

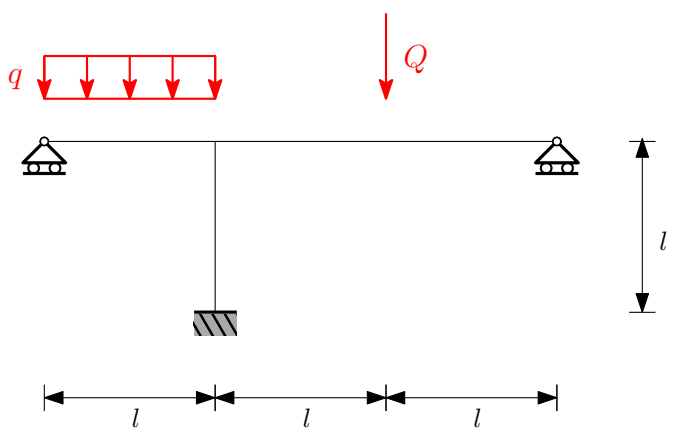
# BAUSTATIK II

## HAUSÜBUNG #4

**Kapitel:** Verformungsmethode  
**Thema:** Verschiebliche Systeme

**Aufgabe 1.**

Gegeben: System ( $EI = const$ ) und Einwirkungen mit  $Q = ql/6$ .  
 Gesucht: Schnittgrössendiagramme (M,V,N) mittels Drehwinkelverfahren



**Lösungsweg**

1. Kinematische Freiheitsgrade  
 Obwol das System verschieblich ist, nur Stab 1 – 2 untergeht eine Stabrotation. Im unterstehenden Mechanismus ist es ersichtlich, dass Stäbe 2 – 3 und 2 – 4 sich translatorisch verschieben. Als Knotendrehwinkel muss nur  $\varphi_2$  berücksichtigt werden, da die Knotendrehwinkeln an den Systemenden (Punkte 1, 3, 4) entweder gegeben oder überflüssig sind.



## 2. Festeinspannmomente

$$M_{23}^0 = -\frac{ql^2}{8}$$

$$M_{24}^0 = \frac{3Q(2l)}{16} = \frac{3ql(2l)}{16 \cdot 6} = \frac{ql^2}{16} \quad (1)$$

## 3. Steifigkeiten

$$s_{12} = s_{21} = \frac{4EI}{l}$$

$$t_{12} = t_{21} = \frac{2EI}{l}$$

$$s_{23} = \frac{3EI}{l}$$

$$s_{24} = \frac{3EI}{2l}$$

$$t_{23} = t_{32} = s_{32} = 0$$

$$t_{24} = t_{42} = s_{42} = 0 \quad (2)$$

## 4. Stabendmomente

$$M_{ij} = M_{ij}^0 + \varphi_i s_{ij} + \varphi_j t_{ij} - \psi_{ij}(s_{ij} + t_{ij})$$

$$M_{12} = 0 + 0 + \varphi_2 \frac{2EI}{l} - \psi \frac{6EI}{l}$$

$$M_{21} = 0 + \varphi_2 \frac{4EI}{l} + 0 - \psi \frac{6EI}{l} \quad (3)$$

$$M_{23} = -\frac{ql^2}{8} + \varphi_2 \frac{3EI}{l} + 0 - 0$$

$$M_{24} = \frac{ql^2}{16} + \varphi_2 \frac{3EI}{2l} + 0 - 0$$

## 5. Momentengleichgewicht

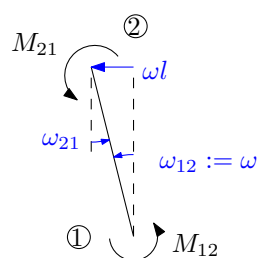
$$\sum_{i=1,3,4} M_{2i} = 0 \iff$$

$$\left[ \varphi_2 \left( 4 + 3 + \frac{3}{2} \right) - 6\psi \right] \frac{EI}{l} + \left( -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) ql^2 = 0 \iff \quad (4)$$

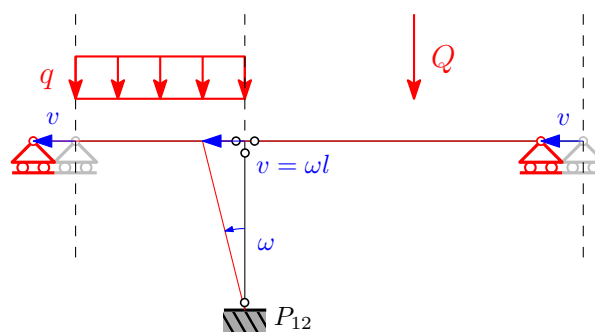
$$\left( \frac{17}{2} \varphi_2 - 6\psi \right) \frac{EI}{l} = \frac{ql^2}{16}$$

