Karl-Heinz Wolff

Arbeiten zum Kontinuum

Stand Jänner 2013

Die Menschen glauben viel leichter eine Lüge, die sie schon hundertmal gehört haben, als eine Wahrheit, die ihnen völlig neu ist[1] (Alfred Polgar)

[1] Diese Feststellung könnte hier den Eindruck erwecken, sie wende sich vor allem gegen fehlende Unterscheidungen zwischen potentiell und aktual unendlich. Der Eindruck wäre richtig.

VORBEMERKUNG

Die hier zusammengestellten Arbeiten kreisen um das Thema "Mächtigkeit von Mengen", insbesondere im Hinblick auf die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen. Verständnisschwierigkeiten bereitet oft - wie die Erfahrung gezeigt hat - das Übersehen des Unterschiedes zwischen *potentiell* Unendlich und *actual* Unendlich. Weiters ist darauf zu achten, wann von Objekten der Untersuchungen verlangt wird, sie ließen sich *widerspruchsfrei* beschreiben.

Karl-Heinz Wolff
Arbeiten zum Kontinuum

aus meiner Website www.fam.tuwien.ac.at/~wolff
Stand Jänner 2013

- Kostproben vom Baum der Erkenntnis
- Cantor's Zirkelschluss
- Die Individualität der Welt
- Zum Widerspruch im Überabzählbaren
- Verständnisprobleme beim Widerspruch im aktual Unendlichen
- Skizze zum ersten Hilbert Problem
- Individualanordnung
- Ein Widerspruch in überabzählbaren Mengen
- Das Münchhausen-Paradoxon
- Man kann über alles reden. Kann man über alles reden?
- Ein schrittweiser Aufbau des Kontinuums
- Was ist Wahrheit?
- Ein Widerspruch in Cantor's zweitem Diagonalargument
- Eine Individualanordnung. Was kann die Sprache leisten?
- Existenzbeweise für überabzählbare Mengen enthalten Widersprüche
- Gedanken zum Kontinuum
- L'homme ordinateur
- Der Babylonische Schubladenkasten
- Zahlen zählen
- esse est percipi
- Das Spiel Dodge Ball und die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen
- Überabzählbare Mengen
- Definition, Erklärung und mathematischer Beweis
- Sprechen wir über Zahlen
- Die Menge der reellen Zahlen als Untermenge einer abzählbaren Menge
- Abzählbarkeit, relative Wahrheit und Universalanordnung
- Überabzählbar?
- Begriffsrelativität
- Universalanordnung
- Zahlen, Sprache ,Weltanschauung
- Zur Überabzählbarkeit der reellen Zahlen
- Die Welt ist abzählbar
- Über eine Universalanordnung
- Anti Cantor Anordnung (mit Ergänzung Jänner 2013)
- Über eine Universalschrift
- Zur Problematik der absoluten Überabzählbarkeit (erste Kontinuumarbeit)

Kostproben vom Baum der Erkenntnis

Die Früchte vom Baum der Erkenntnis führten Adam und Eva zum Wissen von Gut und Böse, wohl eine der ersten allgemein gültigen Wahrheiten. In der vorliegenden Arbeit behandeln wir Fragen nach der Wahrheit insbesondere am Beispiel mathematischer Aussagen.

(1) Denkobjekte über die gesprochen werden kann:

Wir betrachten alle möglichen Objekte, an die irgend eine mögliche Person in irgend einem möglichen Zeitpunkt gedacht und über die sie gesprochen haben könnte. Es handelt sich dabei nur um die Möglichkeit, an das in Rede stehende Objekt zu denken und um die Möglichkeit, über dieses Objekt zu sprechen. Tatsächliche Denkvorgänge und tatsächliche Aussagen darüber spielen zunächst keine Rolle.

(2) Die Individualität der Denkobjekte:

Der Begriff eines wie oben beschriebenen Denkobjektes setzt eine mögliche denkende und sprechende Person als Subjekt voraus. Die möglichen Denkvorgänge und das Sprechen darüber sind untrennbar mit dieser möglichen Person, also mit einem Individuum verbunden. Wir sprechen daher von einer "Individualität der Denkobjekte".

(3) Das Raum-Zeit-Universum:

Wir nehmen an, dass jeder mögliche Denkvorgang und das Sprechen darüber eine gewisse Mindestdauer in Anspruch nimmt und dass jede mögliche Person dabei ein gewisses Mindestvolumen im Raum einnimmt. Um hier eine gewisse Ordnung zu schaffen führen wir ein vierdimensionales Koordinatensystem ein und zwar mit drei Raumkoordinaten und einer Zeitkoordinate. Den Ursprung des Koordinatensystems können wir ebenso willkürlich festlegen wie die Richtung der drei Raumkoordinaten. Das Raum-Zeit-Universum zerlegen wir jetzt mit Hilfe dieses Koordinatensystems in "Elementarwürfel EW". Dazu werden die drei Raumkoordinaten jeweils in Abschnitte der Länge 0,01 mm und die Zeitkoordinate in Abschnitte der Länge 0,01 Sek geteilt. Jeder solcherart definierte Elementarwürfel bedeckt im Raum einen Würfel der Seitenlänge 0,01 mm, ausgerichtet nach den Richtungen der drei Raumkoordinaten, und in der Zeit eine Dauer von 0,01 Sek. Diese Elementarwürfel bedecken das Raum-Zeit-Universum vollständig. Mit Hilfe des vierdimensionalen Koordinatensystems können alle Elementarwürfel unschwer abzählbar angeordnet werden. Diese Anordnung sei AO(EW).

(4) Abzählbare Anordnung aller möglichen Aussagen:

Wegen der Mindestdauer einer Aussage und dem Mindestvolumen jeder aussagenden Person gibt es sicher mindestens einen Elementarwürfel EW, der jede mögliche Aussage eindeutig kennzeichnet. Dies leistet nämlich jeder Elementarwürfel, der zur Gänze in dem von der aussagenden Person für die Aussage benötigten Volumen des Raum-Zeit Universums liegt. Mit Hilfe der Anordnung AO(EW) aller Elementarwürfel kann daher eine abzählbare Anordnung aller möglichen Aussagen aller möglichen Personen gewonnen werden.

(5) Schriftliche Mitteilungen:

Eine "Mitteilung M vom Umfang n" sei ein quadratischer Raster, gebildet aus n^2 "Elementarquadraten" der Seitenlänge 0,01 mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Einem weißen Elementarquadrat wird die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zugeordnet. Es sei a_{jk} jene Ziffer (1 oder 2), die dem in der j^{ten} Zeile an k^{ter} Stelle liegenden Elementarquadrat zugeordnet ist. Jede mögliche Mitteilung M_n vom Umfang n kann dann durch die Dezimalzahl

$$a(M_n) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}.....a_{jk}.....a_{nn}$$

eindeutig dargestellt werden.

(6) Abzählbare Anordnung aller schriftlichen Mitteilungen:

Alle möglichen schriftlichen Mitteilungen M ordnen wir folgendermaßen abzählbar an: Zunächst werden die Mitteilungen M_n von gleichem Umfang n in Gruppen $G(M_n)$ zusammengefasst und diese Gruppen nach der Größe von n angeordnet. Innerhalb jeder Gruppe $G(M_n)$ werden sodann die Mitteilungen M_n nach der Größe der jeweiligen Dezimalzahl $a(M_n)$ angeordnet. Es sei AO(M) die so gewonnene Anordnung aller möglichen schriftlichen Mitteilungen.

(7) Über die Wahrheit einer Mitteilung:

Wir wollen nur dann von der Wahrheit einer Mitteilung M sprechen wenn es irgend eine Person P gibt, die in irgendeinem Zeitpunkt T diese Mitteilung M als wahr bezeichnen würde. Mit dieser Bedingung verzichten wir auf den Begriff einer absoluten Wahrheit und verwenden nur mehr den Begriff "relative Wahrheit einer Mitteilung M" und zwar bezogen auf jeweils eine Person P und einen Zeitpunkt T.

