ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Berichte über Mathematik und Unterricht
Herausgeber: U. Kirchgraber

Bericht No. 93–04
Juni 1993

Der Fallschirmspringer

H. Biner, Brig
H.P. Dreyer, Wattwil
W. Hartmann, Baden
A. Moretti, Bellinzona

Eidgenössische Technische Hochschule
CH–8092 Zürich

Vorwort des Herausgebers

Unterstützt von der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft (SMG) habe ich vom 14. - 18. Oktober 1991 im Bergschulheim Casoja in Valbella einen Workshop zum Thema "Angewandte Mathematik im gymnasialen Unterricht" durchgeführt, an dem dreizehn Kollegen teilnahmen. Wir wollten einige Themen diskutieren, die den Bezug der Mathematik zu ihren Anwendungen auf dem Hintergrund des üblichen gymnasialen Mathematikstoffes aufzeigen. In einem ausserordentlich konzentrierten Einsatz wurden in knapp fünf Tagen folgende vier Themen erarbeitet und zu Papier gebracht:

Annäherung an den goldenen Schnitt

Perspektive und Axonometrie

Verzweigungsphänomene

Der Fallschirmspringer

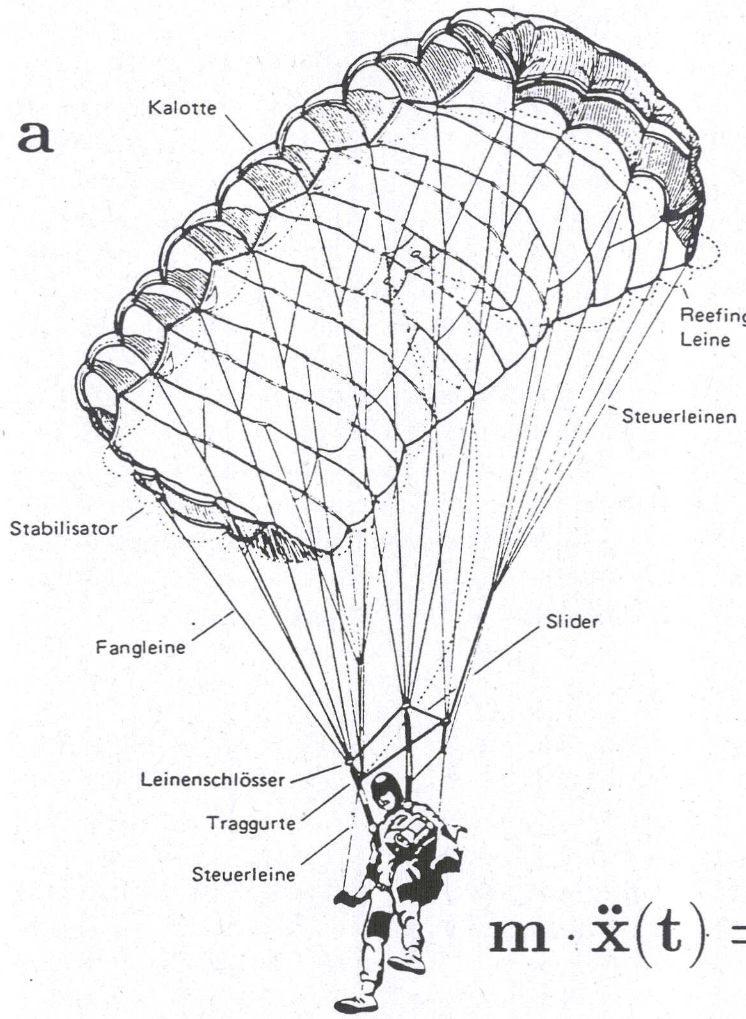
Natürlich kann in einer knappen Woche nicht bis in alle Details ausgefeiltes Unterrichtsmaterial entstehen. Zwei Arbeitsgruppen haben ihr Projekt im Anschluss an die Valbella-Woche weiter ausgearbeitet und legen einen etwas perfektionierteren Bericht vor. So oder so glaube ich, dass vier sehr anregende Vorschläge entstanden sind, die ich in der Reihe "Berichte über Mathematik und Unterricht" zugänglich machen möchte. Ich hoffe, dass sie auf Interesse stossen und wäre für Kommentare aller Art dankbar.

Den Teilnehmern am Workshop möchte ich für ihren engagierten Einsatz und der SMG, insbesondere ihrem Präsidenten U. Stammbach, für die ideelle und finanzielle Unterstützung danken.