## 6. Verschiebegleichgewicht

Interne Arbeit:



Externe Arbeit:



Die angebrachte Lasten leisten keine Arbeit bezüglich der virtuellen Verdrehungen  $\omega_{ij}$  (und somit auch bezüglich der Stabrotationen  $\psi_{ij}$ ), da sie zu den entsprechenden virtuellen Verschiebungen senkrecht wirken:

$$q, Q \perp v \rightarrow W_e = 0 \quad (5)$$

Die interne Arbeit der Stabrotationen ist Null für die Stäbe, denen virtuellen Verschiebungen translatorisch sind. Deswegen sind nur die Stabendmomente  $M_{12}, M_{21}$  mit den entsprechenden virtuellen Verdrehungen  $\omega_{12}, \omega_{21} = \omega$  zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} W_i &= \sum_{ij} \omega_{ij} M_{ij} \\ &= (M_{21} + M_{12})\omega \iff \\ \frac{W_i}{\omega} &= (6\varphi_2 - 12\psi) \frac{EI}{l} \end{aligned} \quad (6)$$

PdVA:

$$\begin{aligned} W_e + W_i &= 0 \iff \\ (6\varphi_2 - 12\psi) \frac{EI}{l} &= 0 \iff \\ \psi &= \frac{\varphi_2}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

## 7. Gleichungssystem und Lösung

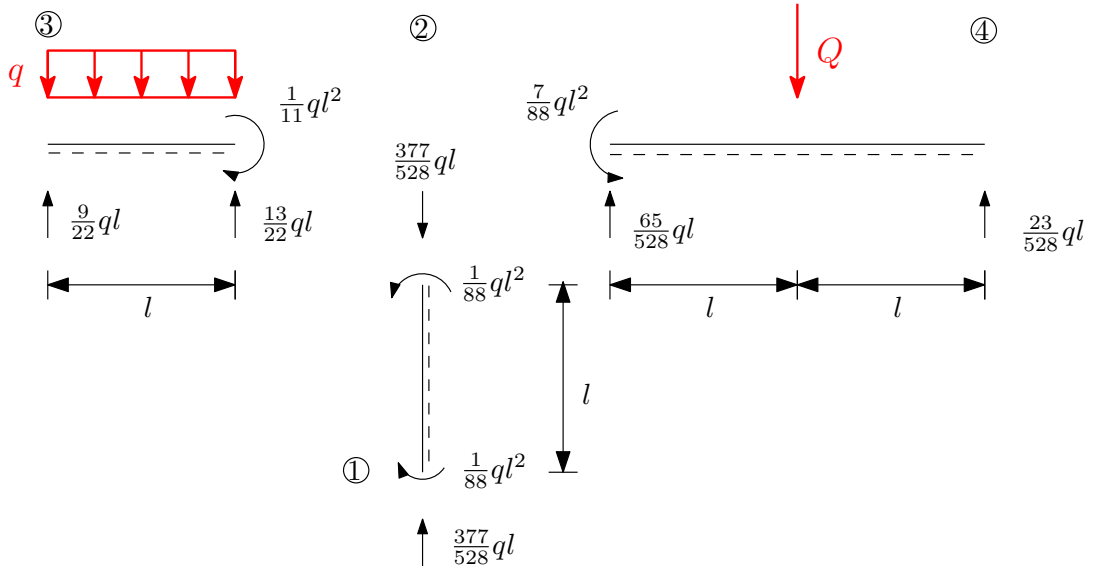
Aus Kombinieren von Gleichungen 4 und 7 ergibt sich:

