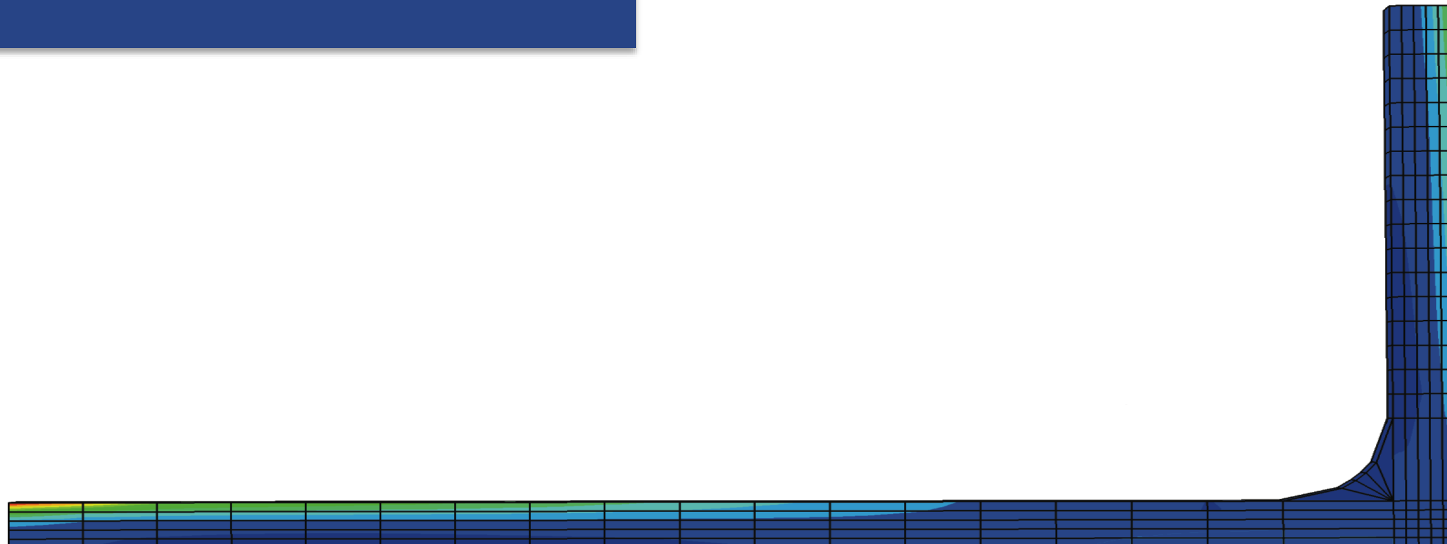
Baustatik II - Kapitel IV

Einflusslinien für statisch unbestimmte Systeme



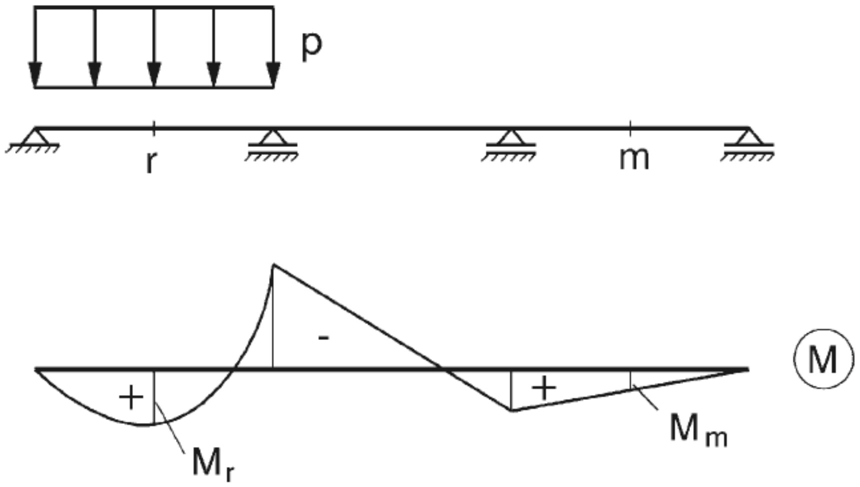
Lernziele dieses Kapitels

1. Sich mit der Form **von Einflusslinien für die Stützreaktionen und Schnittgrössen** in Durchlaufträger und Rahmen vertraut machen.
2. **Einflusslinien für Verformungen wegen einer Wanderlast**
3. Die geeignete Form von **Einflusslinien für unbestimmte Balken und Rahmen qualitativ skizzieren zu können**.
4. Wie man **verteilte Nutzlasten** auf kontinuierlichen Strukturen **positionieren** muss **um die Antwortfunktion zu maximieren**.

Nicht diskutiert: Einflusslinien für unbestimmte Balken und Rahmen quantitativ berechnen zu können.

Einflusslinien

Eine Einflusslinie unterscheidet sich begrifflich wesentlich von einer Zustandslinie. Die Zustandslinie gibt die Werte einer bestimmten Zustandsgröße **Z**, z.B. eines Biegemoments, in allen Systempunkten infolge einer vorgegebenen ortfesten Beanspruchung an.



M_m = Moment im Schnitt m infolge p

M_r = Moment im Schnitt r infolge p

Zustandslinie [M] *(Momentendiagramm)* infolge ortsfester Belastung *p*

Source: K. Meskouris, E. Hake, Statik der Stabtragwerke Kap. 7§1

Einfluss-
linien
(EL)

EL - st.
best.
Systeme

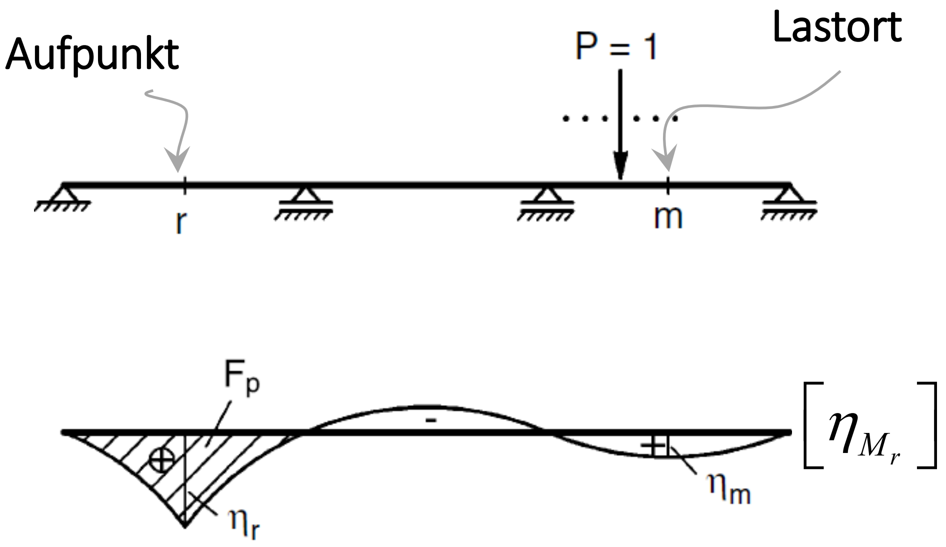
EL -
Verformu
ngsgr.

EL – st.
unbest.
Systeme

Anhang

Einflusslinien

Die Einflusslinie dagegen beschreibt den Einfluss einer Einheitslast mit variablem Angriffspunkt *m* auf eine Zustandsgröße Z_r an einem bestimmten Punkt *r* des gegebenen Systems.



η_m = Moment im Schnitt r infolge P = 1 im Punkt m

η_r = Moment im Schnitt r infolge P = 1 im Punkt r

Einflusslinie „M_r“ infolge einer vertikalen Wanderlast $P = 1$

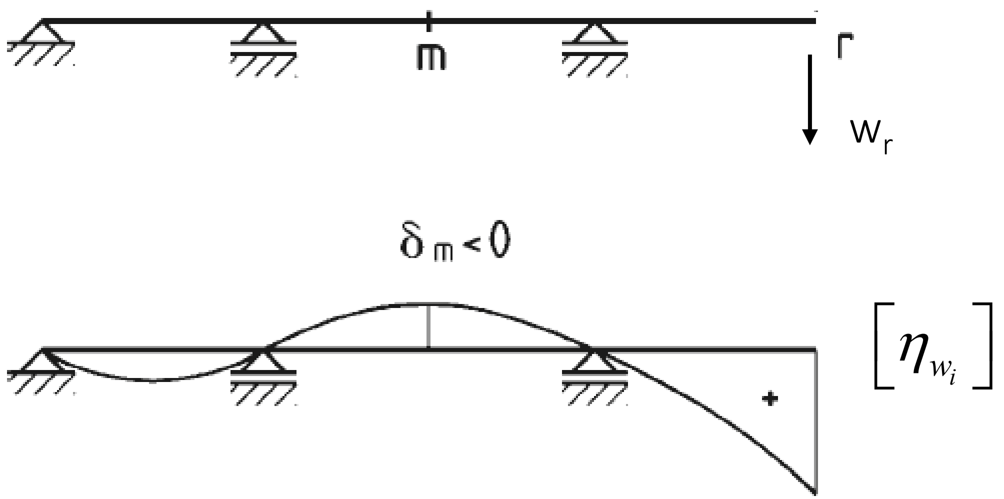
Die Ordinate η_m der Einflusslinie stellt den Wert der betreffenden Zustandsgröße Z_r dar, wenn die Last P = 1 im Punkt *m* des Lastgurtes steht

Source: K. Meskouris, E. Hake, Statik der Stabtragwerke Kap. 7§1

Einfluss-
linien
(EL)
EL - st.
best.
Systeme
EL -
Verformu
ngsgr.
EL – st.
unbest.
Systeme
Anhang

Einflusslinien

Einflusslinien werden sowohl für Schnittgrößen (M, Q, N, M_T) und entsprechende Auflagerreaktionen als auch für Verformungen (u, w, ϕ, ϑ) benötigt. Auch für abgeleitete Größen, wie z.B. Spannungen (σ, τ) und Verzerrungen (ε, κ), sind Einflusslinien denkbar.

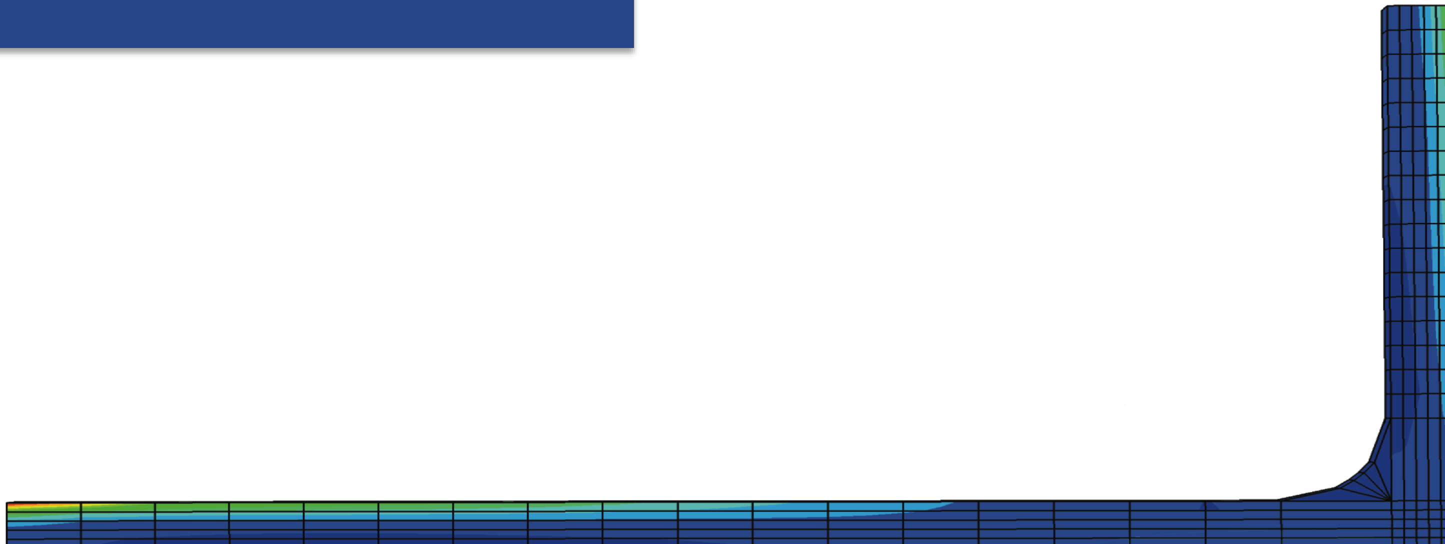


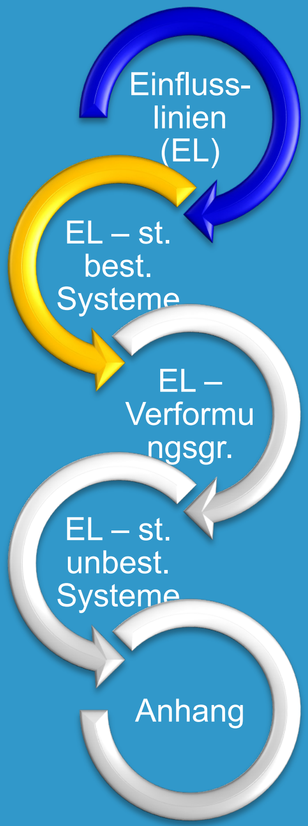
Einflusslinie für die Durchbiegung am Kragarmende r

Source: K. Meskouris, E. Hake, Statik der Stabtragwerke Kap. 7§1

Baustatik II - Kapitel IV

Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen (BS I)





Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen (BS I)

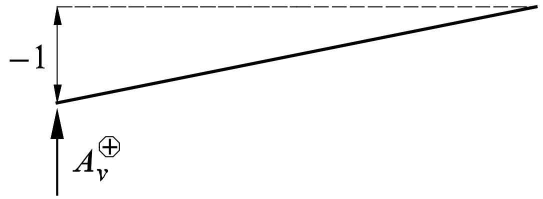
Methode nach Land (kinematische Ermittlung)

Um die Einflusslinie einer Schnittgrösse S_i zu berechnen:

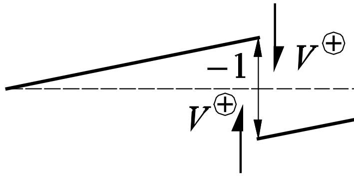
1. Löse die der Schnittgrösse S_i entsprechenden Bindung
2. Führe einer (negativen) Verformung δ=-1 am Ort und in Richtung von S_i ein.
3. Die daraus resultierende Biegelinie (verformte Form) entspricht der Einflusslinie η_{Si}.

