkürzen kann. Könnte er dies nicht, würden Zwangsnormalkräfte resultieren (Zugbeanspruchung). Dies ist bei vorgespannten Decken oft der Fall (siehe Stahlbeton III), ebenso bei integralen Brücken (Brücken ohne Fahrbahnübergänge und Lager).
- Während Zwangsmomente infolge Vorspannung analog wie andere Zwangsmomente zumindest bei duktilen Tragwerken ( $x/d < 0.35$ ) umgelagert werden können, sind allfällige Zwangsnormalkräfte beim Nachweis der Tragsicherheit zu berücksichtigen (für übliche Verhältnisse sind die mit einem Biegeversagen einhergehenden Verlängerungen des Trägers – da sie nur lokal in einem plastischen Gelenk stattfinden – nicht ausreichend, um die Zwangsnormalkräfte signifikant abzubauen).

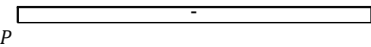
# Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (4)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

Schnittgrößen infolge Eigenspannungszustand  
(auf vom Spannglied befreites Tragwerk wirkender Teil des  
Eigenspannungszustands):

$$M_0 = P \cdot e$$


$$N_0 = -P$$


Verformungen infolge Eigenspannungszustand:

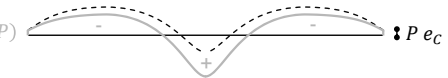
$$\chi_0 = \frac{M_0}{EI} = \frac{P \cdot e}{EI}, \quad \varepsilon_0 = \frac{N_0}{EA} = -\frac{P}{EA}$$

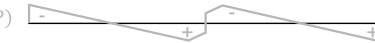
Durch Integration von  $\chi_0$  und  $\varepsilon_0 \rightarrow$  Verformungen, i.A. nicht  
mit Lagerung verträglich!


$\rightarrow$  Zwangsschnittgrößen

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

Schnittgrößen infolge Vorspannung:

$$M_c(P)$$


$$V_c(P)$$


$$N_c(P) = -P$$


Annahmen:  $P \cos \alpha \approx P$

Verkürzung unbehindert, sonst wäre  $|N_c(P)| < P$

Wiederholung aus Stahlbeton II:

Erläuterungen siehe Folie.

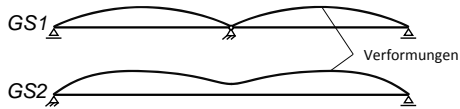
# Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (5)

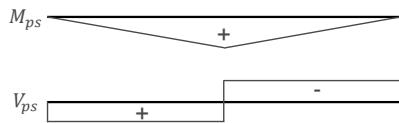
### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

Zwangsschnittgrößen («Sekundärmomente») zur Gewährleistung der Verträglichkeit:

Behandlung analog Temperaturzwang → Kraftmethode; mögliche Grundsysteme z. Bsp:

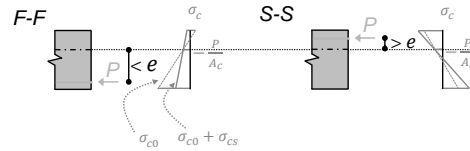


Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}$ ,  $V_{ps}$  (und  $N_{ps}$  falls Verkürzung behindert ist):



### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

Spannungen an Querschnitten infolge  $M_c(P)$ ,  $N_c(P)$ :



Wiederholung aus Stahlbeton II:

Erläuterungen siehe Folie.

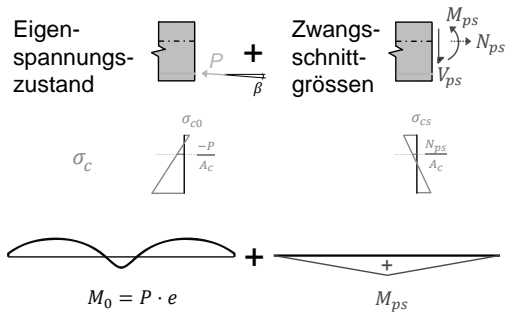
*Ergänzende Bemerkung:*

- Zwangsmomente sind stets zusammen mit den zugehörigen Zwangsquerkräften einzuführen.

