# Skriptum Personenversicherungsmathematik

Stefan Gerhold
FAM (Finanz- und Versicherungsmathematik)
TU Wien

30. November 2022

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Vorwort

Die beiden ersten Kapitel diese Skriptums (Versicherung auf zwei Leben, Vertragsänderungen) wiederholen teilweise Stoff aus der Vorlesung Lebensversicherungsmathematik. Die weiteren behandelten Themen sind aus dem Inhaltsverzeichnis ersichtlich. Die vierstündige Vorlesung Personenversicherungsmathematik an der TU Wien enthält z.Z. folgende weitere Teile, für die es separate Unterlagen gibt:

- Erstellung von Sterbetafeln (siehe die Papers [8, 9], aber auch Abschnitt 13 dieses Skriptums)
- Pensionskassen (Handout von Hartwig Sorger)
- Fondsgebundene Lebensversicherung (Handout von Martin Krammer)
- Krankenversicherungsmathematik (Skriptum von Karl Metzger)

Ich bedanke mich bei Brigitte Stadler und Verena Köck, die mir ihre Mitschriften zur Verfügung stellten. Teile der geTEXten Mitschrift von Brigitte Stadler wurden für dieses Skriptum verwendet.

# 2 Versicherung auf zwei Leben

Paar mit Altern $x, y$, Restlebensdauern unabhängig[1], gleiche Sterbetafel für $x$ und $y$. Lebende Paare, die man aus den lebenden Personen mit Alter $x$ bzw. $y$ bilden kann:

$$\ell_{xy} = \ell_x \cdot \ell_y$$

Wahrscheinlichkeit, dass das Paar $(x, y)$ nach $t$ Jahren noch lebt:

$$ {}_tp_{xy} = \frac{\ell_{x+t,y+t}}{\ell_{x,y}} = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \cdot \frac{\ell_{y+t}}{\ell_y} = {}_tp_x \, {}_tp_y \tag{2.1}$$

Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person in den nächsten $t$ Jahren stirbt:

$${}_tq_{xy} = 1 - {}_tp_{xy}$$

Wahrscheinlichkeit, dass beide in den nächsten $t$ Jahren sterben:

$${}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x \, {}_tq_y$$

[1] Gemeinsame Unfälle von versicherten Ehepaaren werden z.B. ignoriert.

Wahrscheinlichkeit, dass nach $t$ Jahren noch mindestens 1 lebt:

$$ {}_tp_{\overline{xy}} = 1 - {}_tq_{\overline{xy}} = 1 - {}_tq_x\, {}_tq_y = 1 - (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y) = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x\, {}_tp_y \quad (2.2) $$

Wahrscheinlichkeit, dass nach $t$ Jahren noch genau einer lebt:

$$ \begin{aligned} \underbrace{\mathbb{P}[y \text{ lebt}, x \text{ tot}] + \mathbb{P}[x \text{ lebt}, y \text{ tot}]}_{\text{Ereignisse disjunkt}} &= {}_tp_y(1 - {}_tp_x) + {}_tp_x(1 - {}_tp_y) \\ &= {}_tp_x + {}_tp_y - 2\, {}_tp_x\, {}_tp_y \qquad (2.3) \end{aligned} $$

Alternative Herleitung: (2.3)+(2.1) muss (2.2) ergeben.
Wahrscheinlichkeit, dass der 2. Tod in das $t$-te Jahr fällt:

$$ {}_tq_{\overline{xy}} - {}_{t-1}q_{\overline{xy}} $$

(nach $t$ Jahren beide tot, im Vorjahr aber noch nicht)

## 2.1 Kommutationszahlen

Diskontierte Anzahl der lebenden Paare:

$$ D_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}} \ell_{xy}, $$

mit Diskontierungsfaktor $v = \frac{1}{1+i}$.

## 2.2 Versicherungstarife auf zwei Leben

- Erlebensversicherung: zahlt nach $n$ Jahren 1, falls beide Personen leben.
  Barwert (stochastisch): $v^n \mathbf{1}_{\{\text{Beide leben nach } n \text{ Jahren}\}}$
  Leistungsbarwert:

  $$ \mathbb{E}[v^n \mathbf{1}_{\{\dots\}}] = v^n\, {}_np_{xy} = {}_nE_{xy} $$

  Gerber-Notation: $A_{\overset{1}{xy}:\overline{n}|}$.
  Mit Kommutationszahlen:[2]

  $$ {}_nE_{xy} = v^n\, {}_np_x\, {}_np_y = v^n \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} \frac{\ell_{y+n}}{\ell_y} = \frac{v^{\frac{1}{2}(x+y+2n)} \ell_{x+n} \ell_{y+n}}{v^{\frac{1}{2}(x+y)} \ell_x \ell_y} = \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{xy}} $$

[2] Im Rest dieses Kapitels werden Kommutationszahlen nicht verwendet; wir verweisen auf [14] und die Übungen.

- Vorschüssige, $n$-jährige Verbindungsrente auf 2 Leben: Rente, solange beide leben, max. $n$ Jahre (Anwendung: Prämienbarwerte)
  $\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_{xy}v^k$
  Für $n \to \infty$: $\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_{xy}v^k$
- Zahlungen $m$-mal im Jahr:
$$m\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} {}_{\frac{k}{m}|}\ddot{a}_{xy}$$
  Zum Faktor $m$ auf der linken Seite: Die Zahlungen der unterjährigen Rente haben den Betrag $1/m$, jene der aufgeschobenen Renten auf der rechten Seite den Betrag 1. Aufgeschobene Renten mittels linearer Interpolation:
$${}_{\frac{k}{m}|}\ddot{a}_{xy} = \begin{cases} \ddot{a}_{xy} & \text{für } k = 0 \\ \ddot{a}_{xy} - 1 & k = m \\ \ddot{a}_{xy} - \frac{k}{m} & 0 < k < m \end{cases}$$
  Also:
$$\begin{aligned} m\ddot{a}_{xy}^{(m)} &= \sum_{k=0}^{m-1} \left( \ddot{a}_{xy} - \frac{k}{m} \right) = m\ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2} \\ \Longrightarrow \quad \ddot{a}_{xy}^{(m)} &= \ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m} \end{aligned}$$
- $n$-jährige Rente:
$$\begin{aligned} \ddot{a}_{xy:\overline{n}|}^{(m)} &= \ddot{a}_{xy}^{(m)} - \underbrace{{}_{n|}\ddot{a}_{xy}^{(m)}}_{{}_nE_{xy}\ddot{a}_{x+n,y+n}^{(m)}} \\ &= \ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m} - {}_nE_{xy} \left( \ddot{a}_{x+n,y+n} - \frac{m-1}{2m} \right) \\ &= \underbrace{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}}_{\text{nicht unterjährige Rente}} - \frac{m-1}{2m} \left(1 - {}_nE_{xy}\right) \end{aligned}$$
- Hinterbliebenen-Rente: Überlebender erhält nach erstem Tod Leibrente (z.B.: "Witwenrente" für Unverheiratete). Leistungsbarwert folgt aus (2.3) (Wk., dass nach $k$ Jahren genau einer lebt):
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( {}_kp_x + {}_kp_y - 2{}_kp_{xy} \right) v^k = a_x + a_y - 2a_{xy}$$

- Verbindungsrente auf letztes Leben (benutze (2.2)):

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_{\overline{xy}} v^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left({}_k p_x + {}_k p_y - {}_k p_{xy}\right) v^k = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$

- $n$-jährige Todesfallsversicherung: Auszahlung der VS, falls erster Tod innerhalb von $n$ Jahren.

$$\begin{aligned} {}_{|n}A_{xy} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left({}_k p_{xy} - {}_{k+1} p_{xy}\right) v^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_{xy} v^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} {}_k p_{xy} v^k = v\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} - a_{xy:\overline{n}|} \end{aligned} \tag{2.4}$$

- $n$-jährige gemischte Versicherung: Zahlung beim 1. Tod, sonst nach $n$ Jahren. Verwende (2.4):

$$\begin{aligned} A_{xy:\overline{n}|} &= v\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} - a_{xy:\overline{n}|} + {}_n E_{xy} \\ &= v\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} - a_{xy:\overline{n-1}|} \\ &= v\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} + 1 - \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}, \quad \text{wobei } 1 - d = v. \end{aligned}$$

- Lebenslängliche Todesfallversicherung:

$$A_{xy} = 1 - d\ddot{a}_{xy}$$

- Einseitige Todesfallversicherung: Nicht symmetrisch. Falls $x$ vor $y$ stirbt, erhält $y$ Todesfallleistung. z.B. Paar mit großem Einkommensunterschied. Annahme: Todeszeitpunkt übers Jahr gleichverteilt, Auszahlung zum Jahresende. Dann ist der LBW (Übung)

$$\frac{v}{2}\ddot{a}_{xy} + \frac{v}{2} p_y \ddot{a}_{x,y+1} - \frac{v}{2} p_x \ddot{a}_{x+1,y} - \frac{a_{xy}}{2}.$$

- Weitere Tarife, jährliche Prämien: s. Übungen.

## 2.3 Zentralalter

Für ein Paar $(x, y)$ wollen wir $\bar{x} = \bar{x}(x, y)$ bestimmen, sodass $p_{\bar{x}\bar{x}} \approx p_{xy}$. Das Zentralalter $\bar{x}(x, y)$ liegt zwischen $x$ und $y$. Falls dann auch ${}_k p_{\bar{x}\bar{x}} \approx {}_k p_{xy}$ für $k \geq 1$ eine gute Approximation ist, so folgt

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_{xy} v^k \approx \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_{\bar{x}\bar{x}} v^k = \sum_{k=0}^{\infty} ({}_k p_{\bar{x}})^2 v^k.$$

Statt einer (z.B.) $100 \times 50$-Tabelle für die Werte $\ddot{a}_{xy}$ ist dann nur noch eine Tabelle mit 100 Einträgen erforderlich. Zur Berechnung von $\bar{x}(x, y)$ kann man etwa das Sterbegesetz von Gompertz-Makeham heranziehen:

$$\ell_x = ks^x g^{c^x},$$

z.B. mit $c = 1,1$ und $s = g = 0,9$ (wobei $s$ and $g$ für unseren Zweck keine Rolle spielen). Die Gleichung $p_{\bar{x}\bar{x}} = p_{xy}$ hat dann die Lösung

$$\bar{x}(x, y) = \log_c \frac{c^x + c^y}{2},$$

die natürlich noch zu runden ist.

## 2.4 Die Schuette-Nesbitt-Formel

Für $m$ Personen mit Altern $x_1, \ldots, x_m$ definieren wir die Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_tp_{x_1,\ldots,x_m}$ analog zu (2.1), und bezeichnen mit $\ddot{a}_{x_1,\ldots,x_m}$ den LBW der entsprechenden Verbindungsrente. Mit ${}_tp^{[n]}_{x_1,\ldots,x_m}$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass nach $t$ Jahren noch genau $n$ Personen am Leben sind. Dementsprechend ist $\ddot{a}^{[n]}_{x_1,\ldots,x_m}$ der Leistungsbarwert einer Leibrente, die genau dann auszahlt, wenn genau $n$ Personen am Leben sind. Wie wir im Weiteren sehen werden, ist für die Berechnung von $\ddot{a}^{[n]}_{x_1,\ldots,x_m}$ folgender Satz nützlich. Notation: $\Delta$ ist der Vorwärts-Differenz-Operator

$$\Delta c = \Delta(c_0, \ldots, c_m) = (c_1 - c_0, c_2 - c_1, \ldots, c_m - c_{m-1}).$$

**Satz 2.1** (Schuette-Nesbitt-Formel)**.** *Für Ereignisse $B_1, \ldots, B_m$ sei $N = \sum_{n=1}^m \mathbf{1}_{B_n}$ die Anzahl der Ereignisse, die eintreten. Mit*

$$S_k := \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,m\} \\ |J| = k}} \mathbb{P}\Big[\bigcap_{j \in J} B_j\Big]$$

*gilt für alle reellen $c_0, \ldots, c_m$*

$$\sum_{n=0}^m c_n \mathbb{P}[N = n] = \sum_{k=0}^m (\Delta^k c)_0 \, S_k.$$

*Beweis.* Mit dem Shift-Operator $E := 1 + \Delta$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m} \mathbf{1}_{\{N=n\}} E^n &= \sum_{n=0}^{m} E^n \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,m\} \\ |J|=n}} \prod_{j \in J} \mathbf{1}_{B_j} \prod_{j \in J^c} \mathbf{1}_{B_j^c} \\
&= \sum_{J \subseteq \{1,\dots,m\}} \Big( \prod_{j \in J} \mathbf{1}_{B_j} E \Big) \Big( \prod_{j \in J^c} \mathbf{1}_{B_j^c} \Big) \\
&= \prod_{j=1}^{m} (1 - \mathbf{1}_{B_j} + \mathbf{1}_{B_j} E) \\
&= \prod_{j=1}^{m} (1 + \mathbf{1}_{B_j} \Delta) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \Big( \sum_{\{j_1,\dots,j_k\} \subseteq \{1,\dots,m\}} \mathbf{1}_{B_{j_1} \cap \dots \cap B_{j_k}} \Big) \Delta^k.
\end{aligned}$$

Im Erwartungswert folgt daraus die Operator-Identität

$$\sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}[N = n] E^n = \sum_{k=0}^{m} S_k \Delta^k.$$

Nun wendet man diesen Operator auf den Vektor $(c_0, \dots, c_m)$ an, woraus man in der ersten Komponente (Index 0) die Behauptung abliest. $\square$

Für den Spezialfall $c = (0, 1, \dots, 1)$ erhält man

$$(\Delta^k c)_0 = \begin{cases} 0 & k = 0, \\ (-1)^{k+1} & 1 \le k \le m, \end{cases}$$

und somit das Inklusions-Exklusions-Prinzip

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}[N = n] &= \mathbb{P}[B_1 \cup \dots \cup B_m] \\
&= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{\{j_1,\dots,j_k\} \subseteq \{1,\dots,m\}} \mathbb{P}[B_{j_1} \cap \dots \cap B_{j_k}].
\end{aligned}$$

Wir kehren jetzt zu den Verbindungsrenten zurück und definieren

$$S_k^t := \sum_{\{j_1,\dots,j_k\} \subseteq \{1,\dots,m\}} {}_t p_{x_{j_1},\dots,x_{j_k}}$$

und

$$S_k^{\ddot{a}} := \sum_{\{j_1,\dots,j_k\}\subseteq\{1,\dots,m\}} \ddot{a}_{x_{j_1},\dots,x_{j_k}}. \tag{2.5}$$

Aus Satz 2.1 folgt (setze $B_i = \{$die $i$-te Person lebt nach $t$ Jahren noch$\}$)

$$\sum_{n=0}^{m} c_n \ {}_t p_{x_1,\dots,x_m}^{[n]} = \sum_{k=0}^{m} (\Delta^k c)_0 \, S_k^t.$$

Durch Diskontieren und Aufsummieren erhält man daraus

$$\sum_{n=0}^{m} c_n \ \ddot{a}_{x_1,\dots,x_m}^{[n]} = \sum_{k=0}^{m} (\Delta^k c)_0 \, S_k^{\ddot{a}}. \tag{2.6}$$

Der oben definierte LBW $\ddot{a}_{x_1,\dots,x_m}^{[n]}$ einer Leibrente mit Zahlung bei Überleben von genau $n$ Personen kann somit auf Verbindungsrenten zurückgeführt werden.

**Beispiel 2.2.** *Wir betrachten eine vorschüssige Rente für vier Leben $w, x, y, z$, die mit einer Auszahlung von 8 beginnt und bei jedem der ersten drei Tode um 50% verringert wird. Der Leistungsbarwert ist also*

$$8\ddot{a}_{w,x,y,z}^{[4]} + 4\ddot{a}_{w,x,y,z}^{[3]} + 2\ddot{a}_{w,x,y,z}^{[2]} + \ddot{a}_{w,x,y,z}^{[1]}.$$

*Der Koeffizientenvektor*

$$c = (0, 1, 2, 4, 8)$$

*erfüllt*

$$\big((\Delta^k c)_0\big)_{k=0,\dots,4} = (0, 1, 0, 1, 0).$$

*Wegen* (2.6) *vereinfacht sich der Leistungsbarwert zu*

$$S_1^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}},$$

*wobei, gemäß* (2.5),

$$S_1^{\ddot{a}} = \ddot{a}_w + \ddot{a}_x + \ddot{a}_y + \ddot{a}_z,$$
$$S_3^{\ddot{a}} = \ddot{a}_{w,x,y} + \ddot{a}_{w,x,z} + \ddot{a}_{w,y,z} + \ddot{a}_{x,y,z}.$$

**Literatur** für Abschnitt 2: Abschnitt 5.8 in Wolfsdorf [14], Abschnitt 8 in Gerber [5].

# 3 Vertragsänderungen

## 3.1 Rückkauf einer Versicherung

Storno auf Wunsch des Kunden. Versicherer leistet Einmalzahlung (Rückkaufswert) und ist dann leistungsfrei.

Laut VVG §176 (1): Rückkaufswert ist für Versicherungen zu erstatten, bei denen der Eintritt der Zahlungsverpflichtung gewiss ist. z. B.: gemischte Versicherung, ewige Todesfallversicherung. Nicht aber: temporäre Todesfallversicherung, Erlebensversicherung, Leibrenten (negative Risikoselektion!)

VVG §176 (3): *Der Rückkaufswert ist nach den anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik auf Grund der Rechnungsgrundlagen der Prämienkalkulation für den Schluß der laufenden Versicherungsperiode als Zeitwert der Versicherung zu berechnen. Prämienrückstände werden vom Rückkaufswert abgesetzt.*

Rückkaufswert nach $m$ Jahren:

$$\mathrm{Rk}(m) = {}_mV_x - \text{Stornoabzug} + \text{Überschussanteile}$$

Überschussanteile: siehe Abschnitt 12.4. Der Stornoabzug wird vom Versicherer festgelegt.[3] Gemäß VVG §176 (4) muss er *vereinbart und angemessen* sein. Gründe für den Stornoabzug:

- noch nicht getilgte Abschlusskosten
- negative Risikoselektion
- Kosten für vorzeitige Auflösung von Kapitalanlagen
- Verkleinerung des Bestandes, erhöhtes Schwankungsrisiko

Die noch nicht getilgten Abschlusskosten dürfen laut VVG §176 (5) erst nach 5 Jahren voll berücksichtigt werden, davor nur aliquot.

Aus einem vorzeitigen Rückkauf kann eine Steuerpflicht für den Kunden entstehen (EStG §27 (5) 3.).

## 3.2 Beitragsfreie Reduktion

Prämienfreistellung; Kunde zahlt keine Prämien mehr, Versicherer erbringt die vereinbarten Leistungen mit verringerter Versicherungssumme.

[3] Z.B. LV-Vertragsgrundlagen der Generali vom März 2017: maximal 8% der Summe der einbezahlten Sparprämien.

VVG §173 (1): *Der Versicherungsnehmer kann jederzeit für den Schluß der laufenden Versicherungsperiode die Umwandlung der Versicherung in eine prämienfreie Versicherung verlangen.*

VVG §173 (2): *Wird die Umwandlung verlangt, so tritt mit dem bezeichneten Zeitpunkt an die Stelle des vereinbarten Kapital- oder Rentenbetrags derjenige Betrag, der sich nach den anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik auf Grund der Rechnungsgrundlagen der Prämienkalkulation ergibt. Die prämienfreie Versicherungsleistung ist für den Schluß der laufenden Versicherungsperiode unter Berücksichtigung von Prämienrückständen zu berechnen.*

Grundidee: Rückkaufswert finanziert als Einmalerlag die verminderte Leistung. Wir gehen hier und im Rest von Kapitel 3 von einer gemischten Versicherung aus, die im Alter $x$ für $n$ Jahre mit Versicherungssumme 1 abgeschlossen wurde. Äquivalenzprinzip:

$$(\text{alte VS}) \times \text{Rk}(m) = (\text{neue VS}) \times A_{x+m:\overline{n-m}|}$$

Die Versicherungssumme wird also um den sogenannten Reduktionsfaktor vermindert:

$$\text{Red}(m) := \frac{\text{neue VS}}{\text{alte VS}} = \frac{\text{Rk}(m)}{A_{x+m:\overline{n-m}|}}.$$

**Brutto:** Es fallen keine $\beta$-Kosten mehr an, da kein Inkasso mehr stattfindet. Die noch nicht getilgten $\alpha$-Kosten des Vertragsabschlusses sind durch den Stornoabzug berücksichtigt. Mit Verwaltungskosten $\gamma$ (proportional zur VS) ergibt sich

$$(\text{alte VS}) \times \text{Rk}(m) = (\text{neue VS}) \times (A_{x+m:\overline{n-m}|} + \gamma \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}),$$

also

$$\text{Red}(m) = \frac{\text{Rk}(m)}{A_{x+m:\overline{n-m}|} + \gamma \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}.$$

**Approximation:** Falls der Rückkaufswert das Deckungskapital ist (kein Stornoabzug), gilt $\text{Red}(0) = 0$ und $\text{Red}(n) = 1$, wodurch sich durch lineare Interpolation

$$\text{Red}(m) \approx \frac{m}{n}$$

ergibt. Genauigkeit hängt von Tarif, Laufzeit und Jahr der Reduktion statt (s. Übungen).