(8) Über die relative Wahrheit einer Mitteilung:

Um eine Mitteilung M als wahr für eine Person P in einem Zeitpunkt T zu bezeichnen, wollen wir nicht voraussetzen, dass P die Mitteilung M im Zeitpunkt T tatsächlich bereits gelesen hat. Es reicht für uns aus, annehmen zu dürfen, dass die Person P im Zeitpunkt T die Mitteilung M als wahr bezeichnen würde, hätte sie M zuvor gelesen. Völlig außer Betracht bleibt hierbei die Beurteilungen des Wahrheitsgehaltes der Mitteilung M durch Außenstehende wie etwa den Autor oder den Leser dieser Arbeit.

(9) Über das Fehlen eines allgemeinen Wahrheitskriteriums:

Voraussetzung einer relativen Wahrheit ist nach unserer Definition ausschließlich die Aussage einer Person P in einem Zeitpunkt T über die Wahrheit einer Mitteilung M. Unterschiedliche Beurteilungen durch verschiedene Personen oder durch eine Person in verschiedenen Zeitpunkten können auf unterschiedlichem Wissensstand ebenso wie auf bewusst falschen Aussagen beruhen. Der Möglichkeiten gibt es viele, ein allgemeines Wahrheitskriterium aber nicht. Für unsere weiteren Überlegungen genügt der in (7) eingeführte Begriff "relative Wahrheit".

(10) Abzählbare Anordnung aller relativ wahren Mitteilungen:

Positive Urteile jeder möglichen Person P in jedem möglichen Zeitpunkt T über die Wahrheit jeder möglichen Mitteilung M können jeweils durch ein Tripel (P,T,M) gekennzeichnet werden. Das Tripel (P,T,M) bedeutet dabei, dass die Person P die Mitteilung M im Zeitpunkt T als wahr bezeichnet. T ist dabei der "früheste" Zeitpunkt aus einem diese Aussage von P eindeutig kennzeichnenden Elementarwürfel EW aus (4). Mit Hilfe der abzählbaren

Anordnung AO(EW) aller möglichen Aussagen gemäß (4) und der abzählbaren Anordnung AO(M) aller schriftlichen Mitteilungen gemäß (6) können auch alle durch ein Tripel (P,T,M) gekennzeichneten relativ wahren Mitteilungen abzählbar angeordnet werden. Diese Anordnung sei AO(P,T,M).

(11) Die Individualanordnung:

So wie eine Denkobjekt aus (2) setzt auch jedes Urteil über die Wahrheit einer Mitteilung aus (10) eine mögliche denkende und sprechende Person als Subjekt voraus. Das Tripel (P,T,M) bedeutet jeweils ein individuelles Urteil der Person P. Es ist daher naheliegend, eine Anordnung AO(P,T,M) aus (10) als "Individualanordnung" zu bezeichnen.

(12) Individualanordnungen reeller Zahlen:

Es sei M = M[RZ(0,1)] eine Mitteilung, die für irgendeine Person P in irgendeinem Zeitpunkt T die reelle Zahl RZ(0,1) zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Das Tripel {P,T,M[RZ(0,1)]} bedeutet, dass die Person P die Aussage, "M beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei" im Zeitpunkt T als wahr bezeichnet. Damit ist M eine relativ wahre Mitteilung im Sinne von (8). So wie die Tripel (P,T,M) aus (10) können auch alle durch ein Tripel {P,T,M[RZ(0,1)]} gekennzeichneten reellen Zahlen RZ(0,1) abzählbar angeordnet werden. Diese Anordnung sei AO{P,T,M[RZ(0,1)]}. Sie beruht wie die Anordnung AO(P,T,M) aus (10) auf individuellen Urteilen von Personen P und wir bezeichnen sie analog zu (11) als Individualanordnung reeller Zahlen.

(13) Eine Individualanordnung aller reellen Zahlen:

Man erkennt leicht, dass in der Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]}, wenn alle möglichen Mitteilungen M[RZ(0,1)] herangezogen werden, jede reelle Zahl durch jeweils unendlich viele Tripel {P,T,M[RZ(0,1)]} gekennzeichnet wird. Man kann aber unschwer eine Individualanordnung AO[RZ(0,1)] aller reellen Zahlen RZ(0,1) zwischen 0 und 1 bilden, die jede reelle Zahl genau einmal enthält, etwa indem diese reellen Zahlen jeweils nur einmal und zwar in der Reihenfolge angeführt werden, in der sie in der Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} erstmals auftreten.

(14) Die Vollständigkeit der Individualanordnung aller reellen Zahlen:

Die Individualanordnung AO[RZ(0,1)] ist insoweit vollständig, als jeder Versuch, eine angeblich in ihr nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei anzugeben, wie im Folgenden gezeigt wird, misslingt. Behauptet nämlich ein Kritiker der Vollständigkeit (er werde als kritische Person P_k bezeichnet) in irgendeinem Zeitpunkt T_k, eine reelle Zahl r_k mit $0 < r_k < 1$ sei nicht in AO[RZ(0,1)] enthalten, dann kann diese Behauptung in Form einer Mitteilung M_k dargestellt werden. Diese Mitteilung M_k beschreibt also nach Ansicht der Person P_k im Zeitpunkt T_k die reelle Zahl r_k zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei und sie enthält die Feststellung, nach Ansicht von P_k sei r_k nicht in AO[RZ(0,1)] enthalten, es gelte also $r_k \notin$ AO[RZ(0,1)]. Nun werden aber gemäß (13) in AO[RZ(0,1)] genau alle jene reellen Zahlen angeordnet, die durch ein Tripel {P,T,M[RZ(0,1)]} gekennzeichnet werden. r_k wird dabei gemäß (12) durch das Tripel {P_k,T_k,M_k[RZ(0,1)]} gekennzeichnet. Dieses Tripel bedeutet aber ebenfalls gemäß (12), dass der Kritiker P_k die Aussage "M_k beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1" im Zeitpunkt T_k als wahr bezeichnet. Daraus folgt wieder per definitionem $r_k \in$ AO{P,T,M[RZ(0,1)]} und im weiteren $r_k \in$ AO[RZ(0,1)] im Widerspruch zur obigen Feststellung $r_k \notin$ AO[RZ(0,1). Dem Kritiker P_k ist es also nicht gelungen, eine in AO[RZ(0,1)] nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei anzugeben.

(15) Folgerungen für das erste Hilbert-Problem:

Die in (14) dargestellte Vollständigkeit von AO[RZ(0,1)] löst unter anderem auch das erste Hilbert-Problem für die Menge der reellen Zahlen. Die abzählbaren Anordnungen aller Tripel AO(P,T,M) aus (10) und AO{P,T,M[RZ(0,1)]} aus (13) werden hier nur als Aussagen über die jeweilige Mächtigkeit der Menge aller Tripel verwendet. In beiden Fällen erweist es sich aber als grundsätzlich unmöglich, diese Mengen tatsächlich abzählbar anzuordnen. Grundlagen solcher Anordnungen sind ja unter anderem Urteile aller möglichen Personen P in allen möglichen Zeitpunkten T über den Inhalt von Mitteilungen M und diese Urteile sind offensichtlich nie vollständig bekannt, da nie alle möglichen Personen in allen Zeitpunkten T über die Wahrheit von Mitteilungen M befragt werden können.

(16) Individualanordnungen beliebiger Mengen:

Die bisherigen Überlegungen zur Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen lassen sich auf beliebige Mengen erweitern. Wir betrachten dazu Mengen *M*(ε), bestehend aus Elementen E_ε, welche alle eine Eigenschaft ε aufweisen, die sie zu einem Element der Menge *M*(ε) macht. Analog zu (10) werden Tripel (P,T,M_ε) gebildet[1]. Das Tripel (P,T,M_ε) bedeutet dabei, dass die Person P die Behauptung, "M_ε beschreibt ein Element $E_\varepsilon \in M(\varepsilon)$ eindeutig und widerspruchsfrei", im Zeitpunkt T als wahr bezeichnet. Analog zu (12) entspricht jedes einzelne der Tripel (P,T,M_ε) diesem Element E_ε der M $\in$ *M*(ε). Analog zu (10) und (13) erhält man eine abzählbare Individualanordnung AO(E_ε) aller Elemente E_ε der Menge *M*(ε).