$$\varphi_2 = \frac{ql^3}{88EI}; \quad \psi = \frac{ql^3}{176EI} \quad (8)$$

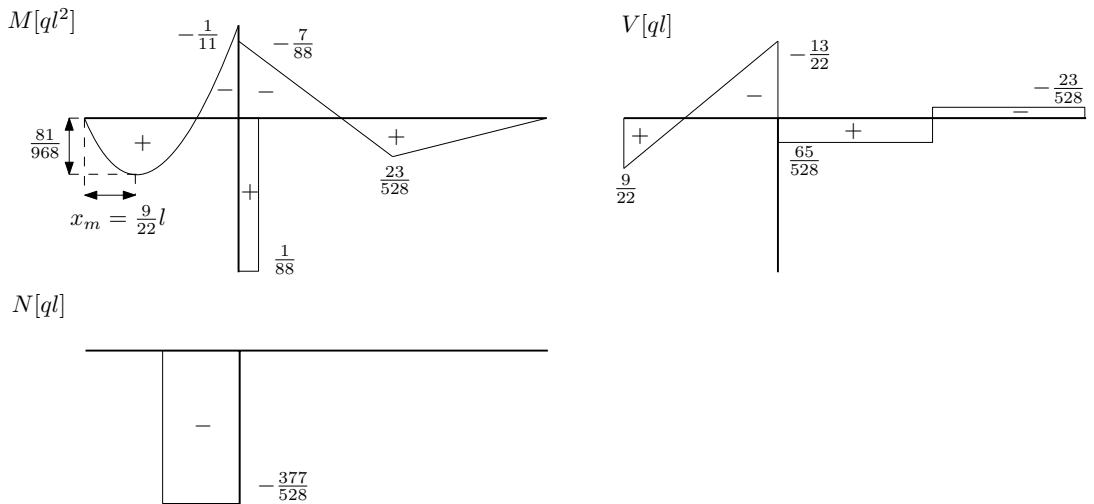
8. Definitive Stabendmomente

Moment gem. VZK II [ $ql^2$ ] $M_{12} = -\frac{1}{88}$ $M_{21} = \frac{1}{88}$ $M_{23} = -\frac{1}{11}$ $M_{24} = \frac{7}{88}$	Umwandlung zur VZK I (-1)  (-1)	(9)
---	--	-----

9. Schnittkörperdiagramme



10. Schnittkräfte

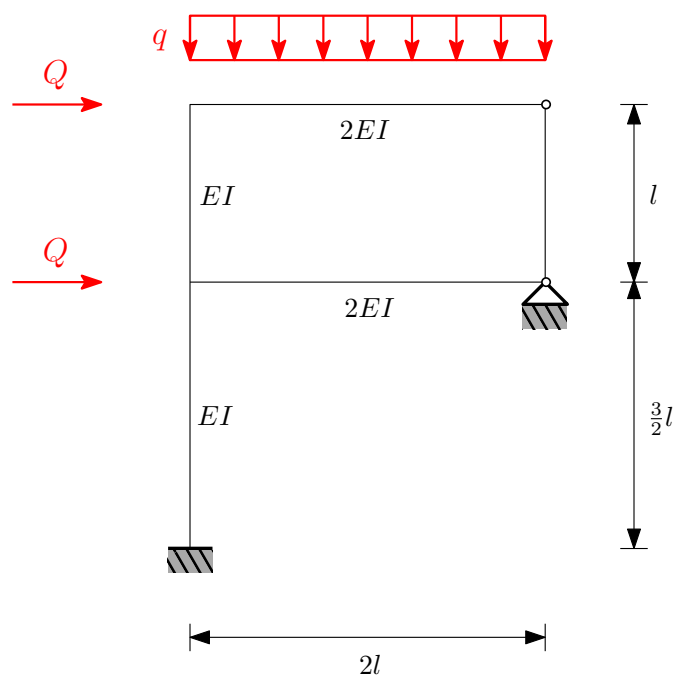


◇

**Aufgabe 2.**

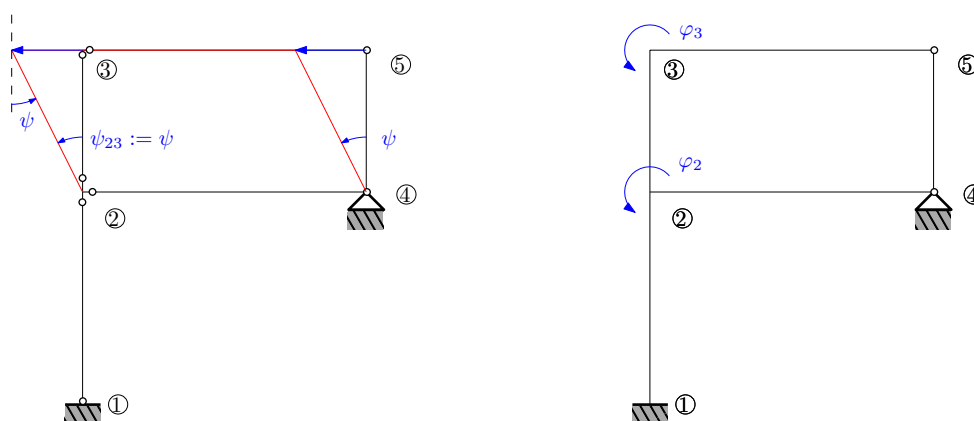
Gegeben: System und Einwirkungen,  $Q = 2ql$ .

Gesucht: Schnittgrössendiagramme (M,V,N) mittels Drehwinkelverfahren

**Lösungsweg**

## 1. Kinematische Freiheitsgrade

Obwohl das System verschieblich ist, nur die Stäbe 2-3 und 4-5 untergehen Stabrotationen. Im unterstehenden Mechanismus ist es ersichtlich, dass Stab 3-5 macht eine Translation und die verbleibende Stäbe können horizontale kräfte im Auflager 4 einleiten. Als knotendrehwinkeln werden  $\varphi_2, \varphi_3$  berücksichtigt. Verdrehungen an den knoten 4 und 5 sind für die Lösung des Systems nicht notwendig, da die Biegemomente and diese Gelenke verschwinden.