Positive Schrittgrössen und entsprechende (negative) Einheitsverschiebungen:

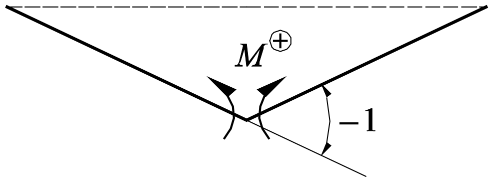
Reaktionskraft



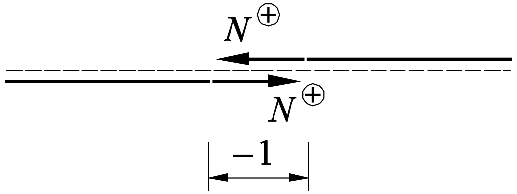
Querkraft



Biegemoment

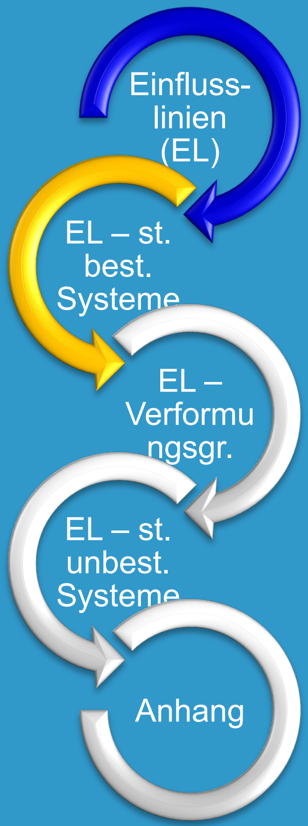


Normalkraft



⊕ zeigt die positive Orientierung jeder Zustandsgrösse nach der klassischen Konvention

Die negative Verformungen sind entgegengesetzt zu der positiven Schnittgrössen/Auflagerreaktionen



Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen (BS I)

Methode nach Land (kinematische Ermittlung)

Um die Einflusslinie einer Schnittgrösse S_i zu berechnen:

1. Löse die der Schnittgrösse S_i entsprechenden Bindung
2. Führe einer (negativen) Verformung δ=-*1* am Ort und in Richtung von S_i ein.
3. Die daraus resultierende Biegelinie entspricht der Einflusslinie η_{Si}.

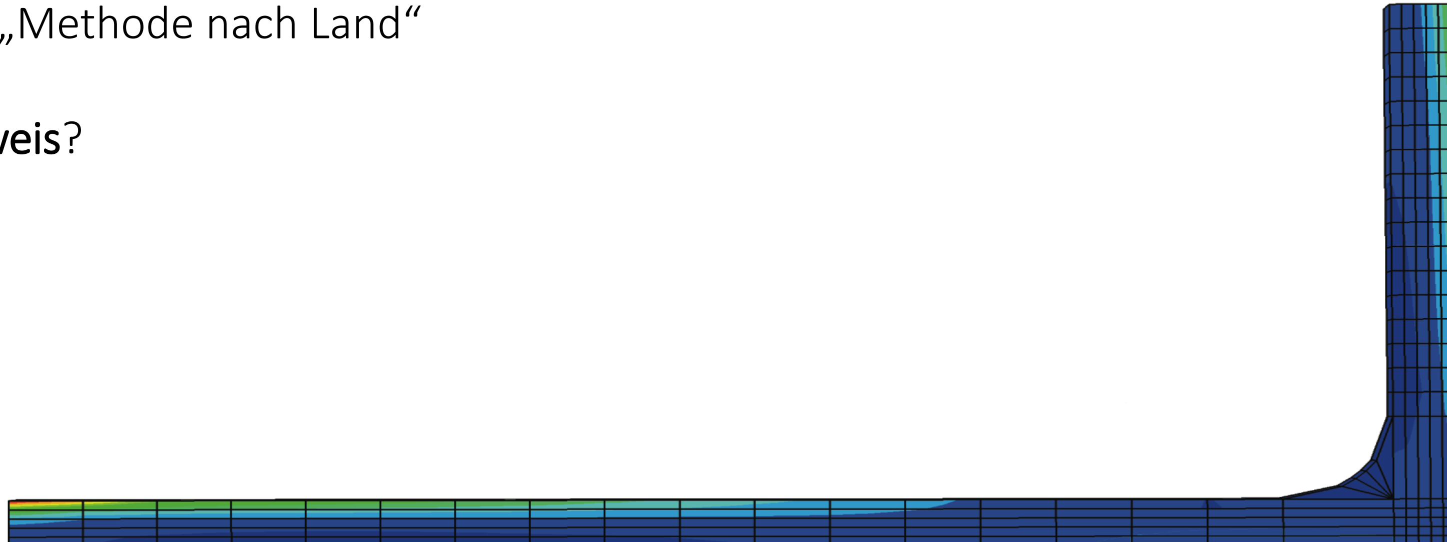
Warum?

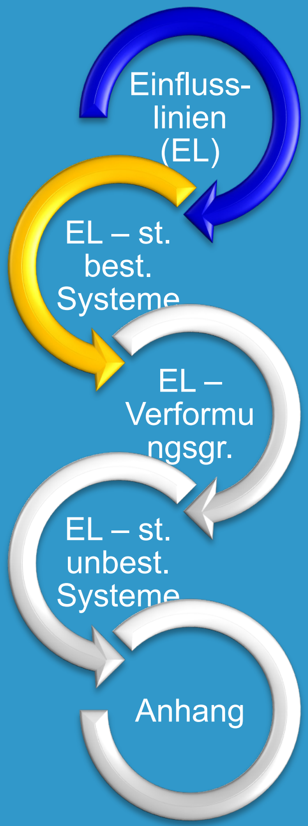
Dies ist eine Folge des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

s. Baustatik I Skript: Kapitel 10§3 „Methode nach Land“

Interessieren Sie sich für den **Beweis**?

Bitte besuchen Sie den [Anhang]

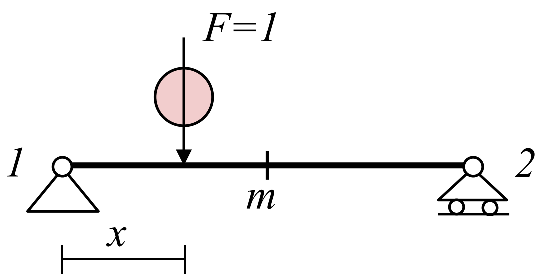




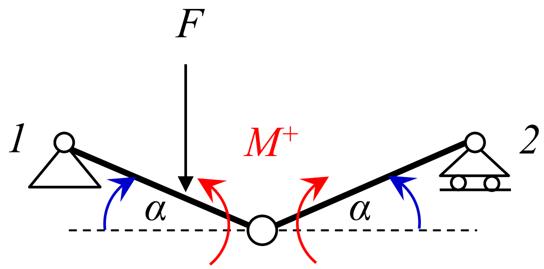
Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen (BS I)

Beispiel – einfacher Balken: Biegemoment EL @x=l/2

Berechnung der Einflusslinie für das **Biegemoment in der Feldmitte** *m*, wobei x=l/2



tatsächliches System mit der wandernden Einheitslast



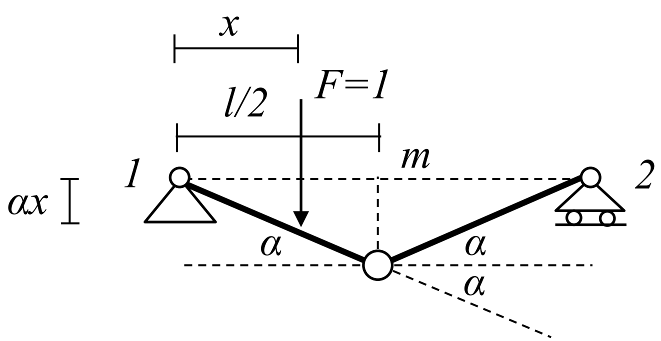
modifiziertes System mit zugeordnetem Mechanismus zur gesuchten Schnittgrösse

Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen - Biegemoment

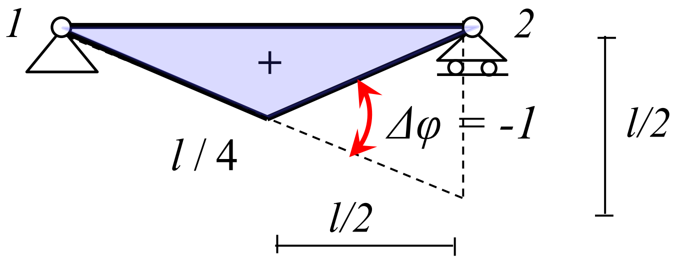
Methode 1: Methode nach Land (kinematische Ermittlung)
Einführen einer Verformung δ=-1 am Ort und in Richtung von S_i. Die daraus resultierende Biegelinie entspricht der Einflusslinie η_{Si}.

Beispiel – einfacher Balken: Einflusslinie für das Biegemoment (bei m @*l*/2)

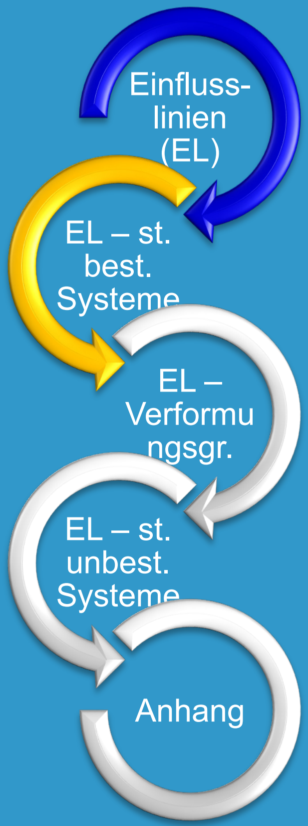
Berechnung der Einflusslinie für das Biegemoment in der Feldmitte aus der Geometrie.



modifiziertes System mit zugeordnetem Mechanismus zur gesuchten Schnittgrösse



Einflusslinie η_M



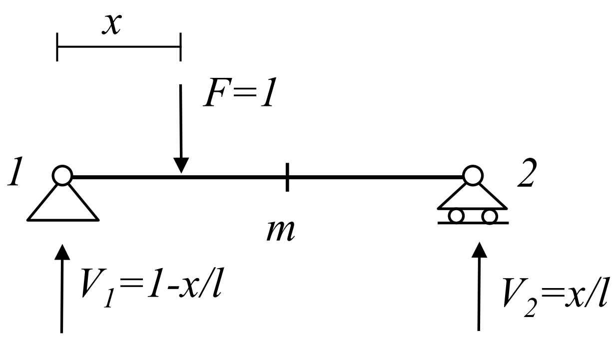
Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen - Biegemoment

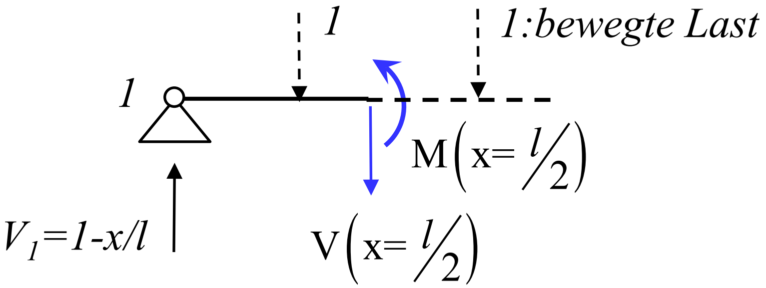
Methode 2: Durch Berechnung des bestimmten Systems

Durch Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen oder des PVA

Beispiel – einfacher Balken: Einflusslinie für das Biegemoment

Berechnung der Einflusslinie für das Biegemoment in der Feldmitte *m @l/2*

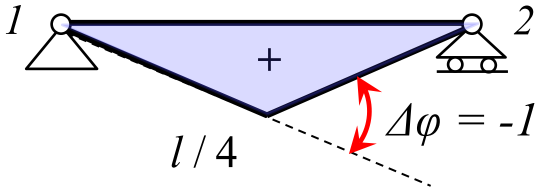




Aus der **Gleichgewicht**

$$M\left(x=\tfrac{l}{2}\right)=V_1\frac{l}{2}-F\left(\frac{l}{2}-x\right)=\frac{x}{2}\quad \text{für}\quad 0\le x\le l/2$$

$$M\left(x=\tfrac{l}{2}\right)=V_1\frac{l}{2}=\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{l}{2}\quad \text{für}\quad l/2\le x\le l$$



Einflusslinie η_M

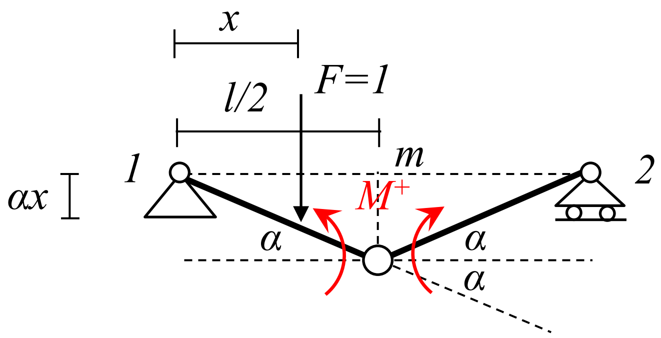
Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen - Biegemoment