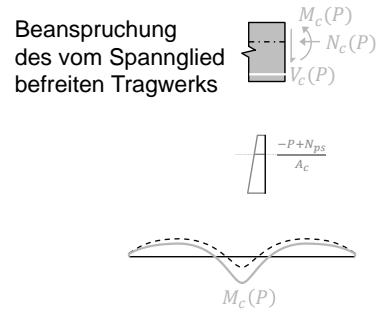
# Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (5)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil



### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil



$$\begin{aligned}
 M_c(P) &= -P \cdot e + M_{ps} \\
 V_c(P) &= -P \sin \beta_p + V_{ps} \\
 N_c(P) &= -P + N_{ps}
 \end{aligned}$$

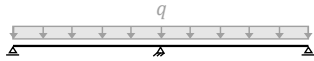
Wiederholung aus Stahlbeton II:

Erläuterungen siehe Folie.

# Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)

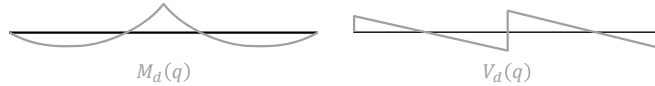
## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (6)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil



### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

Weitere Einwirkung, z.B. verteilte Belastung:



$$\begin{array}{c}
 M_{ps} \\
 \curvearrowright \\
 M_d(q) \equiv \left\{ \begin{array}{l} A_p f_{pd} + A_s f_{sd} \\ A_p f_{pd} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} M_d(q) + M_{ps} \\ N_d(q) + N_{ps} (=0) \end{array} \right\}
 \end{array}$$

- Infolge Vorspannung nur  $M_{ps}$  und  $N_{ps}$
- $N_{ps} = 0$  bei unbehinderter Verkürzung,  $N(q)$  oft 0
- einfacher Nachweis für reine Biegung!
- "Vorspannung auf der Widerstandsseite"

### Biegetragsicherheit

$$\begin{array}{c}
 M_{ps} \\
 \curvearrowright \\
 M_d(q) \equiv \left\{ \begin{array}{l} A_p f_{pd} + A_s f_{sd} \\ A_p (f_{pd} - \sigma_{p0}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} M_d(q) + M_{ps} - P \cdot e \\ N_d(q) + N_{ps} - P \end{array} \right\} \\
 P = A_p \sigma_{p0}
 \end{array}$$

- zusätzlich  $-P \cdot e$ ,  $-P$  wirksam
- auch bei  $N_{ps} = N(q) = 0$  Biegung mit Normalkraft
- umständlicherer Nachweis
- "Vorspannung auf der Lastseite"

## Wiederholung aus Stahlbeton II:

Die Folie illustriert den Nachweis der Biegetragsicherheit für die beiden Betrachtungsweisen.

Bei der Betrachtung der Vorspannung auf der Widerstandsseite ist ein einfacher Nachweis möglich (unter der in der Regel erfüllten Annahme, dass das Biegeversagen durch Betonbruch während des Fließens der schlaffen und der vorgespannten Bewehrung eintritt).

Bei der Betrachtung der Vorspannung auf der Lastseite ist ein Nachweis für Biegung mit Normalkraft erforderlich, und in der Vorspannung darf maximal der Spannkraftzuwachs berücksichtigt werden.

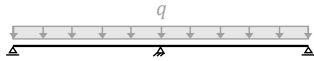
### Ergänzende Bemerkung:

- Zwangsmomente (und zugehörige Zwangsquerkräfte) können beim Nachweis der Biegetragsicherheit grundsätzlich umgelagert, d.h. mit einem beliebigen – für das gesamte Tragwerk aber gleichen – Faktor multipliziert werden. In der Regel werden sie mit dem Faktor 1.0 berücksichtigt, da dies zu vernünftigen Verteilungen der Biege widerstände und einem befriedigenden Verhalten im Gebrauchszustand führt.