## 2. Festeinspannmomente

$$M_{35}^0 = \frac{q(2l)^2}{8}l = \frac{ql^2}{2} \quad (10)$$

## 3. Steifigkeiten

$$\begin{aligned} s_{12} = s_{21} &= \frac{4EI}{\frac{3}{2}l} = \frac{8EI}{3l} \\ t_{12} = t_{21} &= \frac{4EI}{3l} \\ s_{23} = s_{32} &= \frac{4EI}{l} \\ t_{23} = t_{32} &= \frac{2EI}{l} \\ s_{24} = s_{35} &= \frac{3(2EI)}{2l} = \frac{3EI}{l} \\ t_{42} = t_{53} = s_{42} = s_{53} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

## 4. Stabendmomente

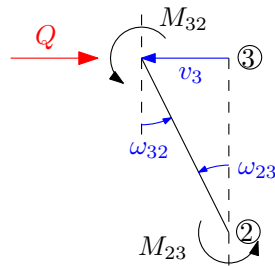
$$\begin{aligned} M_{ij} &= M_{ij}^0 + \varphi_i s_{ij} + \varphi_j t_{ij} - \psi_{ij}(s_{ij} + t_{ij}) \\ M_{12} &= 0 + 0 + \varphi_2 \frac{4EI}{3l} - 0 \\ M_{21} &= 0 + \varphi_2 \frac{8EI}{3l} + 0 - 0 \\ M_{23} &= 0 + \varphi_2 \frac{4EI}{l} + \varphi_3 \frac{2EI}{l} - \psi \frac{6EI}{l} \\ M_{24} &= 0 + \varphi_2 \frac{3EI}{l} + 0 - 0 \\ M_{32} &= 0 + \varphi_3 \frac{4EI}{l} + \varphi_2 \frac{2EI}{l} - \psi \frac{6EI}{l} \\ M_{35} &= \frac{ql^2}{2} + \varphi_3 \frac{3EI}{l} + 0 + 0 \end{aligned} \quad (12)$$

## 5. Momentengleichgewicht

$$\begin{aligned} \sum_i^{i=1,3,4} M_{2i} &= 0 \iff \\ \left[ \varphi_2 \left( \frac{8}{3} + 4 + 3 \right) + 2\varphi_3 - 6\psi \right] \frac{EI}{l} &= 0 \iff \\ \left( \frac{29}{3}\varphi_2 + 2\varphi_3 - 6\psi \right) \frac{EI}{l} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sum_i^{i=2,5} M_{3i} &= 0 \iff \\ (2\varphi_2 + 7\varphi_3 - 6\psi) \frac{EI}{l} &= -\frac{ql^2}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

## 6. Verschiebegleichgewicht



$$v_3 = \omega_{23}l = \omega l \quad (15)$$

Die externe Arbeit hat ein negatives Vorzeichen, da die virtuelle Verschiebung  $v_3$  entgegengesetzt der Kraft  $Q$  wirkt:

$$W_e = -v_3 \cdot Q = -\omega l \cdot 2ql = -2ql^2\omega \quad (16)$$

Die interne Arbeit ist Null für alle Stäbe, die keine Stabverdrehungen  $\psi_{ij}$  aufwiesen. Ausserdem leistet der Stab 4 – 5 auch keine Arbeit, da er nicht biegesteif an der Struktur angeschlossen ist (d.h.  $M_{45} = M_{54} = 0$ ). Somit sind nur die Stabendmomente  $M_{23}, M_{32}$  mit den entsprechenden virtuellen Verdrehungen  $\omega_{23}, \omega_{32} = \omega$  zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} W_i &= \sum_{ij} \omega_{ij} M_{ij} \\ &= (M_{23} + M_{32})\omega \\ &= [\varphi_2(4 + 2) + \varphi_3(2 + 4) - 12\psi] \frac{EI}{l} \omega \end{aligned} \quad (17)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{W_i}{\omega} = (6\varphi_2 + 6\varphi_3 - 12\psi) \frac{EI}{l}$$

PdVA:

$$W_e + W_i = 0 \Leftrightarrow (6\varphi_2 + 6\varphi_3 - 12\psi) \frac{EI}{l} = 2ql^2 \quad (18)$$