Frühling 1993 U. Kirchgraber

Der Fallschirmspringer

$$\mathbf{F = m \cdot a}$$



$$\mathbf{m \cdot \ddot{x}(t) = F(t)}$$

An den **Mittelschulen** werden im **Physikunterricht** Methoden entwickelt, um verschiedenste Probleme aus der Mechanik zu behandeln. Eine zentrale Stellung nimmt dabei das **Bewegungsgesetz von Newton** ein, nach dem die Bewegung eines Massenpunktes durch die Kraft bestimmt ist, die auf ihn wirkt. Da die Beschleunigung nichts anderes als die zweite Ableitung der Ortsfunktion nach der Zeit ist, kann das 2. Gesetz von Newton als Differentialgleichung für die Ortsfunktion aufgefasst werden. Ausserhalb der Mechanik gibt es noch viele andere Gebiete in der Physik und den übrigen Naturwissenschaften, aber auch in der Technik und den Wirtschaftswissenschaften, in denen Differentialgleichungen auftreten. **Differentialgleichungen** beschreiben einen respektablen Teil unserer **Wirklichkeit** und gehören deshalb in jeden **Mathematikunterricht** an Mittelschulen. Die vorliegende Arbeit ist als Hilfe für Lehrerinnen gedacht und zeigt am Beispiel des Fallschirmspringers auf, wie Probleme aus der Mechanik im Mathematikunterricht mit den bereitgestellten klassischen Werkzeugen aus Algebra und Analysis behandelt werden können.

Die vorliegende Arbeit entstand anlässlich eines Workshops zur Angewandten Mathematik unter der Leitung von Prof. Urs Kirchgraber (ETH Zürich) mit finanzieller Unterstützung durch die Schweizerische Mathematische Gesellschaft SMG im Oktober 1991. Beteiligt an der Ausarbeitung waren Hermann Biner, Hans Peter Dreyer, Werner Hartmann und Armando Moretti.

1 Kräfte und Bewegungen

1.1 Der Fallschirmspringer

Drei, zwei, eins, los: Abstoss vom Flugzeug, das sich mit grosser Geschwindigkeit in schwindelnder Höhe bewegt. Ein Purzelbaum, Erde und Himmel drehen sich um mich. Die Geschwindigkeit nimmt rasend zu. Wie kann ich die Bewegung unter Kontrolle bringen? Ich strecke Arme und Beine aus, und allmählich bringt mich der Luftwiderstand in horizontale Lage. Nun habe ich Zeit, mich umzusehen: Weit unter mir sehe ich das Grün der Wiesen und Wälder, Dörfer und die dünnen Streifen der Strassen und Wege. Durch die Position meiner Arme und Beine kann ich die Lage meines Körpers in der Luft ändern: Das macht Spass. Damit ich den Flug länger geniessen kann, beschliesse ich, bald an der Leine zu ziehen, die den Fallschirm öffnet. Ein enormer Ruck bremst meinen Fall stark, meine Geschwindigkeit nimmt ab, bis sie einen festen Wert erreicht. Nun beginnen die geruhsameren Flugminuten. Ich hänge in meinen Leinen und pendle unter dem Fallschirm hin und her. Einige hundert Meter oberhalb des Erdbodens beginne ich, den Fallschirm so gut es geht auf die Wiese zu steuern, auf der ich landen will. Wie stark der Seitenwind ist, kann ich in der Luft nicht feststellen, da ich von ihr mitgetrieben werde. Hingegen sehe ich an der im Boden steckenden Fahne, dass es praktisch windstill ist. Die letzten Meter erfordern Konzentration. Ich lege die Beine aneinander und fange den Aufschlag auf den Erdboden mit einem Purzelbaum ab: Der Sprung ist gelungen!

1.2 Sir Isaac Newton

Isaac Newton (1643-1727) hatte keine Gelegenheit, selbst Fallschirmsprünge durchzuführen. Dennoch ist ihm das Husarenstück gelungen, *das* allgemeine Gesetz zu finden, das hinter Bewegungen von Körpern steckt, selbst wenn sie so kompliziert sind, wie diejenige des Fallschirmspringers. Johannes Kepler (1571-1630) hatte in genialer Weise aus Beobachtungsdaten Gesetze formuliert, welche die Bewegung der Planeten beschreiben. Newton versuchte, die Keplerschen Gesetze zu verstehen, das heisst, auf allgemeinere und tieferliegende Prinzipien zurückzuführen. Das Ergebnis seiner Bemühungen, die er in der *philosophiae naturalis principia mathematica* veröffentlicht hat, war das Bewegungsgesetz, das beliebige Bewegungen von Körpern beschreibt. Newton sagt (in moderner Formulierung):

> Die Bewegungs*änderung* eines Körpers hängt von der *Kraft* ab, die auf ihn wirkt.

Betrachten wir den Fallschirmspringer: Zuerst stösst er sich selbst aus dem Flugzeug: Ein Beispiel für die *Muskelkraft*. Die Anziehungskraft der Erde - *Gravitationskraft* genannt - beschleunigt ihn dann. Gleichzeitig macht sich aber eine andere Kraft bemerkbar, die wir in ähnlicher Weise erfahren, wenn wir versuchen, die flache Hand rasch durch ein Wasserbad zu ziehen. Je schneller wir dies tun, umso mehr spüren wir den bremsenden Einfluss der *Reibungskraft* des Wassers. Auf ähnliche Art wird der Fallschirmspringer in der Luft abgebremst, bis sich Luftwiderstand und Gravitationskraft die Waage halten.