Methode 2: Durch Berechnung des bestimmten Systems

Durch Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen oder des PVA

Beispiel – einfacher Balken: Einflusslinie für das Biegemoment

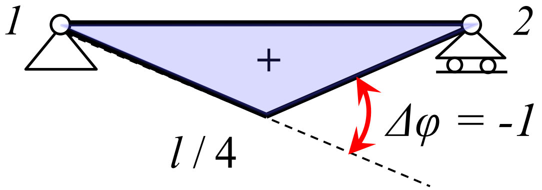
Berechnung der Einflusslinie für das Biegemoment in der Feldmitte



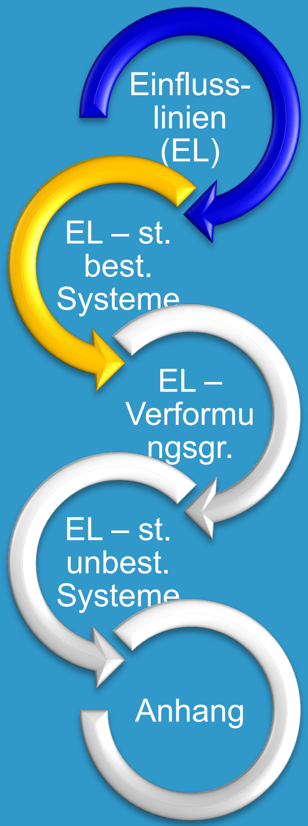
modifiziertes System mit zugeordnetem Mechanismus zur gesuchten Schnittgrösse

Oder aus dem **PVA** folgt

$$W_e + W_i = Fxa - 2Ma = 0 \Rightarrow M = \frac{x}{2} \text{ für } 0 \le x \le l/2$$



Einflusslinie η_M



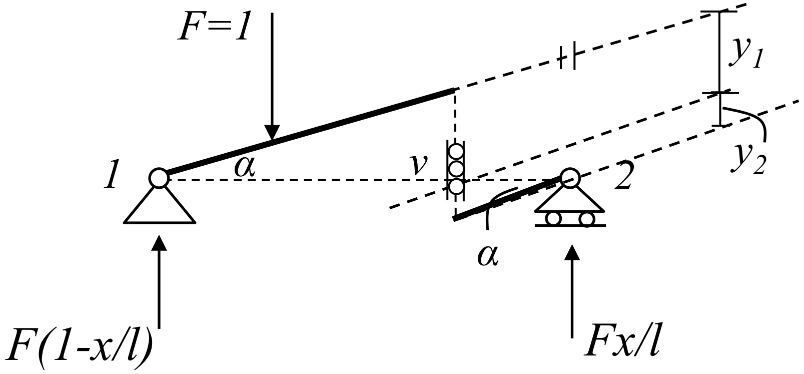
Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen - Querkraft

Methode 1: Methode nach Land (kinematische Ermittlung):

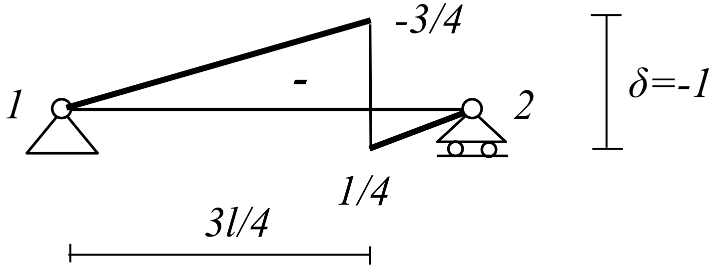
Berechnung der **Einflusslinie für die Querkraft** an der Stelle v, wobei $x_V=3l/4$, durch das Einführen einer Verformung $\delta=-1$ am Ort und in Richtung von V_i. Die daraus resultierende Biegelinie entspricht der Einflusslinie η_{V_i}

Berechnung der Einflusslinie für die Querkraft an der Stelle $x_V=3l/4$ aus der Geometrie.

$$y_1 + y_2 = 1,\quad y_1 = \tan\alpha\,\frac{3l}{4},\quad y_2 = \tan\alpha\,\frac{l}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{3l}{4}, y_2 = \frac{l}{4}$$



modifiziertes System mit zugeordnetem Mechanismus zur gesuchten Schnittgrösse



Einflusslinie η_V

Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen - Querkraft

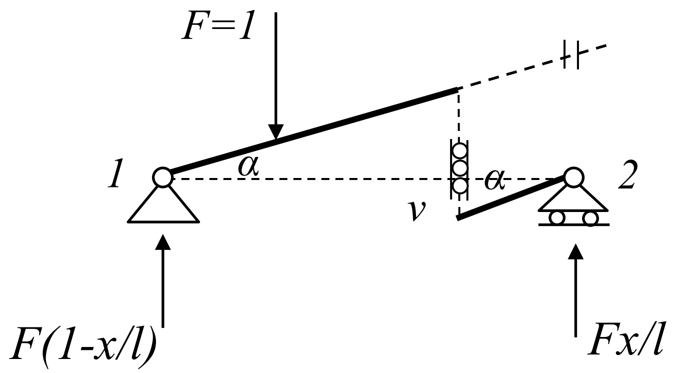
Methode 2: Durch Berechnung des bestimmten Systems gemäß dem PVA

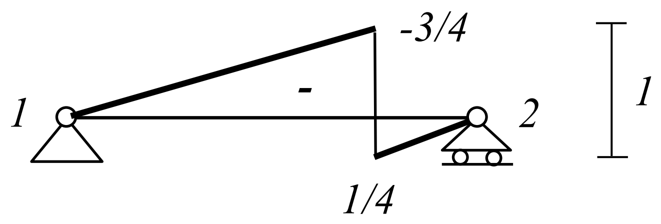
$$-Fax - V(a3l/4 + al/4) = 0 \xrightarrow{F=1} V = -\frac{x}{l} \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 3l/4$$

$$Fa(l-x) - V(a3l/4 + al/4) = 0 \xrightarrow{F=1} V = 1-\frac{x}{l} \quad \text{für} \quad 3l/4 \le x \le l$$

Beispiel – einfacher Balken

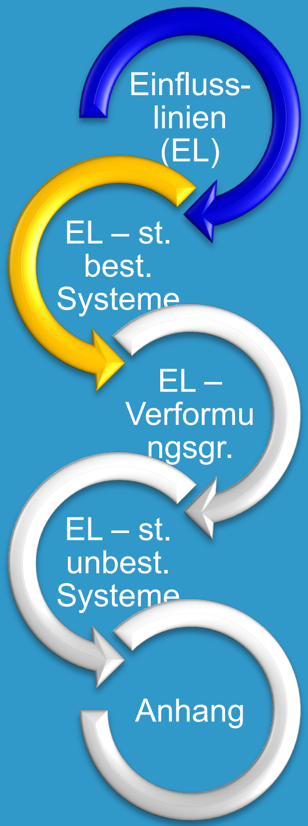
Berechnung der Einflusslinie für die Querkraft an der Stelle $x_V=3l/4$





Einflusslinie η_V

modifiziertes System mit zugeordnetem Mechanismus zur gesuchten Schnittgrösse

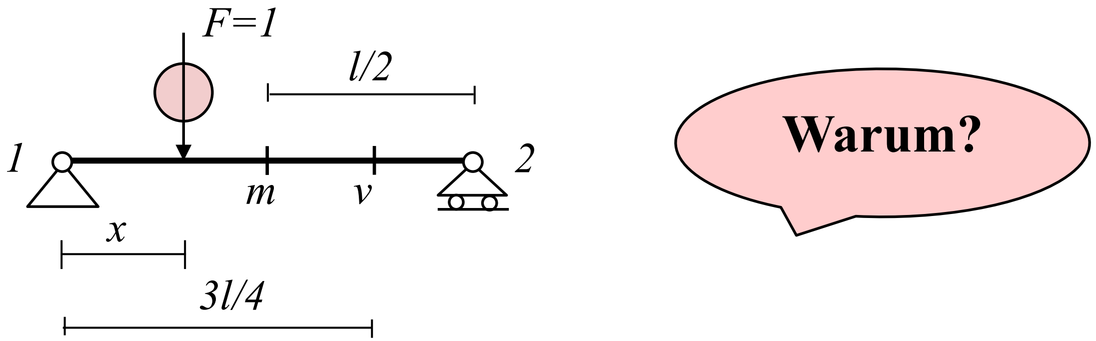


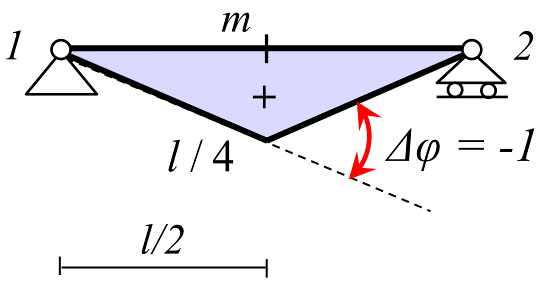
Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen

Bemerkung

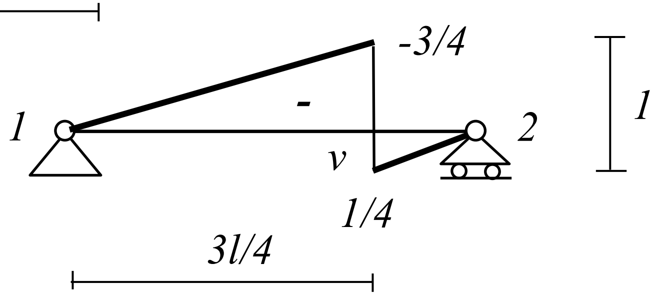
Die **Einflusslinien** der Zustandsgrössen für **statisch bestimmte Strukturen** sind **linear**!

Beispiel – einfacher Balken





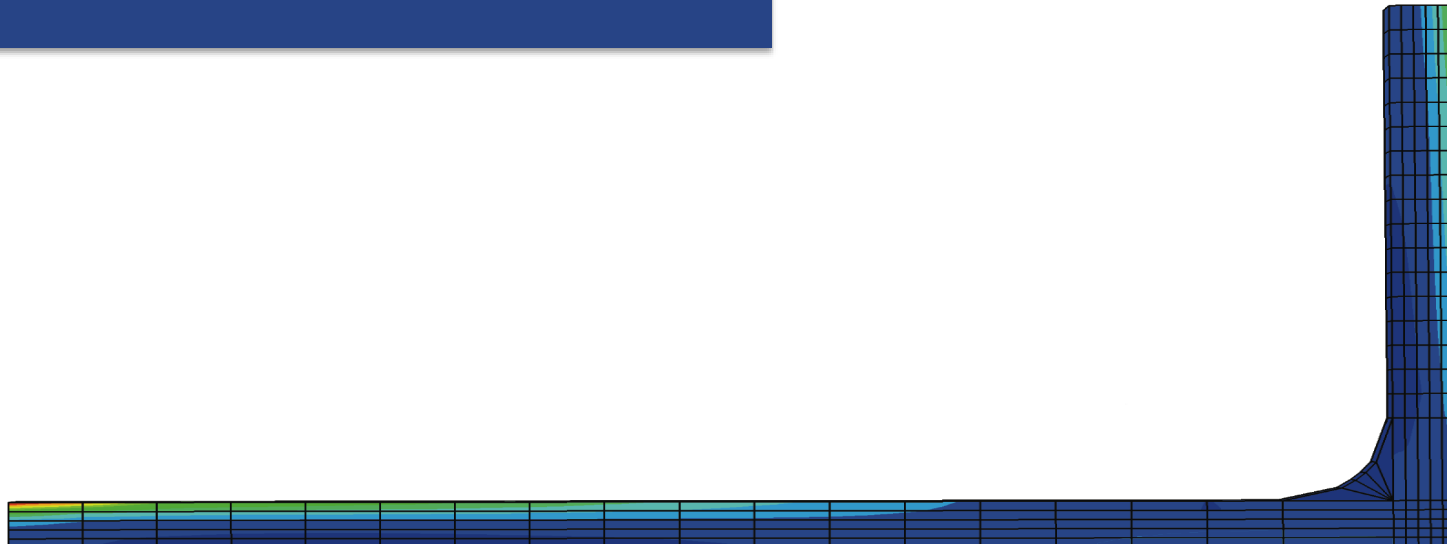
Einflusslinie η_M



Einflusslinie η_V

Baustatik II - Kapitel IV

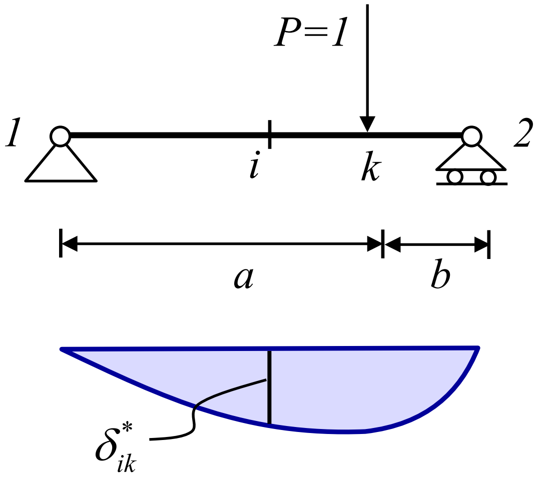
Einflusslinien für Verformungen
(für statisch bestimmte & unbestimmte Systeme)



Einflusslinien für Verformungen

(für statisch bestimmte & unbestimmte Systeme)

