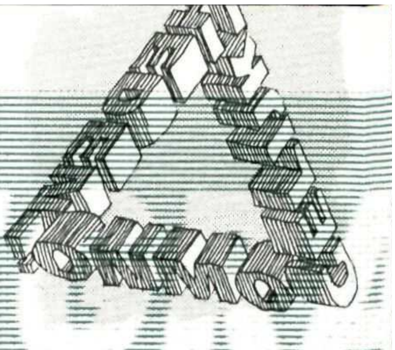


In het wiskundelokaal van de Digitale School bevindt zich een link naar de Integrator, een programma dat van een heleboel functies de primitieve kan vinden. De Integrator kan echter niet alles…

Primitiveren

Klaas Pieter Hart

De oude Grieken konden van veel figuren de oppervlakte bepalen maar beschikten niet over een algemene methode. In de zeventiende eeuw werd het differentiëren uitgevonden door Newton en Leibniz. Daarna kwam integreren, dit is het omgekeerde van differentiëren. De oppervlakte onder de grafiek van een functie f is de integraal $\int_b^a f(x)\,dx$ en op school leer je een eenvoudige methode om deze te berekenen: zoek een functie $F(x)$ waarvoor geldt dat $F'(x) = f(x)$. Er geldt dan

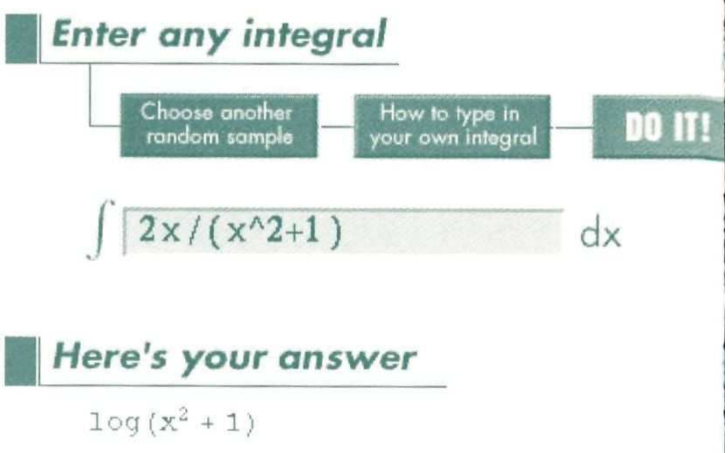
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

De functie $F(x)$ heet een *primitieve* van $f(x)$. Functies kun je gemakkelijk en mechanisch differentiëren, maar het omgekeerde proces, primitiveren, is moeilijker.

Door de eeuwen heen zijn van heel wat functies primitieven bepaald; er zijn dikke tabellenboeken gemaakt waar je die op kunt zoeken. Zo'n tien, twintig jaar geleden is men gaan proberen of men computers kon leren differentiëren en primitiveren. Dat is min of meer gelukt. Eén van de resultaten is de Integrator (www.integrals.com), ook te vinden in het wiskundelokaal van de Digitale School (zie Pythagoras nr. 5). Deze Integrator kan van een heleboel functies een primitieve bepalen. We laten een drietal voorbeelden zien.

De eerste twee antwoorden kun je zelf controleren (differentieer de antwoorden maar). De Integrator kan je dus bij een heleboel integreersommen goed helpen. Maar aan het derde antwoord zul je niet veel hebben, want wat is $\mathrm{Erf}(x)$ nu weer? Daar kun je achter komen door op de 'How to type in your own integral' knop te klikken, vervolgens op 'Higher mathematical functions' en tenslotte op 'Error function and related functions'. Veel wijzer word je daar niet van, je ziet namelijk dat $\mathrm{Erf}[x]$ de 'Error function' is maar je krijgt verder geen formule.