In der Natur erleben wir weitere Kräfte am eigenen Leib, zum Beispiel die *Auftriebskraft* des Wassers beim Schwimmen: Auch wenn wir ruhig im Wasser liegen, fallen wir nicht auf den Meeresgrund. Oder wir erfahren die *Schubkraft* eines Flugzeugtriebwerks, wenn wir im startenden Flugzeug sitzen. Weitere Kräfte sind uns weniger vertraut: Die *Coulombkraft* zwischen elektrisch geladenen Körpern sorgt beispielsweise dafür, dass die Blätter eines Stapels mit ganz trockenem Papier zusammenkleben. Die *magnetische Kraft*, wirkt zwischen dem Erdmagneten und der Kompassnadel. Die *Kernkraft* hält die Atomkerne zusammen.

1.3 Die Bewegungsgleichung von Newton

Bei der Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Kraft und Bewegungsänderung hat auch die Masse des Körpers einen Einfluss. Wenn wir annehmen, dass sich die Masse im Laufe der Zeit nicht ändert, dann lautet das Bewegungsgesetz von Newton in moderner Schreibweise:

$$m \cdot a = F$$

In dieser Gleichung bedeuten F die Grösse der Kraft, m die Masse und a die Beschleunigung, welche die Änderung der Geschwindigkeit des Körpers zur Folge hat. *Die Kraft F und die Beschleunigung a -eventuell auch die Masse m - sind aber abhängig von der Zeit und im allgemeinen keine konstanten Grössen!*

Kehren wir zu unserem Fallschirmspringer zurück: Er stösst sich zuerst mit seiner Muskelkraft vom Flugzeug ab. Dann macht sich die Schwerkraft bemerkbar, die nicht mehr durch die Kraft des Flugzeugbodens kompensiert wird. Bei zunehmender Geschwindigkeit wächst auch der Luftwiderstand und damit die Bremskraft des Fallschirms. Kein Wunder ändert sich die Geschwindigkeit im Laufe der Zeit. Und auch diese Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit ist nicht immer gleich: Nachdem der Fallschirmspringer den Fallschirm eine Weile offen hat, sinkt er mit nahezu gleichbleibender Geschwindigkeit zu Boden. In dieser Phase heben sich die Schwerkraft und die Bremskraft des Fallschirms etwa auf und die Geschwindigkeit ändert sich kaum. Im Gegensatz dazu führt die Schwerkraft nach dem Start zu raschem Anwachsen der Geschwindigkeit.

Wenn wir $F = F(t)$ schreiben, wollen wir damit ausdrücken, dass die Kraft von der Zeit t abhängt. Dasselbe gilt für $a = a(t)$. Das Gesetz von Newton lautet dann:

$$m \cdot a(t) = F(t)$$

Dieses Gesetz sagt, wie die Kraft in *jedem Zeitpunkt t* mit der Beschleunigung a zusammenhängt. Die Frage ist nun, ob es gelingt, daraus den globalen Verlauf der Bewegung zu konstruieren.

1.4 Kraft

Wir studieren in der Newton'schen Bewegungsgleichung zuerst die Grösse, die am wenigsten problematisch scheint: Die Kraft. Betrachten wir zwei kugelförmige Massen M und m mit Mittelpunktsabstand r. Newton hat für die zwischen diesen Massen wirkende Gravitationskraft folgende Beziehung gefunden:

$$\text{Gravitationskraft} \quad F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante. In unserem Beispiel mit dem Fallschirmspringer ist am Anfang $r = R + h$, wobei R der Erdradius und h die Absprunghöhe sind. Am Schluss, bei der Landung gilt $r = R$. Die Abstandsänderung beträgt höchstens ein Promille, weil $R \approx 6000$ km und $h \leq 6$ km gelten. Das heisst, dass sich die Gravitationskraft auf den Fallschirmspringer während des Sprungs praktisch nicht ändert.

Ganz anders ist es mit dem Luftwiderstand, der für einen genussreichen Flug sorgt. Nach welchem Gesetz ändert sich der Luftwiderstand bei turbulenter Strömung?

Im wesentlichen sind es vier Faktoren, die den Luftwiderstand beeinflussen:

1. Faktor: Der Luftwiderstand ist proportional zu der grössten Querschnittsfläche A, die senkrecht zur Strömungsrichtung steht.
2. Faktor: Der Luftwiderstand ist proportional zur Geschwindigkeit v im Quadrat.
3. Faktor: Der Luftwiderstand ist proportional zur Luftdichte ρ.
4. Faktor: Der Luftwiderstand hängt von der Form des Körpers ab.