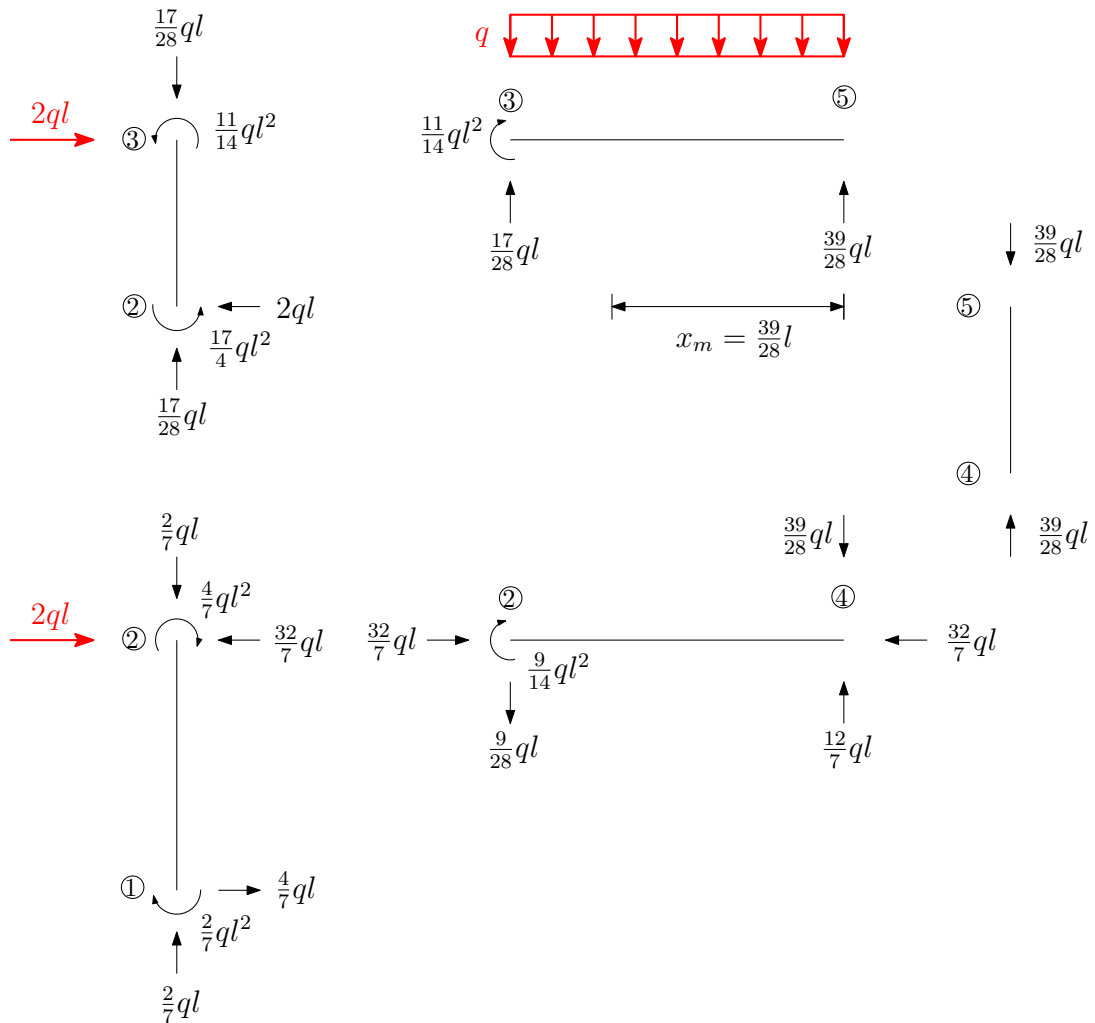
## 7. Gleichungssystem und Lösung

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{29}{3} & 2 & -6 \\ 2 & 7 & -6 \\ -6 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \psi \end{bmatrix} = ql^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \psi \end{bmatrix} = \frac{ql^3}{EI} \begin{bmatrix} -\frac{3}{14} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{41}{84} \end{bmatrix} = \frac{ql^3}{EI} \begin{bmatrix} -0.2143 \\ -0.4286 \\ -0.4881 \end{bmatrix} \quad (19)$$

8. Definitive Stabendmomente

Moment gem. VZK II [ $ql^2$ ]	Umwandlung zur VZK I	
$M_{12} = \frac{2}{7}$		(-1)
$M_{21} = \frac{4}{7}$		
$M_{23} = \frac{17}{14}$		(-1) (20)
$M_{24} = -\frac{9}{14}$		(-1)
$M_{32} = \frac{11}{14}$		
$M_{35} = -\frac{11}{14}$		(-1)