Beispiel – einfacher Balken



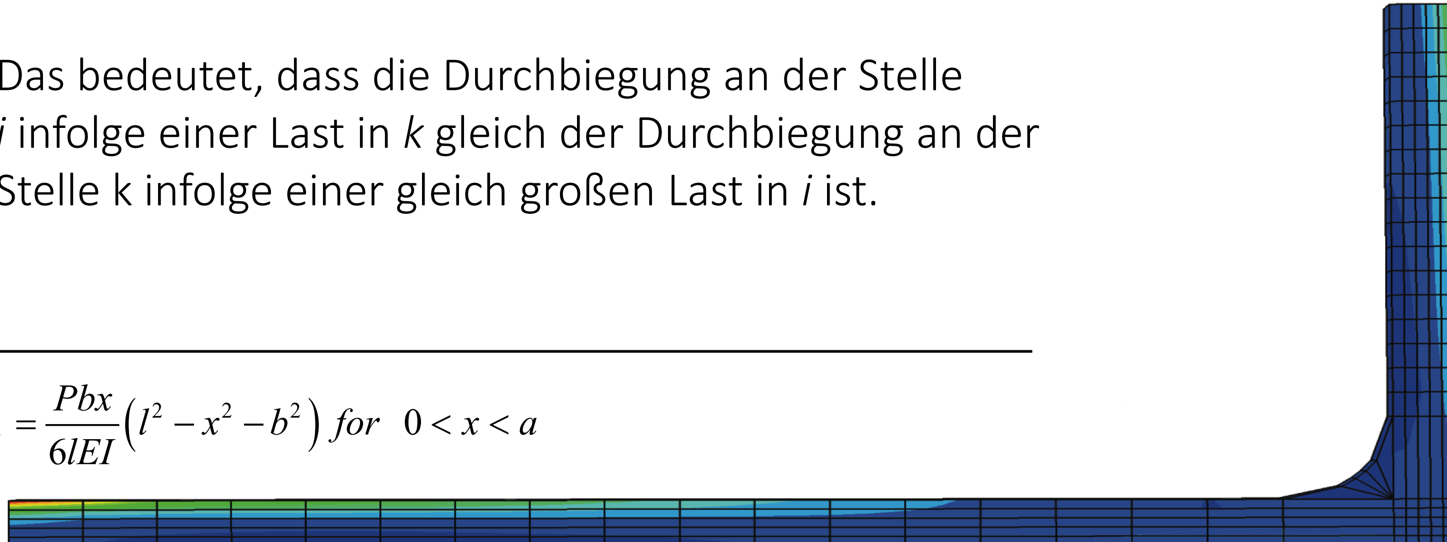
Die Ermittlung von Einflusslinien für die Verformung bzw Verdrehung lässt sich mithilfe des Satzes von ***Maxwell*** bewerkstelligen.

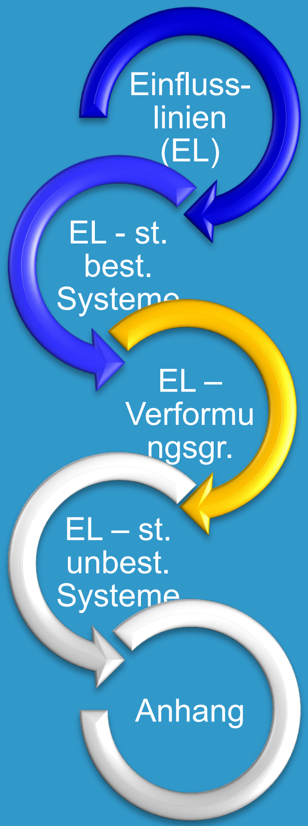
$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

Das bedeutet, dass die Durchbiegung an der Stelle *i* infolge einer Last in *k* gleich der Durchbiegung an der Stelle k infolge einer gleich großen Last in *i* ist.

---

*Für einen einfach gelagerten Balken $\delta_{ik} = \frac{Pbx}{6lEI}\left(l^2 - x^2 - b^2\right) \; for \;\; 0 < x < a$

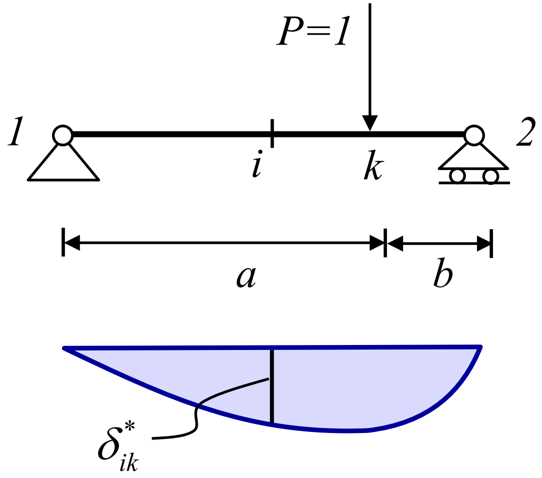




Einflusslinien für Verformungen

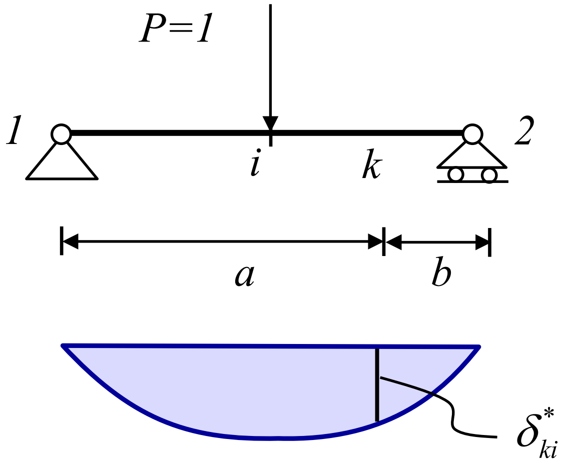
(für statisch bestimmte & unbestimmte Systeme)

Beispiel – einfacher Balken



Satz von ***Maxwell***

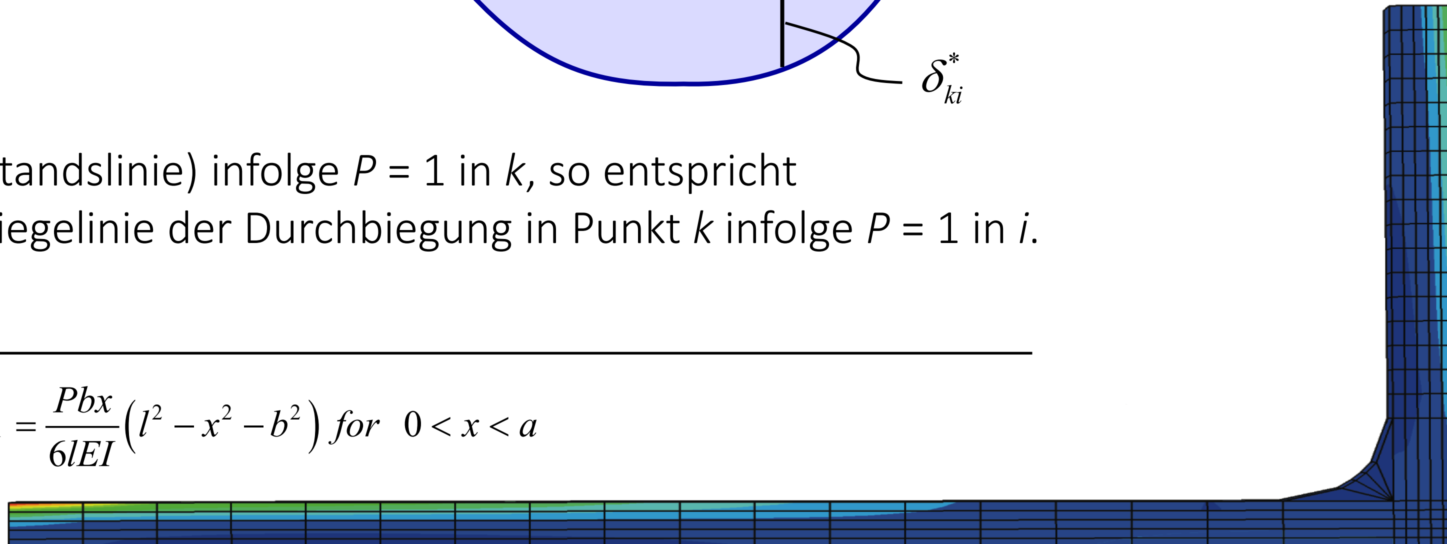
$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$



Bestimmt man die Biegelinie (Zustandslinie) infolge $P = 1$ in k, so entspricht der in i abgelesene Wert dieser Biegelinie der Durchbiegung in Punkt k infolge $P = 1$ in i.

---

*Für einen einfach gelagerten Balken $\delta_{ik} = \dfrac{Pbx}{6lEI}\left(l^2 - x^2 - b^2\right)$ $for \;\; 0 < x < a$



Einflusslinien für Verformungen

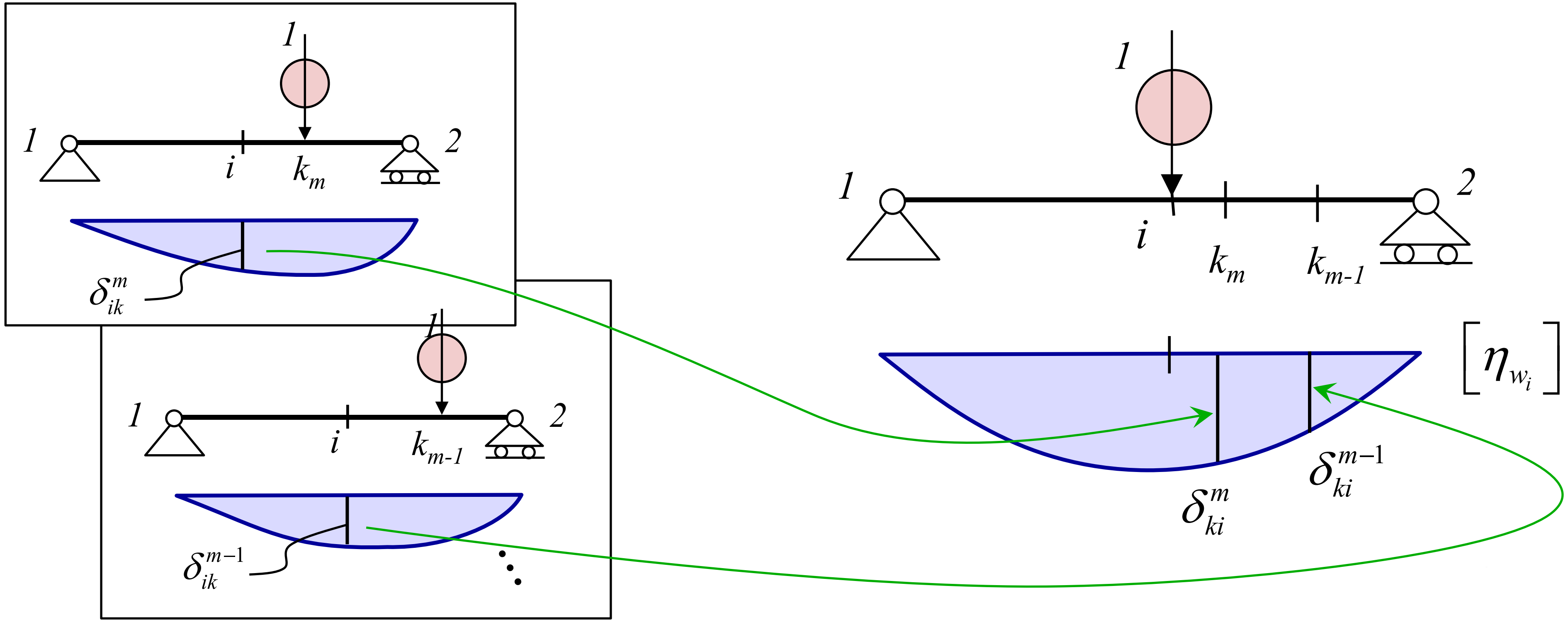
(für statisch bestimmte & unbestimmte Systeme)

Denkt man sich verschiedene Positionen k_m der Wanderlast, folgt:

δ_{ik} = Einflusslinie $\left[\eta_{w_i}\right]$ für die Wanderlast $P_{km} = 1$

δ_{ki} = Biegelinie $w(x)$ infolge $P = 1$ in Punkt i.