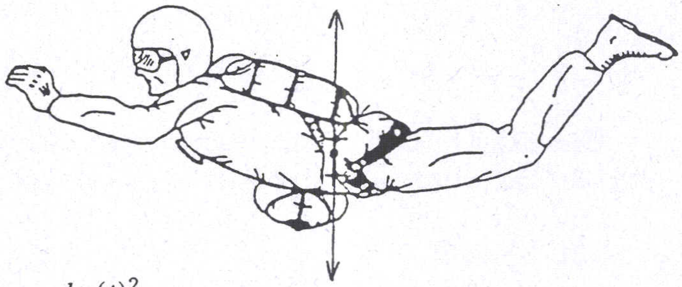
Die Formel

$$F = \frac{1}{2}\rho A c_w v^2$$

für den Luftwiderstand fasst diese vier Faktoren zusammen. c_w bezeichnet den sogenannten Formfaktor. Im Anhang findet sich eine Tabelle, aus der man verschiedene Formfaktoren entnehmen kann. Man stellt fest, dass die Form eines Körpers eine wichtige Rolle für den Luftwiderstand spielt. Körper mit gleicher Querschnittsfläche, aber verschiedener Form können sehr unterschiedlichen Luftwiderstand haben. Aber auch die mit zunehmender Höhe abnehmende Dichte muss beim Fallschirmspringer berücksichtigt werden: Auf Meereshöhe gilt zum Beispiel $\rho \approx 1.25\ \mathrm{kg/m^3}$, in 6000 m Höhe $\rho \approx 0.67\ \mathrm{kg/m^3}$.

1.5 Das Bewegungsgesetz von Newton für den Fallschirmspringer

Welche Kräfte wirken nun insgesamt auf den Fallschirmspringer?



Schwerkraft: $F_1 = mg$

Luftwiderstand: $F_2 = -\frac{1}{2}\rho A c_w v^2 = -kv^2$

Gesamtkraft: $F = F_1 + F_2 = mg - kv^2$

Das *Bewegungsgesetz von Newton* lautet also

$$ma(t) = mg - kv(t)^2$$

Beim Aufstellen dieser Bewegungsgleichung haben wir stillschweigend zwei *Idealisierungen* vorgenommen: In der Realität spielt sich die Bewegung des Fallschirmspringers im dreidimensionalen Raum ab. Wir nehmen an, der Springer falle längs einer Geraden (eindimensionale Bewegung). Weiter rudert der Springer mit seinen Armen, bewegt den Kopf.... Wir betrachten anstelle des Fallschirmspringers nur die Bewegung eines Massenpunktes mit Masse m.
Von Interesse sind für uns im folgenden die Grössen *Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung*. Wir unterscheiden dabei im wesentlichen zwei Phasen:

Phase 1: Fall mit ungeöffnetem Fallschirm
Phase 2: Fall mit geöffnetem Fallschirm

Nach dem Sprung aus dem Flugzeug wird die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers, wenn er den Fallschirm nicht öffnet, zuerst rasch zunehmen. Unter dem Einfluss des Luftwiderstandes wird der Fallschirmspringer aber abgebremst und in einen Schwebezustand übergehen. Ebenso wird sich nach dem Öffnen des Fallschirms wieder ein Schwebezustand einstellen. Es stellen sich deshalb nun unter anderem die folgenden Fragen: Welche Grenzgeschwindigkeiten erreicht der

Fallschirmspringer in den beiden Phasen? Lohnt es sich, den Fallschirm zu öffnen ......? Wie lange geht es, bis der Fallschirmspringer die Grenzgeschwindigkeiten (fast) erreicht?
Wie man sieht, handelt es sich bei der Geschwindigkeit nicht um eine feste Grösse, sondern um eine Funktion der Zeit. Im folgenden geht es also darum, die Funktionen

$$x = x(t) \quad \text{Ortsfunktion}$$

$$v = v(t) \quad \text{Geschwindigkeitsfunktion}$$

$$a = a(t) \quad \text{Beschleunigungsfunktion}$$

zu untersuchen und möglichst genau zu bestimmen. Mit $x(t)$ bezeichnen wir dabei die bis zum Zeitpunkt t zurückgelegte Fallstrecke. Diese Aufgabe scheint im ersten Moment nicht einfach, aber ein kleiner Trost bleibt zumindest: Wenn $a(t) = 0$ ist, das heisst, wenn der Fallschirmspringer mit konstanter Geschwindigkeit fällt, so erhalten wir aus der Bewegungsgleichung die Grenzgeschwindigkeit:

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Für diese Überlegung brauchen wir natürlich die Bewegungsgleichung gar nicht. Wenn der Fallschirmspringer mit konstanter Geschwindigkeit hinunter schwebt, so heisst das nichts anderes, als dass sich die Gravitationskraft und die Reibungskraft aufheben.

In den Fallschirmspringer-Kursen des Paracentro Magadino wird mit dem Wert $v_\infty = 50$ m/s ohne Fallschirm und $v_\infty = 5$ m/s bei geöffnetem Fallschirm gerechnet. Wählt man $m = 80$ kg und $g = 10$ m/s^2 erhält man aus der Gleichung für die Grenzgeschwindigkeit für den freien Fall den Reibungskoeffizient $k \approx 0.3$ kg/m und für den Fall bei geöffnetem Fallschirm $k \approx 30$ kg/m. Der Luftwiderstand bei geöffnetem Fallschirm ist also rund 100 mal grösser als im freien Fall. Diese Werte für k erhält man auch aus $k = \frac{1}{2}\rho A c_w$ mit $\rho = 1.1$ kg/m^3 , $A = 2$ m^2 und $c_w = 0.28$ für den freien Fall, beziehungsweise $A = 60$ m^2 und $c_w = 0.9$ bei geöffnetem Fallschirm.