## 3.3 Verminderung der Versicherungssumme

Alte Versicherungssumme $S = 1$, nach $m$ Jahren Reduktion auf $S' < S$. Hier kaum negative Risikoselektion.

- Fall 1: $S' > \mathrm{Red}(m)$
  - Methode a) Beitragsfreistellung ergibt Versicherungssumme $\mathrm{Red}(m)$ (beachte: alte VS auf 1 normiert). Dann "neuer Vertrag" auf den Differenzbetrag $S' - \mathrm{Red}(m)$. Neue Prämie:

$$P = (S' - \mathrm{Red}(m))P_{x+m:\overline{n-m}|} = (S' - \mathrm{Red}(m))\frac{A_{x+m:\overline{n-m}|}}{\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}.$$

  - Methode b) Wäre von Anfang an $S'$ vereinbart gewesen, so wäre jetzt das DK $S'{}_mV_x$, und die Prämie wäre $S'P_{x:\overline{n}|}$. Um wieviel weniger als das ist die gesuchte Prämie $P$? Die Differenz $(S - S')_mV_x$ zum tatsächlich vorhandenen DK finanziert eine Leibrente der Höhe $L$ an den Versicherten. Aus

$$L\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} = (S - S')_mV_x$$

und

$$L + P = S'P_{x:\overline{n}|}$$

folgt

$$P = S'P_{x:\overline{n}|} - \frac{(S - S')_mV_x}{\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}.$$

  Vergleich von a) und b): s. Übungen.

- Fall 2: $S' \leq \mathrm{Red}(m)$. Dann sind natürlich keine Prämien mehr zu bezahlen. Der Kunde erhält die Rückvergütung $\mathrm{Rk}(m) - S'A_{x+m:\overline{n-m}|}$ (also jenen Teil des Rückkaufswerts, der für die verminderte VS nicht benötigt wird). Insbesondere: Falls $S' = \mathrm{Red}(m)$, so handelt es sich um eine Prämienfreistellung.

## 3.4 Verminderung der Prämie

Neue Nettojahresprämie $P < P_{x:\overline{n}|}$.

- Methode a) Stelle Versicherung beitragsfrei, "neuer Vertrag" mit Prämie $P$. Wenn $T$ die VS des "neuen Vertrages" ist, so gilt

$$P\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} = TA_{x+m:\overline{n-m}|}$$

Neue VS:

$$S' = \mathrm{Red}(m) + T = \mathrm{Red}(m) + \frac{P\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}{A_{x+m:\overline{n-m}|}}$$

- Methode b) Der $(P/P_{x:\overline{n}|})$-te Teil des Vertrages läuft weiter wie bisher, und aus dem Betrag ${}_mV_x(P_{x:\overline{n}|} - P)/P_{x:\overline{n}|}$ wird eine beitragsfreie Versicherung gebildet. Neue Versicherungssumme:

$$S' = \frac{P}{P_{x:\overline{n}|}} + \frac{P_{x:\overline{n}|} - P}{P_{x:\overline{n}|}}\mathrm{Red}(m).$$

Vergleich von a) und b): s. Übungen.

## 3.5 Erhöhung der Versicherungssumme

Negative Risikoselektion! Z.B. bei Ablebensversicherung: Wenn überhaupt, nur nach vorhergehender Risikoprüfung.

Höchstzinssatzverordnung §2 (3): *Die Zinssätze gemäß Abs. 1 [d.h. z.Z. 0.0%] gelten jedenfalls auch für die nachträglich vereinbarten Verlängerungen der Versicherungsdauer oder Erhöhungen der Prämie, sofern die Prämie um mehr als 25% der Prämie bei Vertragsabschluss erhöht wird und diese Erhöhung nicht schon bei Vertragsschluss vereinbart worden ist.*

- Methode a) Neuabschluss auf Differenz $S' - S$. Neue Prämie ist

$$SP_{x:\overline{n}|} + (S' - S)P_{x+m:\overline{n-m}|}$$

- Methode b) Einmalige Zuzahlung $EP = (S' - S)_mV_x$ zum DK. Ab dann Prämie $S'P_{x:\overline{n}|}$ (so, als ob die VS von Anfang an $S'$ gewesen wäre).

  Mit Kosten: $\alpha$-Kosten (Abschluss) auf $(S' - S)$, $\beta$-Kosten (Inkasso):

$$EP - \beta EP = (S' - S)({}_mV_x + \alpha)$$

  Also ist der Bruttoeinmalerlag

$$EP = (S' - S)\frac{{}_mV_x + \alpha}{1 - \beta}.$$

- Methode c) DK-Vergleich. Gesucht: fiktiver Vertragsbeginn $x + T$, sodass die gemischte Versicherung zum Alter $x + T$, Laufzeit $n - T$ und $VS = S'$ zum Zeitpunkt $x+m$ ca. das gleiche DK wie die ursprüngliche Versicherung mit $VS = S$ hat. $T$ erfüllt

$$S_m V_x \approx S'_{m-T} V_{x+T} \ (+\alpha(S' - S)). \tag{3.1}$$

Jährliche Prämie: $S' P_{x+T:\overline{n-T|}}$. Der Approximationsfehler in (3.1) kann mit der nächsten Prämienzahlung verrechnet werden.

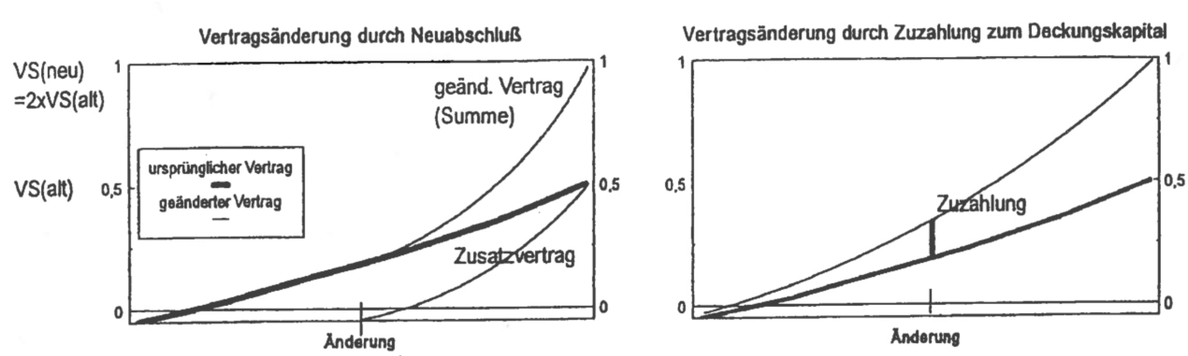


Abbildung 1: DK bei Erhöhung der Versicherungssumme (Methoden a), b))

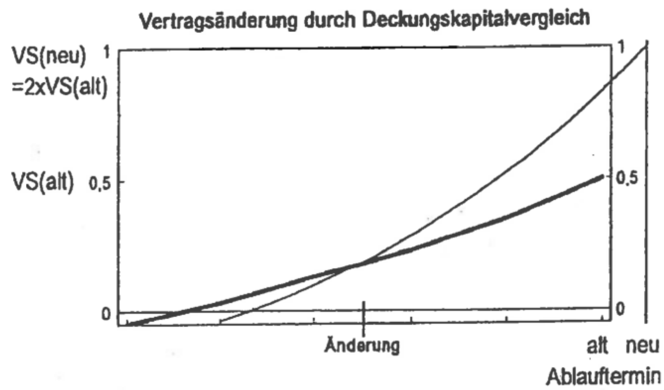


Abbildung 2: DK bei Erhöhung der Versicherungssumme (Methode c))

## 3.6 Verkürzung der Laufzeit

Auch hier Risikoselektion! $x$-jähriger, Versicherungsdauer $n$ Jahre, nach $m$ Jahren verkürzen um $k$ Jahre. Neue Gesamtdauer $n' = n - k$.

- Methode a) Mit Äquivalenzprinzip:

$$ {}_mV_x + P\ddot{a}_{x+m:\overline{n'-m}|} = A_{x+m:\overline{n'-m}|} $$

Neue Prämie

$$ P = \frac{A_{x+m:\overline{n'-m}|} - {}_mV_x}{\ddot{a}_{x+m:\overline{n'-m}|}} $$

- Methode b) Mit DK-Vergleich. Suche fiktives Antrittsalter $x+T$ mit

$$ {}_{m-T}V_{x+T:\overline{n'-T}|} \approx {}_mV_{x:\overline{n}|} $$

Neue Prämie $P_{x+T:\overline{n'-T}|}$.

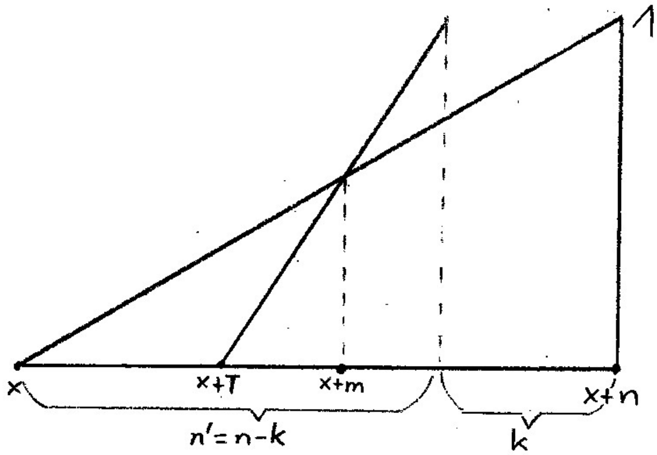


Abbildung 3: Verkürzung der Laufzeit durch DK-Vergleich

**Literatur** für Abschnitt 3: Kapitel 6 in Wolfsdorf [14], Versicherungsvertragsgesetz (VVG).

# 4 Markowmodell: Grundlagen

Das Modell wird von einer diskreten **Markowkette** $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ gesteuert, die den Zustand des Versicherten (oder, bei einer Versicherung auf mehrere Leben, *der* Versicherten) beschreibt. Literatur: Koller [12]; hat allerdings Schwerpunkt auf dem *zeitstetigen* Markowmodell.

**Definition 4.1.** *ein stochastischer Prozess* $(X_t)_{t\in T}$, $T \subseteq \mathbb{N}_0$, *auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *mit abzählbarem Zustandsraum* $S$ *heißt Markowkette, falls für* $n \geq 1, t_1 < t_2 < ... < t_{n+1} \in T$, $i_1, ..., i_{n+1} \in S$ *mit* $\mathbb{P}[X_{t_1} = i_1, ..., X_{t_n} = i_n] > 0$ *gilt:*

$$\mathbb{P}[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n, ..., X_{t_1} = i_1] = \mathbb{P}[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n].$$

Die Markoweigenschaft bedeutet also, dass die Zukunft nur von der Gegenwart und nicht von der Vergangenheit abhängt. Die folgenden beiden einfachen Beispiele dienen nur zur Illustration der Markoweigenschaft; für die Personenversicherung sind sie wenig nützlich.

**Beispiel 4.2.** *(i) Falls die Zufallsvariablen* $X_t$, $t \in T$, *unabhängig sind, so ist* $(X_t)_{t\in T}$ *eine Markowkette.*

*(ii) Ein Prozess* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *mit unabhängigen Inkrementen, also* $X_t = \sum_{k=1}^{t} Z_k$ *mit unabhängigen* $Z_k$, *ist eine Markowkette. Beweis:*

$$\begin{aligned} &P[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1] \\ &\quad = P[X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = i_{n+1} - X_{t_n} | X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1] \\ &\quad = P[X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = i_{n+1} - i_n | X_{t_n} = i_n, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = i_n - i_{n-1}, \ldots] \\ &\quad = P[X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = i_{n+1} - i_n | X_{t_n} = i_n] = P[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n]. \end{aligned}$$

In der Praxis ist der abzählbare Zustandsraum $S$ sogar endlich, z.B.:

- $S = \{*, \dagger\}$ (lebendig, tot)
- $S = \{*, \dagger\}^2 = \{*, \dagger\} \times \{*, \dagger\} = \{(**), (*\dagger), (\dagger *), (\dagger\dagger)\}$ für Paare
- $S = \{*, \dagger, \diamond\}$ (aktiv, tot, invalid)
- $S = \{*, \dagger\} \cup \{\diamond_{ij} : i \in I, j \in J\}$, wobei $\diamond_{ij}$ = invalid aus Ursache $j$ seit $i$ Jahren
- $S = \{*, \dagger\} \cup \{\sharp_i\}$, wobei $\sharp_i$ = pflegebedürftig mit Pflegestufe $i$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markowkette sind

$$p_{ij}(s,t) = \mathbb{P}[X_t = j | X_s = i], \quad i, j \in S, \ s \leq t \in T.$$

Die Matrix $P(s,t) = (p_{ij}(s,t))_{i,j\in S}$ (wobei natürlich eine Ordnung auf $S$ fixiert wird) heißt Übergangsmatrix.

**Satz 4.3** (Chapman-Kolmogorow-Gleichung)**.** *For eine Markowkette $X$ und $s \le t \le u \in T, i, k \in S$ mit $P[X_s = i] > 0$ gilt:*

$$p_{ik}(s,u) = \sum_{j \in S} p_{ij}(s,t) p_{jk}(t,u),$$

*also $P(s,u) = P(s,t)P(t,u)$.*

*Beweis.* Für $s = t$ folgt die Behauptung aus

$$p_{ij}(s,s) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Analog für $t = u$, sodass wir $s < t < u$ annehmen. Definiere

$$S^* := \{j \in S : p_{ij}(s,t) > 0\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{ik}(s,u) &= P[X_u = k | X_s = i] \\ &= \sum_{j \in S} P[X_u = k, X_t = j | X_s = i] \\ &= \sum_{j \in S^*} P[X_u = k, X_t = j | X_s = i] \\ &= \sum_{j \in S^*} P[X_u = k, X_t = j | X_s = i] \underbrace{\frac{P[X_t = j, X_s = i]}{P[X_t = j, X_s = i]}}_{1} \\ &= \sum_{j \in S^*} \frac{P[X_u = k, X_t = j, X_s = i]}{P[X_s = i]} \frac{P[X_t = j, X_s = i]}{P[X_t = j, X_s = i]} \\ &= \sum_{j \in S^*} P[X_t = j | X_s = i] P[X_u = k | X_t = j, X_s = i] \\ &= \sum_{j \in S^*} p_{ij}(s,t) p_{jk}(t,u). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, und die letzte aus der Markoweigenschaft. □

Die Randverteilungen einer Markowkette lassen sich folgendermaßen durch die Übergangswahrscheinlichkeiten darstellen.

**Satz 4.4.** *Der Prozess $X = (X_t)_{t\in T}$ ist genau dann eine Markowkette, wenn*

$$\mathbb{P}[X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n] = \mathbb{P}[X_{t_1} = i_1] \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k,i_{k+1}}(t_k, t_{k+1})$$

*für alle $n \geq 1$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T$, $i_1, \ldots, i_n \in S$ gilt.*

*Beweis.* $\Longleftarrow$: Falls $P[X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}] > 0$, so folgt

$$\begin{aligned} P[X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = i_1] &= \frac{P[X_{t_n} = i_n, \ldots, X_{t_1} = i_1]}{P[X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = i_1]} \\ &= \frac{P[X_{t_1} = i_1] \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k,i_{k+1}}(t_k, t_{k+1})}{P[X_{t_1} = i_1] \prod_{k=1}^{n-2} p_{i_k,i_{k+1}}(t_k, t_{k+1})} \\ &= p_{i_{n-1},i_n}(t_{n-1}, t_n) = P[X_{t_n} = i_n | X_{t_n -1} = i_{n-1}], \end{aligned}$$

also die Markoweigenschaft.
$\Longrightarrow$: $n = 1$ ist trivial. Für $n > 1$ nehmen wir zunächst

$$\mathbb{P}[X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}] > 0 \tag{4.1}$$

an. Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}[X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n]}{\mathbb{P}[X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}]} &= \mathbb{P}[X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1} \ldots, X_{t_1} = i_1] \\ &= \mathbb{P}[X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}], \end{aligned}$$

also

$$\mathbb{P}[X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n] = \mathbb{P}[X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}]\, p_{i_{n-1},i_n}(t_{n-1}, t_n)$$

Dies ist offensichtlich auch dann richtig, wenn die Annahme (4.1) nicht erfüllt ist, und die Aussage folgt durch Induktion. □

Der Zeitbereich der Markowkette wird bei uns stets $T = \mathbb{N}_0$ sein, was wir im Folgenden annehmen.

**Auszahlungsfunktionen:** Für die Periode $[t, t+1[$ sind zwei Zahlungen möglich. Die Zahlung $a_i^{\text{Pre}}(t)$ wird zu Beginn der Periode geleistet, falls sich $X$ im Zustand $i$ befindet. Die nachschüssige Zahlung $a_{ij}^{\text{Post}}(t)$ wird am Ende der Periode geleistet, falls der Zustand von $i$ nach $j$ übergeht ($i = j$ ist erlaubt). Diese Funktionen sind deterministisch.

- Beispiele für $a_i^{\text{Pre}}$: vorschüssige Renten, vorschüssige Prämien, Erlebensleistungen

- Beispiele für $a_{ij}^{\text{Post}}$: nachschüssige Renten, Todesfallleistungen

Es folgen einige einfache Beispiele, mit Zustandsraum $S = \{*, \dagger\} = \{\text{lebendig}, \text{tot}\}$. Die jeweils nicht erwähnten Auszahlungsfunktionen sind konstant null.

- Rente ab Alter 65, vorschüssig:

$$a_*^{\text{Pre}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 65 \\ 0 & \text{für } t < 65. \end{cases}$$

- Ablebensversicherung:

$$a_{*\dagger}^{\text{Post}}(t) = 1, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

- nachschüssige Rente:

$$a_{**}^{\text{Post}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 65 \\ 0 & \text{für } t < 65. \end{cases}$$

**Zinsen:** Der Diskontfaktor (vom Zeitpunkt $t$ auf den Zeitpunkt 0) ist

$$v(t) = \exp\Big( - \int_0^t \delta(s) ds \Big),$$

wobei die Zinsintensität $\delta$ deterministisch und stetig ist. Diskont von $\tau \geq t$ auf $t$:

$$\frac{v(\tau)}{v(t)} = \exp\Big( - \int_t^\tau \delta(s) ds \Big).$$

Wir definieren die Zufallsvariablen

$$I_j(t) = \begin{cases} 1 & X_t = j \\ 0 & X_t \neq j, \end{cases} \quad j \in S, \ t \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$N_{ij}(t) = \#\{s \in \mathbb{N}_0 : s < t, X_s = i, X_{s+1} = j\}, \quad i, j \in S, \ t \in \mathbb{N}_0.$$

$N_{ij}(t)$ ist also die Anzahl der Übergänge vom Zustand $i$ in den Zustand $j$ ($i = j$ ist erlaubt) bis $t$.

Der **stochastische Barwert** $V(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, der künftigen Zahlungen hat zwei Bestandteile. Vorschüssige Zahlungen, die dadurch entstehen, dass sich der Versicherte (zu künftigen Zeitpunkten) im Zustand $j$ befinden wird:

$$V(t,j) = \sum_{\tau \geq t} \frac{v(\tau)}{v(t)} I_j(\tau) a_j^{\mathrm{Pre}}(\tau), \quad t \in \mathbb{N}_0,\ j \in S.$$

Nachschüssige Zahlungen, die aus Übergängen ($j = k$ ist erlaubt) entstehen:[4]

$$V(t,j,k) = \sum_{\tau \geq t} \frac{v(\tau+1)}{v(t)} \Delta N_{jk}(\tau) a_{jk}^{\mathrm{Post}}(\tau).$$

Wir definieren dann

$$V(t) = V^{\mathrm{stoch}}(t) = \sum_{j \in S} V(t,j) + \sum_{j,k \in S} V(t,j,k). \tag{4.2}$$

Die entsprechenden **erwarteten Barwerte**, gestützt auf den Zustand $i$, sind

$$\begin{aligned} V_i(t,j) &= \mathbb{E}[V(t,j) | X_t = i], \\ V_i(t,j,k) &= \mathbb{E}[V(t,j,k) | X_t = i], \\ V_i(t) &= \mathbb{E}[V(t) | X_t = i] \\ &= \sum_{j \in S} V_i(t,j) + \sum_{j,k \in S} V_i(t,j,k), \quad i \in S. \end{aligned} \tag{4.3}$$

**Satz 4.5.** *(Prospektive Darstellung der Reserven*[5]*) Für $t \in \mathbb{N}_0$ und $i,j,k \in S$ gilt*

$$V_i(t,j) = \sum_{\tau \geq t} \frac{v(\tau)}{v(t)} p_{ij}(t,\tau) a_j^{\mathrm{Pre}}(\tau) \tag{4.4}$$

*und*

$$V_i(t,j,k) = \sum_{\tau \geq t} \frac{v(\tau+1)}{v(t)} p_{ij}(t,\tau) p_{jk}(\tau,\tau+1) a_{jk}^{\mathrm{Post}}(\tau). \tag{4.5}$$

[4] Dabei ist $\Delta N_{jk}(\tau) = N_{jk}(\tau+1) - N_{jk}(\tau) = \mathbf{1}_{\{X_\tau = j, X_{\tau+1} = k\}}$.