EL für δ_i in $i \equiv BL$ infolge $Q = 1$
am Ort und in Richtung von δ_i



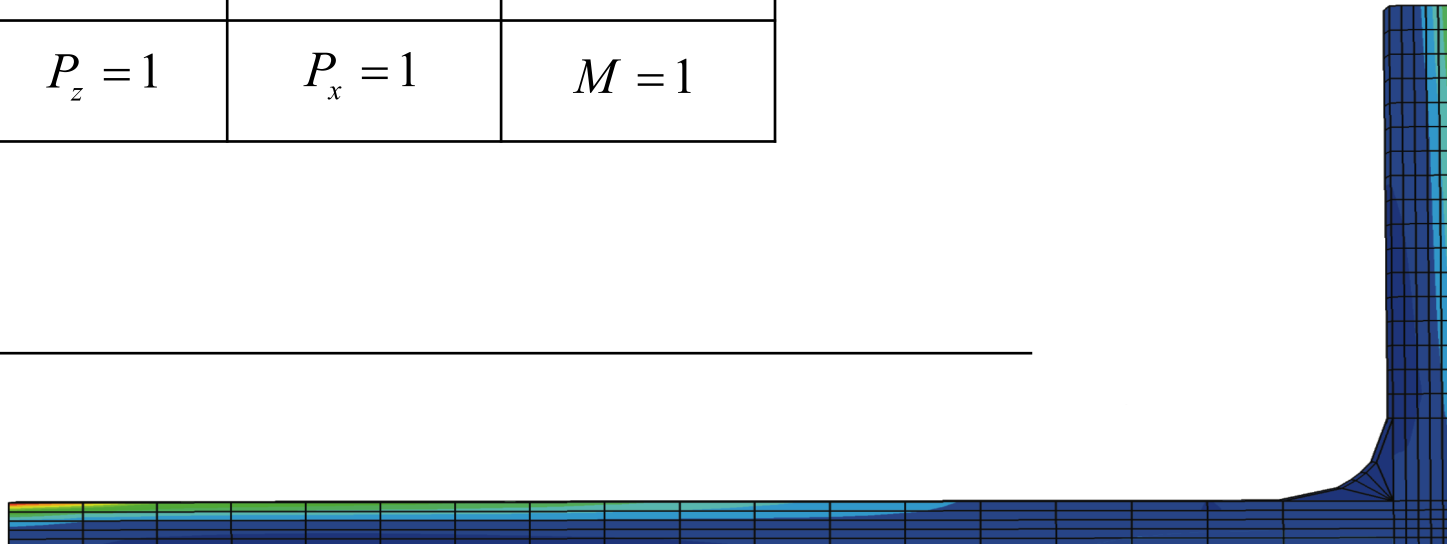
Einflusslinien für Verformungen

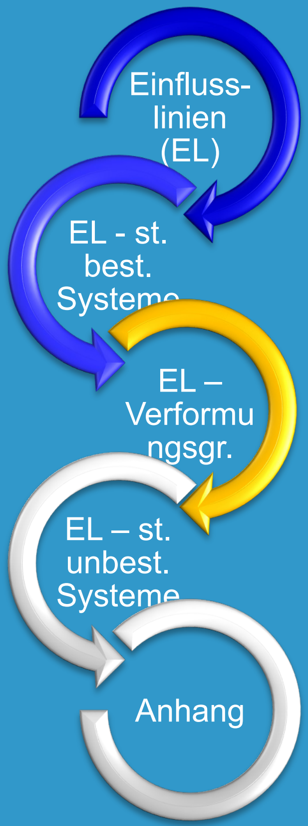
(für statisch bestimmte & unbestimmte Systeme)

Daher ist die Einflusslinie für eine Verformung $\delta(u, w, \phi)$ am Punkt i infolge einer Wanderlast identisch mit der Biegelinie *w(x)* des Trägers infolge der zur gesuchten Verformung δ komplementären Einheitslast P_x, P_z bzw. M am selben Punkt i .

EL in i	$\left[\eta_{w_i}\right]$	$\left[\eta_{u_i}\right]$	$\left[\eta_{\varphi_i}\right]$
$\equiv BL$ (Biegelinie)	$w(x)$	$w(x)$	$w(x)$
infolge Einheitslast*:	$P_z = 1$	$P_x = 1$	$M = 1$

*am Ort und in Richtung von δ_i

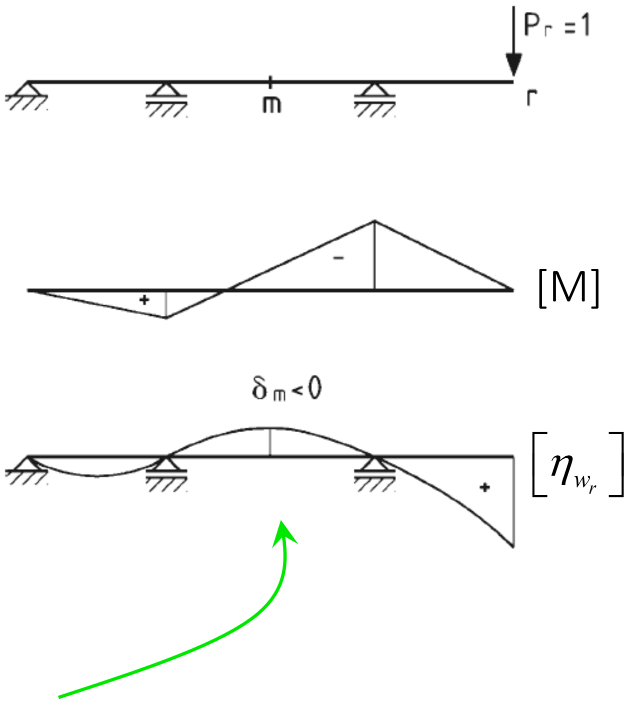




Einflusslinien für Verformungen

(für statisch bestimmte & unbestimmte Systeme)

Beispiel – statisch unbestimmtes System



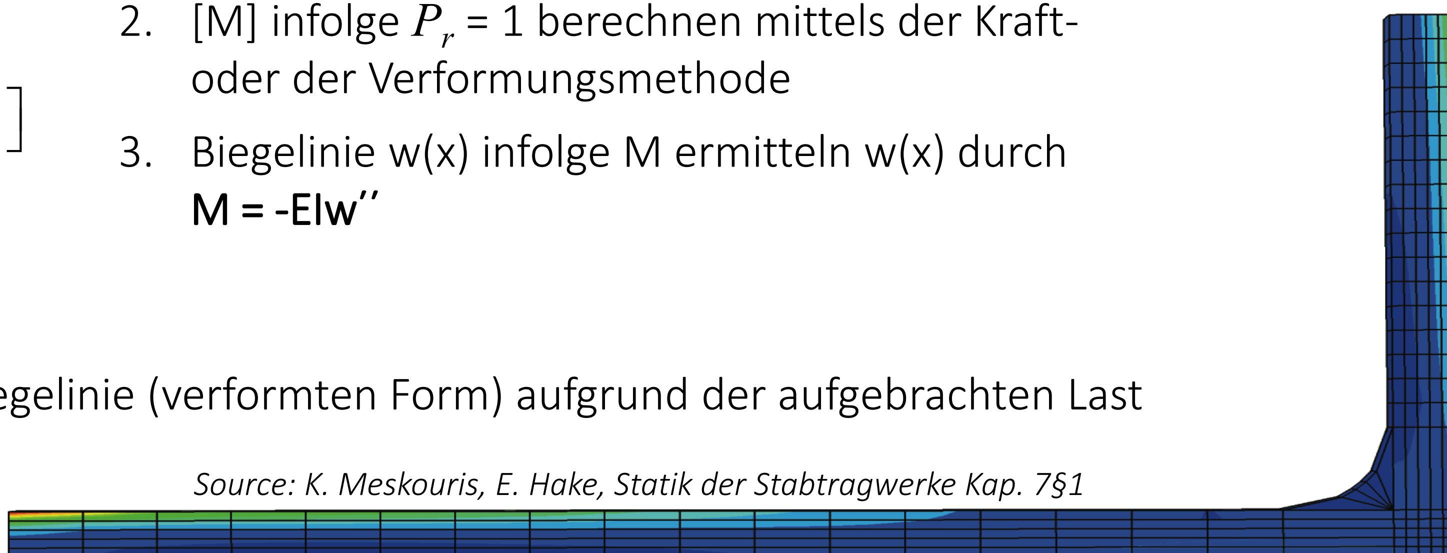
Ziel: Einflusslinie für die Durchbiegung am Kragarmende r ermitteln

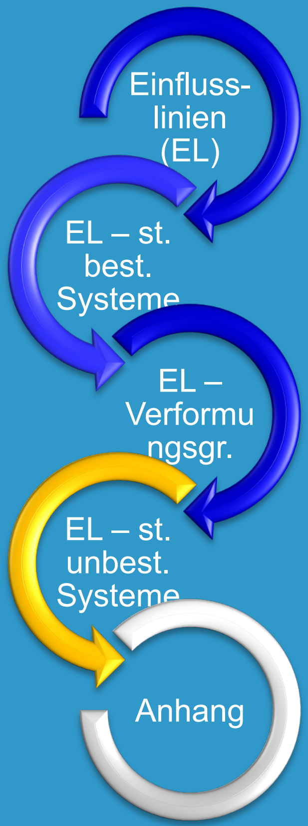
Quantitative Berechnungsschritte

1. P_r = 1 am Punkt r gegebenen System als Belastung ansetzen
2. [M] infolge P_r = 1 berechnen mittels der Kraft- oder der Verformungsmethode
3. Biegelinie w(x) infolge M ermitteln w(x) durch **M = -EIw''**

qualitativ: die EL entspricht der Biegelinie (verformten Form) aufgrund der aufgebrachten Last

Source: K. Meskouris, E. Hake, Statik der Stabtragwerke Kap. 7§1





Einflusslinien für die Schnittgrössen an statisch unbestimmten Systemen

Qualitative Ermittlung: Prinzip von Müller-Breslau (oder Land)

In vielen praktischen Anwendungen ist es normalerweise ausreichend nur die qualitativen Einflusslinien zu zeichnen. So kann man entscheiden wo die Nutzlasten platziert werden sollen, um die relevanten Antwortfunktionen zu maximieren.

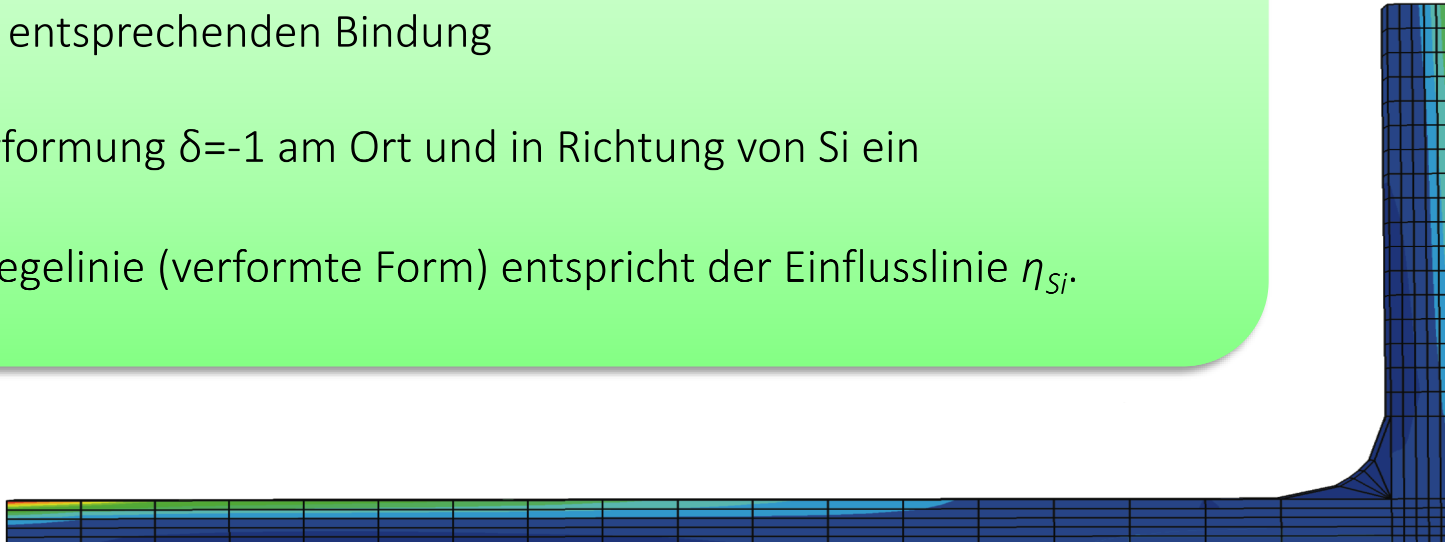
Wie im Fall von statisch bestimmten Systems, bietet die Methode nach Land ein einfaches Verfahren zum Aufbau der qualitativen Einflusslinien, der schon wie folgt angegeben wurde:

Berechnungsschritte:

I. Löse die der Schrittgröße S_i entsprechenden Bindung

II. Führe einer (negativen) Verformung δ=-1 am Ort und in Richtung von Si ein

III. Die daraus resultierende Biegelinie (verformte Form) entspricht der Einflusslinie η_{Si}.



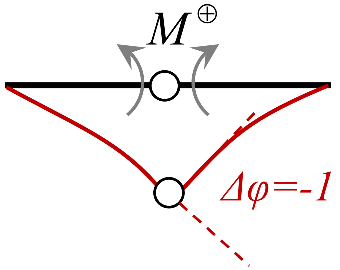
Qualitative Einflusslinien für statisch unbestimmte Strukturen
Methode nach Land

Berechnung für gewünschte Schnittgrössen

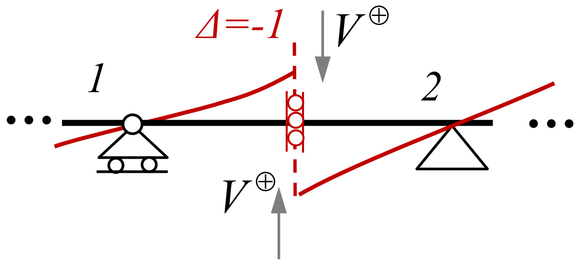
(1) Der Struktur die Bindung entfernen, welche zur gefragten Antwortfunktion (Schnittgrösse) gehört,

(2) eine negative Einheitsverschiebung oder Rotation auf die entbundene Struktur in der gewünschten Antwortfunktionsrichtung einführen

(3) die qualitative Einflusslinie (verformte Form) der entbundenen Struktur in Übereinstimmung mit allen verbleibenden Auflager- und Kontinuitäts-Bedingungen zeichnen.