2 Mathematische Behandlung des Fallschirmspringers

Ausgehend von der Bewegungsgleichung

$$ma(t) = mg - kv(t)^2$$

gibt es nun verschiedene Möglichkeiten, die Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktion zu bestimmen. Welche Methode eingesetzt werden soll, hängt im wesentlichen von den Vorkenntnissen der Schülerinnen und vom Zeitpunkt der Behandlung im Unterricht ab. Wir zeigen im folgenden eine Möglichkeit auf, wie schon in einem sehr frühen Zeitpunkt (ohne Kenntnisse aus der Analysis) der Fallschirmspringer sowohl quantitativ als auch qualitativ behandelt werden kann. Stehen die Werkzeuge aus der Analysis zur Verfügung, geht es um das Lösen einer Differentialgleichung und es bieten sich zwei Varianten an: Eine numerische Lösung und/oder eine analytische Lösung durch Integration. Allen Lösungen gemeinsam ist, dass man aufgrund des Bewegungsgesetzes von Newton, ausgehend von der auf einen Massenpunkt wirkenden Gesamtkraft $F(t)$, die Beschleunigung $a(t)$ bestimmen kann:

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}$$

2.1 Näherungslösungen durch eine Diskretisierung

Es kann durchwegs lohnenswert sein, das Problem des Fallschirmspringers in einem sehr frühen Zeitpunkt im Unterricht zu behandeln und später in der Analysis zu vertiefen. Eine *Näherungslösung* erhalten wir durch eine *Diskretisierung*: Wir betrachten die Bewegung in diskreten Zeitpunkten

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, n\Delta t, \ldots$$

und bezeichnen mit

$$x_n = x(n\Delta t), \quad v_n = v(n\Delta t), \quad a_n = a(n\Delta t)$$

die Werte der Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktion im Zeitpunkt $n\Delta t$.
Aus den Näherungsformeln

$$a_{n-1} \approx \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t}, \qquad v_{n-1} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}$$

und der Bewegungsgleichung erhalten wir eine *rekursive Beschreibung* der Folgen a_n, v_n und x_n:

$$v_n \approx v_{n-1} + a_{n-1}\Delta t$$

$$x_n \approx x_{n-1} + v_{n-1}\Delta t$$

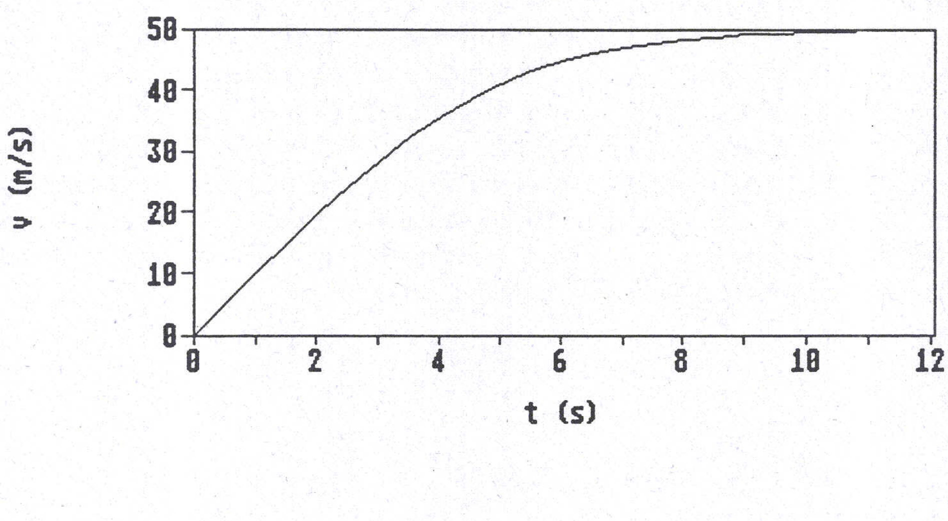
$$a_n \approx g - \frac{k}{m}v_n^2$$

Den Schülerinnen sind die verwendeten Näherungsformeln für v_n und x_n vertraut, da im Physikunterricht die Geschwindigkeit und Beschleunigung meistens gerade so eingeführt werden. Einzig die Formel für die Beschleunigung a_n hängt vom betrachteten physikalischen Problem ab.

Ausgehend von vorgegebenen *Anfangsbedingungen* kann man mit den obigen Rekursionsformeln sehr einfach die Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktion näherungsweise berechnen. Es genügt ein programmierbarer Taschenrechner, geeigneter ist allerdings ein graphikfähiger Taschenrechner, eine Tabellenkalkulation usw. Untenstehend ist das v-t-Diagramm abgebildet, das man für $m = 80$ kg und $k = 0.32$ kg/m bei ungeöffnetem Fallschirm ausgehend von den Anfangsbedingungen