[5] Dieser Satz ist Bemerkung 4.6.8 in [12]. Ob es sich bei $V_i(t)$ tatsächlich um eine Reserve (DK), einen Leistungsbarwert oder einen Prämienbarwert handelt, hängt natürlich von der Definition der Auszahlungsfunktionen ab.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
V_i(t,j) &= \mathbb{E}\Big[\sum_{\tau\ge t}\frac{v(\tau)}{v(t)}I_j(\tau)a_j^{\text{Pre}}(\tau)\Big|X_t=i\Big]\\
&= \sum_{\tau\ge t}\frac{v(\tau)}{v(t)}\mathbb{E}[I_j(\tau)|X_t=i]a_j^{\text{Pre}}(\tau)\\
&= \sum_{\tau\ge t}\frac{v(\tau)}{v(t)}p_{ij}(t,\tau)a_j^{\text{Pre}}(\tau),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
V_i(t,j,k) &= \mathbb{E}\Big[\sum_{\tau\ge t}\frac{v(\tau+1)}{v(t)}\Delta N_{jk}(\tau)a_{jk}^{\text{Post}}(\tau)\Big|X_t=i\Big]\\
&= \sum_{\tau\ge t}\frac{v(\tau+1)}{v(t)}\mathbb{E}[\Delta N_{jk}(\tau)|X_t=i]a_{jk}^{\text{Post}}(\tau).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta N_{jk}(\tau)|X_t=i] &= \mathbb{P}[\Delta N_{jk}(\tau)=1|X_t=i]\\
&= \mathbb{P}[X_\tau=j,X_{\tau+1}=k|X_t=i]\\
&= \frac{\mathbb{P}[X_\tau=j,X_{\tau+1}=k,X_t=i]}{\mathbb{P}[X_t=i]}\\
&= \frac{\mathbb{P}[X_\tau=j,X_{\tau+1}=k,X_t=i]}{\mathbb{P}[X_\tau=j,X_t=i]}\frac{\mathbb{P}[X_\tau=j,X_t=i]}{\mathbb{P}[X_t=i]}\\
&= \mathbb{P}[X_{\tau+1}=k|X_\tau=j,X_t=i]\,\mathbb{P}[X_\tau=j|X_t=i]\\
&= p_{ij}(t,\tau)p_{jk}(\tau,\tau+1).
\end{aligned}$$

□

Die *rekursive* Berechnung der Reserven kann mit der Thieleschen Differenzengleichung erfolgen, in der, im Gegensatz zu Satz 4.5, nur die *Ein*-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten auftreten. Es handelt sich i.A. eigentlich um ein *System* von linearen gekoppelten Differenzengleichungen. Die Endbedingungen hängen vom modellierten Versicherungstarif ab. Dabei können durchaus verschiedene Möglichkeiten bestehen, ein und denselben Tarif im Markowmodell abzubilden. Zu beachten ist, dass Zahlungen nicht doppelt modelliert werden (also z.B. nicht: Erlebensleistung sowohl als Endbedingung ans Deckungskapital als auch als Auszahlungsfunktion $a_{**}^{\text{Post}}$). Die Gültigkeit der Thieleschen Differenzengleichung ist intuitiv unmittelbar einsichtig. Der Beweis verwendet die Chapman-Kolmogorow-Gleichung (Satz 4.3).

**Satz 4.6.** *(Thielesche Differenzengleichung[6]) Für $t \in \mathbb{N}_0$ und $i \in S$ gilt*

$$V_i(t) = a_i^{\mathrm{Pre}}(t) + \frac{v(t+1)}{v(t)} \sum_{j \in S} p_{ij}(t, t+1)\big(a_{ij}^{\mathrm{Post}}(t) + V_j(t+1)\big). \tag{4.6}$$

*Beweis.* Aus (4.3), (4.4) und (4.5) folgt

$$V_i(t) = \frac{1}{v(t)} \sum_{\tau \geq t} \sum_{j \in S} p_{ij}(t, \tau)\Big(v(\tau) a_j^{\mathrm{Pre}}(\tau) + \sum_{k \in S} v(\tau+1) p_{jk}(\tau, \tau+1) a_{jk}^{\mathrm{Post}}(\tau)\Big).$$

Beim Summanden $\tau = t$ ist $p_{ij}(t, \tau = t) = 0$ für $j \neq i$, also

$$V_i(t) = a_i^{\mathrm{Pre}}(t) + \sum_{k \in S} \frac{v(t+1)}{v(t)} p_{ik}(t, t+1) a_{ik}^{\mathrm{Post}}(t) \tag{4.7}$$

$$+ \frac{1}{v(t)} \sum_{\tau \geq t+1} \sum_{j \in S} p_{ij}(t, \tau)\Big(v(\tau) a_j^{\mathrm{Pre}}(\tau) + \sum_{k \in S} v(\tau+1) p_{jk}(\tau, \tau+1) a_{jk}^{\mathrm{Post}}(\tau)\Big). \tag{4.8}$$

Die Summe $\sum_{k \in S}$ in (4.7) findet sich in (4.6) wieder (als $\sum_{j \in S}$). Nun setzen wir die Chapman-Kolmogorow-Gleichung

$$p_{ij}(t, \tau) = \sum_{l \in S} p_{il}(t, t+1) p_{lj}(t+1, \tau)$$

in die verbleibende Summe $\sum_{\tau \geq t+1}$ in (4.8) ein:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{v(t)} \sum_{\tau \geq t+1} \sum_{j \in S} p_{ij}(t, \tau)\Big(v(\tau) a_j^{\mathrm{Pre}}(\tau) + \sum_{k \in S} v(\tau+1) p_{jk}(\tau, \tau+1) a_{jk}^{\mathrm{Post}}(\tau)\Big) \\
&\quad = \frac{1}{v(t)} \sum_{l \in S} p_{il}(t, t+1) \sum_{\tau \geq t+1} \sum_{j \in S} p_{lj}(t+1, \tau) \\
&\qquad\qquad \Big(v(\tau) a_j^{\mathrm{Pre}}(\tau) + \sum_{k \in S} v(\tau+1) p_{jk}(\tau, \tau+1) a_{jk}^{\mathrm{Post}}(\tau)\Big) \\
&\quad = \frac{1}{v(t)} \sum_{l \in S} p_{il}(t, t+1)\Big(\sum_{j \in S} v(t+1) V_l(t+1, j) + \sum_{j,k \in S} v(t+1) V_l(t+1, j, k)\Big) \\
&\quad = \frac{v(t+1)}{v(t)} \sum_{l \in S} p_{il}(t, t+1) V_l(t+1).
\end{aligned}$$

Bei der vorletzten Gleichheit wurde wieder Satz 4.5 verwendet. □

[6] Satz 4.7.3 in [12]

**Beispiel 4.7.** *Gemischte Versicherung mit* $VS = 100.000$*, Eintrittsalter* $35$*, Vertragsende* $65$*. Übergangswahrscheinlichkeiten von* $X$ *erhält man aus Sterbetafel. Auszahlungsfunktionen:*

$$a_{*\dagger}^{\text{Post}}(t) = \begin{cases} 100.000 & t < 65 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \quad \textit{(Todesfallleistung)}$$

$$a_{**}^{\text{Post}}(t) = \begin{cases} 100.000 & t = 64 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \quad \textit{(Erlebensleistung)}$$

*Endbedingung für Thiele:* $V_*(65) = 0$*. Thielesche Differenzengleichung:*

$$V_*(t) = \frac{v(t+1)}{v(t)}\Big(p_{**}(t,t+1)\big(a_{**}^{\text{Post}}(t) + V_*(t+1)\big) + p_{*\dagger}(t,t+1)a_{*\dagger}^{\text{Post}}(t)\Big),$$
$$35 \le t \le 64.$$

*Damit rekursive Berechnung von* $V_*(35)$*.*

**Beispiel 4.8.** *Alternative Darstellung von Beispiel 4.7:* $a_{**}^{\text{Post}} \equiv 0$*, stattdessen Endbedingung* $V_*(65) = 100.000$*. Thielesche Differenzengleichung:*

$$V_*(t) = \frac{v(t+1)}{v(t)}\Big(p_{**}(t,t+1)V_*(t+1) + p_{*\dagger}(t,t+1)a_{*\dagger}^{\text{Post}}(t)\Big), \quad 35 \le t \le 64.$$

Zur Berechnung des Prämienbarwerts mit jährlicher Prämie $P$ in Beispiel 4.7 setzen wir

$$a_*^{\text{Pre}}(t) = \begin{cases} P & t < 65 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(Falls gewünscht, könnte auch eine Notation wie z.B. $a_*^{\text{Pre,P}}$ oder $a_*^{\text{Pre,Prämie}}$ gewählt werden.) Thielesche Differenzengleichung (mit Abhängigkeit von $P$ in der Notation für $V_*$):

$$V_*^{\text{Prämie}}(t,P) = a_*^{\text{Pre}}(t) + \frac{v(t+1)}{v(t)}p_{**}(t,t+1)V_*^{\text{Prämie}}(t+1)$$

Oder prospektiv:

$$\begin{aligned} V_*^{\text{Prämie}}(t,P) &= \sum_{\tau \ge t} \frac{v(\tau)}{v(t)} p_{**}(t,\tau)a_*^{\text{Pre}}(\tau) \\ &= P\sum_{\tau=t}^{64} \frac{v(\tau)}{v(t)} p_{**}(t,\tau). \end{aligned}$$

Laut Äquivalenzprinzip gilt

$$V_*^{\text{Leistung}}(35) = V_*^{\text{Prämie}}(35, P) = V_*^{\text{Prämie}}(35, 1) \cdot P,$$

also

$$P = \frac{V_*^{\text{Leistung}}}{V_*^{\text{Prämie}}(35, P = 1)}.$$

**Beispiel 4.9.** *Invaliditätsrente. Zustandsraum $S = \{*, \diamond, \dagger\}$ (aktiv, invalid, tot), vorschüssige Invalidenrente bis zum Alter 65. Auszahlungsfunktion:*

$$a_\diamond^{\text{Pre}}(t) = \begin{cases} 1 & t < 65 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

*Thielesche Differenzengleichung(en) für die Leistungsbarwerte:*

$$V_*(t) = \frac{v(t+1)}{v(t)} \Big( p_{**}(t, t+1) V_*(t+1) + p_{*\diamond}(t, t+1) V_\diamond(t+1) \Big)$$
$$V_\diamond(t) = a_\diamond^{\text{Pre}}(t) + \frac{v(t+1)}{v(t)} \Big( p_{\diamond\diamond}(t, t+1) V_\diamond(t+1) + p_{\diamond *}(t, t+1) V_*(t+1) \Big)$$

*Diese Rekursionen gelten bis $t = 64$, mit Endbedingungen $V_*(65) = V_\diamond(65) = 0$. Zur Berechnung des Prämienbarwerts definiere $a_\diamond^{\text{Pre,P}} \equiv 0$ und*

$$a_*^{\text{Pre,P}}(t) = \begin{cases} 1 & t < 65 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

*Thiele für die Prämienbarwerte:*

$$V_*^{\text{P}}(t) = a_*^{\text{Pre,P}}(t) + \frac{v(t+1)}{v(t)} \Big( p_{**}(t, t+1) V_*^{\text{P}}(t+1) + p_{*\diamond}(t, t+1) V_\diamond^{\text{P}}(t+1) \Big),$$
$$V_\diamond^{\text{P}}(t) = \frac{v(t+1)}{v(t)} \Big( p_{\diamond\diamond}(t, t+1) V_\diamond^{\text{P}}(t+1) + p_{\diamond *}(t, t+1) V_*^{\text{P}}(t+1) \Big).$$

*Laut Äquivalenzprinzip ist die Prämie für eine Invalidenrente der Höhe $R$*

$$P = \frac{R\, V_*(t)}{V_*^{\text{P}}(t)}.$$

*Man beachte bei diesem Beispiel, dass die Berücksichtigung einer positiven Reaktivierungswahrscheinlichkeit $p_{\diamond *}(t, t+1)$ kein Problem darstellt. In der klassischen Pensionsversicherungsmathematik wird diese oft vernachlässigt.*

**Beispiel 4.10.** *Wir betrachten eine Versicherung auf zwei Leben. Zustandsraum $S = \{(**), (*\dagger), (\dagger *), (\dagger\dagger)\}$, Diskont $v(t) = v^t$ konstant. Wir verwenden die naheliegende Notation $V_i(t_1, t_2)$ usw. für ein Paar im Alter $(t_1, t_2)$.*[7]

- *Variante 1: Rente, sobald 1. Person (gemeint ist die Person, die das Alter $t_1$ hat) das Alter 65 erreicht, und nur solange beide am Leben sind.*

$$a^{\mathrm{Pre}}_{(**)}(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & t_1 < 65 \\ 1 & t_1 \geq 65. \end{cases}$$

- *Variante 2: Rente, sobald 1. Person das Alter 65 erreicht, aber erst ab Tod der 2. Person.*

$$a^{\mathrm{Pre}}_{(*\dagger)}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & t_1 \geq 65 \\ 0 & t_1 < 65. \end{cases}$$

*Thielesche Differenzengleichung (für beide Varianten); setze zur Abkürzung $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2)$ und $\boldsymbol{t} + 1 = (t_1 + 1, t_2 + 1)$:*

$$\begin{aligned} V_{(**)}(\boldsymbol{t}) &= a^{\mathrm{Pre}}_{(**)}(\boldsymbol{t}) + p_{(**),(**)}(\boldsymbol{t}) v V_{(**)}(\boldsymbol{t}+1) + p_{(**),(*\dagger)}(\boldsymbol{t}) v V_{(*\dagger)}(\boldsymbol{t}+1) \\ V_{(*\dagger)}(\boldsymbol{t}) &= a^{\mathrm{Pre}}_{(*\dagger)}(\boldsymbol{t}) + p_{(*\dagger),(*\dagger)}(\boldsymbol{t}) v V_{(*\dagger)}(\boldsymbol{t}+1). \end{aligned}$$

*Eine explizite Endbedingung an $V$ ist nicht nötig, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten auf die Zustände $S \setminus \{(\dagger\dagger)\}$ am Ende der Sterbetafel null gesetzt werden.*

**Beispiel 4.11.** *(Anwartschaft auf Invaliden- und Altersrente im Markowmodell) Ein Arbeitnehmer soll bei Invalidität eine Rente der Höhe $\alpha$ erhalten (längstens bis zum Pensionsantrittsalter), und bei Pensionsantritt im Alter 65 eine Rente der Höhe* 1. *Der Zustandsraum ist*

$$S = \{*, \diamond, \dagger\} \quad \text{(aktiv, invalid, tot).}$$

*Wir nehmen eine konstante Zinsintensität an: $v(t) = v^t$. Statt einen eigenen Zustand für Personen im Pensionsalter einzuführen, setzen wir folgende Endbedingungen fest:*

$$V_*(65) = V_\diamond(65) = \ddot{a}_{65}.$$

*Die Anwartschaft $V_*(t)$ eines Aktiven auf Invaliden- und Altersrente kann dann gemäß Satz 4.6 durch folgende Rekursionen berechnet werden:*

$$\begin{aligned} V_*(t) &= v p_{**}(t, t+1) V_*(t+1) + v p_{*\diamond}(t, t+1) V_\diamond(t+1), \quad t < 65, \\ V_\diamond(t) &= \alpha + v p_{\diamond\diamond}(t, t+1) V_\diamond(t+1) + v p_{\diamond *}(t, t+1) V_*(t+1), \quad t < 65. \end{aligned}$$

[7] Das ist natürlich nicht notwendig; andernfalls müsste man allerdings klarstellen, wessen Alter man mit $t$ in $V_i(t)$ meint, und die Definitionen der Auszahlungsfunktionen würden etwas komplizierter.

# 5 Momente und Verteilungsfunktion des Barwerts

Nicht nur der Erwartungswert, sondern auch die **höheren Momente** des stochastischen Barwerts können rekursiv berechnet werden.

**Satz 5.1.** *(Differenzengleichung für die Momente[8]) Es sei $p \geq 1$ eine natürliche Zahl, und wir nehmen der Einfachheit halber an, dass alle vorschüssigen Auszahlungsfunktionen $a_i^{\mathrm{Pre}}$ null sind.[9] Dann gilt für $t \in \mathbb{N}_0$ und $i \in S$*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[V(t)^p | X_t = i] \\
&\quad = \frac{v(t+1)^p}{v(t)^p} \sum_{j \in S} p_{ij}(t, t+1) \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \big(a_{ij}^{\mathrm{Post}}(t)\big)^{p-k} \mathbb{E}[V(t+1)^k | X_{t+1} = j].
\end{aligned} \tag{5.1}$$

*Beweis.* Wir definieren

$$L_t = \frac{v(t+1)}{v(t)} \sum_{j,k \in S} \Delta N_{jk}(t) a_{jk}^{\mathrm{Post}}(t).$$

Berechnung der Differenz $v(t)V(t) - v(t+1)V(t+1)$ nach Definition des stochastischen Barwerts $V(t)$ liefert (beachte $a_j^{\mathrm{Pre}} = 0$)

$$V(t) = \frac{v(t+1)}{v(t)} V(t+1) + L_t.$$

Wegen $\sum_{j \in S} I_j(t+1) = 1$ folgt daraus

$$V(t) = \frac{v(t+1)}{v(t)} \sum_{j \in S} I_j(t+1) V(t+1) + L_t,$$

und wir erhalten für die $p$te Potenz

$$\begin{aligned}
V(t)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \Big( \frac{v(t+1)}{v(t)} \sum_{j \in S} I_j(t+1) V(t+1) \Big)^k L_t^{p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \sum_{j \in S} I_j(t+1) \frac{v(t+1)^k}{v(t)^k} V(t+1)^k L_t^{p-k}.
\end{aligned}$$

[8] Satz 5.4.1 in [12]

[9] Die höheren Momente sind vor allem für das Risikomanagement interessant, und für diesen Zweck können z.B. vorschüssige Zahlungen in ausreichender Näherung in nachschüssige verwandelt werden. Auch ohne diese Annahme kann natürlich eine (kompliziertere) Rekursion hergeleitet werden.