Schnittkörperdiagramme





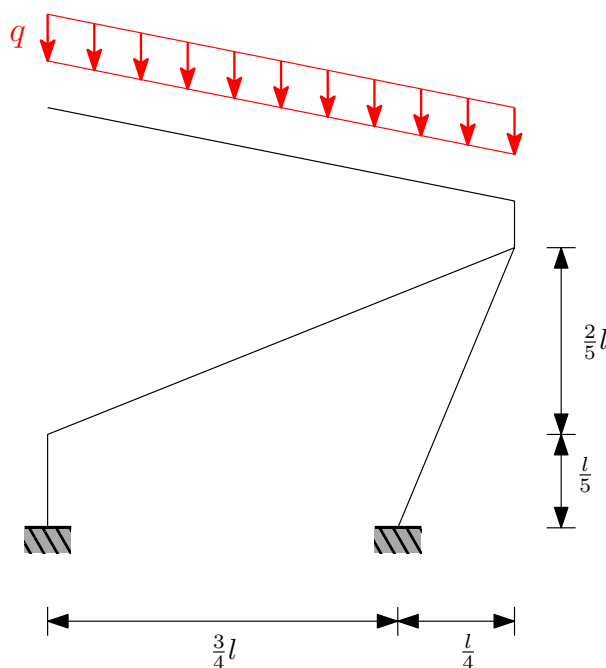


**Aufgabe 3.**

Aus [Marti, 2013, Kap. 17.4]

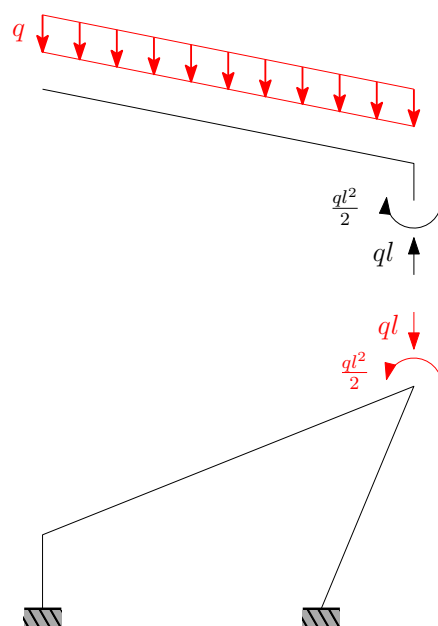
Gegeben: System ( $EI = \text{const}$ ) und Einwirkungen.

Gesucht: Schnittgrössendiagramme (M,V,N) mittels Drehwinkelverfahren

**Lösungsweg**

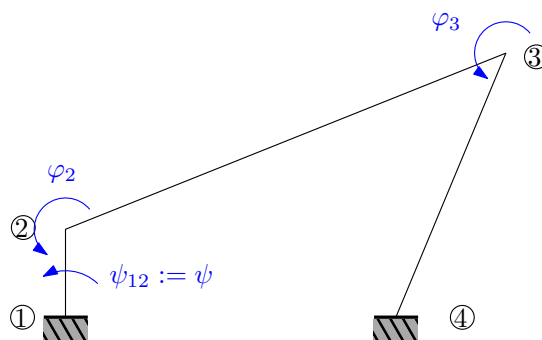
## 1. Statisch bestimmte Teilsysteme

Belastungen, die auf Statisch bestimmte Teilsysteme wirken, werden statisch äquivalent am statisch unbestimmten Teilsystem angebracht:



## 2. Kinematische Freiheitsgrade

Das System ist einfach verschieblich. Dies bedeutet, dass die Stabwinkeln  $\psi_{ij}$  zusätzlich zu den Knotendrehwinkeln  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  berücksichtigt werden müssen. Der Anzahl von unabhängigen Stabwinkeln ist gleich der Anzahl an Festhaltekräften (d.h. zusätzliche Reaktionskräfte), die notwendig wären um eines unverschieblichen System zu bekommen. Dann ergeben sich die kinematischen Abhängigkeiten für alle Stabwinkeln als Funktion der ausgewählten Unbekannten. Als unbekannter Stabdrehwinkel wird hier  $\psi_{12}$  gewählt:



## 3. Festeinspannmomente

Keine, da die Einwirkungen lediglich an Knoten angreifen.

## 4. Steifigkeiten

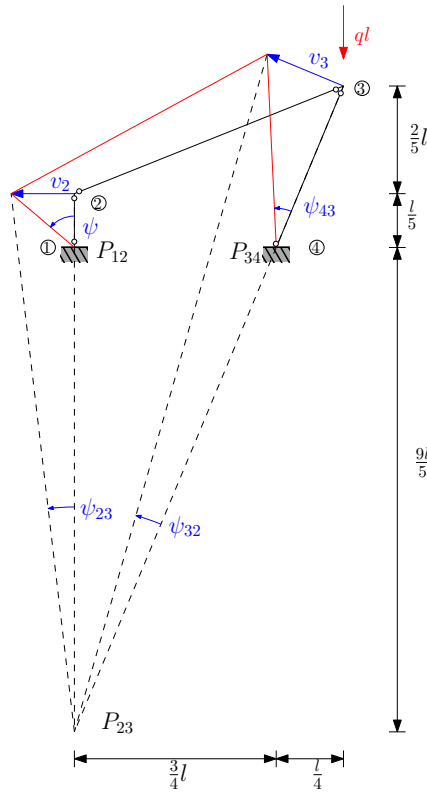
mit:

$$\begin{aligned}
 l_{12} &= \frac{l}{5} & s_{12} = s_{21} &= \frac{20EI}{l} \\
 l_{23} &= \frac{\sqrt{29}}{5}l & t_{21} = t_{12} &= \frac{10EI}{l} \\
 l_{34} &= \frac{13}{20}l & s_{23} = s_{32} &= \frac{20EI}{\sqrt{29}l} \\
 s_{ij} &= \frac{4EI}{l_{ij}} & t_{23} = t_{32} &= \frac{10EI}{\sqrt{29}l} \\
 t_{ij} &= \frac{2EI}{l_{ij}} & s_{34} = s_{43} &= \frac{80EI}{13l} \\
 & & t_{34} = t_{43} &= \frac{40EI}{13l}
 \end{aligned} \tag{21}$$

(22)

5. Kinematische Abhängigkeiten

Die Kinematische Abhängigkeiten der Stabdrehwinkeln  $\psi_{ij}$  können bestimmt werden, indem fiktive Biegeelenke an alle Stabenden eingeführt werden, um lediglich Stabrotationen am resultierenden Mechanismus zu berücksichtigen:



$$\begin{aligned} \psi_{12} &:= \psi \\ @ v_2 \text{ gilt: } \psi_{12} \frac{l}{5} &= \psi_{23} \frac{9+1}{5} l \\ \Rightarrow \psi_{23} &= \frac{\psi}{10} \\ @ v_{3,x} \text{ gilt: } \psi_{43} \frac{3l}{5} &= \psi_{32} \frac{9+3}{5} l \\ \Rightarrow \psi_{43} &= \frac{2}{5} \psi \end{aligned} \tag{23}$$

6. Stabendmomente

Mit  $M_{ij}^0 \equiv 0$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \varphi_i s_{ij} + \varphi_j t_{ij} - \psi_{ij} (s_{ij} + t_{ij}) \\ M_{12} &= 0 + \varphi_2 \frac{10EI}{l} - \psi \frac{30EI}{l} \\ M_{21} &= \varphi_2 \frac{20EI}{l} + 0 - \psi \frac{30EI}{l} \\ M_{23} &= \varphi_2 \frac{20EI}{\sqrt{29}l} + \varphi_3 \frac{10EI}{\sqrt{29}l} - \psi \frac{3EI}{\sqrt{29}l} \\ M_{32} &= \varphi_3 \frac{20EI}{\sqrt{29}l} + \varphi_2 \frac{10EI}{\sqrt{29}l} - \psi \frac{3EI}{\sqrt{29}l} \\ M_{34} &= \varphi_3 \frac{80EI}{13l} + 0 - \psi \frac{48EI}{13l} \\ M_{43} &= 0 + \varphi_3 \frac{40EI}{13l} - \psi \frac{48EI}{13l} \end{aligned} \tag{24}$$

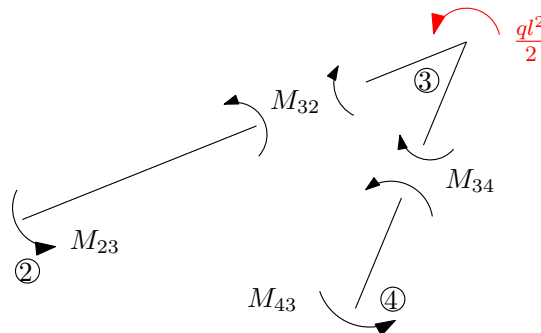
## 7. Momentengleichgewicht

$$\sum_{i=1,4} M_{2i} = 0 \iff$$

$$\left[ \varphi_2 \left( 20 + \frac{20}{\sqrt{29}} \right) + \varphi_3 \frac{10}{\sqrt{29}} - \psi \left( \frac{3}{\sqrt{29}} + 30 \right) \right] \frac{EI}{l} = 0 \iff \quad (25)$$

$$(23.71\varphi_2 + 1.85\varphi_3 - 30.56\psi) \frac{EI}{l} = 0$$

Eine Skizze der Momentengleichgewichtsbedingungen ist zweckmässig, um die Momentenbelastung am Knoten 3 mit korrektem Vorzeichen zu berücksichtigen:



$$\sum_{i=2,4} M_{3i} = \frac{ql^2}{2} \iff$$

$$M_{32} + M_{34} = \frac{ql^2}{2} \iff \quad (26)$$

$$\left[ \varphi_2 \frac{10}{\sqrt{29}} + \varphi_3 \left( \frac{20}{\sqrt{29}} + \frac{80}{13} \right) - \psi \left( \frac{3}{\sqrt{29}} + \frac{48}{13} \right) \right] \frac{EI}{l} = \frac{ql^2}{2} \iff$$