$$a_0 = g \qquad v_0 = 0 \qquad x_0 = 0$$

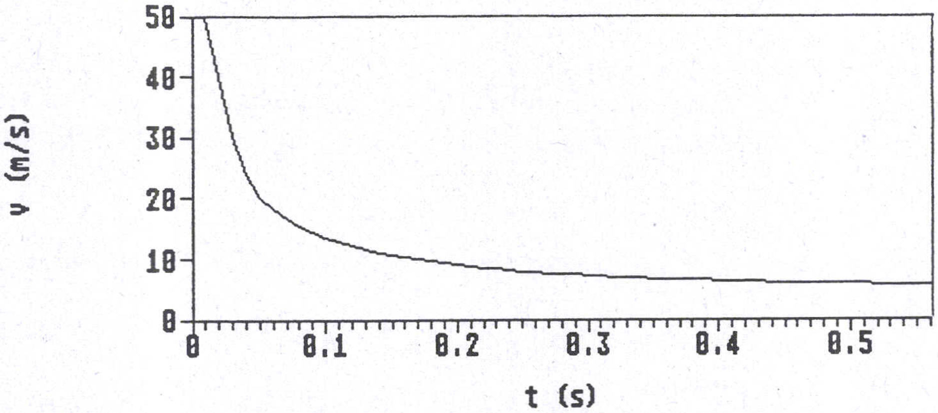
mit dem Zeitschritt $\Delta t = 0.5$ für die ersten 12 Sekunden des Fluges erhält.



Eine Tabellenkalkulation liefert dazu die folgenden numerischen Daten:

t	a	v	x
0.00	10.00	0.00	0.00
0.50	9.90	5.00	0.00
1.00	9.60	9.95	2.50
1.50	9.12	14.75	7.47
2.00	8.50	19.31	14.85
2.50	7.77	23.57	24.50
3.00	6.98	27.45	36.29
3.50	6.16	30.95	50.02
4.00	5.36	34.03	65.49
4.50	4.60	36.71	82.51
5.00	3.90	39.02	100.87
5.50	3.28	40.97	120.38
6.00	2.73	42.61	140.87
6.50	2.26	43.98	162.18
7.00	1.85	45.11	184.17
7.50	1.51	46.04	206.73
8.00	1.23	46.80	229.75
8.50	1.00	47.42	253.16
9.00	0.81	47.92	276.87
9.50	0.65	48.33	300.83
10.00	0.52	48.65	325.00
10.50	0.42	48.92	349.33
11.00	0.34	49.13	373.79
11.50	0.27	49.30	398.36
12.00	0.22	49.44	423.01

Für die zweite Phase des Fluges rechnen wir mit $k = 32$ kg/m. Selbstverständlich muss die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und die zurückgelegte Fallstrecke im Zeitpunkt des Ziehens der Leine berücksichtigt und mit einem kleineren Zeitschritt Δt gerechnet werden. Das untenstehende v-t-Diagramm zeigt den Bremsvorgang, wenn der Fallschirmspringer die Leine nach 12 Sekunden zieht und sich der Fallschirm auf einen Schlag öffnen würde. Interessant sind hier die auftretenden (grossen) Kräfte, denen bei der Konstruktion der Fallschirme speziell Rechnung getragen werden muss. Deswegen öffnet sich zuerst auch ein kleiner Schirm, der etwas abbremst, bevor sich der grosse Fallschirm öffnet und die volle Bremskraft wirksam wird.



Für die Schülerin interessant ist dieses diskrete Modell zur Behandlung des Fallschirmspringers (und natürlich vieler anderer Probleme aus der Mechanik) aus verschiedenen Gründen. In einem frühen Zeitpunkt der Physik werden oft nur Bewegungen mit konstanter Beschleunigung und entsprechend einfacher Modellbildung behandelt. Die Physikwelt der Schülerin ist deshalb in vielen Fällen geprägt durch Formeln wie $v = s/t$, $s = \frac{1}{2}gt^2$, ... und es fehlt das Bewusstsein, dass diese Formeln nur sehr stark idealisierte Modelle beschreiben. Beim Fallschirmspringer kann die Schülerin ein Stück echter, realistischer Physik miterleben ohne gleichzeitig durch einen mathematischen Formel- und Begriffsapparat erdrückt zu werden. Sie kann die Parameter ohne Aufwand variieren und qualitative Überlegungen anstellen: Welchen Einfluss hat die Masse des Fallschirmspringers, welchen Einfluss die Form des Fallschirms? Ja! Die Schülerin kann das Modell sogar ohne weitere Probleme verbessern: Wie steht es zum Beispiel bei einem Sprung aus grosser Höhe, wenn man die Luftdichte nicht mehr als konstant voraussetzt? Es ist einzig die Bewegungsgleichung von Newton, die der neuen Situation angepasst werden muss.

2.2 Differentialgleichungen

Behandelt man den Fallschirmspringer im Rahmen der Differential- und Integralrechnung, so ist zuerst der Zusammenhang zwischen den Funktionen $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ herauszustreichen. Es stellen sich die beiden folgenden Probleme:

Problem 1:	Gegeben die Funktion $x(t)$, gesucht die Funktionen $v(t)$ und $a(t)$.
Problem 2:	Gegeben die Funktion $a(t)$, gesucht die Funktionen $v(t)$ und $x(t)$.