(17) Die Vollständigkeit der Individualanordnungen beliebiger Mengen:

Analog zu (14) zeigt man unschwer, dass jeder Versuch eines Kritikers, die Unvollständigkeit von AO(E_ε) durch die Angabe eines in AO(E_ε) angeblich nicht enthaltenen Elementes $E_\varepsilon \in M(\varepsilon)$ misslingt. Damit ist das erste Hilbert-Problem auch für beliebige Mengen gelöst. Der Begriff "überabzählbare Menge" führt stets zu einem Widerspruch. Man verwendet daher besser den Begriff "nicht abzählbar anordenbare Menge" und versteht darunter eine Menge von der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen, für die eine abzählbare Anordnung ihrer Elemente etwa aus dem in (15) genannten Grund nicht möglich erscheint. Der Widerspruch im Begriff "überabzählbare Menge" führt auch zu einem Widerspruch im Begriff "transfinite Kardinalzahl $\aleph_n$ mit n > 0". Insbesondere sind derartige von Cantor eingeführte Mengen in sich widersprüchlich. Daraus ergeben sich auch Widersprüche in einigen Bereichen der Mengenlehre.

(18) Anwendung der Mäeutik des Sokrates:

Die in (14) und (17) angesprochenen Kritiker P_k spielen hier die Rolle des Gesprächspartners von Sokrates in dessen Mäeutik, der Hebammenkunst. Um die entscheidenden Widersprüche herauszuarbeiten wird P_k selbst in die Diskussion einbezogen. Die Ergebnisse der Arbeit beruhen letztlich darauf, dass Mathematik nur von Personen innerhalb des Raum-Zeit-Universums betrieben werden kann und dass alle Ergebnisse mathematischer Untersuchungen durch Mitteilungen M gemäß (5) dargestellt werden können.

---

[1] Es ist zwischen der Menge *M*(ε) von Elementen E_ε mit der Eigenschaft ε und einer nach dem Urteil von P im Zeitpunkt T ein Element E_ε eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilung M_ε zu unterscheiden.

Cantor's Zirkelschluss

In der Arbeit "Die Individualität der Welt" (http//www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/) wird in 4.4 auf Widersprüche in von Cantor eingeführten Mengen mit einer Kardinalzahl $\aleph_n$ mit n > 0 hingewiesen. Im Folgenden wird gezeigt, wie ein derartiger Widerspruch auf einen Zirkelschluss zurückgeführt werden kann.

Ausgangspunkt sei das zweite Diagonalverfahren von Cantor, mit dem dieser die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 beweisen will. Er geht dabei von einer beliebigen abzählbaren Anordnung reeller Zahlen r zwischen 0 und 1mit r_k an k^{ter} Stelle aus. Mit Hilfe dieser Anordnung definiert Cantor eine zwischen 0 und 1 liegende "Diagonalzahl r^D" so, dass sich ihre n^{te} Dezimalstelle von der n^{ten} Dezimalstelle der an n^{ter} Stelle der Anordnung stehenden reellen Zahl r_n unterscheidet. Dann gilt offenbar $\forall k$: $r^D \neq r_k$ und damit sei die Unvollständigkeit der Anordnung der r_k bewiesen.

Nun beruht aber das Diagonalverfahren von Cantor darauf, **zuerst** die reellen Zahlen r_k **vollständig** anzuordnen und erst **anschließend** die Diagonalzahl r^D zu bilden. Der Beweis geht also davon aus, dass die vollständige unendliche Anordnung r_k bereits **aktual** vorliegt, während die in der zitierten Arbeit verwendete "Individualanordnung" nur **potentiell** unendlich ist **und in keinem Zeitpunkt aktual fertig angegeben werden kann.**

Die erst zu beweisende Existenz einer aktual unendlichen Menge reeller Zahlen zwischen 0 und 1 wird also für den benötigten Beweis bereits vorausgesetzt und dies ist der eingangs erwähnte Zirkelschluss.

Die Individualität der Welt

1. Einleitung:

1.1 Jedes Individuum erkennt die Welt auf individuelle Weise mit Hilfe seiner Sinnesorgane. Es gibt kein allgemeines Kriterium für die Richtigkeit oder Unrichtigkeit also für die Wahrheit einer Erkenntnis.

1.2 Zu den im Laufe des Lebens gewonnenen Erfahrungen gehören die Möglichkeiten, solche Erfahrungen "**mit** anderen Individuen zu **teilen**", also "Mitteilungen" zu formulieren. Derartige Mitteilungen können über beliebige Sinnesorgane geleitet werden. Dabei kommt zunächst den akustischen Mitteilungen und in weiterer Folge den darauf beruhenden schriftlichen Mitteilungen besondere Bedeutung zu.

1.3 Durch das Zusammenleben verschiedener Individuen in Gruppen (Familien, Stämme, Völker etc.) bilden sich gemeinsame Begriffe und schließlich etwas wie gemeinsame Sprachen, in denen individuelle Erfahrungen mitgeteilt werden. Offen bleibt, wie weit solche Sprachen die in sie gesetzten Erwartungen erfüllen können.

1.4 Eine der grundlegenden Fragen in diesem Zusammenhang ist die nach der **Wahrheit** einer Mitteilung. Diese Frage stellt sich insbesondere dann, wenn eine Person P_1 eine Mitteilung als wahr, eine andere Person P_2 aber die selbe Mitteilung als falsch bezeichnet. Der Leser möge dabei ebenso wie der Autor seine eigene Beurteilung der Mitteilung außer Betracht lassen und das Problem ausschließlich auf die Urteile von P_1 und von P_2 beschränken.

1.5 Der Sachverhalt kann dabei sehr komplex sein. Unterschiedliche Beurteilungen einer Mitteilung können auf unterschiedlichen Interpretationen der Mitteilung, auf unterschiedlichem Wissensstand ebenso wie auf bewusst falschen Aussagen beruhen. Der Möglichkeiten gibt es viele.

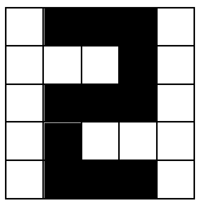
1.6 Für Außenstehende wie den Leser und den Autor steht jedenfalls die Frage nach einem **Beweis** der Richtigkeit bzw. der Unrichtigkeit solcher Beurteilungen im Vordergrund. Ein Beweis der Richtigkeit einer Mitteilung ist etwa dann für den Autor trivial, wenn die Mitteilung eine Eigenschaft eines Objektes beschreibt, welche Teil der Definition des Objektes ist, wie z.B. die Tatsache, dass ein Quadrat vier gleich lange Seiten hat. Beweise für die Richtigkeit anderer Mitteilungen können erhebliche Schwierigkeiten bereiten wie Vermutungen über mathematische Sätze zeigen, die weder bewiesen noch widerlegt sind.

1.7 Als Beweis für die Unrichtigkeit einer Mitteilung wird offenbar ein Widerspruch innerhalb dieser Mitteilung selbst anerkannt. Die Mitteilung: "Es existiert eine natürliche Zahl, die kleiner als 3 und größer als 5 ist" wird wohl nicht nur vom Autor sondern auch sehr allgemein als unrichtig angesehen. Dieses allgemeine Urteil setzt allerdings bereits Übereinkunft über die Begriffsinhalte von "existieren", "natürliche Zahl", " kleiner als", "3", "größer als" und "5" voraus. Über die vom Autor in den folgenden Überlegungen verwendeten Begriffsinhalte besteht seiner Ansicht nach genügend Übereinkunft um die von ihm entwickelten Schlussfolgerungen nachzuvollziehen. Im Übrigen ist das Entstehen solcher Übereinkünfte alles andere als trivial.

2. Für spätere Schlussfolgerungen verwendete abzählbare Mengen:

2.1 Eine **"Mitteilung M vom Umfang n"** sei ein quadratischer Raster, den n^2 **"Elementarquadrate"** der Seitenlänge 0.01 mm bilden von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind.