Nun betrachten wir das $p$te Moment von $V(t)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[V(t)^p|X_t = i] \\
&\quad = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{v(t+1)^k}{v(t)^k} \sum_{j\in S} \mathbb{E}[I_j(t+1)V(t+1)^k L_t^{p-k}|X_t = i] \\
&\quad = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{v(t+1)^k}{v(t)^k} \sum_{j\in S} \mathbb{E}\Big[I_j(t+1)V(t+1)^k \Big(\frac{v(t+1)}{v(t)} a_{ij}^{\text{Post}}(t)\Big)^{p-k} \Big| X_t = i\Big] \\
&\quad = \frac{v(t+1)^p}{v(t)^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \sum_{j\in S} \big(a_{ij}^{\text{Post}}(t)\big)^{p-k} \mathbb{E}[I_j(t+1)V(t+1)^k|X_t = i]. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Um den hier auftretenden Erwartungswert zu berechnen, bedingen wir statt auf $X_t = i$ zunächst auf die von $X_t$ erzeugte $\sigma$-Algebra:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I_j(t+1)V(t+1)^k|X_t] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[I_j(t+1)V(t+1)^k|X_t, X_{t+1}]\Big| X_t\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[I_j(t+1)\mathbb{E}[V(t+1)^k|X_t, X_{t+1}]\Big| X_t\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[I_j(t+1)\mathbb{E}[V(t+1)^k|X_{t+1}]\Big| X_t\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[I_j(t+1)\mathbb{E}[V(t+1)^k|X_{t+1} = j]\Big| X_t\Big] \\
&= \mathbb{E}[V(t+1)^k|X_{t+1} = j]\ \mathbb{P}[X_{t+1} = j|X_t], \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

wobei die dritte Gleichheit aus der Markoweigenschaft folgt. Wir benutzen jetzt (5.3) in (5.2) und erhalten (5.1). □

Zur Berechnung von Risikomaßen kann es erforderlich sein, die Verteilung (und nicht nur die Momente) des stochastischen Barwerts zu berechnen. Wir bezeichnen die bedingte **Verteilungsfunktion** mit

$$P_i(t,u) = \mathbb{P}[V(t) \le u|X_t = i].$$

**Satz 5.2.** *(Rekursion für die Verteilungsfunktion des stochastischen Barwerts[10]) Für $t \in \mathbb{N}_0$, $i \in S$ und $u \in \mathbb{R}$ gilt*

$$P_i(t,u) = \sum_{j\in S} p_{ij}(t,t+1) P_j\Big(t+1, \frac{v(t)}{v(t+1)}\big(u - a_i^{\text{Pre}}(t)\big) - a_{ij}^{\text{Post}}(t)\Big). \qquad (5.4)$$

*Beweis.* Wir definieren die Ereignisse ($l \in S$)

$$A = \{V(t) \le u\}, \quad B_l = \{X_{t+1} = l\}, \quad C = \{X_t = i\}.$$

[10]Satz 5.5.1 in [12]

Aus der Identität

$$\mathbb{P}[A \cap B_l | C] = \mathbb{P}[A | B_l \cap C] \ \mathbb{P}[B_l | C]$$

folgt

$$\begin{aligned} P_i(t,u) &= \mathbb{P}[A|C] \\ &= \sum_{l \in S} \mathbb{P}[A \cap B_l | C] \\ &= \sum_{l \in S} \mathbb{P}[A | B_l \cap C] \ \mathbb{P}[B_l | C] \\ &= \sum_{l \in S} p_{il}(t, t+1) \mathbb{P}[V(t) \le u | X_t = i, X_{t+1} = l]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Berechnung der Differenz $v(t)V(t) - v(t+1)V(t+1)$ nach Definition des stochastischen Barwerts $V(t)$ liefert (vgl. den Beweis von Satz 5.1)

$$V(t) = \frac{v(t+1)}{v(t)} V(t+1) + \sum_{j \in S} I_j(t) a_j^{\text{Pre}}(t) + \frac{v(t+1)}{v(t)} \sum_{j,k \in S} \Delta N_{jk}(t) a_{jk}^{\text{Post}}(t).$$

Wir verwenden dies in (5.5) und erhalten (Markoweigenschaft)

$$\begin{aligned} P_i(t,u) = \sum_{l \in S} & p_{il}(t,t+1) \mathbb{P}\Big[ \frac{v(t+1)}{v(t)} V(t+1) + a_i^{\text{Pre}}(t) \\ & \qquad + \frac{v(t+1)}{v(t)} a_{il}^{\text{Post}}(t) \le u \Big| X_t = i, X_{t+1} = l \Big] \\ = \sum_{l \in S} & p_{il}(t,t+1) \mathbb{P}\Big[ \frac{v(t+1)}{v(t)} V(t+1) + a_i^{\text{Pre}}(t) \\ & \qquad + \frac{v(t+1)}{v(t)} a_{il}^{\text{Post}}(t) \le u \Big| X_{t+1} = l \Big] \\ = \sum_{l \in S} & p_{il}(t,t+1) P_l\Big( t+1, \frac{v(t)}{v(t+1)} \big( u - a_i^{\text{Pre}}(t) \big) - a_{il}^{\text{Post}}(t) \Big). \end{aligned}$$

□

Um aus (5.4) tatsächlich einen Algorithmus zu erhalten, muss eine geeignete Diskretisierung gewählt werden. Z.B. kann man zunächst Punkte festlegen, an denen man Werte von $P_i(t,\cdot)$ berechnen möchte. An der rechten Seite von (5.4) liest man ab, für welche $u$ man dann $P_j(t+1,\cdot)$, $j \in S$, benötigt, usw., bis man bei der (bekannten) Verteilungsfunktion zu Vertragsende ankommt. Einfacher zu implementieren ist eine (zeitunabhängige) äquidistante Unterteilung, wobei das zweite Argument von $P_j$ in (5.4) auf den nächstgelegenen Diskretisierungspunkt gerundet wird.

In einfachen Fällen kann die Verteilung des Barwerts explizit berechnet werden:

**Beispiel 5.3.** *Wir betrachten eine gemischte Versicherung mit Ablebensleistung* 100.000 *und Erlebensleistung* 200.000 *im Alter 65. Der Diskontfaktor* $v = 1/(1+i)$ *ist konstant mit* $i = 0.01$. *Gesucht ist die Verteilung des Barwerts im Alter* $x = 30$. *Der Barwert ist*

$$V(30) = \begin{cases} 100.000\, v^{T_x} & T_x < 35, \\ 200.000\, v^{35} & T_x \geq 35, \end{cases}$$

*wobei* $T_x$ *die Restlebensdauer ist. Der Barwert der Ablebensleistung ist maximal* 100.000, *was kleiner als der Erlebensbarwert*

$$\alpha_0 := 200.000\, v^{35} = 141.183$$

*ist. Für* $\alpha \geq \alpha_0$ *gilt also* $\mathbb{P}[V(30) \leq \alpha] = 1$, *und für* $0 < \alpha < \alpha_0$ *gilt*

$$\mathbb{P}[V(30) \leq \alpha] = \mathbb{P}[T_x < 35,\ 100.000\, v^{T_x} \leq \alpha] = \mathbb{P}\Big[\frac{\log(\alpha/100.000)}{\log v} \leq T_x < 35\Big].$$

*Die Verteilungsfunktion hat also bei* $\alpha_0$ *einen Sprung.*

# 6 Markowmodell: Unterjährige Zahlungen und weitere Beispiele

Wir betrachten eine vorschüssige Rente, bei der $m$-mal im Jahr $1/m$ ausgezahlt wird. Die unterjährige Überlebenswahrscheinlichkeit sei

$$p_x^{(m)} = p_x^{1/m},$$

d.h. die Sterbeintensität ist über das ganze Jahr konstant.[11] Der Einfachheit halber verwenden wir die klassische Notation $p_x$ statt $p_{**}(x, x+1)$, und nehmen an dass der Diskontfaktor $v$ konstant ist. Der Rentenbarwert erfüllt die

[11] ${}_tp_x = \exp(-\int_x^{x+t} \mu_s\, ds) = \exp(-t\mu_x) = (p_x)^t,\ \ t \in [0,1]$.

Rekursion

$$\begin{aligned}
V_*(t) &= \frac{1}{m} + p_x^{(m)} v^{1/m} V_*\Big(t + \frac{1}{m}\Big) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \big(p_x^{(m)} v^{1/m}\big)^k + p_x v V_*(t+1) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (p_x v)^{k/m} + p_x v V_*(t+1).
\end{aligned}$$

Für die Funktion

$$f(z) := \sum_{k=0}^{m-1} z^{k/m}, \quad f'(z) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{m} z^{k/m-1},$$

verwenden wir die Taylorapproximation

$$f(z) \approx f(1) + f'(1)(z-1) = m + \frac{m-1}{2}(z-1)$$

und erhalten (näherungsweise) die Rekursion

$$V_*(t) \approx \frac{m+1}{2m} + p_x v\Big(\frac{m-1}{2m} + V_*(t+1)\Big).$$

**Übung:** Vergleich mit der klassischen Approximation

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \tfrac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x).$$

Wir betrachten nun garantierte Renten (Beispiel 6.1) und danach DK-Rückgewähr (Beispiele 6.2 und 6.3).

**Beispiel 6.1** (Garantierte Rente)**.** *Ab Alter 65 soll eine Rente gezahlt werden. Sofern der Versicherte das Rentenantrittsalter erreicht, sollen die ersten zehn Rentenzahlungen auf jeden Fall geleistet werden. Dazu definieren wir den Zustandsraum*

$$S = \{*, \dagger, \geq\} = \{\textit{lebendig},\ \textit{Tod vor 65},\ \textit{Tod ab 65}\}.$$

*Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind*

$$\begin{aligned}
p_{**}(t) &= 1 - q_t, \\
p_{*\dagger}(t) &= \begin{cases} q_t & t < 65 \\ 0 & t \geq 65, \end{cases} \\
p_{*\geq}(t) &= \begin{cases} 0 & t < 65 \\ q_t & t \geq 65, \end{cases} \\
p_{\dagger\dagger}(t) &= 1, \\
p_{\geq\geq}(t) &= 1.
\end{aligned}$$

*Die Auszahlungsfunktionen sind*

$$\begin{aligned}
a_*^{\text{Pre}}(t) &= \begin{cases} 0 & t < 65 \\ 1 & t \geq 65, \end{cases} \\
a_{\geq}^{\text{Pre}}(t) &= \begin{cases} 1 & t \in [65, 75[, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

*Thielesche Differenzengleichung für $i \in \{*, \geq\}$:*

$$V_i(t) = a_i^{\text{Pre}}(t) + vp_{i*}(t, t+1)V_*(t+1) + vp_{i\geq}(t, t+1)V_{\geq}(t+1).$$

**Beispiel 6.2** (DK-Rückgewähr)**.** *Bei einer Leibrente ab Alter* 65 *wird im Todesfall das Deckungskapital (zu Beginn der Periode) ausbezahlt. Die Versicherung wird durch Einmalerlag finanziert. Die Rekursion ist dann*

$$\begin{aligned}
V_*(t) &= vp_{**}(t, t+1)V_*(t+1) + p_{*\dagger}(t, t+1)V_*(t), \quad t < 65, \\
V_*(t) &= 1 + vp_{**}(t, t+1)V_*(t+1) + p_{*\dagger}(t, t+1)V_*(t), \quad t \geq 65.
\end{aligned}$$

*Auflösen nach $V_*(t)$ ergibt*

$$\begin{aligned}
V_*(t) &= \frac{vp_{**}(t, t+1)V_*(t+1)}{1 - p_{*\dagger}(t, t+1)}, \quad t < 65, \\
V_*(t) &= \frac{1 + vp_{**}(t, t+1)V_*(t+1)}{1 - p_{*\dagger}(t, t+1)}, \quad t \geq 65.
\end{aligned}$$

*Der Fall periodischer Prämien ist komplizierter; siehe Übungen.*

**Beispiel 6.3.** *Bei einer Witwenrente gegen Einmalerlag wird das DK rückgewährt, falls die Frau stirbt, bevor der Mann* 85 *wird. Notation wie in Beispiel 4.10.*

$$\begin{aligned}
V_{(**)}(\boldsymbol{t}) &= \frac{vp_{(**)(**)}\, V_{(**)}(\boldsymbol{t}+1) + vp_{(**)(\dagger *)}\, V_{(\dagger *)}(\boldsymbol{t}+1)}{1 - p_{(**)(*\dagger)} - p_{(**)(\dagger\dagger)}}, \quad t_1 < 85, \\
V_{(**)}(\boldsymbol{t}) &= vp_{(**)(**)}\, V_{(**)}(\boldsymbol{t}+1) + vp_{(**)(\dagger *)}\, V_{(\dagger *)}(\boldsymbol{t}+1), \quad t_1 \geq 85, \\
V_{(\dagger *)}(\boldsymbol{t}) &= 1 + vp_{(\dagger *)(\dagger *)}\, V_{(\dagger *)}(\boldsymbol{t}+1).
\end{aligned}$$

*Die Zeitpunkte bei den Übergangswahrscheinlichkeiten sind natürlich überall* $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}+1)$.

# 7 Markowmodell: Ausgleich im Kollektiv

Bei einem großen Bestand kann der Versicherer annehmen, dass sich der Gewinn pro Vertrag seinem Erwartungswert annähert. (Das stimmt natürlich nur, wenn die verwendeten Rechnungsgrundlagen "korrekt" und von zweiter Ordnung, also realistisch und nicht vorsichtig kalkuliert sind.) Als Rechtfertigung dient das Gesetz der großen Zahlen.

**Satz 7.1** (Starkes Gesetz der großen Zahlen, Kolmogorow 1930)**.** *Es sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von integrierbaren iid Zufallsvariablen. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \mathbb{E}[X_1] \quad \text{f.s.}$$

Wenn die $X_n$ die Aufwendungen sind, erleidet der Versicherer also mit Einmalprämie $\mathbb{E}[X_1]$ und Bestandsgröße $\uparrow \infty$ im Mittel f.s. keinen Verlust.

Über die Wahrscheinlichkeit, trotz einer Prämie $a > \mathbb{E}[X_1]$ im Mittel Verlust zu machen, gibt folgender Satz aus der Theorie der großen Abweichungen (large deviations) Auskunft:

**Satz 7.2** (Satz von Cramér, 1938)**.** *Es sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von iid Zufallsvariablen mit*

$$\phi(u) := \mathbb{E}[e^{uX_1}] < \infty, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{7.1}$$

*Dann gilt für alle* $a > \mathbb{E}[X_1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\Big[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \geq a\Big] = -I(a), \tag{7.2}$$

*wobei*

$$I(z) := \sup_{u\in\mathbb{R}} (uz - \log \phi(u)), \quad z \in \mathbb{R}. \tag{7.3}$$

Die Wahrscheinlichkeit in (7.2) fällt also exponentiell:

$$\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq a\Big] = \exp(-I(a)n + o(n)), \quad n \to \infty.$$

Interpretation: Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass der mittlere Verlust positiv ist, unter der Voraussetzung, dass als Einmalprämie für jeden Vertrag $a > \mathbb{E}[X_1]$ verlangt wurde. Die Voraussetzung (7.1) ist insbesondere erfüllt, wenn $X_1$ nur endlich viele Werte annimmt.

*Beweis der oberen Abschätzung in Satz 7.2.* Für $u \geq 0$ gilt (Markow-Ungleichung)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq a\Big] &\leq \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq a\}} e^{un(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a)}\Big] \\ &\leq \mathbb{E}\Big[e^{u(\sum_{k=1}^{n} X_k - na)}\Big] \\ &= e^{-nua}\mathbb{E}[e^{uX_1}]^n \\ &= e^{-n(ua - \log\phi(u))}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq a\Big] &\leq \inf_{u\geq 0} e^{-n(ua-\log\phi(u))} \\ &= e^{-n\sup_{u\geq 0}(ua - \log\phi(u))} \\ &= e^{-nI(a)}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

In der letzten Gleichung wurde verwendet, dass für $z > \mathbb{E}[X_1]$ das Supremum in (7.3) äquivalent über $u \geq 0$ gebildet werden kann (Übung). Aus (7.4) folgt nun

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq a\Big] \leq -I(a).$$

Die untere Abschätzung

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\mathbb{P}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq a\Big] \geq -I(a)$$

ist schwieriger zu beweisen, siehe etwa [4]. □

Obwohl Satz 7.1 in diesem Zusammenhang mitunter angeführt wird, ist diese Version des LLN (law of large numbers) für die Lebensversicherungsmathematik schlecht geeignet. Zwar ist es vertretbar, die Restlebensdauern der

Versicherten als unabhängig anzunehmen, wobei gewisse Risiken (etwa Epidemien und Naturkatastrophen) vernachlässigt werden. Die Annahme identischer Verteilungen ist jedoch nicht realistisch. Der Bestand müsste dazu in Gruppen aufgeteilt werden, innerhalb derer Alter und Vertragstyp (inklusive Versicherungssumme!) gleich sind. Diese werden jedoch i.d.R. zu klein sein, um den Limes $n \to \infty$ zu rechtfertigen. Wir verwenden deshalb folgende Variante von Satz 7.1, die ebenfalls von Kolmogorow stammt:

**Satz 7.3.** *Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}[X_n] < \infty.$$

*Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \big(X_k - \mathbb{E}[X_k]\big) = 0 \quad \textit{f.s.}$$

Wir nehmen nun an, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Markowmodell wie in Abschnitt 4 gegeben ist, bestehend aus:

- Zustandsraum $S^n$
- Markowkette $(X_t^n)_{t\in\mathbb{N}_0}$
- Auszahlungsfunktionen $a_i^n,\ a_{ij}^n,\ \ i,j \in S^n$

Beachte, dass wir für die Auszahlungsfunktionen der Einfachheit halber $a_i^n$ und $a_{ij}^n$ statt $a_i^{\mathrm{Pre},n}$ und $a_{ij}^{\mathrm{Post},n}$ schreiben. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und der Diskont $v$ sind natürlich unabhängig von $n$. Mit $V^n(t)$ und $V_i^n(t)$ bezeichnen wir die gemäß (4.2) bzw. (4.3) definierten Barwerte. Interpretation: Die Auszahlungsfunktionen sollen sowohl Leistungen als auch Prämien enthalten (letztere mit negativem Vorzeichen), sodass $V^n(t)$ der *Verlust* des Versicherers aus dem $n$ten Vertrag ist. Der Zins $v$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten der $X^n$ sind Rechnungsgrundlagen *erster* Ordnung, also vorsichtig gewählt.

Weiters sei eine zweite Zinsintensität $\tilde{\delta}$ (best estimate) gegeben, und

$$\tilde{v}(t) = \exp\Big(-\int_0^t \tilde{\delta}(s)ds\Big),$$

sowie für jedes $n$ eine Markowkette $(\tilde{X}_t^n)_{t\in\mathbb{N}_0}$, wobei $\tilde{V}^n(t)$ und $\tilde{V}_i^n(t)$ die mit $\tilde{X}^n$ und $\tilde{v}$ gemäß (4.2) und (4.3) definierten Barwerte sind. Dieser Zins und die Übergangswahrscheinlichkeiten von $\tilde{X}^n$ sind Rechnungsgrundlagen *zweiter* Ordnung, also realistisch geschätzt.

**Annahme 7.4.** *(i) Es gilt*

$$\tilde{V}_i^n(t) \le V_i^n(t), \quad n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{N}_0,\ i \in S^n. \tag{7.5}$$

*(ii) Die Mächtigkeit der Zustandsräume ist beschränkt, es gibt also $s_{\max}$ mit $|S^n| < s_{\max}$ für $n \in \mathbb{N}$,*

*(iii) Es gibt $t_{\max} \in \mathbb{N}$ und $a_{\max} > 0$, von $n$ unabhängig, mit*

$$a_i^n(t) = a_{ij}^n(t) = 0, \quad t \ge t_{\max},\ n \in \mathbb{N},$$

*und*

$$|a_i^n(t)| \vee |a_{ij}^n(t)| \le a_{\max}, \quad n \in \mathbb{N},\ i,j \in S^n,\ t \in \mathbb{N}_0.$$

*(iv) Die Markowketten $\tilde{X}^n$, $n \in \mathbb{N}$, sind unabhängig.*

Interpretation von (7.5): Der vorsichtig kalkulierte Verlust ist mindestens so groß wie jener nach "best estimate"-Annahmen.

Für den Beweis des folgenden Satzes verwenden wir folgende Notation. Für eine beliebige Zufallsvariable $Z$ und $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[A] > 0$ definieren wir die Zufallsvariable $Z|_A$: Der W-Raum $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ ist definiert durch $\Omega' = A$, $\mathcal{F}' = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ (Spur-$\sigma$-Algebra) und $\mathbb{P}' = \mathbb{P}[\cdot]/\mathbb{P}[A]$. Dann ist $Z|_A$ die Einschränkung von $Z$ auf $\Omega' = A$. Der Erwartungswert der eingeschränkten Zufallsvariable ist der bedingte Erwartungswert der Zufallsvariable:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}'[Z|_A] &= \int_{\Omega'} Z\, d\mathbb{P}' = \frac{1}{\mathbb{P}[A]} \int_{\Omega'} Z\, d\mathbb{P} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A Z]}{\mathbb{P}[A]} = \mathbb{E}[Z|A].\end{aligned} \tag{7.6}$$

Schließlich sei eine Folge $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $i_n \in S^n$ für alle $n$ gegeben, welche den aktuellen Zustand der Versicherten modelliert. Für $t \in \mathbb{N}_0$ definieren wir das Ereignis

$$A(t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tilde{X}_t^n = i_n\} \in \mathcal{F}.$$

Aus dem Gesetz der großen Zahlen folgt nun, dass der mittlere Verlust des Versicherungsportfolios fast sicher nicht positiv ist. Es gilt also f.s. $\tilde{V}^k(t) \le V_{i_k}^k(t)$ "im Mittel".

**Satz 7.5.** *Es gelte Annahme 7.4. Fixiere $t \in \mathbb{N}_0$. Falls $\mathbb{P}[A(t)] > 0$, so gilt*

$$\mathbb{P}\Big[\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \big(\tilde{V}^k(t) - V_{i_k}^k(t)\big) \le 0 \Big| A(t)\Big] = 1.$$

*Beweis.* Aus (7.5) folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\tilde V^k(t)|_{A(t)} - V_{i_k}^k(t)\Big) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\tilde V^k(t)|_{A(t)} - \tilde V_{i_k}^k(t)\Big). \tag{7.7}$$

Wie in (7.6) dargelegt, gilt

$$\mathbb{E}'\big[\tilde V^k(t)|_{A(t)}\big] = \mathbb{E}[\tilde V^k(t)|A(t)], \quad k\in\mathbb{N}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Markowketten $\tilde X^n$ folgt

$$\mathbb{E}[\tilde V^k(t)|A(t)] = \mathbb{E}[\tilde V^k(t)|\tilde X_t^k = i_k] = \tilde V_{i_k}^k(t), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Es ist leicht zu sehen (Übung), dass aus Annahme 7.4 die Beschränktheit von $\mathrm{Var}[\tilde V^n(t)|A(t)] = \mathrm{Var}[\tilde V^n(t)|\tilde X_t^n = i]$ folgt. Insbesondere gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}[\tilde V^n(t)|A(t)] < \infty$$

Aus Satz 7.3 folgt also, dass der Mittelwert $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}$ auf der rechten Seite von (7.7) $\mathbb{P}'$-f.s. gegen 0 geht, und somit

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\tilde V^k(t)|_{A(t)} - V_{i_k}^k(t)\Big) \le 0 \quad \mathbb{P}'\text{-f.s.}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big[\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\tilde V^k(t) - V_{i_k}^k(t)\big) \le 0\Big| A(t)\Big] \\
&\qquad = \frac{\mathbb{P}\Big[\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\tilde V^k(t) - V_{i_k}^k(t)\big) \le 0,\ A(t)\Big]}{\mathbb{P}[A(t)]} \\
&\qquad = \mathbb{P}'\Big[\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\tilde V^k(t)|_{A(t)} - V_{i_k}^k(t)\big) \le 0,\ A(t)\Big] \\
&\qquad = \mathbb{P}'\Big[\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\tilde V^k(t)|_{A(t)} - V_{i_k}^k(t)\Big) \le 0\Big] = 1.
\end{aligned}$$ □

Auch von Satz 7.2 gibt es geeignete Verallgemeinerungen [6] für nicht identische Verteilungen, worauf hier jedoch nicht weiter eingegangen werden soll.