Im Laufe des vorangegangen Unterrichts wird man bereits die fundamentalen Beziehungen zwischen der Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktion hergeleitet haben:

$$v(t) = \dot{x}(t)$$

Die Geschwindigkeitsfunktion ist die
Ableitung der Ortsfunktion!

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

Die Beschleunigungsfunktion ist die
Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion!

Die Schülerinnen wissen also, wie man durch Ableiten aus der Ortsfunktion die Geschwindigkeitsfunktion und aus der Geschwindigkeitsfunktion die Beschleunigungsfunktion erhält. Jetzt wenden wir uns dem zweiten, viel wichtigeren Problem zu. Das fundamentale Bewegungsgesetz von Newton sagt

$$m \cdot a(t) = F(t)$$

Kennt man also die auf den Massenpunkt einwirkende Gesamtkraft, so kennt man auch die Beschleunigungsfunktion

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Gelingt es uns aus $a(t)$ die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ und die Ortsfunktion $x(t)$ herzuleiten, so haben wir auch das zweite Problem gelöst.

Betrachten wir den freien Fall aus geringer Höhe und vernachlässigen wir den Luftwiderstand, so liefert das Gesetz von Newton wegen $F(t) = mg$ die einfache Bewegungsgleichung

$$ma(t) = mg$$

und mit $a(t) = \ddot{x}(t)$

$$m\ddot{x}(t) = mg$$

Daraus erhalten wir

$$\ddot{x}(t) = g \quad \text{bzw.} \quad \dot{v}(t) = g$$

Wir haben Gleichungen für die Funktionen $x(t)$ bzw. $v(t)$ erhalten. Da in diesen Gleichungen Ableitungen der jeweilen gesuchten Funktionen vorkommen, spricht man von *Differentialgleichungen*. Als Lösung der Differentialgleichung für $v(t)$ erhält man

$$v(t) = gt + c_1, \quad c_1 \in I\!R$$

Welche Bedeutung hat die Konstante c_1? Nun, erstaunlich ist es nicht, dass wir für unsere Differentialgleichung viele Lösungen erhalten haben. Wir könnten den Körper ebenso gut in die Höhe werfen, anstatt ihn fallen zu lassen und seine Bewegung wird immer noch durch dieselbe Differentialgleichung beschrieben. Erst wenn wir die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = v(0)$ vorgeben, ist das physikalische Problem eindeutig bestimmt und damit auch die Lösung der Differentialgleichung:

$$v(t) = gt + v_0$$

Um die Funktion $x(t)$ zu berechnen , verwenden wir

$$v(t) = \dot{x}(t) = gt + v_0$$

und erhalten

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + c_2$$

Wiederum ist die Lösung dieser Differentialgleichung für $x(t)$ nur eindeutig bestimmt, wenn wir die Position x_0 des Fallschirmspringers zur Zeit $t = 0$ vorgeben:

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

Ausgehend vom Gesetz von Newton haben wir unter Verwendung der entwickelten mathematischen Instrumente das Problem 2 im einfachen Fall ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes vollständig gelöst.

2.3 Die Differentialgleichung für den Fallschirmspringer

Wie steht es nun mit dem Fallschirmspringer? Ausgehend vom Bewegungsgesetz von Newton erhalten wir die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) = mg - k\dot{x}(t)^2$$

Wenn wir also eine Funktion $x(t)$ bestimmen können, welche diese Gleichung löst, haben wir auch das Problem des Fallschirmspringers ein für allemal gelöst! So einfach ist es aber nicht! Auf den ersten Anhieb sehen wir wohl die Lösung der obigen Differentialgleichung kaum. Auch bei längerem Hinsehen werden wir wohl nicht viel klüger. Eine Lösungsformel wie etwa bei quadratischen Gleichungen ist nicht offensichtlich. Immerhin: Wenn uns ein himmlisches Orakel eine Lösung $x(t)$ präsentieren würde, könnten wir durch Ableiten und Einsetzen in die Gleichung rasch nachprüfen, ob es sich wirklich um eine Lösung handelt oder nicht. Hier sind die Lösungen:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t\right)$$

$$x(t) = \frac{m}{k} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t\right)\right)$$

Wenn wir uns zum Ziel setzen, die Differentialgleichung doch noch selber zu lösen, haben wir verschiedene Möglichkeiten. Wir können uns auf eine Näherungslösung beschränken und ein numerisches Verfahren entwickeln, wir können eine weitere Vereinfachung des Modells vornehmen oder wir können mit mathematischen Werkzeugen aus der Integralrechnung versuchen eine analytische Lösung der Differentialgleichung herzuleiten.

Das *Eulerverfahren* ist wohl die einfachste und bekannteste Methode zur näherungsweisen Lösung von Differentialgleichungen. Das Verfahren beruht auf einer Diskretisierung der kontinuierlichen Bewegung des Fallschirmspringers. Das Verfahren wird in den meisten Lehrmitteln zur Analysis beschrieben. Mehr brauchen wir hier nicht zu sagen. Unsere numerische Lösung zu Beginn der Untersuchungen – ohne Kenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung ist nichts anderes als das Eulerverfahren!

