Übung 2: Fachwerke

Aufgabe 1 Musterlösung

Das Rahmenwerk in Abb. 1 besteht aus biegesteifen Stäben und Knoten. Es wird auf seiner Unterseite mittig mit einer abwärts gerichteten, vertikalen Kraft belastet und die Verschiebung des Kraftangriffspunktes wird gemessen. Beschreiben Sie qualitativ, welchen Einfluss folgende Veränderungen auf die Verschiebung des Kraftangriffspunktes ausüben und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) *Alle steifen Knoten werden durch Gelenke ersetzt*
Kein wesentlicher Unterschied kann beobachtet werden, da Fachwerk statisch bestimmt
(b) *Alle Diagonalstäbe werden entfernt*
Die Verschiebung im Kraftangriffspunkt wird merklich größer, da der Schub nicht mehr über die Diagonalstäbe aufgenommen werden kann; Der Schub muss zusätzlich von den Stäben und Knoten aufgenommen werden; als Folge nimmt die Verformung zu
(c) Alle steifen Knoten werden durch Gelenke ersetzt und alle Diagonalstäbe werden entfernt
Das Fachwerk ist statisch unterbestimmt (Mechanismus) und fällt in sich zusammen

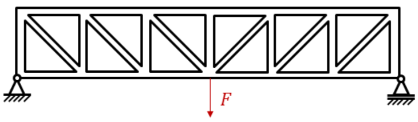
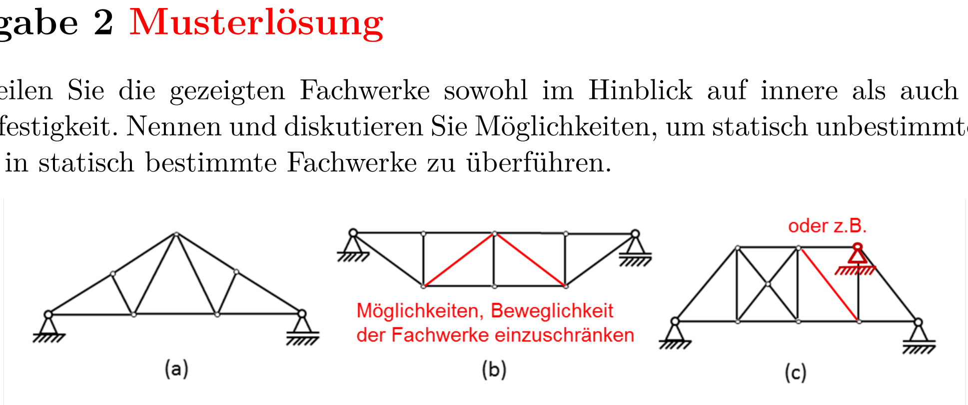


Abbildung 1: Rahmenfachwerk

Aufgabe 2 Musterlösung

Beurteilen Sie die gezeigten Fachwerke sowohl im Hinblick auf innere als auch äußere Standfestigkeit. Nennen und diskutieren Sie Möglichkeiten, um statisch unbestimmte Fachwerke in statisch bestimmte Fachwerke zu überführen.



(a) $f = 2 \cdot 7 - (11 + 3) = 0$

→ Statisch bestimmt (äußerlich und innerlich)

(b) $f = 2 \cdot 8 - (11 + 3) = 2$

→ Statisch unterbestimmt

(c) $f = 2 \cdot 9 - (15 + 3) = 0$

→ Grad der statischen Bestimmtheit = 0, aber beweglich (Teilfachwerke über- und unterbestimmt)

Aufgabe 3 Musterlösung

Was versteht man unter Nullstäben und welche Bedeutung kommt ihnen in Fachwerken zu? Welche Regeln gelten zur Erkennung von Nullstäben? Identifizieren Sie die Nullstäbe im unten abgebildeten Fachwerk für die beiden unterschiedlichen Lastfälle. (aus [1])