# 8 Pensionsversicherung: Barwerte und Anwartschaften

Drei-Säulen-Modell:

- Staatliche Pensionsvorsorge
- Betriebliche Pensionsvorsorge
- Private Pensionsvorsorge

Die österreichische staatliche Pensionsvorsorge basiert auf dem Umlageverfahren: Die Zahlungen werden durch die aktuellen Beiträge finanziert, wobei die entstehende Lücke aus dem Bundesbudget gedeckt wird. Vorteil z.B.: Kein Deckungsstock. Nachteil: Empfindlich gegenüber demographischen Veränderungen.

Für die betriebliche und private Pensionsversicherung ist die Berechnung von Barwerten (sog. "Anwartschaften") von Alters-, Invaliditäts- und Hinterbliebenenpensionen von Interesse.

## 8.1 Invalidität

Historisch: Definition je nach physischer Beeinträchtigung ("linker Arm gelähmt" etc.). Heutige Definition ökonomisch: Verlust an Erwerbseinkommen (z.B. 50% invalid). Einteilung:

- voraussichtlich dauernd/temporär
- total/partiell (z.B. 50%)

Risikoversicherung, kein Erlebensfallkapital. Es ist also möglich, dass der Versicherte keine Auszahlungen für seine Beiträge erhält. Dies stellt einen Anreiz dar, Invalidität vorzutäuschen. Es zeigt sich auch, dass in wirtschaftlich schlechten Zeiten die Invaliditätsraten steigen [13].

**Staatliche Invaliditätsversicherung:** Für Arbeiter gilt der Begriff "Invalidität", für Angestellte "Berufsunfähigkeit". Ca. 20% der österreichischen Pensionisten beziehen eine Berufsunfähigkeits- oder Invaliditätspension.[12]

Voraussetzungen für bis 1963 Geborene (vereinfacht):

- Die Invalidität wird voraussichtlich sechs Monate andauern (ärztliche Begutachtung)

[12] Im Folgenden schreiben wir der Einfachheit halber nur "Invalidität" statt "Invalidität oder Berufsunfähigkeit".

- Umschulung nicht sinnvoll
- Mindestzahl an Versicherungsmonaten
- Noch kein Anspruch auf Alterspension

Statt des ersten Punktes gilt für ab 1964 Geborene :

- Die Invalidität ist voraussichtlich dauerhaft
- Sonst wie oben

Die Pensionshöhe richtet sich nach Versicherungsdauer und Einkommen. Unbefristete Invaliditätspension bei ärztlicher Festellung dauernder Invalidität. Befristete Invaliditätspension nur für vor 1964 Geborene, für Jüngere Rehabilitationsgeld.

**Private Invaliditätsversicherung:**

- Zusätzliche Absicherung (staatliche Pension geringer als letztes Einkommen)
- Möglich: Keine Mindestversicherungszeit
- Möglich: Pension auch dann, falls gerade kein Beruf ausgeübt wird
- Möglich: Pension auch dann, wenn laut Sozialversicherung in einen angemessenen, möglicherweise aber schlechter bezahlten Beruf gewechselt werden könnte

## 8.2 Barwerte

Wie in einem großen Teil der Literatur zur Pensionsversicherungsmathematik üblich, verwenden wir die klassische Notation. Natürlich können alle hier behandelten Probleme mit dem Markowmodell abgedeckt werden (s. Abschnitt 4 und die Übungen). Pensionsbarwerte für Personen, die z.Z. noch keine Pension beziehen, aber bei Eintritt gewisser Ereignisse (Invalidität, Erreichen des Antrittsalters) Anspruch auf eine solche haben, werden auch als **Anwartschaften** bezeichnet.

Das Pensionsantrittsalter bezeichen wir mit $\omega$, z.B. $\omega = 65$. Die einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeit ist $i_x$. Die Wahrscheinlichkeit, als Aktiver $n$ Jahre zu überleben, ist ${}_np^a_x$. Reaktivierung wird vernachlässigt.

**Aktivitätsrente** (Anwendung: Prämienbarwert):

$$\ddot{a}_x^a = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_kp_x^a\, v^k$$

Die Wahrscheinlichkeit, als Invalider $n$ Jahre zu überleben, ist ${}_np_x^i$. Es gilt

$$p_x^i < p_x^a + i_x.$$

(Die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines Invaliden ist kleiner als die eines Aktiven. Letztere setzt sich zusammen aus Verbleib in der Aktivität und Invalidisierung.)

**Invalidenrente** (für einen Invaliden):

$$\ddot{a}_x^i = \sum_{k=0}^{\omega-x} {}_kp_x^i\, v^k$$

Unterjährig:

$$\ddot{a}_x^{i(m)} = \ddot{a}_x^i - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_{\omega-x}E_x^i)$$

**Anwartschaft auf Invalidenrente** (für einen Aktiven):[13]

$$\ddot{a}_x^{ai} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_kp_x^a\, i_{x+k}\, \ddot{a}_{x+k+1}^i\, v^{k+1}$$

Falls Invalidisierung zur Jahresmitte ($\ddot{a}_{x+k-\frac{1}{2}}^i$ linear interpolieren):

$$\ddot{a}_x^{ai} = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_{k-\frac{1}{2}}p_x^a\; i_{x+k-1}\, \ddot{a}_{x+k-\frac{1}{2}}^i\, v^{k-\frac{1}{2}}$$

**Anwartschaft auf Altersrente:**

1. Antritt als Aktiver: $\ddot{a}_x^{aA} = {}_{\omega-x}p_x^a\, \ddot{a}_\omega\, v^{\omega-x}$
2. Antritt als Invalider: $\ddot{a}_x^{aiiA} = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_{k-\frac{1}{2}}p_x^a\; i_{x+k-1}\; {}_{\omega-(x+k-\frac{1}{2})}p_{x+k-\frac{1}{2}}^i\; \ddot{a}_\omega\, v^{\omega-x}$

   (Notation mit zweimal Superindex $i$, weil $\ddot{a}_x^{aiA}$ die gleich folgende Gesamt-Anwartschaft bezeichnet)

**Anwartschaft eines Aktiven auf Invaliden- u. Altersrente:**

$$\ddot{a}_x^{aiA} = \ddot{a}_x^{ai} + \ddot{a}_x^{aA} + \ddot{a}_x^{aiiA}.$$

[13] Die Notation ist nicht einheitlich. Wir verwenden das Superskript $a$ für "aktiv". In manchen Quellen steht es aber auch für "anwartschaftlich" oder "Alters-".

## 8.3 Witwenrente

**Individualmethode:** Wir betrachten ein Ehepaar im Alter $x$ (Mann) und $y$ (Frau; *Witwer*pension analog). Notation:

$q_y^w \ldots$ Sterbewahrscheinlichkeit einer $y$-jährigen Witwe,
$h_y^w \ldots$ Wahrscheinlichkeit, dass $y$-jährige Witwe im nächsten Jahr heiratet,
$p_y^w = 1 - q_y^w - h_y^w \ldots$ Wahrscheinlichkeit, dass Witwe unverheiratet überlebt.

Witwenrente:

$$\ddot{a}_y^w = \sum_{k \geq 0} {}_k p_y^w \, v^k$$

Abfertigung bei Wiederverheiratung:

$$A_y^{Wh} = \sum_{k \geq 0} {}_k p_y^w \, h_{y+k}^w \, v^{k+1}$$

Witwenrente mit Abfertigung $\alpha$:

$$\ddot{a}_y^W = \ddot{a}_y^w + \alpha A_y^{Wh} \tag{8.1}$$

Anwartschaft ($x$ aktiv, stirbt als Aktiver; Invalidität s. Übungen):

$$\ddot{a}_{x|y}^{aaW} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_k p_x^a \, q_{x+k}^a \, {}_{k+1}p_y \, \ddot{a}_{y+k+1}^W \, v^{k+1}$$

Nachteile der Individualmethode: Das Alter des Ehepartners muss bekannt sein. Scheidungen und später hinzukommende Ehegatten werden vernachlässigt.

**Kollektivmethode:** Einfacher, für Praxis bedeutsamer als Individualmethode.

$h_x \ldots$ Wahrscheinlichkeit, dass $x$-Jähriger verheiratet ist,
$y(x) \ldots$ Mittleres Alter der Ehefrau beim Tod des $x$-jährigen Gatten.

Kollektive Anwartschaft (Definition von $\ddot{a}_y^W$ in (8.1)):

$$\ddot{a}_x^{w(koll)} = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_k p_x \, q_{x+k} \, h_{x+k} \, \ddot{a}_{y(x+k)+1}^W \, v^{k+1}$$

## 8.4 Waisenrente

Der Barwert einer Waisenrente für eine $z$-jährige Waise bis Alter $s$ ist $\ddot{a}_{z:\overline{s-z}|}$. Wegen der geringen Sterbewahrscheinlichkeiten kann die Approximation

$$\ddot{a}_{z:\overline{s-z}|} \approx \ddot{a}_{\overline{s-z}|}$$

durch eine Zeitrente verwendet werden. Notation:

$z(x)\ldots$ erwartetes *Alter* der Kinder beim Tod des Vaters im Alter $x$,
$K(x)\ldots$ erwartete *Anzahl* der Kinder bei Tod des Vaters im Alter $x$.

Anwartschaft für einen $x$-jährigen Mann (Kollektivmethode):

$$\sum_{k\geq 0} {}_k p_x \, q_{x+k} \, K(x+k) \, \ddot{a}_{\overline{s-z(x+k)-1}|} \, v^{k+1}.$$

# 9 Finanzierungsmethoden für Pensionspläne

Dieses Kapitel folgt im Wesentlichen (Teilen von) Abschnitt I.5 von [7]. Der Zweck einer versicherungsmathematischen Finanzierungsmethode ist es, jedem Bilanzjahr einen Anteil des Leistungsbarwerts der Pensionsleistungen zuzuordnen. Zu beachten ist, dass betriebliche Pensionszusagen heute in aller Regel beitragsorientiert sind, wodurch die klassischen Finanzierungsmethoden für leistungsorientierte Zusagen immer mehr an Bedeutung verlieren.

Der Einfachheit halber betrachten wir weder Invaliditäts- noch Hinterbliebenenvorsorge, sondern lediglich Alterspensionen. Zum Zeitpunkt $t$ definieren wir die Mengen

| | |
|---|---|
| $A_t$ | Menge aller Aktiven |
| $T_t$ | Menge aller Aktiven, die in $(t, t+1]$ vorzeitig austreten |
| $R_t$ | Menge aller Aktiven mit Pensionsantritt in $(t, t+1]$ |
| $N_t$ | Menge der in $(t, t+1]$ neu hinzugekommen aktiven Planteilnehmer |

Es gilt also

$$A_{t+1} = ((A_t \setminus T_t) \setminus R_t) \cup N_t.$$

Für jeden Aktiven $j$ soll ein Kapitalbetrag angesammelt werden, der im Erwartungswert ausreicht, um ab dem Alter $\omega$ die Alterspensionshöhe (Benefit) $B^j(\omega)$ zu finanzieren.

| | |
|---|---|
| $e$ | Eintrittsalter von $j$ ab dem die pensionsfähige Dienstzeit beginnt |
| $x$ | Alter von $j$ zum Berechnungsstichtag; entspricht dem Zeitpunkt $t$ |
| $\omega$ | Pensionsantrittsalter |
| $\ddot{a}_\omega^{(m)}$ | APV (actuarial present value) der Alterspension |
| $NC_t^j$ | Finanzierungsbeitrag (normal cost) |
| $AL_t^j$ | Rückstellung (accrued liability), Verpflichtung |
| $D_x^a = v^x l_x^a$ | diskontierte Zahl der Aktiven |

Äquivalenzprinzip ($APV$=actuarial present value=versicherungsmathematischer Barwert):

$$APV_t[\text{zukünftige Pensionsleistungen}] = AL_t^j + APV_t[\text{zukünftige Beiträge}]$$

Für den ganzen Pensionsplan gilt:

$$NC_t = \sum_{j \in A_t} NC_t^j \quad \text{und} \quad AL_t = \sum_{j \in A_t} AL_t^j.$$

Aufgrund (u.a.) stochastischer Schwankungen muss die Reserve nicht mit dem Planvermögen $F_t$ übereinstimmen. Letzteres entwickelt sich gemäß

$$F_{t+1} = F_t + I_t + C_t - P_t,$$

wobei

| | |
|---|---|
| $F_t$ | Planvermögen (fund value) |
| $I_t$ | Vermögensertrag (investment income) |
| $C_t$ | Arbeitgeberbeitrag (employer contribution) zum Planvermögen |
| $P_t$ | Auszahlungen (Rentenbarwerte) |

Die Unterdeckung (unfounded accrued liability) des Pensionsplans ist

$$UAL_t = AL_t - F_t.$$

Ist sie negativ, hat der Pensionsplan einen Überschuss, d.h. das vorhandene Vermögen kann die versprochenen Leistungen im Erwartungswert abdecken.

## 9.1 Unit-Credit-Verfahren

Das Unit-Credit-Verfahren geht davon aus, dass die Pensionshöhe bereits bekannt ist, also nicht von einem Index oder einem aus heutiger Sicht unbekannten Letztgehalt abhängt.

| | |
|---|---|
| $B^j(x)$ | Von $j$ bis zum Alter $x$ erworbene Pension |
| $\Delta B^j(x)$ | Von $j$ im Alter $(x, x+1]$ erworbene Pension |

Der Finanzierungsbeitrag für $j$ ist der Barwert der im Zeitraum $t$ bis $t+1$ erworbenen Pension, also der Barwert einer aufgeschobenen Leibrente der Höhe $\Delta B^j(x)$:

$$NC_t^j = \Delta B^j(x)\frac{D_\omega^a}{D_x^a}\ddot{a}_\omega^{(m)} = \Delta B^j(x)v^{\omega-x}{}_{\omega-x}p_x^a\ \ddot{a}_\omega^{(m)}.$$

Der Finanzierungsbeitrag für den ganzen Pensionsplan ist

$$NC_t = \sum_{j\in A_t} NC_t^j = \sum_{j\in A_t} \Delta B^j(x)\frac{D_\omega^a}{D_x^a}\ddot{a}_\omega^{(m)}.$$

Die Rückstellung ist

$$\begin{aligned}
AL_t^j &= APV_t[\text{bis } t \text{ erworbene Leistungen}] + APV_t[\text{ab } t \text{ erworbene Leistungen}] \\
&\qquad - APV_t[\text{künftige Beiträge}] \\
&= APV_t[\text{bis } t \text{ erworbene Leistungen}] \\
&= B^j(x)\ {}_{\omega-x}p_x^a\ v^{\omega-x}\ \ddot{a}_\omega^{(m)} = B^j(x)\frac{D_\omega^a}{D_x^a}\ddot{a}_\omega^{(m)},
\end{aligned}$$

also der Barwert der bisher erworbenen Pension. Falls $\Delta B^j(x) > 0$, gilt also

$$AL_t^j = NC_t^j\frac{B^j(x)}{\Delta B^j(x)}.$$

Die gesamte Rückstellung des Pensionsplans ist

$$AL_t = \sum_{j\in A_t} AL_t^j = \sum_{j\in A_t} B^j(x)\frac{D_\omega^a}{D_x^a}\ddot{a}_\omega^{(m)}.$$

Die Rückstellung kann mit den bisher angesammelten Beiträgen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
AL_t^j &= B^j(x)\frac{D_\omega^a}{D_x^a}\ddot{a}_\omega^{(m)} \\
&= \sum_{z=e}^{x-1} \Delta B^j(z)\frac{D_\omega^a}{D_z^a}\frac{D_z^a}{D_x^a}\ddot{a}_\omega^{(m)} \\
&= \sum_{z=e}^{x-1} NC_{t-(x-z)}^j\frac{D_z^a}{D_x^a}. \qquad (9.1)
\end{aligned}$$

Beachte bei der letzten Summe: Dem Jahr $t$ entspricht das Alter $x$, dem Jahre $t-1$ das Alter $x-1$ usw., und dem Jahr $t-(x-e)$ das Alter $e$.

Rekursive Darstellung:

$$\begin{aligned}
AL_{t+1} &= \sum_{A_{t+1}} AL^j_{t+1} \\
&= \sum_{A_t} AL^j_{t+1} - \sum_{T_t \cup R_t} AL^j_{t+1} + \sum_{N_t} AL^j_{t+1} \qquad (9.2)\\
&= \sum_{A_t} p^a_x AL^j_{t+1} + \sum_{A_t} (1-p^a_x) AL^j_{t+1} - \sum_{T_t \cup R_t} AL^j_{t+1} + \sum_{N_t} AL^j_{t+1} \\
&= \sum_{A_t} p^a_x \big(B^j(x) + \Delta B^j(x)\big) \frac{D^a_\omega}{l^a_x\, p^a_x\, v^x\, v} \ddot{a}^{(m)}_\omega + \sum_{A_t} (1-p^a_x) AL^j_{t+1} \\
&\quad - \sum_{T_t \cup R_t} AL^j_{t+1} + \sum_{N_t} AL^j_{t+1} \\
&= \sum_{A_t} \big(B^j(x) + \Delta B^j(x)\big) \frac{D^a_\omega}{D^a_x} \ddot{a}^{(m)}_\omega (1+i) + \sum_{A_t} (1-p^a_x) AL^j_{t+1} \\
&\quad - \sum_{T_t \cup R_t} AL^j_{t+1} + \sum_{N_t} AL^j_{t+1} \\
&= \Big(AL_t + \sum_{A_t} \Delta B^j(x) \frac{D^a_\omega}{D^a_x} \ddot{a}^{(m)}_\omega\Big)(1+i) \\
&\quad - \Big(\sum_{T_t} AL^j_{t+1} - \sum_{A_t} (1-p^a_x) AL^j_{t+1}\Big) - \sum_{R_t} AL^j_{t+1} + \sum_{N_t} AL^j_{t+1}. \qquad (9.3)
\end{aligned}$$

Interpretation des Terms $-\Big(\sum_{T_t} AL^j_{t+1} - \sum_{A_t}(1-p^a_x) AL^j_{t+1}\Big)$: Durch Austritte weggefallene Verpflichtung minus erwartetem Wegfall an Verpflichtungen im Zeitraum $t$ bis $t+1$.

Interpretation des Terms $-\sum_{R_t} AL^j_{t+1}$: Kapital und Verpflichtungen der Alterspensionisten werden aus dem Plan entfernt. Das entspricht der Annahme eines "Rentenkaufs" für diese Gruppe.

Neueintritte $j \in N_t$ können aufgrund von Vordienstzeiten mit einem Verpflichtungswert $AL^j_{t+1} > 0$ starten; sonst gilt $AL^j_{t+1} = 0$ für $j \in N_t$.

Für die Verpflichtung gilt weiters (wegen (9.3) und der Definition von

$NC)$

$$AL_{t+1} = \big(AL_t + NC_t\big)(1+i) - \Big(\sum_{T_t} AL^j_{t+1} - \sum_{A_t}(1-p^a_x)AL^j_{t+1}\Big) - \sum_{R_t} AL^j_{t+1} + \sum_{N_t} AL^j_{t+1}.$$

Interpretation: Falls niemand mit Vordienstzeiten hinzukommt, also $\sum_{N_t} AL^j_{t+1} = 0$, ändert der Gesamt-Finanzierungsbeitrag die Verpflichtung vom Anfangs- auf den Endwert der Periode.