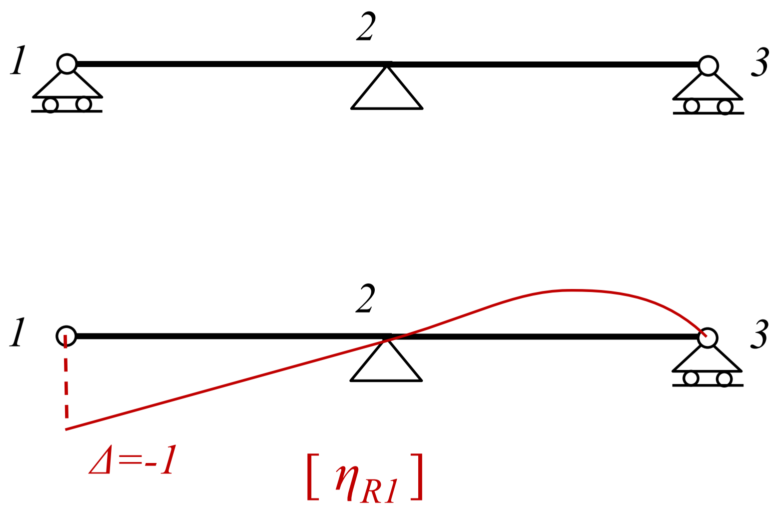
(entgegengesetzt zu der positiven M)



(entgegengesetzt zu der positiven V)

Qualitative Einflusslinien für statisch unbestimmte Strukturen
Methode nach Land

Beispiel – EL für die Auflagerreaktion in Punkt 1

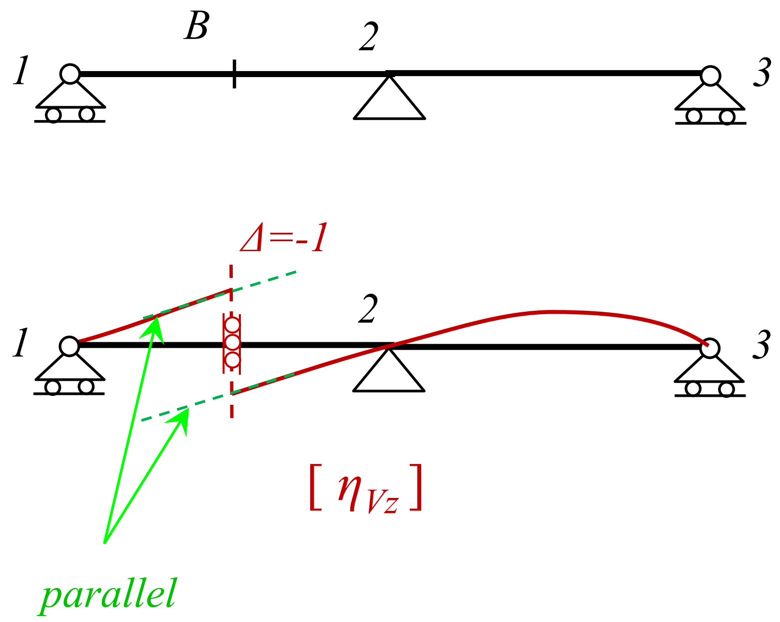


Um die Auflagerreaktion zu bestimmen muss die Stützung (Rollenlager) am Punkt 1 durch ein entsprechendes Auflager ersetzt werden, das keine Reaktion in vertikaler Richtung erzeugen kann.

Dann wird eine nach unten gerichtete (vertikale) Reaktion (entgegengesetzt zu der positiven R_1) an der Stelle der gelösten Bindung eingeführt.

Qualitative Einflusslinien für statisch unbestimmte Strukturen
Methode nach Land

Beispiel – EL für die Querkraft in Punkt B



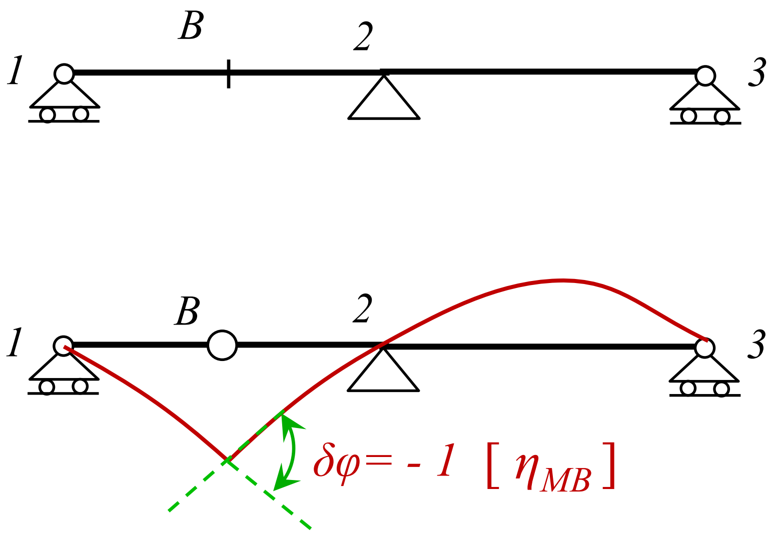
Um die Querkraft an einem Punkt B entlang des Balkens zu bestimmen, schneide den Balken an der Stelle B frei und führe eine gleitende Einspannung ein, die Momente aber keine Querkräfte aufnehmen kann.

Dann führe eine negative vertikale Verformung $\Delta = -1$ (entgegengesetzt zu der positiven V_z) an diesem Punkt ein und zeichne die resultierende Biegelinie die der gesuchten Einflusslinie entspricht.

Einfluss-
linien
(EL)
EL – st.
best.
Systeme
EL –
Verformu
ngsgr.
EL – st.
unbest.
Systeme
Anhang

Qualitative Einflusslinien für statisch unbestimmte Strukturen
Methode nach Land

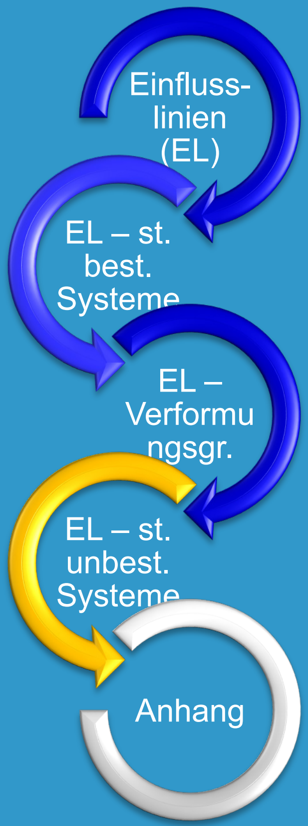
Beispiel – EL für das Moment in Punkt B

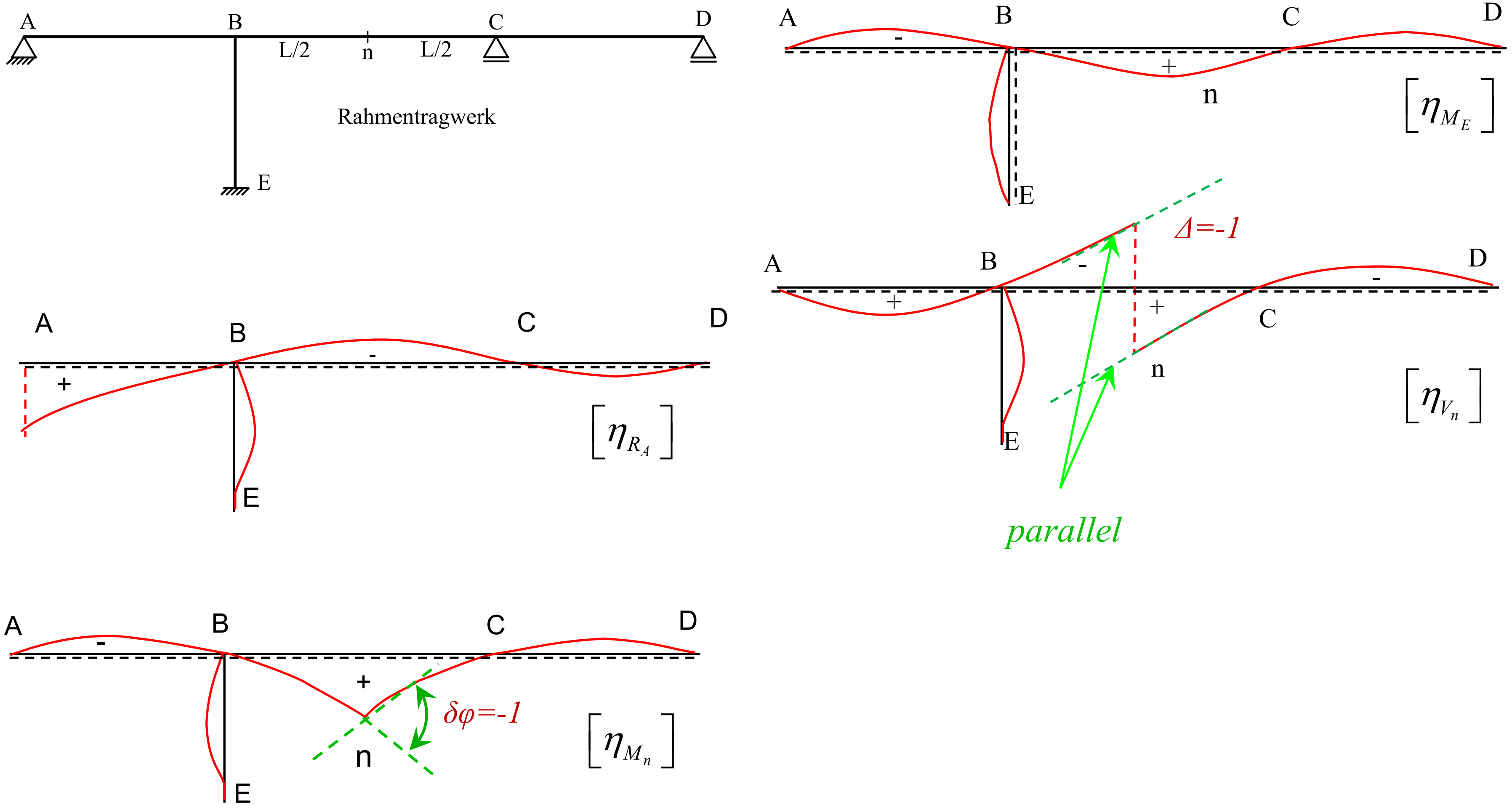


Um das Moment an einem Punkt B entlang des Trägers zu bestimmen, schneide den Balken an der Stelle B frei und führe ein Gelenk ein, welches Querkräfte aber keine Momente aufnehmen kann.

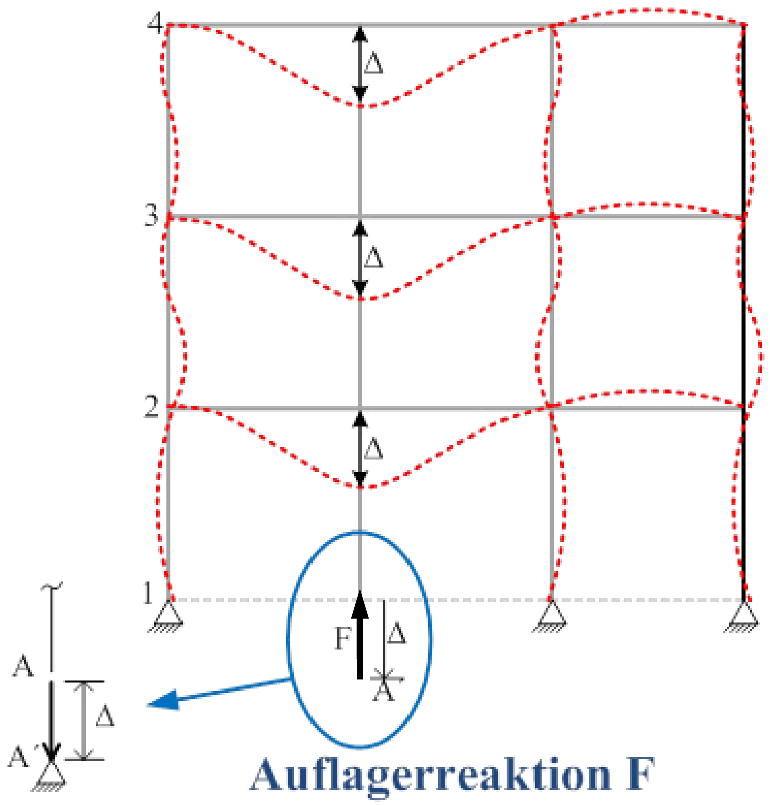
Dann führe eine negative Verdrehung $\delta\varphi$ = -1 (entgegengesetzt zu der positiven M_B) an diesem Punkt ein und zeichne die resultierende Biegelinie die der gesuchten Einflusslinie entspricht.