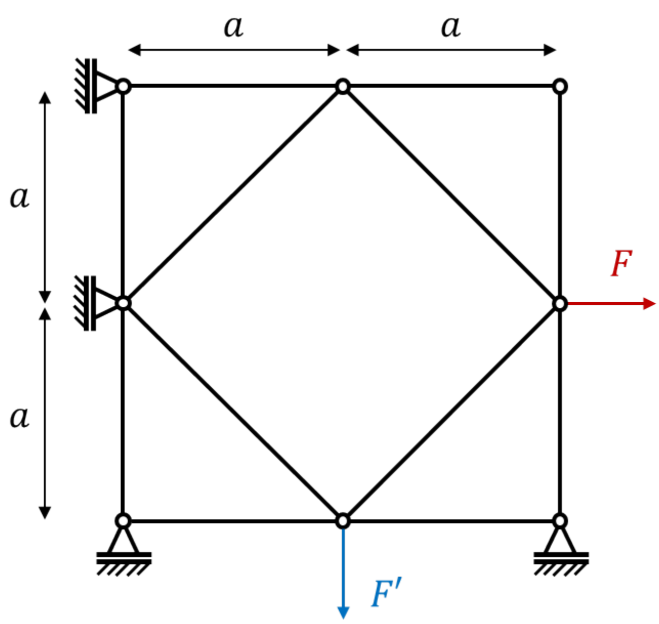
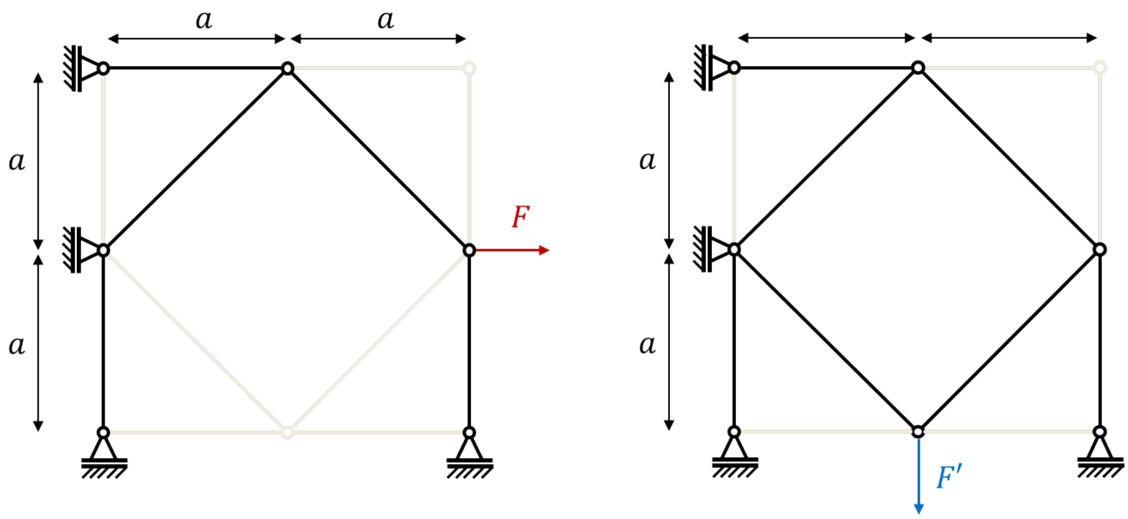


Abbildung 2: Nullstäbe identifizieren

Nullstäbe sind diejenigen Stäbe in einem Fachwerk, welche keine Kräfte aufnehmen, aber dennoch zur Wahrung der statischen Bestimmtheit des gesamten Fachwerks notwendig sind

Regeln zur Erkennung von Nullstäben:

- Die Stäbe an einem unbelasteten, zweistäbigen Knoten sind Nullstäbe
- Wenn an einem zweistäbigen Knoten die äussere Last in Richtung eines Stabes wirkt, so ist der zweite Stab ein Nullstab
- Wenn an einem unbelasteten dreistäbigen Knoten zwei Stäbe gleiche Richtung haben, dann ist der dritte Stab ein Nullstab



Aufgabe 4 Musterlösung

Weisen Sie die statische Bestimmtheit des in Abb. 3 gezeigten Fachwerks nach. Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen und ermitteln Sie anschließend die Stabkraft S_1 in Stab 1 über das Ritter'sche Schnittverfahren sowie die Stabkräfte S_2 bis S_8 in den Stäben 2 bis 8 über das Knotenpunktverfahren (Aufgabe basierend auf [1]).