Das ursprüngliche Problem kann durch Integration auch exakt gelöst werden. Eine Separation der Variablen und eine Partialbruchzerlegung führen zum Ziel. Diese Lösung findet sich auch in vielen Lehrmitteln zur Analysis. Wir wollen deshalb hier nicht näher darauf eingehen. Für die Schülerin in einer Mittelschule dürfte diese Lösung der Differentialgleichung sowieso wenig zur Klarheit beitragen, im Gegenteil! Zudem führt eine weitere Verfeinerung des Modells, zum Beispiel unter Berücksichtigung einer mit der Höhe exponentiell abnehmenden Luftdichte, schnell auf Differentialgleichungen, die nicht mehr exakt gelöst werden können.

2.4 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben gesehen, dass bei der Untersuchung der Bewegung des Fallschirmspringers fünf Grössen eine Rolle spielen:

Kraft, Masse, Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung

Die mathematische Formulierung dieses Zusammenhanges führt auf Differentialgleichungen. Mit anderen Worten: Ein ansehnlicher Teil der Wirklichkeit lässt sich mit dem mathematischen Begriff der Differentialgleichung recht gut erfassen. Die mathematischen Schwierigkeiten, die Differentialgleichungen bereiten, sind aber im allgemeinen gewaltig. Obwohl wir bereits massive Vereinfachungen bei unserer Modellbildung vorgenommen haben (Massenpunkt, eindimensionale Bewegung), sind wir nicht in der Lage, die resultierende Differentialgleichung mit elementaren Mitteln zu lösen. Angesichts der komplizierten Bewegung und der sich ständig ändernden Kräfte ist das eigentlich nicht erstaunlich! Da Differentialgleichungen aber einer der zentralen Begriffe der Mathematik sind, ist es trotz der damit verknüpften Schwierigkeiten wünschenswert, auch im Unterricht an Mittelschulen, Differentialgleichungen zu behandeln. Stellt man die Modellbildung und das Konzept "Differentialgleichung" in den Vordergrund, d. h. legt man das Schwergewicht nicht auf eine analytische Lösung der Differentialgleichung, so ist es schon mit geringen Vorkenntnissen möglich, auch kompliziertere Bewegungsabläufe zu untersuchen. Dieses Vorgehen ist nur schon deshalb gerechtfertigt, weil zum Beispiel geringfügige Erweiterungen des Modells für den Fallschirmspringer auf Differentialgleichungen führen, die nicht mehr geschlossen gelöst werden können.

Je nach der zur Verfügung stehender Zeit und den Mitteln, können natürlich die Untersuchungen am Modell des Fallschirmspringers ausgeweitet werden: Welche Bremskräfte wirken unmittelbar nach dem Öffnen des Fallschirms? Wie steht es mit den Pendelbewegungen des Fallschirmspringers, die er durch geschickte Bewegungen des Körpers auszugleichen versucht? Welche Periodenlänge hat diese Bewegung ungefähr? Wie könnte das Modell als solches verbessert werden? Welcher physikalischen Vereinfachung des Modells entspricht die mathematische Vereinfachung mittels der Taylorapproximation? Eine Fülle von Fragestellungen und Problemen, speziell geeignet für den Unterricht in der Angewandten Mathematik!

Anhang: Tabelle verschiedener Formfaktoren

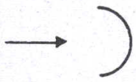
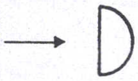
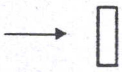
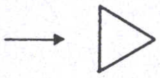
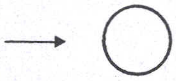
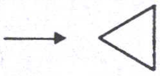
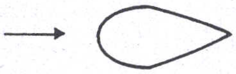
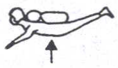
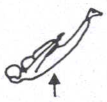
Bezeichnung des Körpers	Form	Widerstands-beiwert c_W
1. Halbkugel hohl		1,33
2. Halbkugel		1,17
3. Scheibe		1,1
4. Kegel		0,5
5. Kugel		0,2–0,47
6. Kegel		0,20
7. Stromlinienkörper		0,04–0,08
8. Fallschirm		0,9
9. Fallschirmspringer Pos. x		0,28
10. Fallschirmspringer Pos. Flêche 45°		0,2
11. Fallschirmspringer Pos. Piqué 90°		0,1

Bild 8: Widerstandsbeiwerte c_W

Quelle:
Das Fallschirmspringen, Leitfaden zur Vorbereitung auf die Prüfung für Fallschirmspringer.
Herausgeber: Aero-Club der Schweiz.
Dieser Leitfaden enthält eine Fülle von Informationen und Daten zum Fallschirmspringen und ist für eine weitere Bearbeitung des Themas sehr zu empfehlen.

Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89-01	H. Walser	Fraktale
89-02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89-03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89-04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90-01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90-02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
90-03	U. Kirchgraber	Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II
91-01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Bahandlung in der Schule
91-02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91-03	M. Federer	Preistheorie
91-04	M. Gauglhofer	Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen
92-01	U. Kirchgraber	Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen
93–01	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Annäherung an den Goldenen Schnitt
93–02	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Perspektive und Axonometrie
93–03	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Verzweigungsphänomene
93–04	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Der Fallschirmspringer