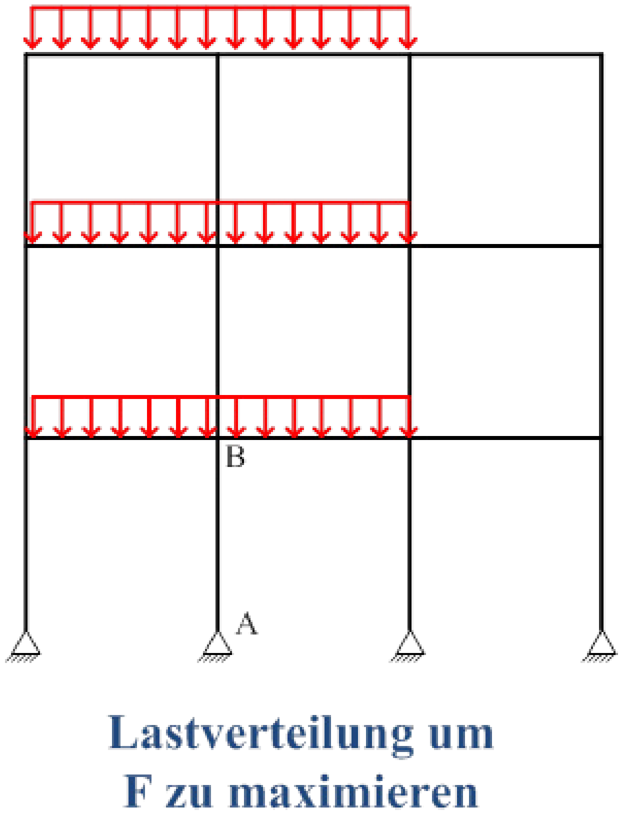
Qualitative Einflusslinien für statisch unbestimmte Strukturen:
Beispiel – Rahmentragwerk





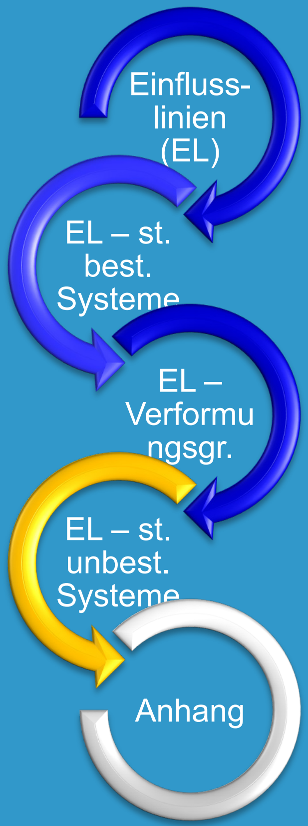
Positionierung von verteilten Nutzlasten - Rahmen



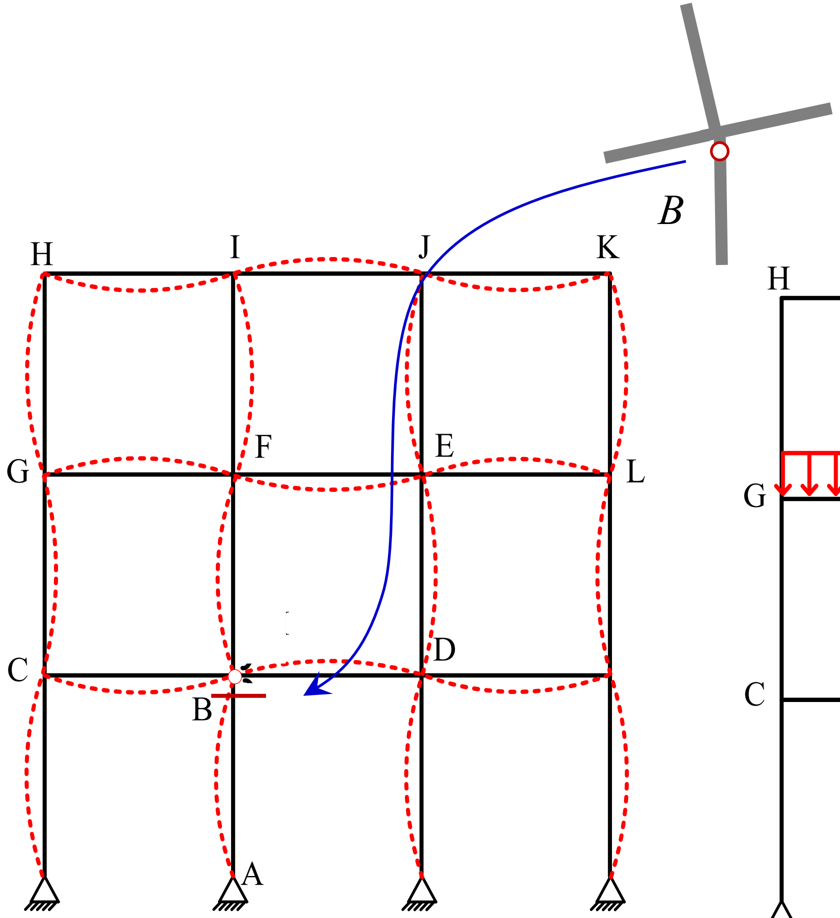


- für Einzellasten Q_k : $S_i = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot \eta_{ik}$
- für verteilte Lasten q : $S_i = \int q(x) \cdot \eta_i(x) \cdot dx$

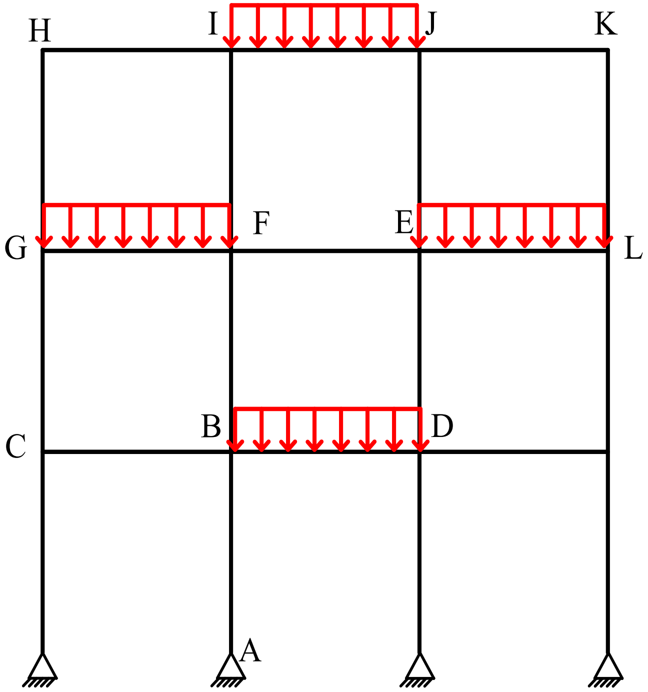
Positionierung von verteilten Nutzlasten - Ramen



- für Einzellasten Q_k : $S_i = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot \eta_{ik}$
- für verteilte Lasten q : $S_i = \int q(x) \cdot \eta_i(x) \cdot dx$



Stützenmoment $M_{B,unten}$



(-) Lastverteilung um M zu maximieren

Einfluss-linien (EL)

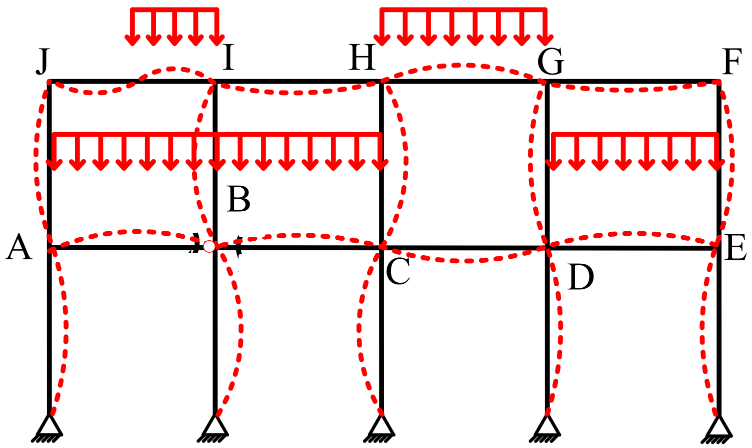
EL – st. best. Systeme

EL – Verformungsgr.

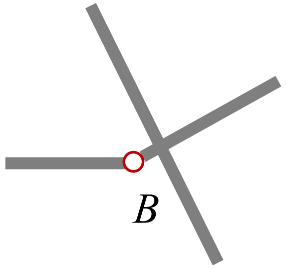
EL – st. unbest. Systeme

Anhang

Positionierung von verteilten Nutzlasten



Qualitative EI und Lastverteilung zur Maximierung des negativen Moments am Balkende $M_{B,links}$



Detail für das Moment am Balkende $M_{B,links}$

- für Einzellasten Q_k : $S_i = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot \eta_{ik}$

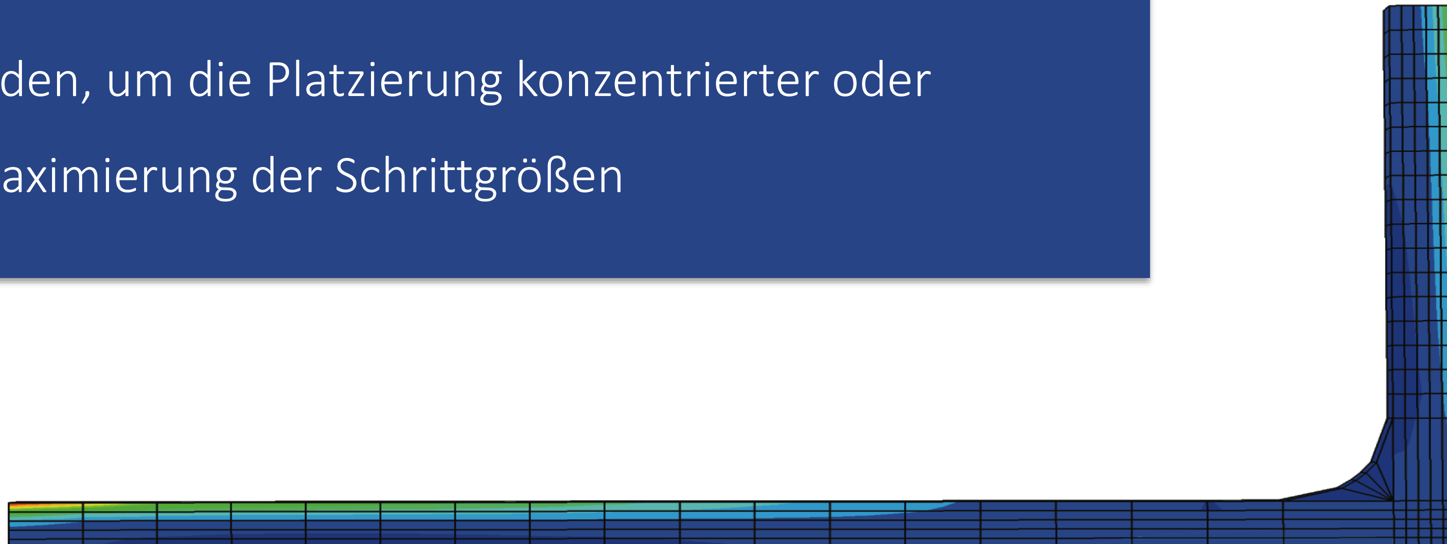
- für verteilte Lasten q : $S_i = \int q(x) \cdot \eta_i(x) \cdot dx$

Zusammenfassung dieses Kapitels

1. Bei der qualitativen Ermittlung von Einflusslinien wird die Methode nach Land verwendet: Einführen einer Verformung δ=-1 am Ort und in Richtung von S_i. Die daraus resultierende Biegelinie entspricht der Einflusslinie η_{Si}

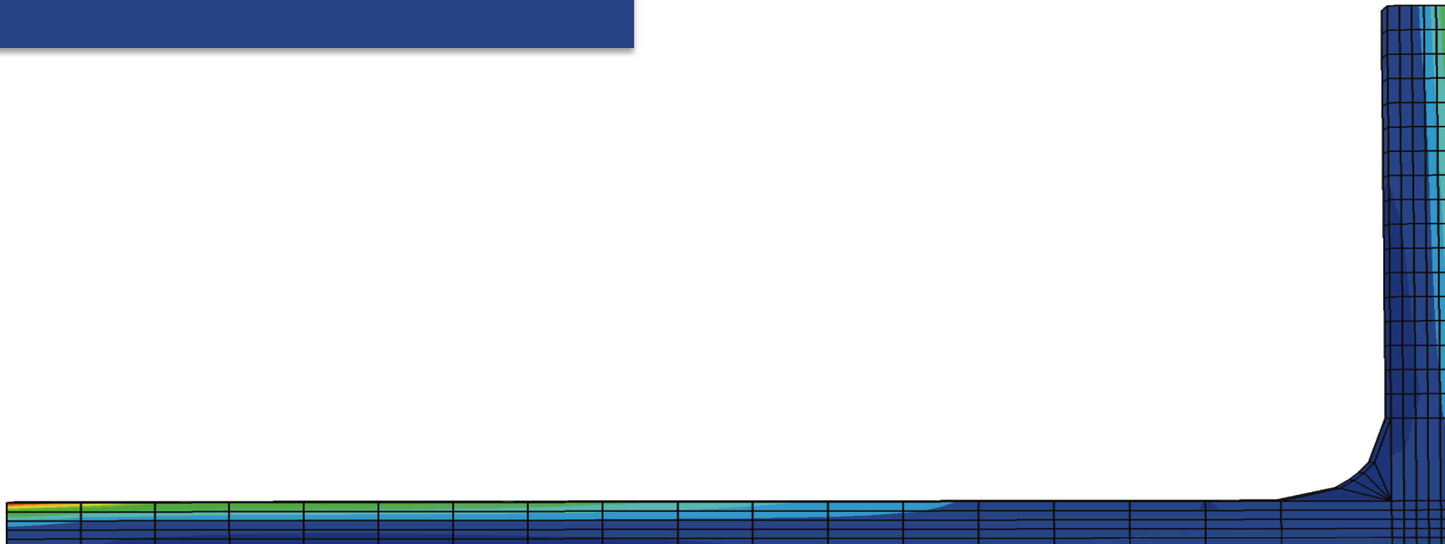
2. Die **Einflusslinien** der Zustandsgrössen sind linear für **statisch bestimmte Strukturen** bzw **nicht-linear** Biegelinie) für **statisch unbestimmten Strukturen**!