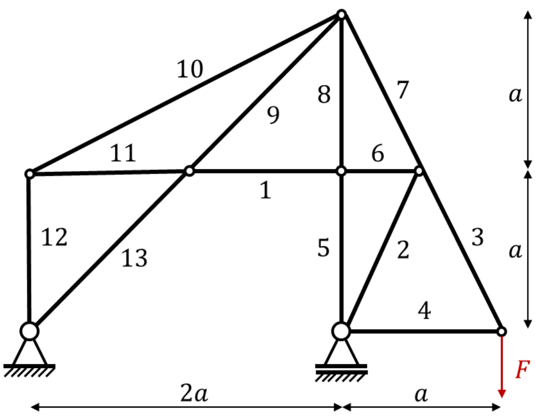


Abbildung 3: Ritter'sche Schnittverfahren und Knotenpunktverfahren

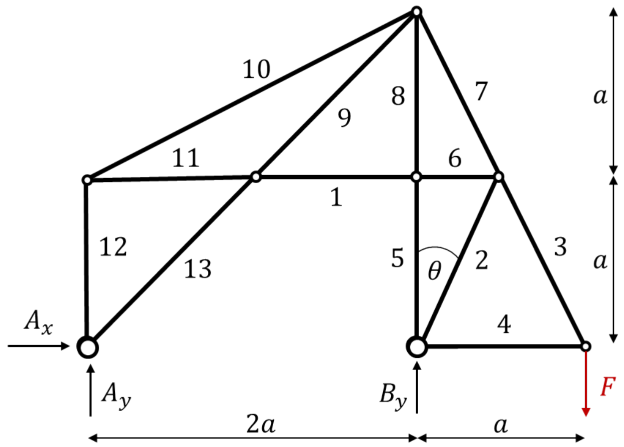
Statische Bestimmtheit

$$f = 2 \cdot k - (s + l) = 0$$

Das Fachwerk ist statisch bestimmt (innerlich und äusserlich)

Lagerreaktionen

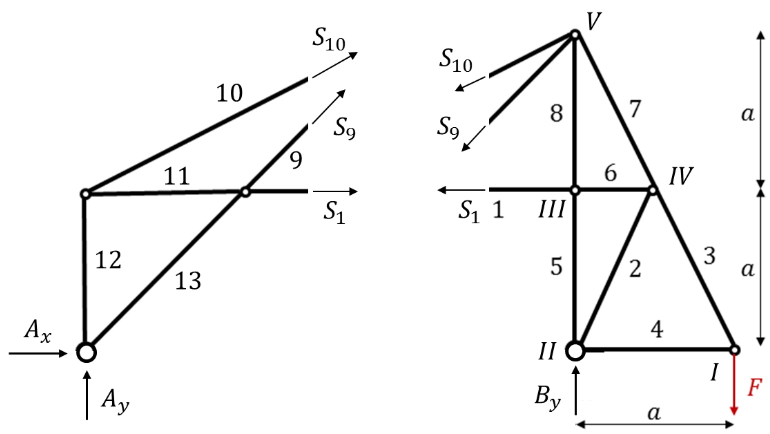
$$F_{Rx} : A_x = 0$$
$$F_{Ry} : A_y + B_y - F = 0$$
$$M_B : A_y \cdot 2a + F \cdot a = 0$$
$$\rightarrow A_y = -\frac{F}{2}, B_y = \frac{3}{2}F$$