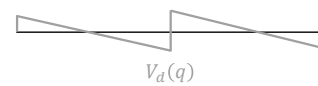
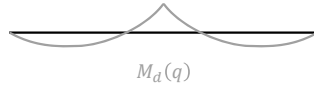
# Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (7)

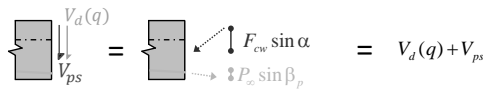
### Gesamtes Tragwerk / Bauteil



Weitere Einwirkung, z.B. verteilte Belastung:

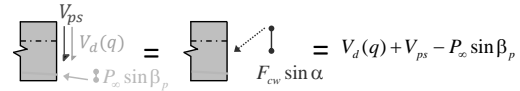


Querkrafttragsicherheit



Einwirkung:  $V_d = V_d(q) + V_{ps}$   
 Widerstand:  $V_{Rd} = V_{Rd,FW-Modell} + P_{\infty} \sin \beta_p$   
 $\rightarrow V_{Rd,FW-Modell} \geq V_d(q) + V_{ps} - P_{\infty} \sin \beta_p$

→ "Vorspannung auf der Widerstandsseite"



Einwirkung:  $V_d = V_d(q) + V_{ps} - P_{\infty} \sin \beta_p$   
 Widerstand:  $V_{Rd} = V_{Rd,FW-Modell}$   
 $\rightarrow V_{Rd,FW-Modell} \geq V_d(q) + V_{ps} - P_{\infty} \sin \beta_p$

→ einfacher, falls Vorspannung korrekt modelliert ist (Ermittlung von  $\beta_p$  im massg. Schnitt unnötig, sofern Gurtkräfte nicht untersucht werden)

→ "Vorspannung auf der Lastseite"

## Wiederholung aus Stahlbeton II:

Die Folie illustriert den Nachweis der Querkrafttragsicherheit für die beiden Betrachtungsweisen.

Bei der Betrachtung der Vorspannung auf der Widerstandsseite darf die günstige Wirkung der geneigten Vorspannkraft (Vertikalkomponente) berücksichtigt werden, wozu die Neigung des Spannglieds im massgebenden Schnitt ermittelt werden muss.

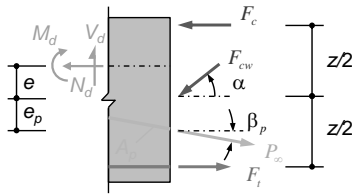
Bei der Betrachtung der Vorspannung auf der Lastseite ist die günstige Wirkung der geneigten Vorspannkraft bereits in der Beanspruchung berücksichtigt.

In beiden Fällen darf die günstige Wirkung der geneigten Vorspannkraft maximal mit dem Langzeitwert der Spannkraft (nach Abzug von Reibungs- und Langzeitverlusten) angesetzt werden.



## Querkrafttragsicherheit

«Querschnittswiderstand» gemäss SIA 262:



Ausser der diagonalen Druckkraft  $F_{cw}$  und den Kräften im Druck- und Zuggurt  $F_c$  bzw.  $F_t$  wirkt die geneigte Spannkraft  $P_\infty$  (Vorspannung auf Widerstandsseite).

Die Neigung der Druckgurtkraft (siehe Stahlbeton II, Analyse benachbarter Querschnitte) wird auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt.