2.2 Einem weißen Elementarquadrat wird die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zugeordnet. Es sei a_{jk} jene Ziffer (1 oder 2), die dem in der j^{ten} Zeile an k^{ter} Stelle liegenden Elementarquadrat zugeordnet ist. Jede mögliche Mitteilung M_n vom Umfang n kann dann durch die Dezimalzahl $a(M_n) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22..}...a_{jk}.....a_{nn}$ eindeutig dargestellt werden. Beispielsweise wird der folgende entsprechend der Seitenlänge der Elementarquadrate auf das Fünfhundertfache vergrößerte Raster



durch die Zahl 0,1000111101100011011110001 eindeutig dargestellt.

2.3 Alle möglichen endlichen Mitteilungen M werden nun folgendermaßen abzählbar angeordnet: Zunächst werden die Mitteilungen M_n von gleichem Umfang n in Gruppen $G(M_n)$ zusammengefasst und diese Gruppen nach der Größe von n angeordnet. Innerhalb jeder Gruppe $G(M_n)$ werden sodann die Mitteilungen M_n nach der Größe der jeweiligen Dezimalzahlen $a(M_n)$ angeordnet. Es sei AO(M) die so gewonnene abzählbare Anordnung aller möglichen Mitteilungen.

2.4 Dass die Beschränkung der hier herangezogenen Mitteilungen auf Schwarz-Weiß-Informationen die späteren Schlussfolgerungen nicht beeinträchtigt zeigen die folgenden Überlegungen: Der Begriff "Mitteilung" besagt, dass eine Information von einer Person an eine andere übermittelt wird. Lässt man die Beschränkung auf Schwarz-Weiß-Informationen weg, bleibt als Aufgabe jeder möglichen Information die Übermittlung des Inhaltes der Mitteilung an eine Person so, dass diese den Inhalt der Mitteilung mit Hilfe ihrer Sinnesorgane erfassen kann. Offenbar können alle Sinnesorgane nur jeweils abzählbar viele Eindrücke aufnehmen. Der für die späteren Schlussfolgerungen wesentliche Grundsatz der Abzählbarkeit aller möglichen Informationen bleibt also auch bei Wegfall der Beschränkung auf Schwarz-Weiß-Informationen gewahrt.

2.5 Mit entscheidend für die Wahrheit einer Mitteilung M ist das Urteil einer Person P in einem Zeitpunkt T. Man verwendet daher besser den Begriff **"relative Wahrheit"** und zwar bezogen auf jeweils eine Person P und einen Zeitpunkt T. Eine Mitteilung M wird dann und nur dann als relativ zur Person P und zum Zeitpunkt T als wahr bezeichnet, wenn die Person P im Zeitpunkt T die Mitteilung M als wahr bezeichnet. Es darf dabei angenommen werden, dass P sein Urteil über M stets während einer gewissen **"Mindestdauer"** aufrecht erhält und dass P dabei ein gewisses **"Mindestvolumen"** im Raum-Zeit-Universum in Anspruch nimmt. Das **"Raum-Zeit-Universum RZU"** (drei Raumkoordinaten, eine Zeitkoordinate) kann durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems in **"Elementarwürfel EW"** jeweils der Seitenlänge von 0.01 mm und der Dauer von 0,01 Sek zerlegt werden. Offenbar liegt mindestens einer dieser Elementarwürfel zur Gänze in dem von P für sein Urteil in Anspruch genommenen Teil des RZU und bezeichnet damit das Urteil von P im Zeitpunkt T eindeutig. Alle Elementarwürfel können unschwer mit Hilfe des Koordinatensystems abzählbar angeordnet werden. Diese Anordnung sei AO(EW).

2.6 Alle möglichen Urteile jeder möglichen Person P in jedem möglichen Zeitpunkt T über die Wahrheit jeder möglichen Mitteilung M können jeweils durch ein Tripel (P,T,M) gekennzeichnet werden. Das Tripel (P,T,M) bedeutet dabei, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M im Zeitpunkt T liest oder lesen würde, M als wahr bezeichnet. T ist dabei ein beliebiger Zeitpunkt aus einem von P gemäß 2.5 für sein Urteil in Anspruch genommenen Elementarwürfel. Da alle möglichen Mitteilungen M in AO(M) gemäß 2.3 und alle möglichen für ein Urteil in Frage kommenden Kombinationen (P,T) mit Hilfe von AO(EW) gemäß 2.5 abzählbar angeordnet werden können gilt dies auch für jede Kombination (P,T,M). Diese Anordnung sei **AO(P,T,M).**

3. Individualanordnungen reeller Zahlen:

3.1 Im folgenden Beispiel sollen alle Mitteilungen M = M[RZ(0,1)], die eine reelle Zahl RZ(0,1) zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben, mit Hilfe der Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} gemäß 2.6 abzählbar angeordnet werden. Das Tripel {P,T,M[RZ(0,1)]} bedeutet dabei, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M[RZ(0,1)] im Zeitpunkt T liest oder lesen würde, die Behauptung, diese Mitteilung beschreibe eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei, als wahr bezeichnet. Wie in 1.4 gefordert bleibt dabei die Beurteilung der Mitteilungen durch den Leser ebenso wie die durch den Autor außer Betracht. Die Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} beruht einzig und allein auf dem jeweiligen individuellen Urteil von P und sie werde daher als Individualanordnung von reellen Zahlen zwischen 0 und 1 bezeichnet.

3.2 Jedes einzelne der Tripel {P,T,M[RZ(0,1)]} entspricht einer reellen Zahl RZ(0,1) zwischen 0 und 1 und zwar genau jener, von der die Person P im Zeitpinkt T behauptet oder behaupten würde, sie werde durch die Mitteilung M[RZ(0,1)] eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben. Es ist unschwer zu sehen, dass jeweils unendlich viele solcher Tripel ein und der selben Zahl entsprechen. Aus AO{P,T,M[RZ(0,1)]} erhält man aber leicht auch eine Individualanordnung AO[RZ(0,1)] **aller** reellen Zahlen RZ(0,1) zwischen 0 und 1, etwa indem diese reellen Zahlen in der Reihenfolge angeführt werden, in der sie in der Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} erstmals auftreten.

3.3 Die Anordnung AO[RZ(0,1)] reeller Zahlen zwischen 0 und 1 gemäß 3.2 ist insoweit vollständig, als jeder Versuch, eine angeblich in ihr nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei anzugeben, wie im Folgenden gezeigt wird, misslingt. Behauptet nämlich ein Kritiker der Vollständigkeit (er werde als kritische Person mit P_k bezeichnet) in irgendeinem Zeitpunkt T_k, eine reelle Zahl $r_k \in$ RZ(0,1) zwischen 0 und 1 - etwa eine aus der Anordnung AO[RZ(0,1)] mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor gewonnene Diagonalzahl - sei in dieser Anordnung nicht enthalten, es gelte also $r_k \notin$ AO[RZ(0,1)], dann kann diese Behauptung in Form einer Mitteilung M_k dargestellt werden. Die Mitteilung M_k beschreibt also nach Ansicht der Person P_k im Zeitpunkt T_k die reelle Zahl r_k zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei und enthält die Feststellung, nach Ansicht von P_k sei r_k nicht in AO[RZ(0,1)] enthalten, es gelte also $r_k \notin$ AO[RZ(0,1)]. Nun werden aber gemäß 3.2 in AO[RZ(0,1)] genau alle jene reellen Zahlen RZ(0,1) angeordnet, die in der Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} enthalten sind. Darunter also auch die dem Tripel (P_k,T_k,M_k) entsprechende reelle Zahl r_k. Und damit verstrickt sich P_k in einen Widerspruch: Er behauptet in seiner Mitteilung M_k im Zeitpunkt T_k, es sei r_k eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, die damit per definitionem in der Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} enthalten sein muss und zwar an der Stelle (P_k,T_k,M_k), woraus im weiteren ebenfalls per definitionem **$r_k \in$ AO[RZ(0,1)]** folgt. Dies steht nun aber im Widerspruch zur vorangegangenen Behauptung von P_k, wonach **$r_k \notin$ AO[RZ(0,1)].** P_k ist es also nicht gelungen, eine in AO[RZ(0,1)] nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei anzugeben.

3.4 Der in 3.3 geführte Nachweis der Abzählbarkeit der widerspruchsfrei definierten reellen Zahlen zwischen 0 und 1 löst unter anderem auch das erste Hilbert-Problem für den Bereich der reellen Zahlen.