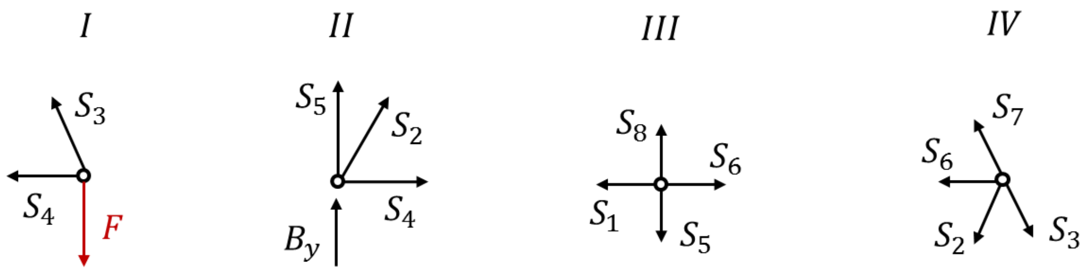
Ritterschnitt

Schnitt durch die Stäbe 1, 9 und 10 und Aufstellen des Momentengleichgewichts um Knoten V im rechten (oder linken) Teilsystem (Schnitt durch Stäbe 1, 7 und 8 wäre ebenso möglich)

$$M_V : S_1 \cdot a + F \cdot a = 0 \rightarrow S_1 = -F$$



Knotenpunktverfahren



$$cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, sin(\theta) = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$I_y : S_3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - F = 0 \rightarrow S_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}F$$
$$I_x : -S_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - S_4 = 0 \rightarrow S_4 = -\frac{1}{\sqrt{5}}S_3 = -\frac{1}{2}F$$

$$II_x : S_4 + S_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \rightarrow S_2 = -\sqrt{5}S_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}F$$
$$II_y : B_y + S_5 + S_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \rightarrow S_5 = -B_y - \frac{2}{\sqrt{5}}S_2 = -\frac{5}{2}F$$

$$III_x : S_6 = S_1 = -F$$
$$III_y : S_8 = S_5 = -\frac{5}{2}F$$

$$IV_y : S_7 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - S_3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - S_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \rightarrow S_7 = S_2 + S_3 = \sqrt{5}F$$

Aufgabe 5 Musterlösung

Prüfen Sie die statische Bestimmtheit des in Abb. 4 gegebenen Fachwerks und ermitteln Sie sämtliche Stabkräfte.

Musterlösung siehe Skript S. 52 ff. und/oder slides

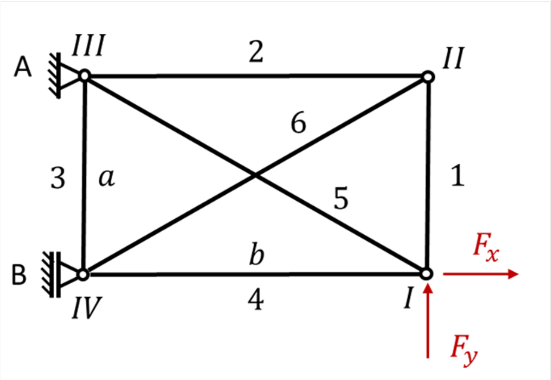
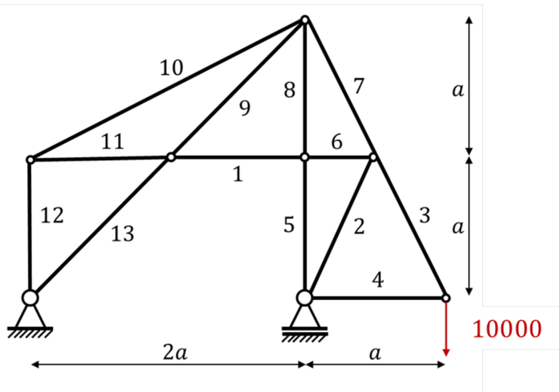