Es resultieren analoge Beziehungen wie für schlaff bewehrte Träger, erweitert um Terme infolge Vorspannung.

$$\Sigma F_V: F_{cw} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{\sin \alpha}$$

$$\Sigma M_T: F_c = \frac{M_d}{z} - N_d \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e}{z} \right) + P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e_p}{z} \right) - \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha$$

$$\Sigma M_C: F_t = \frac{M_d}{z} + N_d \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{e}{z} \right) - P_\infty \cos \beta_p \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{e_p}{z} \right) + \frac{V_d - P_\infty \sin \beta_p}{2} \cdot \cot \alpha$$

Erforderlicher Widerstand der Bügel:

$$V_{Rd,s,erf} = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{z \cdot \cot \alpha}$$

Betondruckspannungen:

$$\sigma_c = \frac{V_d - P_\infty \cdot \sin \beta_p}{b_{w,nom} \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

Wiederholung aus Stahlbeton II:

Nachweis der Querkrafttragsicherheit nach SIA 262.

# Vorspannung von Stabtragwerken (SB II)

## Behandlung der Vorspannung / Systemabgrenzung (8)

### Gesamtes Tragwerk / Bauteil

(Stahlbetonquerschnitt inkl. Spannglied)

Diese Betrachtung eignet sich gut für folgende Fragestellungen (primär Tragsicherheit):

- **Nachweis der (Biege-)Tragsicherheit**  
Da durch die Vordehnung des Spannstahls gewährleistet ist, dass er Fließgrenze in der Regel erreicht, kann der Biegewiderstand sehr einfach ermittelt werden.

Dabei ist es sinnvoll, bei den Einwirkungen die Zwangsschnittgrößen  $M_{ps}(P)$ ,  $N_{ps}(P)$ ,  $V_{ps}(P)$  zu berücksichtigen (mit  $P_0$  oder  $P_\infty$ ) (auch wenn dies im Sinne einer plastischen Schnittkraftumlagerung nicht zwingend ist):

$$M_{Rd} = A_p f_{pd} \left( d_p - \frac{0.85x}{2} \right) + A_s f_{sd} \left( d_s - \frac{0.85x}{2} \right)$$

$$M_{Ed} = \gamma_G \cdot M(g_k) + \gamma_Q \cdot M(q_k) + M_{ps}$$

Für innerlich hochgradig statisch unbestimmte Tragwerke (Flächentragwerke) ist diese Betrachtung ungeeignet (Ermittlung des Eigenspannungszustands nicht eindeutig)

### Vom Spannglied befreites Tragwerk / Bauteil

(Stahlbetonquerschnitt allein)

Diese Betrachtung eignet sich gut für folgende Fragestellungen (primär Gebrauchszustand):

- **Spannungsnachweise am Querschnitt**  
Es kann eine normale Spannungsberechnung (ohne Vordehnungen) am Stahlbetonquerschnitt unter den Einwirkungen inkl.  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  geführt werden
- **Durchbiegungsberechnungen (inkl. Kriechen)**  
Einwirkungen inkl.  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  relevant
- **Nachweis der Querkraft (Tragsicherheit)**  
Da der Spannkraftzuwachs vernachlässigt wird, beträgt der Widerstand der Vorspannung  $V_c(P_\infty)$  (= in  $V_c(P)$  aus Statikprogramm enthalten wenn Vorspannung entsprechend modelliert ist)

NB: Wird der Nachweis der Biegetragsicherheit mit den Einwirkungen inkl.  $M_c(P)$ ,  $V_c(P)$ ,  $N_c(P)$  geführt, darf im Biegewiderstand nur der Spannkraftzuwachs ( $f_{pd} - \sigma_p$ ) berücksichtigt werden, nicht  $f_{pd}$  (Vorspannung nicht 2x ansetzen)

Wiederholung aus Stahlbeton II:

Zusammenfassender Vergleich der beiden Betrachtungsweisen.