3.5 Die abzählbare Anordnung AO{P,T,M[RZ(0,1)]} aller Tripel {P,T,M[RZ(0,1)]} gemäß 3.1 wird hier nur als Aussage über die Mächtigkeit der Menge dieser Tripel verwendet. Ebenso wird die abzählbare Anordnung AO[RZ(0,1)] aller reellen Zahlen RZ(0,1) gemäß 3.2 hier nur als Aussage über die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen RZ(0,1) verwendet. In beiden Fällen erweist es sich aber als grundsätzlich unmöglich, eine tatsächliche Anordnung dieser abzählbaren Mengen anzugeben. Grundlagen solcher Anordnungen sind ja unter anderem die Urteile aller im Raum-Zeit-Universum möglichen Personen P in allen möglichen Zeitpunkten T über den

Inhalt einer Mitteilung M und diese Urteile können offensichtlich nie vollständig bekannt sein..

4) Individualanordnungen beliebiger Mengen:

4.1 Die bisherigen Überlegungen zur Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen lassen sich auf beliebige Mengen erweitern. Solche Mengen $M(\epsilon)$ bestehen aus Elementen E_ϵ, die alle eine Eigenschaft ϵ aufweisen, die sie zu einem Element der Menge $M(\epsilon)$ macht. Anders lassen sich Mengen kaum sinnvoll definieren. Analog zu 3.1 werden die Tripel (P,T,M_ϵ) gemäß 2.6 in einer Anordnung $AO(P,T,M_\epsilon)$ abzählbar angeordnet[1]. Das Tripel (P,T,M_ϵ) bedeutet dabei, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M_ϵ im Zeitpunkt T liest oder lesen würde, die Behauptung, diese Mitteilung beschreibe ein Element $E_\epsilon \in M(\epsilon)$ eindeutig und widerspruchsfrei, als wahr bezeichnet. Analog zu 3.2 entspricht jedes einzelne der Tripel (P,T,M_ϵ) einem Element E_ϵ der Menge $M(\epsilon)$ und zwar genau jenem, von dem die Person P im Zeitpunkt T behauptet oder behaupten würde, es werde durch die Mitteilung M_ϵ eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben. In gleicher Weise wie in 3.2 erhält man aus $AO(P,T,M_\epsilon)$ eine Individualanordnung $AO(E_\epsilon)$ aller Elemente E_ϵ der Menge $M(\epsilon)$.

4.2 Die Anordnung $AO(E_\epsilon)$ ist insoweit vollständig, als wie in 3.3 jeder Versuch, ein angeblich nicht enthaltenes Element E_ϵ aus der Menge $M(\epsilon)$ widerspruchsfrei anzugeben, misslingt. Analog den Schlussfolgerungen in 3.3 wird von einem Kritiker P_k der Vollständigkeit ausgegangen, der in irgend einem Zeitpunkt T_k behauptet, ein Element $E_k \in M(\epsilon)$ sei in dieser Anordnung nicht enthalten, es gelte also $E_k \notin AO(E_\in)$ und damit per definitionem $E_k \notin AO(P,T,M_\epsilon)$. Diese Behauptung kann als Mitteilung M_k dargestellt werden. M_k beschreibt also nach Ansicht von P_k im Zeitpunkt T_k ein Element $E_k \in M(\epsilon)$ und enthält die Feststellung, nach Ansicht von P_k sei E_k nicht in $AO(E_\epsilon)$ enthalten. Nun werden aber gemäß 4.1 in $AO(E_\epsilon)$ genau jene Elemente E_ϵ angeordnet, die in der Anordnung $AO(P,T,M_\epsilon)$ enthalten sind. Darunter also auch das dem Tripel (P_k,T_k,M_k) entsprechende Element E_k. Und damit verstrickt sich P_k in einen Widerspruch. Er behauptet in seiner Mitteilung M_k im Zeitpunkt T_k, es sei E_k ein Element der Menge $M(\epsilon)$, das damit per definitionem in der Anordnung $AO(P,T,M_\epsilon)$ enthalten ist und zwar an der Stelle (P_k,T_k,M_k), woraus im weiteren ebenfalls per definitionem $\mathbf{E_k \in AO(P,T,M_\epsilon)}$ folgt. Dies steht nun aber im Widerspruch zur vorangegangenen Behauptung von P_k, wonach $\mathbf{E_k \notin AO(P,T,M_\epsilon)}$. P_k ist es also nicht gelungen, ein in $AO(E_\epsilon)$ nicht enthaltenes Element E_ϵ widerspruchsfrei anzugeben.

4.3 Der Begriff "überabzählbare Menge" führt gemäß 4.2 stets zu einem Widerspruch. Hingegen kann man einen Begriff **"nicht abzählbar anordenbare Mengen"** bilden und darunter Mengen von der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen

[1] Es ist zwischen der Menge $M(\epsilon)$ von Elementen E_ϵ mit der Eigenschaft ϵ und der ein Element E_ϵ nach dem Urteil von P im Zeitpunkt T eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilung M_ϵ zu unterscheiden.

verstehen, für die eine Anordnung der Elemente der jeweiligen Menge etwa aus den in 3.5 genannten Gründen nicht möglich erscheint.

4.4 Der Widerspruch im Begriff "Überabzählbare Menge" führt auch zum Widerspruch im Begriff "Transfinite Kardinalzahl $\aleph_n$ mit n > 0". Insbesondere sind derartige von Cantor eingeführte Mengen in sich widerspruchsvoll. Damit werden Widersprüche in einigen Bereichen der Mengenlehre aufgezeigt.

4.5 Der in 3.3 und 4.2 jeweils angesprochene Kritiker P_k spielt hier die Rolle des Gesprächspartners von Sokrates in dessen **Mäeutik**, der Hebammenkunst. Um die entscheidenden Widersprüche herauszuarbeiten wird P_k selbst in die Diskussion einbezogen.

4.6 Die vorstehenden Überlegungen beruhen letztlich darauf, dass Mathematik nur von Personen innerhalb des Raum-Zeit-Universums betrieben werden kann und dass alle Ergebnisse mathematischer Untersuchungen durch Mittelungen gemäß 2 übermittelt werden können.

Zum Widerspruch im Überabzählbaren:

Die mir mit Abstand wichtigste Untersuchung habe ich 1972 in meiner Arbeit "Zur Problematik der absoluten Überabzählbarkeit" in der Zeitschrift "Philosophia naturalis" erstmals angesprochen. Sie betrifft das erste Hilbert-Problem und damit auch die Kontinuums-Hypothese. Diese Arbeit und zahlreiche auf sie folgende einschlägige Arbeiten lösen das Problem (vgl. meine Website "www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/")

Grundlage der Überlegungen ist die Tatsache, dass alles worüber gesprochen werden kann auch in endlicher Form dargestellt werden kann. Eigentlich ein Pleonasmus. Stößt aber interessanter Weise auf große Verständnisschwierigkeiten.

Übrigens eine Facette der Verständnisschwierigkeiten: Bei einem Vortrag an der TU hatte ich die Forderung formuliert, nur solche reelle Zahlen als widerspruchsfrei existierend anzusehen, die in endlicher Form "beschrieben" werden können. Daraufhin ging einer der Assistenten zur Tafel, schrieb ein paar Zeilen und sagte: "Aber diese Zahlen haben Sie damit nicht erfasst". Dass er eben etwas "in endlicher Form beschrieben" hatte, dürfte ihm entgangen sein.

Ein wesentlicher Grund für Verständnisschwierigkeiten, die meine Überlegungen zum ersten Hilbert-Problem mit sich bringen, liegt sicher in der als Axiom von vielen Mathematikern angenommenen aber meines Wissens nie als Axiom formulierten Ansicht, Mathematik sei wie Physik eine Naturwissenschaft, deren Aufgabe darin bestehe, die in der Natur vorgegebenen mathematischen Sätze aufzufinden. Nun bis hierhin könnte dieser Ansicht durchaus beigepflichtet werden. Sie wird aber dann problematisch, wenn man glaubt, Mathematik ohne Mathematiker betreiben zu können. Und genau darin liegt der Unterschied zu meinen Überlegungen, die einen Mathematiker als "in Raum und Zeit Mathematik betreibende Person" voraussetzen.