Falls $i > 0$ and $\Delta B^j(x+1) \geq \Delta B^j(x)$, steigt der Finanzierungsbeitrag mit der Zeit:

$$\begin{aligned} NC^j_{t+1} &= \Delta B^j(x+1)\frac{D^a_\omega}{D^a_{x+1}}\ddot{a}^{(m)}_\omega \\ &= \frac{\Delta B^j(x+1)}{\Delta B^j(x)}\Delta B^j(x)\frac{D^a_\omega}{l^a_x\, p^a_x\, v^x v}\ddot{a}^{(m)}_\omega \\ &= \frac{\Delta B^j(x+1)}{\Delta B^j(x)}\underbrace{\frac{1+i}{p^a_x}}_{>1} NC^j_t > \frac{\Delta B^j(x+1)}{\Delta B^j(x)} NC^j_t. \end{aligned}$$

Rekursive Darstellung der Unterdeckung:

$$\begin{aligned} UAL_{t+1} &= AL_{t+1} - F_{t+1} \\ &= \big(AL_t + NC_t\big)(1+i) \\ &\quad - \Big(\sum_{T_t} B^j(x+1)\frac{D^a_\omega}{D^a_{x+1}}\ddot{a}^{(m)}_\omega - \sum_{A_t}(1-p^a_x)B^j(x+1)\frac{D^a_\omega}{D^a_{x+1}}\ddot{a}^{(m)}_\omega\Big) \\ &\quad - \sum_{R_t} B^j(x+1)\frac{D^a_\omega}{D^a_{x+1}}\ddot{a}^{(m)}_\omega + \sum_{N_t} B^j(x+1)\frac{D^a_\omega}{D^a_{x+1}}\ddot{a}^{(m)}_\omega \\ &\quad - (F_t + I_t + C_t - P_t), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} UAL_{t+1} = UAL_t(1+i) &+ \big(NC_t(1+i) - C_t\big) - (I_t - iF_t) \\ &- \Big(\sum_{T_t} AL^j_{t+1} - \sum_{A_t}(1-p^a_x)AL^j_{t+1}\Big) \\ &- \Big(\sum_{R_t} AL^j_{t+1} - P_t\Big) + \sum_{N_t} AL^j_{t+1}. \end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| $I_t^C$ | Vermögensertrag aus $C_t$ zur angenommenen Rate $i$ in $(t, t+1]$ |
| $I_t^P$ | entgangener Vermögensertrag aus $P_t$ |

Für die Unterdeckung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} UAL_{t+1} = UAL_t(1+i) &- \big((C_t + I_t^C) - NC_t(1+i)\big) \\ &- \big(I_t - (iF_t + I_t^C - I_t^P)\big) \\ &- \Big(\sum_{T_t} AL_{t+1}^j - \sum_{A_t}(1-p_x^a)AL_{t+1}^j\Big) \\ &- \big(\sum_{R_t} AL_{t+1}^j - (P_t + I_t^P)\Big) + \sum_{N_t} AL_{t+1}^j. \end{aligned}$$

Gewinn/Verlust-Analyse:

$$UAL_{t+1} = (UAL_t + NC_t)(1+i) - (C_t + I_t^C) - \begin{cases} \text{Zinsgewinn} \\ +\text{Austritt-Gewinn} \\ +\text{Rentenkauf-Gewinn} \\ -\text{Neueintritt-Verlust} \end{cases}$$

Der versicherungsmathematische Gewinn/Verlust ist

$$G_t = (UAL_t + NC_t)(1+i) - (C_t + I_t^C) - UAL_{t+1} = \begin{cases} \text{Zinsgewinn} \\ +\text{Austritt-Gewinn} \\ +\text{Rentenkauf-Gewinn} \\ -\text{Neueintritt-Verlust} \end{cases}$$

## 9.2 Projected Unit Credit (PUC)

Auch bekannt als Verfahren der laufenden Einmalprämien. Hier ist die bis zum Alter $x$ erworbene Pension nicht bekannt, da sie z.B. von einem Index oder vom Letztgehalt abhängt, und muss geschätzt werden.

| | |
|---|---|
| $B_t^j = B_t^j(\omega)$ | Im Zeitpunkt $t$ (Alter $x$) geschätzte Pension von $j$ |
| $\Delta B_{t+1}^j$ | Veränderung von $B_t^j$ durch Aktualisierung der Schätzung im Zeitpunkt $t+1$ |
| $B_t^j(x)$ | Bis zum Alter $x$ erworbener Anteil der in $t$ geschätzten Pension |
| $\Delta B_t^j(x)$ | Im Intervall $(x, x+1]$ erworbener Anteil der in $t$ geschätzten Pension |
| $c_x^j$ | Anteil von $B_t^j$, der im Intervall $(x, x+1]$ erworben wird |

Falls $B_t^j(x)$ in $x$ steigt, gilt $0 \leq c_x^j \leq 1$ und $\sum_{k=e}^{\omega-1} c_k^j = 1$. Für die erworbene Pension gilt

$$\begin{aligned}
\Delta B_t^j(x) &= c_x^j B_t^j, \\
B_t^j(e) &= 0, \\
B_t^j(x) &= B_t^j \sum_{k=e}^{x-1} c_k^j, \quad e < x \leq \omega, \\
B_{t+1}^j(x+1) &= B_{t+1}^j \sum_{k=e}^{x} c_k^j = (B_t^j + \Delta B_{t+1}^j) \sum_{k=e}^{x} c_k^j \\
&= B_t^j(x) + \Delta B_t^j(x) + \Delta B_{t+1}^j \sum_{k=e}^{x} c_k^j \\
&= B_t^j(x+1) + \Delta B_{t+1}^j \sum_{k=e}^{x} c_k^j.
\end{aligned}$$

Wenn der Pensionsplan für jedes pensionsfähige Dienstjahr denselben Pensionserwerb vorsieht, gilt

$$c^j = c_x^j = \frac{1}{\omega - e} \quad \text{und} \quad \sum_{k=e}^{x} c_k^j = \frac{x-e}{\omega - e}.$$

Die Rückstellung ist der Barwert der erworbenen hochgerechneten Pension:

$$\begin{aligned}
AL_t^j &= B_t^j(x)\ {}_{\omega-x}p_x^a\ v^{\omega-x}\ \ddot{a}_\omega^{(m)} \\
&= B_t^j(x) \frac{D_\omega^a}{D_x^a} \ddot{a}_\omega^{(m)} \\
&= \left( B_t^j \sum_{k=e}^{x-1} c_k^j \right) \frac{D_\omega^a}{D_x^a} \ddot{a}_\omega^{(m)}.
\end{aligned}$$

Wir definieren

$$\widetilde{AL}_{t+1}^j = B_t^j(x+1) \frac{D_\omega^a}{D_{x+1}^a} \ddot{a}_\omega^{(m)},$$

also die Verpflichtung gegenüber $j$ zum Zeitpunkt $t+1$ ohne Aktualisierung der Schätzung im Zeitpunkt $t+1$, und

$$\Delta AL_{t+1}^j = AL_{t+1}^j - \widetilde{AL}_{t+1}^j = \left( \Delta B_{t+1}^j \sum_{k=e}^{x} c_k^j \right) \frac{D_\omega^a}{D_{x+1}^a} \ddot{a}_\omega^{(m)}.$$

Damit folgt für die Verpflichtung:

$$\begin{aligned}
AL_{t+1}^j &= B_{t+1}^j(x+1)\frac{D_\omega^a}{D_{x+1}^a}\ddot{a}_\omega^{(m)} \\
&= \Big(B_t^j(x+1) + \Delta B_{t+1}^j \sum_{k=e}^{x} c_k^j\Big)\frac{D_\omega^a}{D_{x+1}^a}\ddot{a}_\omega^{(m)} \\
&= \widetilde{AL}_{t+1}^j + \Delta AL_{t+1}^j.
\end{aligned}$$

Verpflichtung des gesamten Pensionsplans:

$$AL_t = \sum_{j\in A_t} AL_t^j = \sum_{j\in A_t} B_t^j(x)\frac{D_\omega^a}{D_x^a}\ddot{a}_\omega^{(m)}.$$

Für $j \in N_t$ kann man $\Delta B_{t+1}^j = 0$ setzen, da für Neueintritte nach $t$ keine Schätzung im Zeitpunkt $t$ benötigt wurde. Also gilt

$$\sum_{N_t} \Delta AL_{t+1}^j = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{A_{t+1}} \Delta AL_{t+1}^j = \sum_{A_{t+1}\setminus N_t} \Delta AL_{t+1}^j,$$

und somit

$$\begin{aligned}
AL_{t+1} &= \sum_{A_{t+1}} \big(\Delta AL_{t+1}^j + \widetilde{AL}_{t+1}^j\big) \\
&= \sum_{A_{t+1}\setminus N_t} \Delta AL_{t+1}^j + \sum_{A_t} \widetilde{AL}_{t+1}^j - \sum_{T_t\cup R_t} \widetilde{AL}_{t+1}^j + \sum_{N_t} AL_{t+1}^j.
\end{aligned}$$

Unterschied zur entsprechenden Formel (9.2) für das Unit-Credit-Verfahren: $\widetilde{AL}_{t+1}^j$ statt $AL_{t+1}^j$, und zusätzlicher Term $\sum_{A_{t+1}\setminus N_t} \Delta AL_{t+1}^j$. Rekursive Darstellung:

$$\begin{aligned}
AL_{t+1} = &\Big(AL_t + \sum_{A_t} \Delta B_t^j(x)\frac{D_\omega^a}{D_x^a}\ddot{a}_\omega^{(m)}\Big)(1+i) \\
&+ \sum_{A_{t+1}\setminus N_t} \Delta B_{t+1}^j \sum_{k=e}^{x} c_k^j \frac{D_\omega^a}{D_{x+1}^a}\ddot{a}_\omega^{(m)} \\
&- \Big(\sum_{T_t} \widetilde{AL}_{t+1}^j - \sum_{A_t}(1-p_x^a)\widetilde{AL}_{t+1}^j\Big) - \sum_{R_t} \widetilde{AL}_{t+1}^j + \sum_{N_t} AL_{t+1}^j.
\end{aligned}$$

Der Finanzierungsbeitrag für $j$ ist der APV der im Intervall $(t, t+1]$ erworbenen hochgerechneten Pension:

$$NC_t^j = \Delta B_t^j(x)\frac{D_\omega^a}{D_x^a}\ddot{a}_\omega^{(m)} = c_x^j B_t^j \frac{D_\omega^a}{D_x^a}\ddot{a}_\omega^{(m)}.$$

Natürlich gilt (falls Nenner $\neq 0$)

$$AL_t^j = NC_t^j \frac{B_t^j(x)}{\Delta B_t^j(x)} = NC_t^j \frac{1}{c_x^j} \sum_{k=e}^{x-1} c_k^j.$$

Auch beim PUC-Verfahren kann $AL_t^j$ mittels der bisherigen Finanzierungsbeiträge ausgedrückt werden:[14]

$$\begin{aligned}
AL_t^j &= \Big(B_t^j \sum_{k=e}^{x-1} c_k^j\Big) \frac{D_\omega^a}{D_x^a} \ddot{a}_\omega^{(m)} \\
&= \sum_{k=e}^{x-1} c_k^j B_{t-(x-k)}^j \frac{D_\omega^a}{D_k^a} \frac{D_k^a}{D_x^a} \ddot{a}_\omega^{(m)} + \sum_{k=e}^{x-1} c_k^j (B_t^j - B_{t-(x-k)}^j) \frac{D_\omega^a}{D_x^a} \ddot{a}_\omega^{(m)} \\
&= \sum_{k=e}^{x-1} NC_{t-(x-k)}^j \frac{D_k^a}{D_x^a} + \sum_{k=e}^{x-1} c_k^j (B_t^j - B_{t-(x-k)}^j) \frac{D_\omega^a}{D_x^a} \ddot{a}_\omega^{(m)}.
\end{aligned}$$

Falls die Änderungen $B_t^j - B_{t-(x-k)}^j$ der Schätzung nicht allzu groß sind, ergibt sich also eine ungefähr analoge Darstellung zu (9.1). Gesamter Finanzierungsbeitrag des Pensionsplans:

$$NC_t = \sum_{A_t} NC_t^j = \sum_{A_t} c_x^j B_t^j \frac{D_\omega^a}{D_x^a} \ddot{a}_\omega^{(m)}.$$

Gesamte Verpflichtung:

$$\begin{aligned}
AL_{t+1} = \big(AL_t + NC_t\big)(1+i) &+ \sum_{A_{t+1} \setminus N_t} \Delta A_{t+1}^j \\
&- \Big(\sum_{T_t} \widetilde{AL}_{t+1}^j - \sum_{A_t} (1 - p_x^a) \widetilde{AL}_{t+1}^j\Big) \\
&- \sum_{R_t} \widetilde{AL}_{t+1}^j + \sum_{N_t} AL_{t+1}^j.
\end{aligned}$$

[14] Ich bedanke mich bei Manuel Schranzhofer, der in einer früheren Version dieser Darstellung einen Fehler gefunden hat.

Finanzierungsbeitrag als Zeitfunktion:

$$
\begin{aligned}
NC_{t+1}^{j} &= c_{x+1}^{j}(B_t^j + \Delta B_{t+1}^j)\frac{D_k^a}{D_{x+1}^a}\ddot{a}_{\omega}^{(m)} \\
&= \frac{c_{x+1}^j}{c_x^j}\underbrace{\frac{1+i}{p_x^a}}_{>1} NC_t^j + c_{x+1}^j \Delta B_{t+1}^j \frac{D_\omega^a}{D_{x+1}^a}\ddot{a}_{\omega}^{(m)} \\
&> \frac{c_{x+1}^j}{c_x^j} NC_t^j + c_{x+1}^j \Delta B_{t+1}^j \frac{D_\omega^a}{D_{x+1}^a}\ddot{a}_{\omega}^{(m)}.
\end{aligned}
$$

Auch hier steigt der Finanzierungsbeitrag i.d.R. mit dem Alter.

Rekursive Darstellung der Unterdeckung:

$$
\begin{aligned}
UAL_{t+1} &= AL_{t+1} - F_{t+1} \\
&= (AL_t + NC_t)(1+i) + \sum_{A_{t+1}\setminus N_t} \Delta AL_{t+1}^j \\
&\quad - \Big(\sum_{T_t} \widetilde{AL}_{t+1}^j - \sum_{A_t}(1-p_x^a)\widetilde{AL}_{t+1}^j\Big) \\
&\quad - \sum_{R_t} \widetilde{AL}_{t+1}^j + \sum_{N_t} AL_{t+1}^j - (F_t + I_t + C_t - P_t).
\end{aligned}
$$

Oder, mit $I^P$ und $I^C$ dargestellt:

$$
\begin{aligned}
UAL_{t+1} = {} & UAL_t(1+i) - \big((C_t + I_t^C) - NC_t(1+i)\big) - \big(I_t - (iF_t + I_t^C - i_t^P)\big) \\
& + \sum_{A_{t+1}\setminus N_t} \Delta AL_{t+1}^j - \Big(\sum_{T_t} \widetilde{AL}_{t+1}^j - \sum_{A_t}(1-p_x^a)\widetilde{AL}_{t+1}^j\Big) \\
& - \Big(\sum_{R_t} \widetilde{AL}_{t+1}^j - (P_t + I_t^P)\Big) + \sum_{N_t} AL_{t+1}^j.
\end{aligned}
$$

Gewinn-/Verlustanalyse:

$$
UAL_{t+1} = (UAL_t + NC_t)(1+i) - (C_t + I_t^C) - \begin{cases} \text{Zins-Gewinn} \\ -\text{Pensionsschätz-Verlust} \\ +\text{Austritts-Gewinn} \\ +\text{Rentenkauf-Gewinn} \\ -\text{Neueintritts-Verlust} \end{cases}
$$

Der versicherungsmathematische Gewinn/Verlust im Zeitintervall $(t, t+1]$ is wieder definiert als

$$G_t = (UAL_t + NC_t)(1+i) - (C_t + I_t^C) - UAL_{t+1} = \begin{cases} \text{Zins-Gewinn} \\ -\text{Pensionsschätz-Verlust} \\ +\text{Austritts-Gewinn} \\ +\text{Rentenkauf-Gewinn} \\ -\text{Neueintritts-Verlust} \end{cases}$$

## 9.3 Teilwertverfahren

Beim Teilwertverfahren ist der Finanzierungsbeitrag (im einfachsten Fall) konstant. Er wird also analog zur Prämie einer Leibrente mittels Äquivalenzprinzip berechnet:

$$NC_t^j \, \ddot{a}^a_{e:\overline{\omega-e}|} = B_t^j \ddot{a}_\omega^{(m)} \, {}_{\omega-e}p_e^a \, v^{\omega-e}$$

Prospektive Darstellung der Verpflichtung:

$$AL_t^j = B_t^j \ddot{a}_\omega^{(m)} \, {}_{\omega-x}p_x^a \, v^{\omega-x} - NC_t^j \, \ddot{a}^a_{x:\overline{\omega-x}|}$$

Die Rückstellung (Verpflichtung) wird in diesem Zusammenhang als *Teilwert* der Pensionszusage bezeichnet. Rekursionen für Verpflichtung und Unterdeckung: siehe Übungen.

Wenn die geschätzte Pensionshöhe $B_t^j$ jährlich aktualisiert wird, gilt

$$NC_{t+1}^j = \frac{B_{t+1}^j}{B_t^j} NC_t^j.$$

In der Praxis ist es üblich, nicht die Finanzierungsbeiträge konstant zu halten, sondern ihr Verhältnis zum Gehalt (wobei die Gehaltsentwicklung prognostiziert werden muss). Wenn die Pensionshöhe aktualisiert wird, wird auch die Rückstellung um den Faktor $B_{t+1}^j / B_t^j$ angepasst (im Gegensatz zum Gegenwartswertverfahren; s.u.).

## 9.4 Gegenwartswertverfahren

Aus versicherungsmathematischer Sicht besteht der Unterschied zum Teilwertverfahren im Umgang mit Erhöhungen des Anspruchs. Es erfolgt keine Zuzahlung zur Deckungsrückstellung. Die Erhöhung wird wie eine Neuzusage behandelt. Die neue Zuführungsrate

$$NC_t^j + (B_{t+1}^j - B_t^j) \frac{{}_{\omega-x|}E_x^a \, \ddot{a}_\omega^{(m)}}{\ddot{a}^a_{x:\overline{\omega-x}|}}$$

ist natürlich höher als beim Teilwertverfahren.

# 10 Personalrückstellungen

Literatur: AFRAC-Stellungnahme [1] (Austrian financial reporting and auditing committee), Diplomarbeit von Julian Kamecki [10], Betriebspensionsgesetz (BPG).

Für folgende Zusagen sind Rückstellungen zu bilden:

- Pensionen (Alterspension, Hinterbliebenenpension)
- Abfertigungen
- Jubiläumsgelder

**Direkte Verpflichtung:** Das Unternehmen erbringt die zugesagte Leistung selbst. Nicht empfehlenswert, falls die Anzahl der Mitarbeiter für Risikoausgleich zu klein.

**Ausgelagerte Verpflichtung:** Das Unternehmen erbringt die Leistung nicht selbst, sondern z.B. eine Pensionskasse oder ein LV-Unternehmen (betriebliche Kollektivversicherung, d.h. klassische LV mit Garantiezins).

**Rückdeckung:** Eine direkte Verpflichtung wird durch einen Versicherungsvertrag rückgedeckt. Das Unternehmen erbringt die Leistung selbst, erhält diese aber von der Versicherung ersetzt.

**Unverfallbarkeit:** Garantiert dem Arbeitnehmer Anspruch auf bereits erworbene Anwartschaft. Der Unverfallbarkeits-Betrag hängt von der Art der Zusage ab (s. BPG).

**Leistungsorientierte Zusagen:** Pensionshöhe festgelegt; Arbeitgeber hat Nachschusspflicht.

**Beitragsorientierte Zusagen:** Beitrag festgelegt. Veranlagungsrisiko beim Arbeitnehmer.

UGB (Unternehmensgesetzbuch) §198 (8) *1. Rückstellungen sind für ungewisse Verbindlichkeiten (...) zu bilden, die am Abschlußstichtag wahrscheinlich oder sicher, aber hinsichtlich ihrer Höhe oder des Zeitpunkts ihres Eintritts unbestimmt sind.*

*4. Rückstellungen sind insbesondere zu bilden für*
*a) Anwartschaften auf Abfertigungen,*
*b) laufende Pensionen und Anwartschaften auf Pensionen,*
*c) (...) nicht konsumierten Urlaub, Jubiläumsgelder (...)*

Bei ausgelagerten Verpflichtungen sind jedenfalls Rückstellungen zu bilden, falls es nicht abgedeckte Risiken gibt, z.B. eine Nachschusspflicht bei leistungsorientierten Pensionskassen-Verträgen.

Für die Ansammlung der Pensionsverpflichtung ist das **Teilwertverfahren** oder das **PUC-Verfahren** anzuwenden (siehe Abschnitt 9). Bei der

Projektion sind die Inflation und Pensionsänderungen aufgrund üblicher Karriereschritte zu berücksichtigen.

**Rechnungszinssatz:** Zinssatz von Unternehmens-Anleihen von Emittenten mit hochklassiger Bonität. Laufzeit und Währung müssen mit den Pensionszusagen übereinstimmen. Es darf jedoch vereinfachend eine durchschnittliche Restlaufzeit von 15 Jahren angenommen werden.

Während das UGB auf eine Darstellung der tatsächlichen Vermögensverhältnisse eines Unternehmens abstellt, ist die steuerrechtliche Behandlung von Rückstellungen im Einkommensteuergesetz (EStG) geregelt. Der Aufwand für Rückstellungen ist nur bis zur Höhe der EStG-Dotierung steuermindernd.[15] §14 Abs. 6 EStG legt einen Rechnungszins von 6% für Rückstellungen für Pensionen, Abfertigungen und Jubiläumsgelder fest. Für Rückstellungen für andere ungewisse Verbindlichkeiten (§9) gilt ein Zinssatz von 3,5%. Ein Antrag des Bundesfinanzgerichts auf Angleichung dieser Zinssätze wurde im Nov 2020 vom VfGH abgelehnt.