# **4 Vorspannung von Flächentragwerken**

Ergänzung zu Stahlbeton II (Vorspannung)

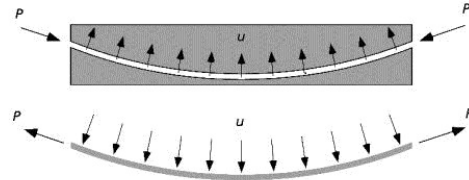
## 4.2 Besonderheiten bei Flächentragwerken

# Vorspannung von Flächentragwerken

## Berücksichtigung der Vorspannung bei Flächentragwerken

Die Behandlung der Vorspannung als Eigenspannungszustand im Gesamtsystem scheitert bei scheibenförmigen oder räumlichen Tragwerken in der Regel daran, dass die Ermittlung des Eigenspannungszustands aus Vorspannung nicht eindeutig möglich ist (innere statische Unbestimmtheit, unbekannte Ausbreitung der Druckkraft, Bezugsquerschnitt unklar etc.).

Die Behandlung der Vorspannung als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte auf das Teilsystem «Stahlbetontragwerk ohne Vorspannung» ist dagegen problemlos möglich. Damit kann der Kraftfluss anschaulich untersucht werden (Spannungsfelder, Fachwerkmodelle).



In der Praxis werden die Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte meist aufgrund der Vorspannkraft ohne Spannkraftzuwachs ermittelt. Der Spannkraftzuwachs im Bruchzustand kann mit geeigneten Betrachtungen (u.a. Spannungsfelder) untersucht werden, der Aufwand lohnt sich aber oft nicht (kleiner Einfluss, da die initiale Vorspannung  $0.7 \cdot f_{pk}$  nur wenig (ca. 3-7%) tiefer ist als der Bemessungswert der Fließgrenze  $f_{p0,1k}/1.15$ ). Wichtiger ist die Abschätzung des Einflusses der Langzeitverluste auf die Spannkraft.

Erläuterungen siehe Folie.

### *Ergänzende Bemerkung:*

- Die Betrachtung der Vorspannung als Anker- und Umlenkkräfte eignet sich hervorragend zur Bemessung resp. Überprüfung von Tragwerken mittels Fachwerkmodellen und Spannungsfeldern.

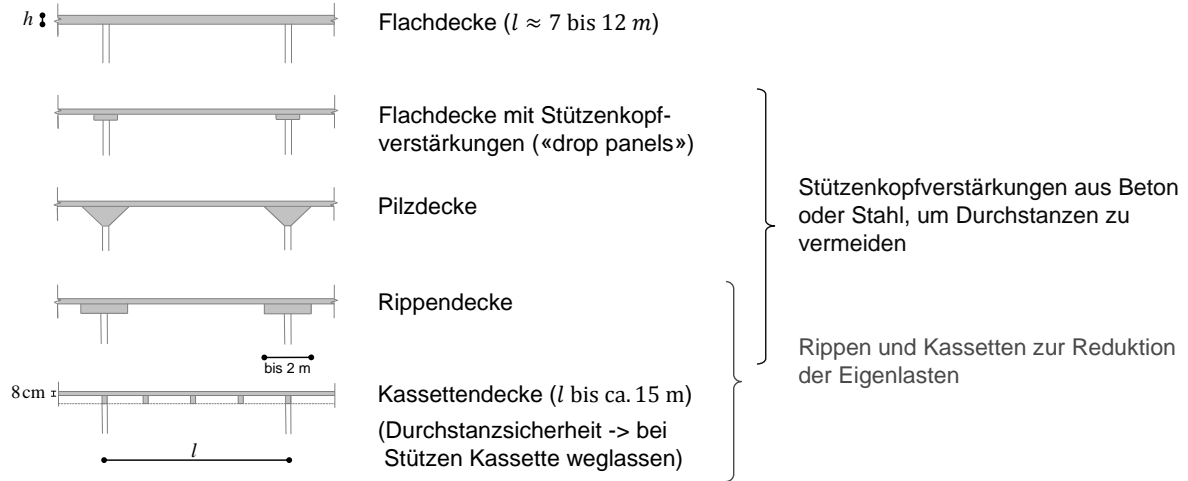


# Vorspannung von Flächentragwerken

## Vorgespannte Flachdecken ([1], Seite 7.30f)

Weitgespannte Decken im Hochbau werden sinnvollerweise vorgespannt (mit/ohne Verbund).