Ernst Jünger hat diesen Gedanken in einem klugen Aphorismus ausgedrückt: "Die Zahl wurde nicht entdeckt, sie wurde erfunden, und es gibt nichts ihr Ebenbürtiges im Reich der Erfindungen". Percy Bysshe Shelley sagt etwas universeller, weil nicht auf Zahlen beschränkt, in seinem 'Prometheus Unbound': "And speech created thought wich is the measure of the universe". Über die Gedankenkette "etwas messen → etwas begreifen → etwas bedenken → an etwas denken" kann man zur Metapher "Alles Denkbare ↔ Universum" kommen.

Den Gedanken, die einzelnen logischen Schritte der eigenen Überlegungen mit Hilfe der Überlegungen einer anderen Person zu kontrollieren, also die eigenen "Wahrheiten" mit den "Wahrheiten" anderer Personen zu vergleichen, fand ich am schönsten in der Mäeutik, der "Hebammenkunst", von Sokrates angewendet.

Meine Überlegungen beruhen auf dem, wenn man so will, Axiom: "Mathematik kann nur dann widerspruchsfrei (!) betrieben werden, wenn ihre 'Sätze' in irgendeiner 'Sprache' und 'schriftlich' niedergelegt werden können". Demnach kann man nur dann sinnvoll und widerspruchsfrei von "Objekten der Mathematik" sprechen, wenn es irgendwann irgendwo eine Person geben **kann**, die ein solches Objekt in Form einer endlichen - wenn auch beliebig umfangreichen - Mitteilung widerspruchsfrei beschreiben kann. Zum Beweis dessen bin ich davon ausgegangen, dass jede mögliche derartige Beschreibung ein gewisses Mindestvolumen im Raum-Zeit Universum beansprucht und diese Mindestvolumina abzählbar angeordnet werden können.

Die Hauptursache der Verständnisschwierigkeiten, auf die meine Überlegungen gestoßen sind, liegt meines Erachtens darin, dass wir nur dann Informationen - etwa über wahre Aussagen, über mathematische Sätze, über Beweise, über Widersprüche oder was auch immer - weitergeben können, wenn wir uns einer Sprache bedienen, von der wir annehmen dürfen, der Gesprächspartner verstehe sie **im selben Sinne** wie wir selbst. Es muss sich also um eine grundsätzlich von allen erlernbare Sprache handeln da wir wohl ohne Sprachkenntnisse zur Welt gekommen sind. Mit der Annahme, jeder Gesprächspartner müsse unsere Sprache im selben Sinn verstehen entziehen wir aber unserer Sprache ihre **Individualität**, also ihre Eigenschaft, zunächst nur für das sie verwendende Individuum "verständlich" zu sein. Wir stellen uns damit auf den Standpunkt, die Sprache, jede Sprache, existiere vom Menschen unabhängig.

Diese Nachlässigkeit im Umgang mit Begriffen, mit sprachlichen Ausdrücken, hat zur Folge, dass wir bedenkenlos Begriffe verwenden, die höchst unscharf sind, also in unterschiedlichster Weise interpretiert werden können. Denken wir etwa als ein extremes Beispiel an die Begriffe "Gott", "sein" (Zeitwort) und "Liebe" und die daraus gebildete Feststellung "Gott ist die Liebe".

Der gleiche Mangel haftet unseren Bestrebungen an, die Welt "anschaulich" zu beschreiben, also so wie unsere Sinnesorgane uns Eindrücke von ihr vermitteln. Während wir aber etwa in der Physik der Elementarteilchen (notgedrungen) vielfach auf Anschaulichkeit verzichten sind wir hinsichtlich der Sprache und ihres Gebrauches kaum dazu bereit und so kommt es, dass wir über in sich widersprüchliche Begriffe wie "überabzählbare Mengen" hinwegsehen.

Der Einwand eines Kritikers lautete etwa, mein Schluss über die Abzählbarkeit alles dessen, worüber gesprochen werden kann, sei ein Zirkelschluss, da von vornherein nur eine abzählbare Menge betrachtet wird. Dieser Kritiker hat schlicht und einfach den Beweisgang nicht verstanden. Der Beweis gliedert sich nämlich in zwei Teile. Zuerst wird eine abzählbare Menge definiert, von der ich behaupte, sie sei vollständig. In einem zweiten Schritt wird dann gezeigt, dass jeder Versuch, die Unvollständigkeit dieser abzählbaren Menge zu beweisen, zu einem Widerspruch führen muss. (Unter den von mir expliziert angeführten Beispielen findet sich insbesondere auch die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zusammen mit dem Prinzip der Cantor'schen Diagonalzahl.) Der Einwand übersieht also meinen Nachweis des Widerspruchs in **jedem** Versuch die Unvollständigkeit meiner abzählbar angeordneten Menge zu beweisen. Der Kritiker unterscheidet übrigens "successive infinit = potentiell unendlich" und "at once infinit = aktual unendlich". Der von ihm geprägte Ausdruck "at once infinit" zeigt deutlich, dass er keine andere Möglichkeit sieht, über das potentiell Unendliche hinausgehende Bereiche zu erfassen, als diese Bereiche als Ganzes, auf einmal, eben at once, einzubeziehen ohne auf irgend ein einzelnes Element der Menge eingehen zu müssen. **Er befindet sich dabei in der selben Lage wie jemand, der zunächst von einem Bereich spricht, der alles enthält, worüber man sprechen kann, anschließend aber <u>über</u>**

einen Bereich spricht, der alles enthält, worüber man nicht sprechen kann, ohne sich des inneren Widerspruchs dieser seiner Überlegungen bewusst zu sein.

Lässt man ganz allgemein auch Begriffe zu, die zwar in sich widersprüchlich sind, über die man aber sprechen kann, wie etwa der Begriff "Die kleinste einstellige Zahl größer als fünf und kleiner als drei", dann erweitert man den zunächst widerspruchsfreien betrachteten Bereich. Man kann dann etwa definieren: **"Die Welt ist alles, worüber gesprochen werden kann".** Deckungsgleich mit aber in meinem Verständnis etwas präziser als Wittgensteins "Die Welt ist alles, was der Fall ist".

Tatsächlich hat der von mir hergeleitete Widerspruch seine Ursache in einem zugrundegelegten Axiom, das z.B. so formuliert werden kann: "Jeder Beweis muss sich auch schriftlich darstellen lassen". Dies wurde meines Wissens nie explizit als Axiom formuliert, wird aber de facto stets gefordert.

Verständnisschwierigkeit beim Widerspruch im aktual Unendlichen

Von der Arbeit: "Zur Problematik der absoluten Überabzählbarkeit"[1] ausgehend wurde auf dieser Homepage in zahlreichen Beiträgen das erste Hilbert-Problem und damit auch die Kontinuums-Hypothese angesprochen. Grundlage ist die Tatsache, dass alles worüber gesprochen werden kann auch in endlicher Form dargestellt werden kann. Eigentlich ein Pleonasmus, der aber interessanter Weise auf große Verständnisschwierigkeiten stößt. Das Unverständnis kann in verkürzter Form so erläutert werden. In meinen Arbeiten wird gezeigt, dass jeder Beweis für die Überabzählbarkeit einer beliebigen Menge einen Widerspruch beinhaltet. Kritiker dessen versuchen die Unvollständigkeit der von mir angegebenen abzählbaren Mengen zu zeigen und zwar meist durch die Angabe von "kritischen" Elementen, die angeblich in meinen Mengen nicht enthalten sind. Die von mir gewählte Anordnung, die ich etwa als Individualanordnung bezeichne, da in ihr alle möglichen, die Anordnung begutachtenden Personen einbezogen sind, ist jedoch gegen solche Argumente "resistent".

Tatsächlich kann in jedem "kritischen" Element ein Widerspruch nachgewiesen werden. Der Unterschied in den Betrachtungsweisen des Autors und des Kritikers entspricht dem Unterschied zwischen potentiell und aktual unendlichen Mengen. Als Beispiel einer solchen Menge können etwa die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 herangezogen werden, als Beispiel für ein kritisches Element etwa eine aus einer Individualanordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor gewonnene Diagonalzahl. In mehreren Arbeiten auf dieser Homepage werden Widersprüche in der Cantor'schen Diagonalzahl hergeleitet.