$$(1.86\varphi_2 + 9.87\varphi_3 - 4.25\psi) \frac{EI}{l} = \frac{ql^2}{2}$$

## 8. Verschiebegleichgewicht

Die virtuelle Verdrehungen  $\omega$ ,  $\omega_{ij}$  folgen die selbe Beziehungen als die Stabrehwinkeln  $\psi$ ,  $\psi_{ij}$ . Zu berücksichtigen ist die externe Arbeit der vertikaler Belastung am Knoten 3. Die zugehörige virtuelle Verschiebung ist (siehe kinem. Beziehungen):

$$v_{3,y} = l\omega_{32} = \frac{\omega l}{10} \quad (27)$$

$$W_e = -v_{3,y} \cdot ql = -\frac{ql^2}{10}\omega \quad (28)$$

Interne Arbeit:

$$\begin{aligned}
 W_i &= \sum_{ij} \omega_{ij} M_{ij} \iff \\
 \frac{W_i}{\omega} \frac{l}{EI} &= \varphi_2 \left( 10 + 20 + \frac{20}{\sqrt{29}} \frac{1}{10} + \frac{10}{\sqrt{29}} \frac{1}{10} \right) \\
 &+ \varphi_3 \left( \frac{10}{\sqrt{29}} \frac{1}{10} + \frac{20}{\sqrt{29}} \frac{1}{10} + \frac{80}{13} \cdot \frac{2}{5} + \frac{40}{13} \cdot \frac{2}{5} \right) \\
 &- \psi \left( 30 + 30 + \frac{3}{\sqrt{29}} \frac{1}{10} + \frac{3}{\sqrt{29}} \frac{1}{10} + \frac{48}{13} \cdot \frac{2}{5} + \frac{48}{13} \cdot \frac{2}{5} \right) \\
 &= 30.56\varphi_2 + 4.25\varphi_3 - 63.07\psi
 \end{aligned} \tag{29}$$

PdVA:

$$W_e + W_i = 0 \iff (30.56\varphi_2 + 4.25\varphi_3 - 63.07\psi) \frac{EI}{l} = \frac{ql^2}{10} \tag{30}$$

## 9. Gleichungssystem und Lösung

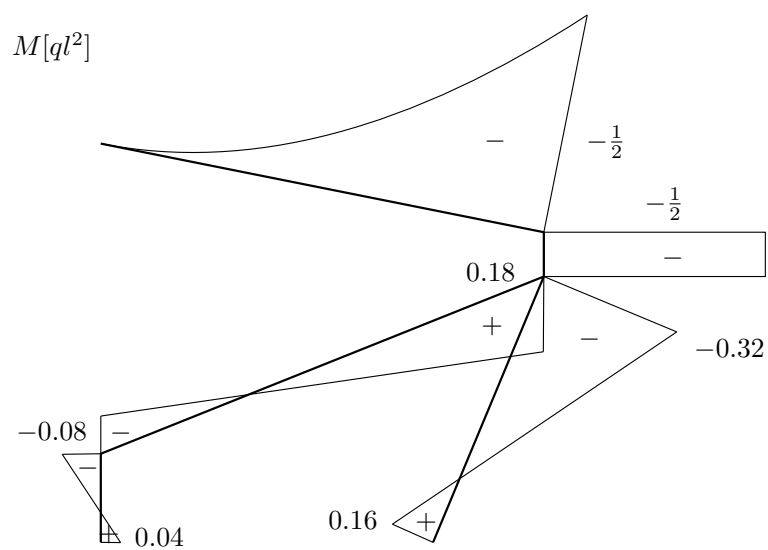
$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 23.71 & 1.86 & -30.56 \\ 1.86 & 9.87 & -4.25 \\ -30.56 & -4.25 & 63.07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \psi \end{bmatrix} = ql^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \psi \end{bmatrix} = \frac{ql^3}{EI} \begin{bmatrix} -0.0043 \\ 0.0514 \\ -0.0002 \end{bmatrix} \tag{31}$$

## 10. Definitive Stabendmomente

Moment gem. VZK II [ $ql^2$ ]	Umwandlung zur VZK I
$M_{12} = -0.037$	(-1)
$M_{21} = -0.080$	
$M_{23} = 0.080$	(-1)
$M_{32} = 0.183$	
$M_{34} = 0.317$	(-1)
$M_{43} = 0.159$	

(32)

## 11. Momentendiagramm



◇

## Literatur

P. Marti. *Theory of structures: fundamentals, framed structures, plates and shells*. John Wiley & Sons, 2013.