Abbildung 4: Kraftgrössenverfahren

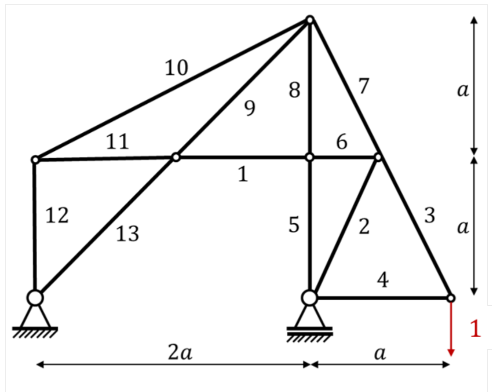
Aufgabe 6 Musterlösung

Berechnen Sie für das in Aufgabe 4 analysierte Fachwerk die Verschiebung des Kraftangriffspunktes in Richtung der gegebenen Kraft ($F = 10000\,\mathrm{N}$). Die Stäbe sind aus Aluminium mit einer Querschnittsfläche von A=400 mm^2 und einem E-Modul von 70000 MPa ($a = 2\,\mathrm{m}$). Benutzen Sie für die fehlenden Stabkräfte:
$S_9 = S_{13} = 0$,
$S_{10} = \sqrt{5}/2 \cdot F$,
$S_{11} = -F$,
$S_{12} = 0.5 \cdot F$.

0-System (Grundbelastung)



1-System (Einheitslast)



Systemtrennung in 0- und 1-System

- 0-System: Im 0-System wirkt die Grundbelastung; die Stabkräfte entsprechen daher den Stabkräften wie in Aufgabe 4 ermittelt
- 1-System: Im 1-System wird eine Einheitslast an Knoten I in Richtung der gesuchten Verschiebung angebracht; Aufgrund der Richtungsgleichheit der äusseren Kraft und der Einheitslast erhält man die Stabkräfte im 1-System durch Division der jeweiligen Stabkraft im 0-System durch den Betrag der angreifenden Kraft (hier$10000N$)

Verschiebung des Kraftangriffspunktes in Richtung der Kraft

$\delta_{01} = \sum_{r=1}^{s} \frac{S_{0r} S_{1r}}{E_r A_r} l_r = \frac{S_{01} S_{11}}{E_1 A_1} l_1 + \frac{S_{02} S_{12}}{E_2 A_2} l_2 + \ldots + \frac{S_{013} S_{113}}{E_{13} A_{13}} l_{13}$

$E_r A_r = EA, S_{1r} = \frac{S_{0r}}{F}$

$$\delta_{01} = \frac{1}{EA \cdot F}(S_1^2 \cdot a + S_2^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} a + S_3^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} a + S_4^2 \cdot a + S_5^2 \cdot a + S_6^2 \cdot \frac{a}{2} + S_7^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} a + S_8^2 \cdot a + S_9^2 \cdot \sqrt{2} a + S_{10}^2 \cdot \sqrt{5} a + S_{11}^2 \cdot a + S_{12}^2 \cdot a + S_{13}^2 \cdot \sqrt{2} a) \quad (0.1)$$

$$\delta_{01} = \frac{1}{EA \cdot F}(F^2 \cdot a + \frac{5}{4}F^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4}F^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}F^2 \cdot a + \frac{25}{4}F^2 \cdot a + F^2 \cdot \frac{a}{2} + 5F^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a \\ + \frac{25}{4}F^2 \cdot a + \frac{5}{4}F^2 \cdot \sqrt{5}a + F^2 \cdot a + \frac{1}{4}F^2 \cdot) \tag{0.2}$$

$\delta_{01} = \frac{Fa}{EA} \cdot \frac{31+10\sqrt{5}}{2} = 26,68 \cdot \frac{Fa}{EA} = 19,06\,\mathrm{mm}$

Literatur

[1] H. Ulbrich, H.J. Weidemann, F. Pfeiffer, and R. Zander. *Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen.* Lehrbuch Maschinenbau. Vieweg+Teubner Verlag, 2006.