Bauformen



Ein klassisches Anwendungsbeispiel der Vorspannung bei Flächentragwerken sind vorgespannte Flachdecken.

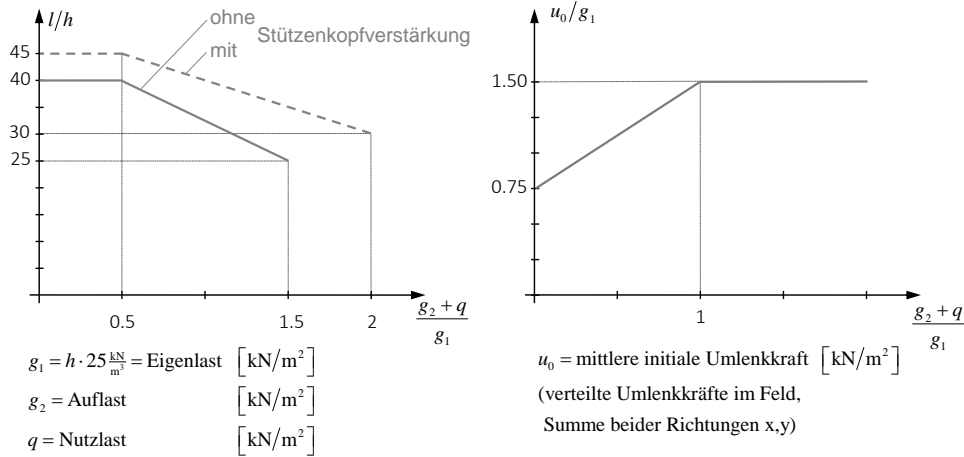
Auf den folgenden Folien wird illustriert, wie die Vorspannung bei solchen Tragwerken ausgelegt werden kann.

# Vorspannung von Flächentragwerken

## Vorgespannte Flachdecken ([1], Seite 7.30f)

### Deckenstärken und Umlenkkräfte

Empfehlung für Schlankheit und initiale Umlenkkräfte vorgespannter Flachdecken:



21.11.2016

ETH Zürich | Prof. Dr. W. Kaufmann | Vorlesung Stahlbeton III

23

Die Folie zeigt den Bereich sinnvoller Schlankheiten (Wahl der Deckenstärke resp. Spannweite) und die sinnvolle Grösse der Umlenkkräfte in Abhängigkeit der Einwirkungen (Verhältnis der Auf- und Nutzlasten zum Eigengewicht).

Es handelt sich dabei um Anhaltswerte, welche im konkreten Fall zu verifizieren sind. Konkret sind die Nachweise der Tragsicherheit (Biegung, Durchstanzen) und der Gebrauchstauglichkeit (Durchbiegungen, Schwingungen) zu erbringen.

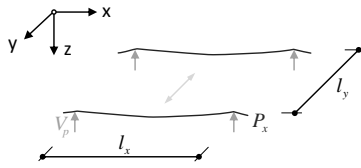
### Ergänzende Bemerkungen:

- In den letzten Jahren gab es auch in der Schweiz verschiedentlich Schadenfälle, da Decken zu schlank ausgeführt wurden. Zwar kann mit sehr schlanken Decken die Tragsicherheit gewährleistet werden, die Durchbiegungen werden jedoch ab einer gewissen Schlankheit unzulässig gross.
- Mit einer Vorspannung können zwar die Durchbiegungen infolge ständiger Lasten (teilweise) kompensiert werden, nicht jedoch die Durchbiegungen infolge veränderlicher Lasten. Zudem sind vorgespannte Decken, da sie im Gebrauchszustand ungerissen sind, schwingungsanfälliger. Dennoch ist die Vorspannung von Decken oft sinnvoll, es muss einfach neben der Tragsicherheit auch das Gebrauchsverhalten bei der Dimensionierung berücksichtigt werden.
- Schäden können auch resultieren, wenn dicke Decken monolithisch mit dünnen Stützen verbunden werden. Insbesondere in solchen Fällen sind die Biegebeanspruchungen, welche die Stützen infolge der Rotation der Deckenplatte namentlich bei Rand- und Eckstützen erfahren, zu beachten.