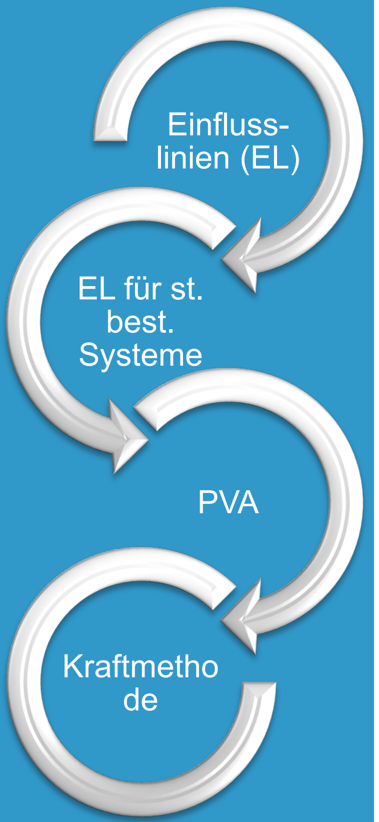
3. Einflusslinien können verwendet werden, um die Platzierung konzentrierter oder verteilter Lasten zu definieren, zur Maximierung der Schrittgrößen



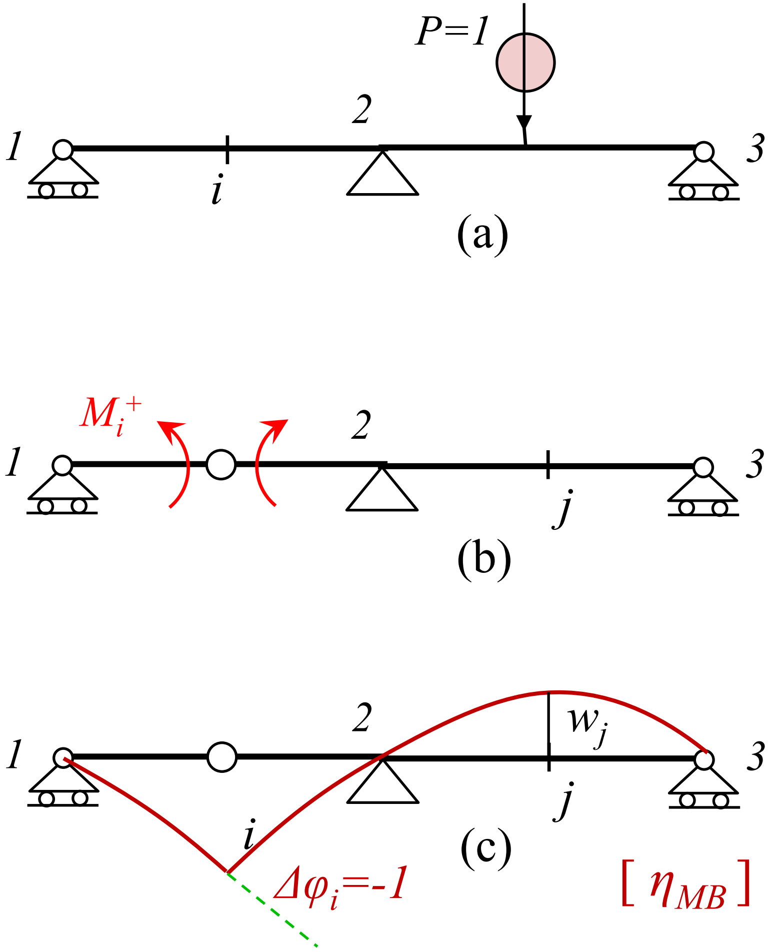
Baustatik II - Kapitel IV

Anhang





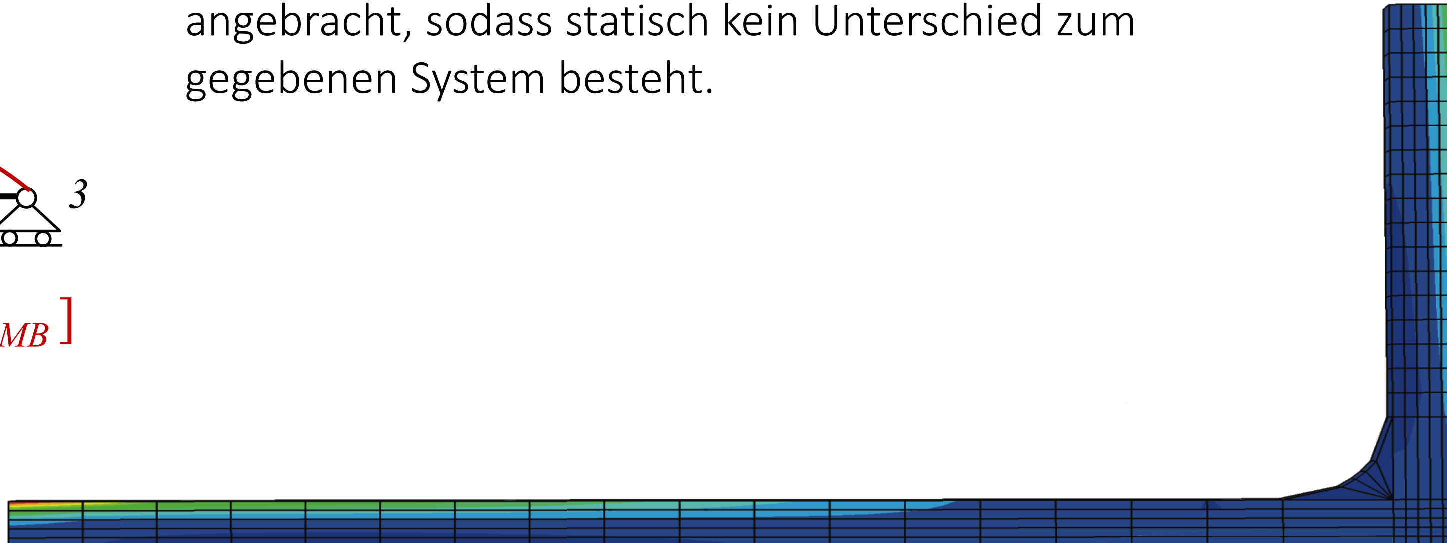
Ermittlung der Methode nach Land



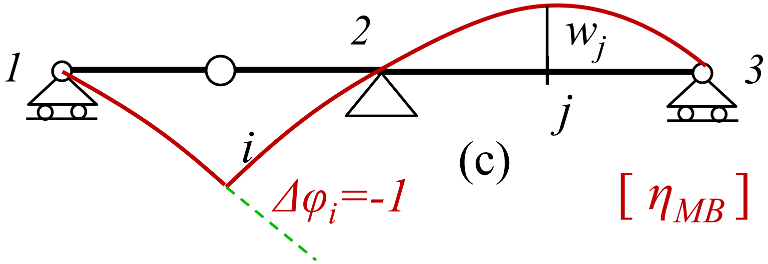
In Abbildung (a) steht die Last mit dem Wert “1” in einem willkürlichen Punkt an der Stelle x.
Sie erzeugt im Aufpunkt i die Schnittgrösse M*i.*

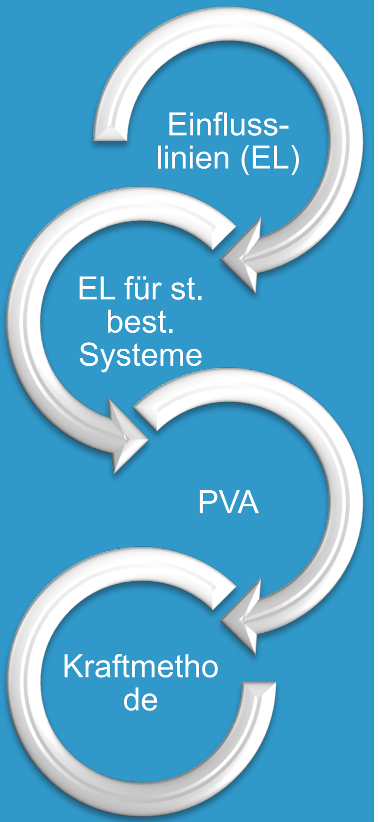
In Abbildung (b) wird an der Stelle *i* der zu M*i* korrespondierende Mechanismus, ein Gelenk eingefügt.

Parallel dazu wird das äußere Momentenpaar M*i* angebracht, sodass statisch kein Unterschied zum gegebenen System besteht.



Ermittlung der Methode nach Land





Gemäss der Prinzip der virtuellen Verschiebungen (BSI, Kap4§4) verrichten die realen Kraftgrössen in Summe keine Arbeit entlang der virtuellen Verformungen, sofern sie sich im Gleichgewicht befinden.

Wenn (wie üblich) die Schubverformungen vernachlässigt werden, erhält man nach dem Arbeitssatz:

$$\sum W = W_e + W_i = 0 \Rightarrow -M_i \Delta\varphi_i - P(x)\,w(x) - \int M \kappa \, dx = 0$$

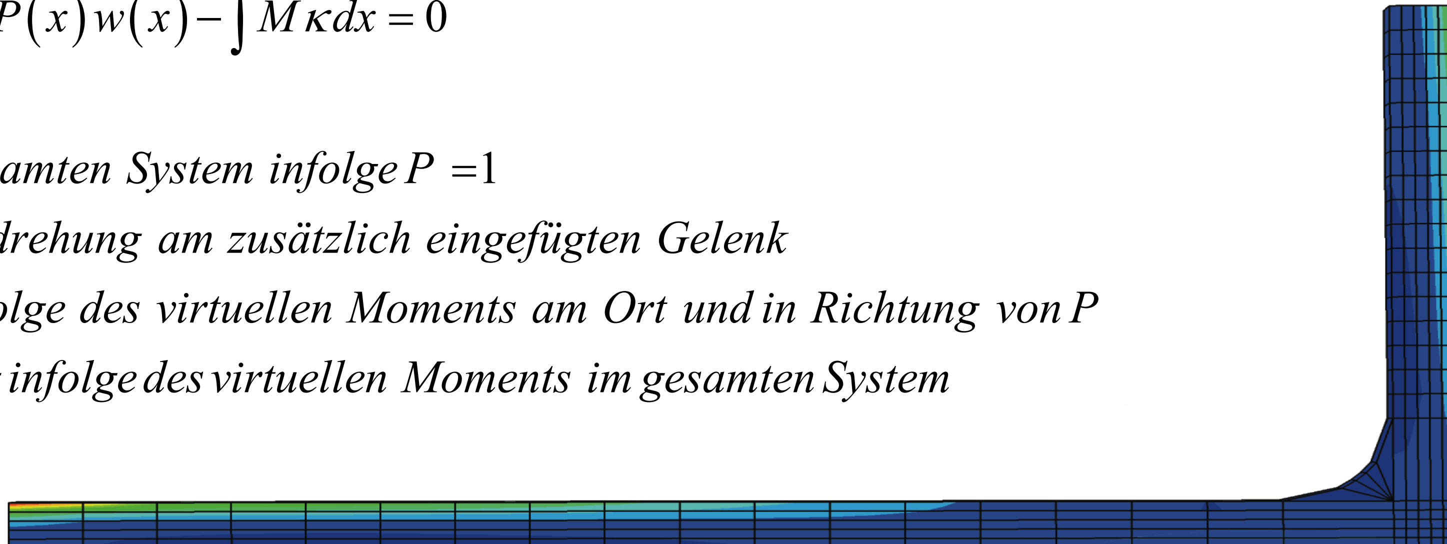
mit

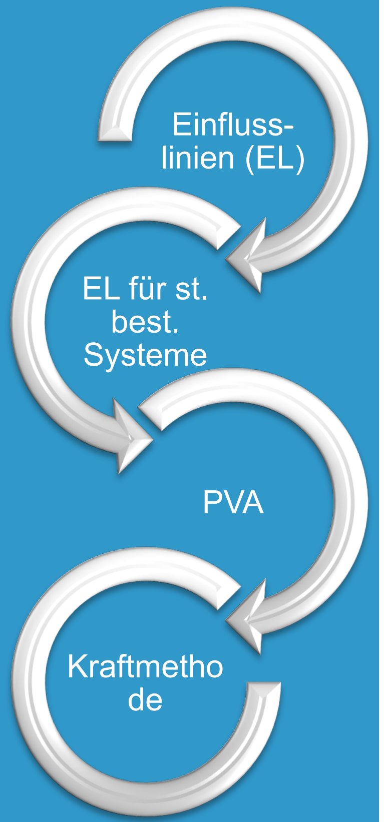
M *wirkliche Momente im gesamten System infolge* $P = 1$

ϕi *virtuelle gegenseitige Verdrehung am zusätzlich eingefügten Gelenk*

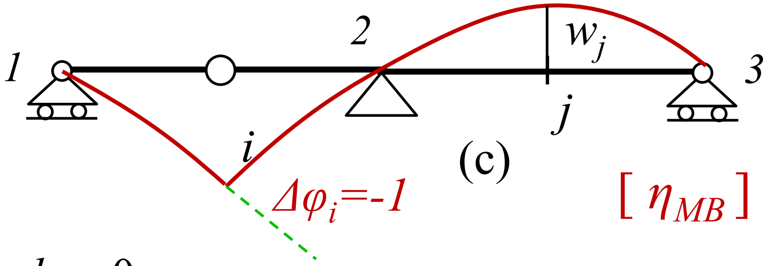
$w(x)$ *virtuelle Verschiebung infolge des virtuellen Moments am Ort und in Richtung von* P

κ *virtuelle Stabverkrümmung infolge des virtuellen Moments im gesamten System*





Ermittlung der Methode nach Land



$$\sum W = W_e + W_i = 0 \Rightarrow -M_i \Delta\varphi_i - P(x)w(x) - \int M\kappa dx = 0$$

Wird in einem statisch bestimmtem System ein Gelenk angeordnet, so entsteht eine zwangsläufigekinematische Kette, die sich ohne Widerstand bewegen lässt. Es entstehen also bei der virtuellen Verformung des Systems keine Schnittgrößen bzw. Krümmungen, und somit verschwindet das Integral in der obigen Glg.

Dies trifft übrigens auch bei statisch unbestimmten Systemen zu.

Daher, folgt: $$\sum W = W_e + W_i = 0 \Rightarrow -M_i \Delta\varphi_i - P(x)w(x) = 0$$

Wenn man das Moment M_i so wählt, dass eine Verdrehung von $\Delta\phi_i$ =-1 erzwungen wird, und die Wanderlast mit P = 1 einführt, ergibt sich:

$$\boxed{M_i = w(x)}$$