# 11 Berechnung von staatlichen Pensionen

Wie oben erwähnt, beruht das staatliche Pensionssystem in Österreich auf dem Umlageverfahren. In diesem Abschnitt wird angedeutet, wie Alters- und Hinterbliebenenpensionen nach dem allgemeinen Pensionsgesetz (APG) und dem allgemeinen Sozialversicherungsgesetz (ASVG) berechnet werden. Die rechtlichen Grundlagen werden teilweise vereinfacht dargestellt. Eine ausführlichere Darstellung (auch für D und CH) findet sich in [2].

## 11.1 Alterspension

Beitragssatz für Angestellte (Dienstnehmer- und Dienstgeberbeitrag addiert): 22,8%. Das ist etwas mehr als die Hälfte des gesamten Sozialversicherungsbeitrags. Die Höchstbeitragsgrundlage beträgt für das Jahr 2022 €5.670. Darüber hinaus werden keine SV-Beiträge entrichtet.

**Bis 2003:** Die besten 180 Beitragsmonate (im zusammenhängenden Fall also 15 Jahre) bildeten die Bemessungsgrundlage (maximal bis zur Höchstbeitragsgrundlage). Pro 12 Monaten Versicherungszeit erhielt man 2% Pension ("Steigerungspunkte").

[15] Zwar geht es im EStG grundsätzlich um das Einkommen *natürlicher* Personen, jedoch verweist das Körperschaftsteuergesetz, welches die Einkommensteuer für juristische Personen regelt, auf des EStG.

**Beispiel 11.1.** *(Pensionsberechnung "alt")*

- *Bemessungsgrundlage 2.500€ (die besten 180 Monate)*
- *Versicherungsdauer 40 Jahre*
- *Alterspension 2.500€ × 40 × 2% = 2.000€*

Der Durchrechnungszeitraum von 180 Monaten wurde ab 2004 sukzessive erhöht, und die Steigerungspunkte auf 1,78% gesenkt. Um zu große Verschlechterungen abzufedern, wurde ein Verlustdeckel eingeführt (siehe Beispiel 11.2).

Mit dem APG (2005) wurde schließlich die Pensionsberechnung durch Einführung des **Pensionskontos** völlig umgestellt. Es verzeichnet für jeden Versicherten die Beitragszeiten:

- Beitragszeiten einer Pflichtversicherung (Erwerbstätigkeit)
- Beitragszeiten einer freiwilligen Versicherung
- Beitragszeiten einer Teilversicherung

Neben der Alterspension zum Regelpensionsalter gibt es Korridorpension, Schwerarbeiterpension und Hacklerpension (lange Versicherungsdauer); siehe [2].

Regelpensionsalter für Männer ist 65, für Frauen 60. Letzteres wird 2024 bis 2033 jährlich um 6 Monate angehoben. Frauen, die nach dem 1. 6. 1968 geboren sind, haben Regelpensionsalter 65.

Bei der Umstellung auf das Pensionskonto wurden Kontoerstgutschriften verbucht. Jedes Jahr wird auf dem Pensionskonto eine Teilgutschrift verbucht. Dazu wird die jährliche Beitragsgrundlage (Brutto-Jahresverdienst bis zur Höchstbeitragsgrundlage) mit dem Kontoprozentsatz 1,78 multipliziert. Am Jahresanfang wird die Gesamtgutschrift mit der Aufwertungszahl multipliziert.

$$\begin{aligned}\text{Aufwertungszahl 2021} &= \frac{\text{durchschnittliche Beitragsgrundlage 2019}}{\text{durchschnittliche Beitragsgrundlage 2018}}\\ &= 1{,}033.\end{aligned}$$

$$\text{aufgewertete Gesamtgutschrift} \;+\; \text{Teilgutschrift} \;=\; \text{neue Gesamtgutschrift}$$

Die Gesamtgutschrift dividiert durch 14 ergibt die monatliche Brutto-Alterspension, von der noch SV-Beitrag (natürlich kein PV-Beitrag) und Lohnsteuer abgezogen werden. Bei vorzeitigem Pensionsantritt gibt es i.d.R. einen Abschlag.

Parallelrechnung bis 2013: Für Personen, die ab 1. Jänner 1955 geboren sind und Versicherungszeiten nach altem Recht und nach APG erworben haben. Es werden zunächst zwei fiktive Pensionshöhen errechnet: Als ob es das APG nicht gäbe, und als ob es schon immer gegolten hätte. Die tatsächliche Pensionshöhe wird anteilig zusammengesetzt, gemäß den Anteilen der Versicherungsmonate vor 2005 und ab 2005 (APG).

Seit 2014 gibt es nur mehr die Berechnung mittels Pensionskonto (Kontoerstgutschrift usw.).

**Beispiel 11.2.** *(Parallelrechnung; aus [2])*
*Eine am 1. Jänner 1960 geborene Frau beantragt zum Stichtag 1. Jänner 2020 ihre Alterspension. Sie hat 40 Versicherungsjahre aufgrund ihrer Erwerbstätigkeit als Angestellte erworben, davon 24 Versicherungsjahre vor dem 1. Jänner 2005 und 16 Versicherungsjahre ab dem 1. Jänner 2005. Es wird angenommen, dass das System der Parallelrechnung zum Pensionsstichtag gültig ist.*

| | |
|---|---|
| Anzahl der Versicherungsjahre gesamt: | 40 |
| davon bis 31. Dezember 2004: | 24 |
| ab 1. Jänner 2005: | 16 |

***Pension nach Rechtslage bis 31. Dezember 2003***

| | |
|---|---|
| Bemessungsgrundlage nach Rechtslage 2003: | 2 700 € |
| Versicherungsjahre: | 40 |
| Steigerungsprozentsatz: | 2 % |
| Pension nach RL 2003 = 2.700 € × 40 Versicherungsjahre × 2 % = 2.160 € | |

*Die Pensionsleistung nach Rechtslage 2003 beträgt 2.160 €.*

***Pension nach Rechtslage ab 1. Jänner 2004***

| | |
|---|---|
| Bemessungsgrundlage nach Rechtslage 2004: | 2.200 € |
| Versicherungsjahre: | 40 |
| Steigerungsprozentsatz: | 1,78 % |
| Pension nach RL 2004 = 2.200 € × 40 Versicherungsjahre × 1,78 % = 1.566,40 € | |

*Die Pensionsleistung nach Rechtslage 2004 beträgt 1.566,40 €.*
***Verlustdeckel***

| | | |
|---|---|---|
| Pension nach Rechtslage 2003 | € | 2.160,00 |
| Abzug des 9 %-Verlustdeckels (s. Tabelle 4.2 in [2]) | € | - 194,40 |
| Pension nach Abzug des Verlustdeckels | € | 1.965,60 |

*Nach Abzug des Verlustdeckels beträgt die Alterspension der Frau 1.965,60 €.*

***Kontopension nach APG***

| | |
|---|---|
| Pension laut Kontogutschrift: | 2.300 € |

***Parallelrechnung***

| | |
|---|---|
| Pension nach Altrecht: | 1.965,60 € |
| Versicherungsjahre bis 31. Dezember 2004: | 24 |
| Teilpension nach Altrecht = 1.965,60 € × 24/40 = 1.179,36 € | |
| Pension nach APG: | 2.300 € |
| Versicherungsjahre ab 1. Jänner 2005: | 16 |
| Teilpension nach APG = 2.300 € × 16/40 = 920 € | |

***Pension nach Parallelrechnung***

| | | |
|---|---|---|
| Teilpension nach Altrecht: | € | 1.179,36 |
| Teilpension nach APG: | € | 920,00 |
| Pension nach Parallelrechnung: | € | 2.099,36 |

*Die Gesamtpension der Frau ergibt sich aus der Summe der Teilpensionen und beträgt 2.099,36 €.*

## 11.2 Witwenpension

Berechtigt sind Ehepartner und eingetragene Partner. Berechnungsgrundlage ist das Bruttoeinkommen in den letzten 2 Kalenderjahren:

$$B_V = \text{Berechnungsgrundlage Verstorbener}$$
$$B_H = \text{Berechnungsgrundlage Hinterbliebener}$$

Damit wird der individuelle Prozentsatz

$$\min\{\max\{70 - 30 \times B_H/B_V, 0\}, 60\}\%$$

berechnet. Für die Witwenrente wird das Einkommen des Verstorbenen mit dem individuellen Prozentsatz multipliziert.

- Keine Witwenpension: $B_H \geq \frac{7}{3}B_V$
- 60% Witwenpension: $B_H \leq \frac{1}{3}B_V$

Bei kleinen Einkommen wird diese Pension erhöht. Personen, die monatlich mehr als €8.460 verdienen, erhalten keine Witwenpension.

Die Bezugsdauer hängt von mehreren Faktoren ab. Auswahl:

- Keine Befristung, falls in der Ehe ein Kind geboren wurde
- Keine Befristung bei gewisser Mindestdauer der Ehe
- 30 Monate Befristung, falls Verstorbener bei Eheschließung Pensionist, und Witwe bei seinem Tod mindestens 35

Die Auszahlung erfolgt monatlich und für April und Oktober in doppelter Höhe.

Wiederverheiratung: Witwenpension endet, und es wird ein 35facher Pensionsbezug als Abfindung geleistet (nicht bei befristeter Witwenpension).

## 11.3 Waisenpension

Anspruch: Ab Tod des versicherten Elternteils, bis zum 18. Geburtstag. Bei Schul- oder Berufsausbildung bis 27, bei Erwerbsunfähigkeit unbegrenzt.

Der Verstorbene muss soviele Versicherungsjahre gehabt haben, wie für eine Invaliditätspension nötig wären (sonst Einmal-Abfindung statt Waisenrente).

Berechnung: Zunächst wird nach den Bestimmungen für die Berechnungsgrundlage der Witwenpension eine (fiktive) 60%ige Witwenpension berechnet. Die Waisenpension beträgt bei Tod

- eines Elternteils: 40% davon
- beider Elternteile: 60% davon.

Auszahlung wie bei Witwenpension.

# 12 Gewinnbeteiligung

## 12.1 Allgemeines

Versicherungsunternehmen müssen vorsichtig kalkulieren (Höchstzinssatzverordnung der FMA, vorsichtige Sterbetafeln). „Normalerweise“ entstehen hohe Gewinne. Diese müssen zu $\geq 85\%$ an die Kunden rückerstattet werden.

Lebensversicherungs-Gewinnbeteiligungsverordnung (LV-GBV) der FMA:

§3 (1) *Die Aufwendungen für die Dotierung der Rückstellung für erfolgsabhängige Prämienrückerstattung bzw. Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer (§146 Abs. 4 Posten III.8. VAG 2016) zuzüglich allfälliger Direktgutschriften haben in jedem Geschäftsjahr mindestens 85% der Mindestbemessungsgrundlage gemäß §4 zu betragen.*

(2) *Auf die Mindestgewinnbeteiligung gemäß Abs. 1 können Überdotierungen aus früheren Geschäftsjahren angerechnet werden. Der anrechnungsfähige Betrag ergibt sich aus der wie folgt gekürzten Überdotierung: Die Kürzung hat für jedes auf die Überdotierung folgende Geschäftsjahr 10% der Überdotierung zu betragen; ferner sind alle bereits erfolgten Anrechnungen aus Vorjahren abzuziehen. Überdotierungen sind in der zeitlichen Reihenfolge, von der Ältesten beginnend, der ihnen zugrunde liegenden Aufwendungen bis zur Höhe ihrer Anrechnungsfähigkeit anzurechnen.*

**Bemessungsgrundlage** (vereinfacht):

+ Prämien
+ Kapitalerträge
- Aufwendungen für Kapitalanlagen und Zinsaufwendungen
- Aufwendungen für Versicherungsfälle (Leistungen)
- Erhöhung der versicherungstechnischen Rückstellungen
+ Verminderung der versicherungstechnischen Rückstellungen
- Aufwendungen für den Versicherungsbetrieb (Gehälter, Kosten für Immobilien, Werbung...)
- Steuern
+ Verminderung der Risikorücklage
- Erhöhung der Risikorücklage

+ Verminderung der Zinszusatzrückstellung

- Erhöhung der Zinszusatzrückstellung

**Zinszusatzrückstellung:** Laut aktueller Höchstzinssatzverordnung der FMA vorgeschrieben. Pauschalrückstellung, die nicht den einzelnen Verträgen zuzuordnen ist. Mindestwert im Geschäftsjahr $t$:

$$ZZR_t = \min\left\{\frac{t-2014}{7}, 1\right\} \cdot DR_{t-1} \cdot \overline{RZ}_{t-1} \cdot \frac{\max\{\overline{RZ}_{t-1} - RZS_{t-1}, 0\}}{1.45}$$

Dabei ist $DR$ die Deckungsrückstellung, $\overline{RZ}$ der durchschnittliche Garantiezinssatz des LV-Portfolios des Unternehmens und $RZS$ der Referenzzinssatz (umlaufgewichtete Durchschnittsrendite für Bundesanleihen).

Der Bestand wird nun in **Abrechnungsverbände** unterteilt, um die Gewinnbeteiligung verursachungsgerecht vornehmen zu können. Für jeden Verband wird eine Gewinn- und Verlustrechnung erstellt.

## 12.2 Kontributionsformel

Zerlegung des Gewinns nach Ergebnisquellen:

- Risikoergebnis: Entsteht aus dem Unterschied zwischen tatsächlichen und kalkulierten Sterbewahrscheinlichkeiten
- Kapitalergebnis: Zinsen, Wertänderung
- Kostenergebnis: Entsteht aus dem Unterschied zwischen tatsächlichen und kalkulierten Kosten
- Stornoergebnis

Man unterscheidet folgende Rechnungsgrundlagen:

- erster Ordnung: Zins und Sterbetafel vorsichtig gewählt (Sterbetafel je nach Tarif)
- zweiter Ordnung: best estimate
- dritter Ordnung: A posteriori; tatsächlich eingetretene Sterblichkeit, erwirtschafteter Zins

Notation: $q'_x$ Sterbewahrscheinlichkeit 2. Ordnung, $i'$ Rechnungszins 2. Ordnung, $B^x_m$ Bruttoprämie (für das Jahr $m$), $P^x_m$ Nettoprämie, $K^x_m$ Kosten, $E^x_m$ Erlebensleistung, $T^x_m$ Todesfallleistung. Der Ertrag aus dem $m$-ten Versicherungsjahr (inkl. Deckungsrückstellung zu Beginn des $m$-ten Jahres, mit Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung) ist

$$E'_m = ({}_{m-1}V_x + B^x_m)(1 + i').$$

Die Aufwendungen 2. Ordnung im $m$-ten Jahr (inkl. neuer Deckungsrückstellung) sind

$$A'_m = (1 - q'_{x+m-1})E^x_m + q'_{x+m-1}T^x_m + K^x_m(1 + i') + (1 - q'_{x+m-1}){}_mV_x.$$

Der Ertrag bzw. die Aufwendungen 1. Ordnung sind

$$E_m = ({}_{m-1}V_x + B^x_m)(1 + i)$$

bzw.

$$A_m = (1 - q_{x+m-1})E^x_m + q_{x+m-1}T^x_m + (B^x_m - P^x_m)(1 + i) + (1 - q_{x+m-1}){}_mV_x.$$

Mit $g^x_m$ bezeichnen wir den am Jahresanfang erwarteten Gewinn zum Jahresende. Aus der rekursiven Darstellung des DK folgt $E_m - A_m = 0$, und deshalb

$$\begin{aligned}
g^x_m &= E'_m - E_m + A_m - A'_m \\
&= ({}_{m-1}V_x + B^x_m)(i' - i) + (1 - q_{x+m-1})E^x_m + q_{x+m-1}T^x_m \\
&\quad + (B^x_m - P^x_m)(1 + i) + (1 - q_{x+m-1}){}_mV_x - (1 - q'_{x+m-1})E^x_m \\
&\quad - q'_{x+m-1}T^x_m - K^x_m(1 + i') - (1 - q'_{x+m-1}){}_mV_x \\
&= ({}_{m-1}V_x + B^x_m)(i' - i) + E^x_m(q'_{x+m-1} - q_{x+m-1}) + T^x_m(q_{x+m-1} - q'_{x+m-1}) \\
&\quad + (B^x_m - P^x_m)(1 + i) - K^x_m(1 + i') + {}_mV_x(q'_{x+m-1} - q_{x+m-1}). \qquad (12.1)
\end{aligned}$$

Durch Einschieben von $\pm K^x_m i$ ergibt sich folgende Aufteilung des Gewinns, die im klassischen Buch von Wolfsdorf [14] zu finden ist:

$$g^x_m = g^{x,R}_m + g^{x,K}_m + g^{x,Z}_m,$$

wobei

$$\begin{aligned}
g^{x,R}_m &\overset{?!}{=} (q_{x+m-1} - q'_{x+m-1})(T^x_m - E^x_m - {}_mV_x) \qquad \text{(Risikogewinn)}, \\
g^{x,K}_m &\overset{?!}{=} (B^x_m - P^x_m - K^x_m)(1 + i) \qquad \text{(Kostengewinn)}, \\
g^{x,Z}_m &\overset{?!}{=} ({}_{m-1}V_x + B^x_m - K^x_m)(i' - i) \qquad \text{(Zinsgewinn)}.
\end{aligned}$$

Logischer erscheint jedoch folgende Aufteilung, die man nach Einschieben von $\pm P^x_m i'$ aus (12.1) erhält:

**Satz 12.1 (Kontributionsformel).** *Der Gewinn lässt sich darstellen als*

$$g_m^x = g_m^{x,R} + g_m^{x,K} + g_m^{x,Z},$$

*wobei*

$$\begin{aligned} g_m^{x,R} &= (q_{x+m-1} - q'_{x+m-1})(T_m^x - E_m^x - {}_mV_x) \qquad (\textit{Risikogewinn}),\\ g_m^{x,K} &= (B_m^x - P_m^x - K_m^x)(1+i') \qquad (\textit{Kostengewinn}),\\ g_m^{x,Z} &= ({}_{m-1}V_x + P_m^x)(i' - i) \qquad (\textit{Zinsgewinn}). \end{aligned}$$

Am Ende des Jahres kann man den tatsächlich erwirtschafteten Gewinn $\tilde{g}_m^x$ (pro noch lebendem Versicherungsnehmer) berechnen. Die tatsächlich eingetretenen Werte (Rechnungsgrundlagen 3. Ordnung) bezeichnen wir mit $i'', q_x''$ usw. Es gilt

$$(1 - q''_{x+m})\widetilde{g}_m^x = E''_m - A''_m,$$

und deshalb (Rechnung analog zu oben) die **Kontributionsformel für Rechnungsgrundlagen 3. Ordnung:**

$$(1 - q''_{x+m})\widetilde{g}_m^x = \underbrace{g_m^{x,R} + g_m^{x,K} + g_m^{x,Z}}_{\text{mit } i'', q_x'' \text{ definiert}}.$$

Bei einer gemischten Versicherung kommt es im Lauf der Zeit zu folgender **Gewinnentwicklung:**

- Die Kostengewinne bleiben ca. konstant
- Die Risikogewinne fallen (da riskiertes Kapital fällt)
- Die Zinsgewinne steigen (da DK steigt)

## 12.3 Hardy'sche Zinsformel

Die Hardy'sche Zinsformel dient zur Berechnung des tatsächlich erwirtschafteten Zinses $i''$ aus der Bilanz. Für dieses Resultat aus der elementaren Finanzmathematik bezeichnen mir mit $K_0$ ein Kapital zum Jahresanfang und mit $K_1$ das Kapital zum Jahresende. Neben dem Jahres-Zinsertrag $I$ kann sich das Kapital durch weitere Vorgänge ändern, etwa durch Kursschwankungen, Zuzahlungen zur DK etc. Die Kapitaländerung, die nicht aus Zinserträgen entsteht, bezeichnen wir mit

$$\Delta K = K_1 - K_0 - I.$$

Vereinfachende Annahme: Kapitalzuwachs (oder -verlust) gleichmäßig übers Jahr, also $\Delta K \cdot \delta$ im Intervall $[t, t+\delta[$, einfache Verzinsung. Wegen

$$\begin{aligned} I &= K_0 i'' + \int_0^1 \Delta K(1-t) i'' dt \\ &= K_0 i'' + \frac{1}{2}\Delta K i'' = \frac{i''}{2}(2K_0 + K_1 - K_0 - I) \end{aligned}$$

folgt

$$i'' = \frac{2I}{K_0 + K_1 - I} \qquad \text{(Hardysche Zinsformel).}$$

Falls $\Delta K = 0$, falls also alle Kapitaländerungen aus Zinserträgen entstehen, erhalten wir die Rendite

$$i'' = \frac{2(K_1 - K_0)}{K_0 + \cancel{K_1} - (\cancel{K_1} - K_0)} = \frac{K_1 - K_0}{K_0}.$$

## 12.4 Gewinnzuteilung

Die Höhe der Gewinnbeteiligung legt der Vorstand im Rahmen des Jahresabschlusses fest (§6 LV-GBV). Einen Teil der Gewinnbeteiligung erhält der Kunde am Ende des Versicherungsjahres als Direktgutschrift. Der größere Teil wandert in die **Rückstellung für erfolgsabhängige Prämienrückerstattung.** Diese Gewinne müssen innerhalb von zwei Jahren der individuellen Deckungsrückstellung zugewiesen werden (§6 LV-GBV). Bei Ende des Vertrages (durch Ablauf, Todesfall oder Storno) kann der Kunde Schlussgewinne erhalten, die in einem **Schlussgewinnfonds** (als Teil der Rückstellung für erfolgsabhängige Prämienrückerstattung) geführt werden. Diese Ansprüche bestehen allerdings nur *dem Grunde nach, nicht aber der Höhe nach* (§2 LV-GBV).