We geven het nog niet helemaal op want het programma dat achter de Integrator zit heet Mathematica. Dit programma kan een heleboel symbolisch rekenwerk verrichten en geeft uitgebreide hulp over alles waar het voor geprogrammeerd is. Als je om hulp over de functie $\mathrm{Erf}[x]$ vraagt dan vertelt Mathematica je dat



$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Deze informatie komt neer op $\int e^{-x^2} dx = \int e^{-x^2} dx$ en daar schieten we natuurlijk niet veel mee op. Is de formule voor de primitieve van e^{-x^2} misschien zo ingewikkeld dat niemand hem op wil schrijven?

Primitiveren kan niet altijd

Primitiveren is veel lastiger dan differentiëren. Veel functies kun je primitiveren door afgeleiden te herkennen. De afgeleide van x^{n+1} is $(n+1)x^n$ en daarom is de primitieve van x^n gelijk aan $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$. Behalve voor $n = -1$, want daar gaat deze formule niet op. Op school leer je dat $1/x$ de afgeleide is van $\ln x$ en daarmee heb je de primitieve van $1/x$ te pakken. De functie $\ln x$ is een geheel 'nieuwe' functie. Maar waarom hebben we $\ln x$ eigenlijk nodig? Waarom kunnen we de primitieve van $1/x$ niet opbouwen uit machten van x door middel van optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen? Waarom kan de uitdrukking

$$\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{2x}} - 3x^2}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{x^3}}$$

geen primitieve van $1/x$ zijn? Wel, we kunnen aantonen dat dat niet kan! We kunnen zelfs laten zien dat de primitieve van $1/x$ niet door middel van optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen opgebouwd kan worden uit machten van x. Om te beginnen kun je elke samenstelling terugbrengen tot de vorm $P(x)/Q(x)$, waar $P(x)$ en $Q(x)$ polynomen zijn. Zo is de bovenstaande uitdrukking te schrijven als

$$\frac{-12x^6 - 6x^5 + 4x^4}{2x^5 + x^4 + 4x + 2}.$$

Stel daarom dat de primitieve van $1/x$ gelijk is aan $P(x)/Q(x)$, waarbij de polynomen $P(x)$ en $Q(x)$ geen gemeenschappelijk nulpunt hebben (deze nulpunten kun je wegdelen). Dit betekent

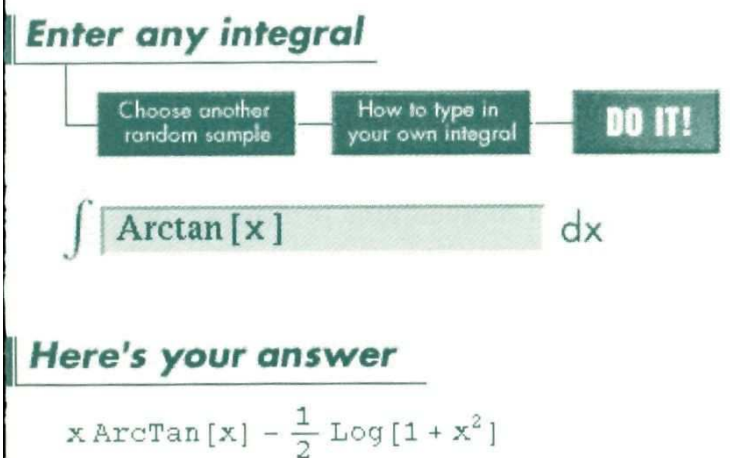
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