Mathematische Sätze sind im allgemeinen beweisbar und werden nicht in Frage gestellt. Nennen wir sie "Sätze erster Art". Angebliche Beweise, dass solche Sätze doch falsch sind, können daher widerlegt werden, doch ist es kaum sinnvoll, dafür Zeit und Mühe aufzuwenden. Dies gilt beispielsweise für Beweise der Quadratur des Zirkels, also der Konstruktion eines einem Kreis flächengleichen Quadrats bei vorgegebenem Radius des Kreises mit Hilfe von Zirkel und Lineal. Hier hat Galois in beeindruckender Weise die Unmöglichkeit einer derartigen Konstruktion bewiesen.

Anders ist es bei Sätzen, deren Gültigkeit wenn auch mit größter Wahrscheinlichkeit nur vermutet wird wie beispielsweise lange Zeit der Vier-Farben-Satz oder der Große Fermat. Nennen wir sie "Sätze zweiter Art". In beiden Fällen wäre es vor dem Beweis des jeweiligen Satzes schon sinnvoll gewesen, angebliche Beweise der Ungültigkeit zu widerlegen.

Die von mir in Frage gestellte Existenz überabzählbarer Mengen gehört aber jedenfalls nicht zu den Sätzen erster Art. Man sollte also bei Kalkülen, welche den Begriff überabzählbarer Mengen als in sich widerspruchsvoll zeigen, die einzelnen Schritte eines solchen Kalküls nachvollziehen und versuchen, einen dieser Schritte als fehlerhaft nachzuweisen. Kritiker meiner Infragestellung der Existenz überabzählbarer Mengen haben sich aber vielfach damit begnügt, sie wie Sätze erster Art zu

[1] PHILOSOPHIA NATURALIS, Bd. 13, Heft 4, 3. Vierteljahr 1972, S399 - 404, Verlag Anton Hain - Meisenheim/Glan.

behandeln also sich nicht der Mühe unterzogen, einzelne Schritte des Kalküls zu überprüfen. Dazu ein paar Beispiele:

- Anlässlich eines Vortrags über die Vollständigkeit der für eine bestimmte Person in einem bestimmten Zeitpunkt schriftlich darstellbaren Denkobjekte ging ein Hörer zur Tafel, schrieb ein Kalkül an und sagte: "Aber diese Zahlen fehlen in Ihrer Anordnung". Dass er gerade durch sein Anschreiben die von ihm gemeinten Zahlen mit ihm als Person und mit dem Zeitpunkt des Anschreibens in die von mir genannte Anordnung der Denkobjekte eingefügt hatte, war ihm nicht bewusst.
- Die Sprache in Form einer Mitteilung sei für die Vielfalt des Mitzuteilenden ungeeignet. Die Mitteilung "Dieser Stein da" sage für sich allein genommen nichts aus[2].
- Es werde nicht zwischen "Objektsprache" und "Metasprache unterschieden[3].
- Der Schluss über die Abzählbarkeit alles dessen, worüber gesprochen werden kann, ist ein Zirkelschluss[4].
- Es sei nicht nachzuvollziehen, dass eine Mitteilung erst durch eine sie lesende Person einen Sinn erhält[5].
- Der von mir hergeleitete Widerspruch habe seine Ursache in abweichenden zugrundegelegten Axiomen.

Die letzte Bemerkung trifft den Kern der Angelegenheit. In der Literatur bleibt eine durchaus als Axiom zu verstehende Forderung unberücksichtigt, die etwa so formuliert werden kann: "Jeder mathematische Beweis bedarf der Schriftlichkeit". Sie wird tatsächlich nie in Frage gestellt ebenso wenig wie die Tatsache, dass jede mathematische Diskussion nicht nur mündlich sondern in jeder möglichen Sprache auch schriftlich abgeführt werden kann. Die Methode, für gewisse Kalküle mengentheoretischer oder logistischer Art eine eigene Zeichensymbolik zu entwickeln wird durchaus in vielen Fällen eine verständliche Darstellung der Überlegungen erleichtern. Sie kann aber nicht über den Gesamtbereich einer Umgangssprache hinausführen.

Ob Geistes- ob Naturwissenschaft: Endliche schriftlich Mitteilungen sind der Rahmen, innerhalb dessen alle Wissenschaft abzuhandeln ist und der nicht widerspruchsfrei überschritten werden kann.

---

[2] Für sich allein genommen sicher nicht, wohl aber im Zusammenhang mit einer bestimmten Person in einem bestimmten Zeitpunkt und damit an einem bestimmten Ort.

[3] Für eine bestimmte Person P und in einem bestimmten Zeitpunkt T hat jede Mitteilung einen bestimmtem Sinn, gleich ob als Objektsprache oder als Metasprache.

[4] Dieser Kritiker zieht selbst einen Zirkelschluss, da er bereits eine überabzählbare Menge voraussetzt. Vgl. z. B. "Skizze zum ersten Hilbert-Problem".

[5] Vgl. demgegenüber "L'homme ordinateur".

Skizze zum ersten Hilbert-Problem:

Grundlage unserer Überlegungen ist eine abzählbare Anordnung alles Denkbaren. Davon ausgehend wird gezeigt, dass alle Beweise der Existenz überabzählbarer Mengen einen Widerspruch beinhalten. Als ein konkretes Beispiel wird das zweite Diagonalargument von Cantor angeführt und ein Widerspruch in seiner Argumentation nachgewiesen. Damit löst sich auch das erste Hilbert-Problem.

Wir untersuchen zunächst alle möglichen Personen P, welche in irgendeinem möglichen Zeitpunkt T irgend eine Information in Form einer schriftlichen Mitteilung M lesen. Ist eine solche Person P im Zeitpunkt T bereit zu sagen, die Mitteilung M beschreibe "Etwas" eindeutig und widerspruchsfrei, nennen wir dieses Etwas "Objekt des Denkens von P" und bezeichnen es mit "DO(P,T,M)". So wäre etwa der Autor bereit in einem Zeitpunkt, während er diese Arbeit schreibt, zu sagen, die Mitteilung M = "2" beschreibt die natürliche Zahl 2 eindeutig und widerspruchsfrei oder auch die Mitteilung M = "i" beschreibt den Buchstaben i eindeutig und widerspruchsfrei. In anderem Zusammenhang wäre er aber auch bereit zu sagen, die Mitteilung M = "i" beschreibt die Zahl $\sqrt{-1}$. Je nachdem ist dann das Denkobjekt DO(P,T,M) = 2 bzw. DO(P,T,M) = i bzw. DO(P,T,M) = $\sqrt{-1}$.

Um zu der gewünschten abzählbaren Anordnung alles Denkbaren zu kommen führen wir der Reihe nach abzählbare Anordnungen für alle möglichen Personen P, alle möglichen Zeitpunkte T und alle möglichen Mitteilungen M ein.

Jede mögliche Person P muss im Zeitpunkt T des Lesens der Mitteilung M ein gewisses Mindestvolumen im Raum einnehmen. Der Vorgang des Lesen erfordert eine gewisse Mindestzeit. Es kann angenommen werden, dass beides zusammen ausgedehnt genug ist um mindestens einen Elementarwürfel EW(P,T) im Raum-Zeit-Universum zur Gänze zu enthalten, wenn die räumliche Seitenlänge des Würfels mit 0.01 mm und die zeitliche Dauer mit 0.01 Sek. festgesetzt wird. Nun führen wir im Raum-Zeit-Universum ein vierdimensionales Koordinatensystem ein. In diesem Koordinatensystem können offenbar alle möglichen Elementarwürfel EW(P,T) abzählbar angeordnet werden. Wir bezeichnen diese abzählbare Anordnung mit AO[EW(P,T)] = AO(P,T). Jeder mögliche Lesevorgang einer Person P im Zeitpunkt T hat in dieser abzählbaren Anordnung seinen festen Platz.