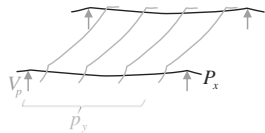
# Vorspannung von Flächentragwerken

## Vorgespannte Flachdecken ([1], Seite 7.30f)

Vorspannkonzepete – mögliche Spanngliedarrordnungen

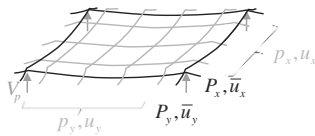


Stützstreifenvorspannung in x-Richtung ( $P_x, \bar{u}_x$ ) und schlaife Bewehrung in y-Richtung



Stützstreifenvorspannung in x-Richtung ( $P_x, \bar{u}_x$ ) und verteilte Vorspannung in y-Richtung ( $p_y, u_y$ )

Aus Gleichgewicht ist  $\bar{u}_x = l_y \cdot u_y$



Stützstreifenvorspannung in x- und y-Richtung ( $P_x, P_y$ ) sowie verteilte Vorspannung in x- und y-Richtung ( $p_x, p_y$ )

Aus Gleichgewicht ist  $\bar{u}_x = l_y \cdot u_y$ ,  $\bar{u}_y = l_x \cdot u_x$

Die Folie zeigt verschiedene Konzepte zur Auslegung der Vorspannung. Je nach spezifischen Verhältnissen ist die eine oder andere Lösung besser geeignet.

Schlaife Bewehrung und Vorspannung zusammen müssen in jedem Fall die gesamte Belastung sowohl in x- als auch in y-Richtung abtragen.



## Vorspannung von Flächentragwerken

Vorgespannte Flachdecken ([1], Seite 7.30f)

Vorspannkonzepte – Umlenk- und Spannkkräfte

Annahme: Stützstreifenspannglieder und verteilte Spannglieder in beide Richtungen, mit der gleichen Pfeilhöhen pro Richtung:  $f_x, f_y$ .

Umlenkkräfte im Feld:  $u_x = \frac{8P_x f_x}{l_x^2}, \quad u_y = \frac{8P_y f_y}{l_y^2}, \quad u_0 = u_x + u_y$

Umlenkkräfte in Stützenachsen:  $\bar{u}_x = \frac{8P_x f_x}{l_x^2} = u_y l_y, \quad \bar{u}_y = \frac{8P_y f_y}{l_y^2} = u_x l_x$

Totale Spannkkräfte:  $P_x + p_x l_y = \frac{u_0 l_x l_y}{8f_x}, \quad P_y + p_y l_x = \frac{u_0 l_y l_x}{8f_y}$

Auf Stützen übertragene Umlenkkraft:  $V_p = \frac{8P_x f_x}{l_x} + \frac{8P_y f_y}{l_y} = u_0 l_x l_y$

Der Anteil der Stützstreifenspannkraft kann in einer Richtung zwischen 0 und 100% frei gewählt werden, woraus die übrigen Anteile folgen (z.B. 60% Stützstreifenvorspannung in x-Richtung → 40% Feldvorspannung in x-Richtung, 60% Feldvorspannung in y-Richtung und 40% Stützstreifenvorspannung in y-Richtung)

Die Folie illustriert die Wahl der Vorspannkkräfte für den auf der vorhergehenden Folie dargestellten Fall einer Stützstreifenvorspannung sowie einer verteilten Vorspannung, jeweils in beiden Richtungen.

Auch hier muss selbstverständlich die gesamte Belastung durch die Stützstreifenvorspannung und die verteilte Vorspannung (sowie eine allfällige, nicht dargestellte schlaaffe Bewehrung) sowohl in x- als auch in y-Richtung abtragen werden.