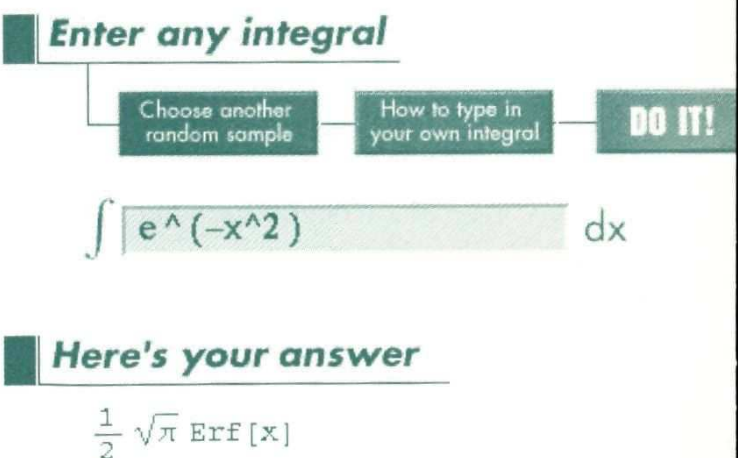
Links en rechts differentiëren geeft

$$\frac{1}{x} = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)},$$

en door kruislings vermenigvuldigen krijgen we

$$Q(x)^2 = x\big(P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)\big).$$





We redeneren nu als volgt. Omdat het rechterlid een nulpunt heeft in $x=0$ geldt dit ook voor het linkerlid. Dus ook $Q(x)$ heeft een nulpunt in $x=0$ en is dus te schrijven als cx^m+ hogere machten van x. Deze m heet de multipliciteit van het nulpunt. Dus $Q^2(x)$ heeft multipliciteit $2m$.
Van het rechterlid kunnen we ook de multipliciteit berekenen. De factor x heeft multipliciteit 1. De multipliciteit van de factor $P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)$ is lastiger. Omdat $Q(x)$ multipliciteit m heeft, heeft $Q'(x)$ multipliciteit $m-1$ (differentieer $Q(x)$ maar). Daarom heeft ook $P(x)Q'(x)$ multipliciteit $m-1$, want $P(x)$ heeft geen nulpunt in $x=0$ ($P(x)$ en $Q(x)$ hebben geen nulpunten gemeenschappelijk). Dus $P(x)Q'(x) = cx^{m-1}+$ hogere machten van x. Daarentegen zijn de exponenten van de machten van x in $P'(x)Q(x)$ minstens m. Dus is $P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x) = cx^{m-1}+$ hogere machten van x. Onze conclusie is dat $x(P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x))$ multipliciteit m heeft.

Vergelijken we nu de multipliciteiten links en rechts, dan krijgen we $2m=m$. Dus $m=0$. Dit is in tegenspraak met het feit dat $Q(x)$ een nulpunt heeft in $x=0$. Dit betekent dat de primitieve van $1/x$ niet beschreven kan worden met een (eindige) combinatie van machten van x. De primitieve van $1/x$ is echter wel degelijk een nette functie, namelijk $\ln x$.

In de vorige eeuw begon men het vermoeden te krijgen dat lang niet elke functie met behulp van een 'mooie' formule te primitiveren is. Net als de primitieve van $1/x$ niet met machten van x te beschrijven is, is de primitieve van e^{-x^2} niet met behulp van machten van x, wortels, e-machten en logaritmen, goniometrische functies en hun inversen te beschrijven. Een functie die wèl zo te beschrijven is noemen we *elementair*. De Franse wiskundige Liouville (1809-1882) ontdekte een stelling waarmee je van een heleboel functies kunt zien of de primitieve een elementaire functie is. De manier waarop je deze stelling toepast is vergelijkbaar met wat we hierboven gedaan hebben, maar zou hier veel te ver voeren. Liouville toonde aan dat e^{-x^2} geen elementaire primitieve heeft. Vandaar dat $\int e^{-x^2}\,dx$ een eigen naam gekregen heeft, de error functie.

Computer-algebra

De Integrator gebruikt het programma Mathematica. Dit is een voorbeeld van een computer-algebra programma. Er zijn meer van dergelijke programma's, bijvoorbeeld Maple en Derive. Deze programma's kunnen symbolisch differentiëren en primitiveren. Deze programma's zijn handig als je een probleem hebt dat gewoon te veel tijd en papier zou kosten als je het met de hand op zou moeten lossen. De primitieve van $\sin^5(x)$ kun je best met de hand vinden en het is een nuttige oefening dat te doen, maar soms is het gewoon handig om het door een computer te laten doen. De laatste decennia zijn er algoritmen bedacht die van de meeste bekende functies (en een heleboel andere) kunnen vaststellen of ze een elementaire primitieve hebben en hoe die primitieve er dan uitziet. In de meeste computer-algebra programma's zijn dit soort algoritmen ingebouwd.