## 12.5 Systeme der Gewinnzuteilung

Die Aufteilung des Gewinns hat laut §6 LV-GBV *verursachungsgerecht und angemessen* zu erfolgen.

- Streng mechanisches System: Die jährliche Gewinnbeteiligung ist ein fixer Prozentsatz der Prämie.
- Halb mechanisches System: Die jährliche Gewinnbeteiligung ist ein fixer Prozentsatz der bisher gezahlten Prämien.

- Kennzahlsystem: Für jeden Tarif und jede Versicherungsdauer $n$ wird ein Vektor $(a_1, \ldots, a_n)$ gewählt, wobei $a_m \approx {}_mV_{\bar{x}}$ eine Approximation des Deckungskapitals für ein mittleres Beitrittsalter $\bar{x}$ ist. Der ausbezahlte Zinsüberschuss ist dann ein Prozentsatz von $a_m$.
- Natürliche Systeme:
  - Zinsgewinnanteil als Prozent des DK
  - Risiko- und Kostengewinnanteil in Promille der Versicherungssumme. (Hier bleibt unberücksichtigt, das diese Gewinnanteile eigentlich mit der Zeit abnehmen.)
  - Schlussgewinnanteil

**Gewinn zum Bilanztermin:** Der Bilanztermin stimmt i.d.R. nicht mit dem Ende des Versicherungsjahres überein. Um dies zu berichtigen, gibt es folgende Möglichkeiten:

- Die Teilgewinne der beiden Versicherungsjahre, die in das Bilanzjahr fallen, werden auf den Bilanztermin auf- bzw. abgezinst.
- Man nimmt an, dass alle Versicherungsverträge zur Mitte des Jahres abgeschlossen werden. Die halben Gewinne sind jeweils um ein halbes Jahr auf- bzw. abzuzinsen.
- Der Versicherungsbeginn der Verträge, die in der ersten Hälfte des Bilanzjahres den Versicherungsjahrestag haben, werden auf den ersten Tag des Bilanzjahres mit dem Versicherungsbeginn verlegt. Die anderen Verträge werden auf den ersten Tag des folgenden Bilanzjahres verlegt.

## 12.6 Gewinnverwendung

Ein Anspruch auf Gewinnbeteiligung bedeutet i.d.R. nicht sofortige Auszahlung. Es ist im Interesse des Versicherers, die Gewinnanteile möglichst lange im Unternehmen zu behalten. Es gibt u.a. folgende Möglichkeiten, dem Kunden die Überschussanteile zukommen zu lassen:

- Barausschüttung
- Verrechnung mit den Beiträgen
- Verzinsliche Ansammlung: Hier werden die Überschüsse wie ein Sparkonto verzinst.

- Bonussystem: Mit jedem jährlichem Überschuss wird eine zusätzliche Versicherung durch eine Einmalprämie finanziert (s. Abschnitt 3.5).
- Verkürzung der Versicherungsdauer: Hier werden die Überschüsse dem Deckungskapital zugewiesen. Dann wird die Versicherungsdauer an das erhöhte Deckungskapital angepasst.

# 13 Rechnungsgrundlagen in Österreich

Zur Sterbe- und Rententafel AVÖ 2005R (Rentenversicherung in der Privatversicherung) verweisen wir auf das Paper [9], und zur Tafel AVÖ 2018-P (Pensionskassen) auf [8]. Erratum zu [9]:

- S. 75, nach Formel (9): Vertausche "first" und "second"
- S. 79 Zeile drei: $\lambda_x = -\widehat{\beta}_x \widehat{\Delta\kappa}$ (statt $\lambda_x = \widehat{\beta}_x \widehat{\Delta\kappa}$)
- S. 95 untere Grafik: Beschriftung der vertikalen Achse ist $\ddot{a}_{80}(t)$ (statt $\ddot{a}_{60}(t)$)

Ein Thema dazu, das wir in diesem Skriptum kurz behandeln wollen, ist das auf S. 72 von [9] erwähnte **Whittaker-Henderson-Verfahren** (Abschnitt 3.2.2.3 in [3]), mit dem die Basistafel geglättet wurde. Ein gegebener Vektor

$$Q = (q_{x_0}, \dots, q_{x_0+n})^{\mathrm{T}}$$

soll durch einen "glatteren" Vektor

$$Q' = (q'_{x_0}, \dots, q'_{x_0+n})^{\mathrm{T}}$$

approximiert werden. Als Glättemaß dient die $s$-te Differenz

$$\Delta^s q'_{x_0+k} = \sum_{\nu=0}^{s} (-1)^\nu \binom{s}{\nu} q'_{x_0+k+\nu}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Speziell ($s = 1$):

$$\Delta q'_{x_0+k} = q'_{x_0+k} - q'_{x_0+k+1}.$$

Das Glättemaß $(\Delta q'_{x_0+k})^2$ "bestraft" also Fluktuationen von $Q'$, $(\Delta^2 q'_{x_0+k})^2$ "bestraft" Fluktuationen von $\Delta q'_{x_0+k}$, usw. Der Vektor $Q'$ wird nun als Lösung des Optimierungsproblems

$$\sum_{k=0}^{n} w_k (q'_{x_0+k} - q_{x_0+k})^2 + g \sum_{k=0}^{n-s} (\Delta^s q'_{x_0+k})^2 \to \min \tag{13.1}$$

bestimmt, wobei $w_k$ und $g$ positive Gewichte mit $\sum w_k = 1$ sind. Als Anpassungsmaß wird also die gewichtete euklidische Norm verwendet. Wir definieren die $(n-s+1) \times (n+1)$-Matrix $K$ durch

$$K_{ij} := (-1)^{j-i} \binom{s}{j-i},$$

und $W := \operatorname{diag}(w_0, \dots, w_n)$. Damit kann man (13.1) in folgender Form anschreiben (Übung!):

$$f(Q') := (Q'-Q)^{\mathrm{T}} W (Q'-Q) + g(KQ')^{\mathrm{T}}(KQ') \to \min .$$

Da dies eine konvexe Funktion von $Q'$ ist, genügt es, ein lokales Minimum zu finden, das dann automatisch ein globales Minimum ist. Dazu berechnen wir die Richtungsableitung der Zielfunktion in Richtung $R \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(Q'+tR) - f(Q')}{t} = \cdots = 2(Q'-Q)^{\mathrm{T}} W R + 2g(KQ')^{\mathrm{T}} K R.$$

Der Gradient von $f$ im Punkt $Q'$ ist also $2(Q'-Q)^{\mathrm{T}}W + 2g(KQ')^{\mathrm{T}}K$. Wenn wir ihn null setzen, erhalten wir die Lösung

$$Q' = (W + gK^{\mathrm{T}}K)^{-1} W Q$$

des Optimierungsproblems. Man beachte, dass die Matrix $W + gK^{\mathrm{T}}K$ positiv definit und somit invertierbar ist, wie man aus

$$v^{\mathrm{T}}(W + gK^{\mathrm{T}}K)v = v^{\mathrm{T}}Wv + g\|Kv\|_2^2 > 0, \quad v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\},$$

sieht.

Schließlich stellen wir noch den klassischen Schätzer für die Sterbewahrscheinlichkeit $q_x$ vor. Im Verlauf einer Beobachtungsperiode (die nicht unbedingt 1 Jahr dauern muss) werden $n$ Leben mit Altern in $[x, x+1]$ beobachtet, wobei für das $i$-te Leben das Altersintervall

$$[x+s_i, x+t_i], \quad 0 \le s_i < t_i \le 1, \ 1 \le i \le n,$$

beobachtet wird (siehe Abbildung 4). Z.B. bedeutet $t_i = 1$, dass die $i$-te Person im Beobachtungszeitraum das Alter $x+1$ erreicht und in diesem Alter noch im Bestand ist. Falls hingegen $t_i < 1$, gibt es zwei Möglichkeiten: Der Vertrag endete (durch Tod, Storno oder vorgesehenen Vertragsablauf), oder aber das Ende des Beobachtungszeitraums ist erreicht (z.B. bei der Linie ganz rechts in Abbildung 4). Definiere

$$I := \{i : \text{Vertrag endete im Beobachtungszeitraum durch Tod}\},$$

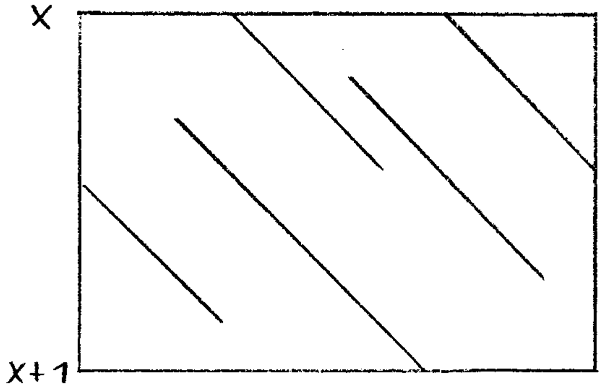


Abbildung 4: Lexis-Diagramm. Waagrechte Achse: Zeit. Senkrechte Achse (nach unten): Alter.

$D_x := |I|$ und $E_x := \sum_{i=1}^n (t_i - s_i)$ (Exposure). Berücksichtigt man, dass Tode die *nach* Storno oder einem vorgesehenen Vertragsende (z.B. Erlebensversicherung) erfolgen, nicht beobachtet werden, erhält man für die erwartete Anzahl der beobachteten Todesfälle

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n {}_{1-s_i}q_{x+s_i} - \sum_{\substack{i=1\\ i\notin I}}^n {}_{1-t_i}q_{x+t_i} &\approx \sum_{i=1}^n (1-s_i)q_x - \sum_{\substack{i=1\\ i\notin I}}^n (1-t_i)q_x \\
&= q_x \sum_{i=1}^n (1 - t_i + t_i - s_i) - q_x \sum_{\substack{i=1\\ i\notin I}}^n (1-t_i) \\
&= q_x E_x + q_x \Big( \sum_{i=1}^n (1-t_i) - \sum_{\substack{i=1\\ i\notin I}}^n (1-t_i) \Big) \\
&= q_x E_x + q_x \sum_{\substack{i=1\\ i\in I}}^n (1-t_i).
\end{aligned}$$

Indem man dies gleich $D_x$ setzt, erhählt man den klassischen Schätzer

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{E_x + \sum_{i\in I}(1-t_i)} \approx \frac{D_x}{E_x + \frac{1}{2}D_x}.$$

# 14 Embedded Value

Jahresabschlüsse eines Lebensversicherungsunternehmens geben nur eingeschränkt Auskunft über dessen Ertragskraft, da neue Verträge zunächst Kosten verursachen, aber im Verlauf der folgenen Jahre und Jahrzehnte mit Profiten gerechnet werden darf. Dieser langfristige Charakter des Versicherungsgeschäfts soll durch den Embedded Value berücksichtigt werden. Er dient sowohl zur Information von (potentiellen) Aktionären als auch zur Unternehmenssteuerung. Unsere Darstellung folgt [11].

*Definition:* Der **Embedded Value** ist der Wert des vorhandenen Lebensversicherungsbestandes für den Aktionär, der der Summe aus adjustiertem Eigenkapital und dem Barwert der zukünftigen Jahresüberschüsse entspricht.

*Definition:* Beim **Traditional Embedded Value** erfolgt die Ermittlung des Barwerts mittels einer Risikodiskontrate, wleche die Erwartung des Aktionärs an das Investment darstellt und unter realitätsnahen (best estimate) Annahmen über zukünftige Entwicklungen.

*Definition:* Der **Appraisal Value** ist der Embedded Value zuzüglich dem Wert des zukünftigen Neugeschäfts.

Berechnung des Embedded Value:

$$\mathrm{EV}_t = \mathrm{ANAV}_t + \mathrm{PVFP}_t$$

Der Net Asset Value ist das Eigenkapital des Unternehmens. Durch Solvabilitätsvorschriften liegt die Verzinsung der Kapitalanlagen i.d.R. unter der Risikodiskontrate, welche die Erwartung des Aktionärs widerspiegeln soll. Dieser Zinsverlust wird als Cost of Capital bezeichnet und führt zum **Adjusted Net Asset Value** $\mathrm{ANAV}_t$.

Der Kern der Berechnung ist die Bestimmung des **Present Value of Future Profits** $\mathrm{PVFP}_t$, also des Aktionärsanteils der künftigen Jahresüberschüsse. Wir bezeichnen mit $\omega$ das Ende des Projektionszeitraums, mit $r$ die Risikodiskontrate, mit $\rho_\mathrm{a}$ den Aktionärsanteil und mit $J_j$ den Jahresüberschuss der Periode $j$. Dann gilt

$$\mathrm{PVFP}_t = \sum_{j=t+1}^{\omega} \frac{\rho_\mathrm{a} J_j}{(1+r)^{j-t}}.$$

Der Aktionärsanteil $\rho_\mathrm{a}$ beträgt maximal 15% (siehe Abschnitt 12). (Dabei gehen wir von $J_j > 0$ aus; Verluste müssten die Aktionäre zu 100% tragen.)

Einige Kritikpunkte:

- Es gibt keine allgemeinen Standards, dadurch sind Veröffentlichungen des Embedded Value schwer vergleichbar.

- Z.B. ist die Bestimmung der Risikodiskontrate nicht geregelt.

- Optionen und Garantien werden nicht bewertet. Z.B. verursacht die Garantie eines Rechnungszinses in der deterministischen Betrachtung keine Kosten.

- Der Embedded Value ist stark von ungewissen Planungsprämissen abhängig und dadurch leicht manipulierbar.

Für weitere Probleme und fortgeschrittene Ansätze verweisen wir auf [11].

# 15 Stochastischer Zins

Dieser Abschnitt orientiert sich an Abschnitt 9.3 von [12]. Wir nehmen an, dass der Diskontfaktor (vom Zeitpunkt $n$ auf den Zeitpunkt 0)

$$v(n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ein stochastischer Prozess ist, der von den Todeszeitpunkten der Versicherten unabhängig ist. Die Berechnung der Leistungsbarwerte gestaltet sich problemlos. Wir geben exemplarisch den Leistungsbarwert (und höhere Momente) einer Ablebensversicherung mit stochastischen Zins an:

**Satz 15.1.** *Es sei $Z$ der stochastische Barwert einer Ablebensversicherung für einen $x$-Jährigen mit Versicherungssumme $s$. Dann gilt für $m \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E}[Z^m] = s^m \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{v(k+1)^m}{v(x)^m}\Big] {}_kp_x q_{x+k}.$$

*Beweis.* Es sei $K \in \mathbb{N}_0$ die (gestutzte) Restlebensdauer.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^m] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z^m | K = k] {}_kp_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big[s^m \frac{v(k+1)^m}{v(x)^m} \Big| K = k\Big] {}_kp_x q_{x+k} \\ &= s^m \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{v(k+1)^m}{v(x)^m}\Big] {}_kp_x q_{x+k}.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Unabhängigkeit von $K$ und $v(n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. $\square$

Wir untersuchen jetzt die Varianz eines Portfolios von Versicherungsverträgen.

**Annahme 15.2.** *Wir betrachten eine Folge von Versicherungsverträgen mit stochastischen Barwerten* $Z_1, Z_2, \ldots$. *Die* bedingten *Barwerte*

$$Z_i \,|\, v(n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad i \in \mathbb{N},$$

*seien unabhängig und identisch verteilt.*

Den Gesamtbarwert der ersten $N$ Policen bezeichnen wir mit

$$Z(N) := \sum_{n=1}^{N} Z_n.$$

**Satz 15.3.** *Es gelte Annahme 15.2. Dann gilt für das zweite Moment des Portfolios*

$$\mathbb{E}[Z(N)^2] = N(N-1)\mathbb{E}[Z_1 Z_2] + N\mathbb{E}[Z_1^2].$$

*Beweis.* Für $1 \le i \le N$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_i^2] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Z_i^2|v(n)_{n\in\mathbb{N}_0}]\big]\\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Z_1^2|v(n)_{n\in\mathbb{N}_0}]\big]\\ &= \mathbb{E}[Z_1^2],\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit aus Annahme 15.2 folgt. Weiters gilt für $i < j$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_i Z_j] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Z_i Z_j|v(n)_{n\in\mathbb{N}_0}]\big]\\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Z_i|v(n)_{n\in\mathbb{N}_0}] \cdot \mathbb{E}[Z_j|v(n)_{n\in\mathbb{N}_0}]\big]\\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Z_1|v(n)_{n\in\mathbb{N}_0}] \cdot \mathbb{E}[Z_2|v(n)_{n\in\mathbb{N}_0}]\big]\\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Z_1 Z_2|v(n)_{n\in\mathbb{N}_0}]\big]\\ &= \mathbb{E}[Z_1 Z_2].\end{aligned}$$

Hier folgt die zweite Gleichheit aus der bedingten Unabhängigkeit und die dritte aus der Gleichheit der bedingten Verteilungen der $Z_i$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z(N)^2] &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[Z_i^2] + 2 \sum_{1\le i<j\le N} \mathbb{E}[Z_i Z_j]\\ &= N\mathbb{E}[Z_1^2] + N(N-1)\mathbb{E}[Z_1 Z_2].\end{aligned}$$

□

**Satz 15.4.** *Es gelte Annahme 15.2. Dann gilt für die Varianz des Portfolios*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{Var}\Big[\frac{Z(N)}{N}\Big] = \mathbb{E}[Z_1 Z_2] - \mathbb{E}[Z_1]^2.$$

*Beweis.* Es gilt $\mathbb{E}[Z(N)] = N\mathbb{E}[Z_1]$ (Beweis analog zum Beweis von Satz 15.3). Daraus und aus Satz 15.3 folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[Z(N)] &= \mathbb{E}[Z(N)^2] - \mathbb{E}[Z(N)]^2 \\ &= N^2\mathbb{E}[Z_1 Z_2] + N^2\mathbb{E}[Z_1]^2 + O(N).\end{aligned}$$

□

Falls der Zins *deterministisch* ist, sind die Barwerte $Z_1, Z_2, \dots$ (unbedingt) unabhängig, und die Varianz des mittleren Barwerts konvergiert gegen 0:

$$\mathbf{Var}\Big[\frac{Z(N)}{N}\Big] = \frac{1}{N^2}\mathbf{Var}[Z(N)] = \frac{1}{N}\mathbf{Var}[Z_1] = O\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

Durch den zusätzlichen Risikofaktor des stochastischen Zinses, der alle Verträge betrifft, geht diese Eigenschaft verloren (Satz 15.4).

# Literatur


[1] *AFRAC-Stellungnahme 27: Personalrückstellungen (UGB).* 2018.

[2] B. Alesko, *Mathematische Grundlagen der gesetzlichen Pensionsversicherung*, Master's thesis, TU Wien, 2022.

[3] H. Behrens, H. Loebus, B. Oehlers-Vogel, and B. Zschoyan, *Methodik von Sterblichkeitsuntersuchungen*, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., 1985.

[4] F. Den Hollander, *Large Deviations*, Fields Institute Monographs, American Mathematical Society, 2000.

[5] H. U. Gerber, *Life insurance mathematics*, Springer-Verlag, Berlin; Association of Swiss Actuaries, Zürich, third ed., 1997.

[6] S. Gerhold, *A note on large deviations in insurance risk*, Appl. Appl. Math., 16 (2021), pp. 867–880.

[7] S. Jörgen, *Vorlesung über Pensionsversicherungsmathematik, Universität Salzburg (skriptum).* 2017.

[8] R. Kainhofer, J. Hirz, and A. Schubert, *AVÖ 2018-P: Rechnungsgrundlagen für die Pensionsversicherung.* available at `https://avoe.at/`, 2018.

[9] R. Kainhofer, M. Predota, and U. Schmock, *The new Austrian annuity valuation table AVÖ 2005R*, Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs, 13 (2006), pp. 55–135.

[10] J. Kamecki, *Vorteilhaftigkeitsvergleich der betrieblichen Altersvorsorgemöglichkeiten unter steuerrechtlichen und sozialversicherungsrechtlichen Prämissen*, Master's thesis, TU Wien, 2022.

[11] R. Knapp, *European Embedded Value in der Lebensversicherung*, Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs, 14 (2009), pp. 60–70.

[12] M. Koller, *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*, Springer, Berlin, 2000.

[13] ——, *Skriptum Lebensversicherungsmathematik*. 2013.

[14] K. Wolfsdorf, *Versicherungsmathematik Teil 1: Personenversicherungsmathematik*, Teubner Studienbücher Mathematik, B. G. Teubner, Stuttgart, 1997.