Als nächstes ordnen wir alle möglichen Mitteilungen abzählbar an. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschränken wir uns auf schriftliche Mitteilungen. Eine "Mitteilung vom Umfang n" sei ein quadratischer Raster, bestehend aus n^2 "Elementarquadraten" der Seitenlänge 1/100 mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit a_{jk}. Jede mögliche Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl a(M) = $0.a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Nun fassen wir alle Mitteilungen zuerst in Gruppen nach ihrem Umfang n zusammen, ordnen sie innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) und ordnen sie anschließend in einer Anordnung AO(M) abzählbar an.

Alle möglichen Denkobjekte DO(P,T,M) können nun wie gewünscht mit Hilfe der Anordnung AO(P,T) in Gruppen und anschließend jeweils mit Hilfe der Anordnung AO(M) in einer Anordnung AO[DO(P,T,M)] abzählbar angeordnet werden.

Als Beispiel betrachten wir RZ(0,1), die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Wir werden zeigen, dass das zweite Diagonalargument von Cantor als Beweis der Überabzählbarkeit von RZ(0,1) einen Widerspruch beinhaltet. Dazu gehen wir von der abzählbaren Anordnung AO[DO(P,T,M)] aus und wählen jene Denkobjekte aus, bei denen P im Zeitpunkt T behauptet, M stelle für ihn eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei dar. Diese Denkobjekte bezeichnen wir mit DO{P[RZ(0,1)],T[RZ(0,1)],M[RZ(0,1)]}. Als Teil der abzählbaren Anordnung AO[DO(P,T,M)] können sie ebenfalls abzählbar angeordnet werden und wir nennen diese abzählbare Anordnung AORZ(P,T,M).

Wir behaupten nun, in der abzählbaren Anordnung AORZ(P,T,M) sind alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthalten. Ein Kritiker unserer Argumentation, nennen wir ihn PK, will die Unvollständigkeit von AORZ(P,T,M) mit Hilfe des zweiten Diagonalarguments von Cantor beweisen. Dazu stellt er jede reelle Zahl r_n aus AORZ(P,T,M) in Form einer unendlichen Dezimalzahl $r_n = 0{,}r_{n1}r_{n2} \ldots r_{nn} \ldots$ dar und bildet eine Diagonalzahl $d = 0{,}d_1d_2 \ldots d_n \ldots$ mit der Eigenschaft $\forall k\colon d_k \neq r_{kk}$. Der Kritiker argumentiert, die Diagonalzahl d sei offenbar eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, sie unterscheide sich aber jeweils an der n^{ten} Dezimalstelle r_{nn} von r_n. Mithin gelte $\forall n\colon d \neq r_n$ und daher **$d \notin$ AORZ(P,T,M).** Die Anordnung AORZ(P,T,M) enthalte daher nicht alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

PK konnte seine Diagonalzahl d offenbar in die Form einer schriftlichen Mitteilung, nennen wir sie MK, bringen. Ist TK ein Zeitpunkt in dem er seine Kritik äußert, dann stellt das Denkobjekt DO(PK,TK,MK) auf Grund seiner eigenen Aussage die reelle Zahl d zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei dar. Es gilt daher nicht nur $d \in$ AO[DO(P,T,M)] nach Definition von AO[DO(P,T,M)] sondern auch **$d \in$ AORZ(P,T,M)** nach Definition von AORZ(P,T,M). Damit ist der gewünschte Widerspruch nachgewiesen.

Der Irrtum des Kritikers beruht darauf, dass AORZ(P,T,M) nur potenziell vollständig vorliegt. Aktual fehlen **immer** unendlich viele reelle Zahlen. Die Anwendung des zweiten Diagonalarguments auf AORZ(P,T,M) führt zu einem Zirkelschluss. Es kann nur dann funktionieren wenn eine unvollständige Anordnung vorliegt. Nur dann führt es zu einer neuen reellen Zahl zwischen 0 und 1. die vom Kritiker erst zu beweisende Unvollständigkeit wird also implizit bereits vorausgesetzt.

Individualanordnung[1]

Die Zahl wurde nicht entdeckt, sie wurde erfunden[2], und es gibt nichts ihr ebenbürtiges im Reich der Erfindungen.

(Ernst Jünger)

Durch die meisten Arbeiten auf dieser Website zieht sich wie ein roter Faden der Gedanke der Relativität jeder Wahrheit. Eine schriftlich, mündlich oder sonst wie verfasste Aussage kann nur von einer möglichen Person, welche diese Aussage liest, hört oder sonst wie empfängt, einen Sinn gewinnen und als "wahr" oder als "nicht wahr" angesehen werden[3]. Gleiches gilt für Begriffe wie "Mitteilung" oder "Information". Auch sie können nur durch eine die Mitteilung oder die Information erhaltende Person einen Sinn gewinnen ebenso wie der Sinngehalt einer Lochkarte erst mit Hilfe eines Kartenlesers erkennbar wird[4]. Aussagen, Mitteilungen oder Informationen sind daher für sich allein nur "potentiell" sinnvoll. Ihr Sinn wird erst durch eine sie erhaltende Person "actual".

Ist man grundsätzlich bereit, solchen Gedanken zu folgen, dann ergibt sich daraus unmittelbar eine Begrenzung sinnvoller wahrer Mitteilungen M. Für solche, nämlich für sinnvolle wahre Mitteilungen M, ist offenbar vorauszusetzen, es müsse zumindest möglich sein, dass irgendein genügend kleines Zeitintervall IT = (T, T+ε) existiert, in dem irgendeine Person P bereit ist, die Mitteilung M als "wahr" zu bezeichnen. Offenbar wäre ε = 0,01 Sek. ausreichend. Davon ausgehend ist es unschwer möglich, alle sinnvollen wahren Mitteilungen M abzählbar anzuordnen und zwar mit Hilfe von abzählbaren Anordnungen aller möglichen Mitteilungen M, aller möglichen Zeitintervalle IT und aller möglichen Personen P. Dabei gilt eine Beurteilung von M als "wahr" jeweils nur für genau diese Person P und dieses Zeitintervall IT. Jede Beurteilung von M durch eine andere Person PA, also etwa durch den Autor oder durch den Leser dieser Arbeit, ist dabei irrelevant.

Wir beginnen zunächst mit einer abzählbaren Anordnung AO(M) aller möglichen Mitteilungen M und beschränken uns - wie wir später zeigen werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit - vorerst auf schriftliche Mitteilungen. Eine "Mitteilung M vom Umfang n" sei ein quadratischer Raster, bestehend aus n^2 "Elementarquadraten" der Seitenlänge $1/100$ mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist, und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit a_{jk}. Jede mögliche Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl

---

[1] Die Arbeit basiert auf "Wolff, 'Zur Problematik der absoluten Überabzählbarkeit', PHILOSOPHIA NATURALIS, Bd. 13, Heft 4, 3. Vierteljahr 1972, S 399 - 404". (Druckfehler in 6.1, Zeilen 5 und 6).

[2] "Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker." Ludwig Wittgenstein, Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik, Werkausgabe Bd. 6, Teil I, 168. Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft 506.

[3] Zum "Sinn einer Aussage" vgl. Ludwig Wittgenstein, Werkausgabe Bd. 6, 'Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik', Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft 506.

[4] vgl. "L'homme ordinateur", http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/.

$a(M) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Im weiteren fassen wir alle Mitteilungen M vom Umfang n zuerst in Gruppen nach ihrem Umfang n und anschließend innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) in einer Anordnung AO(M) abzählbar an. eine solche Mitteilung M vom Umfang n kann z.B. ein quadratisches Stück weißes Papier oder ein quadratischer Bildschirm, jeweils mit der Seitenlänge $n/100$ mm sein, auf dem schwarze Zeichen (Schriftzeichen, Formeln etc.) angebracht sind. Wie man sieht, lassen sich mit Hilfe solcher Mitteilungen alle nur möglichen Schwarz-Weiß-Informationen darstellen.

Dass die Einschränkung auf derartige Schwarz-Weiß-Informationen zu keiner Beschränkung der Allgemeinheit führt, wird durch folgende Überlegungen einleuchtend: Im allgemeinen bedeutet der Begriff "Mitteilung", dass eine Information von einer Person an eine andere übermittelt wird. Lässt man die Einschränkung auf Schwarz-Weiß-Informationen weg, bleibt als Aufgabe jeder möglichen Information die Übermittlung des Inhaltes der Mitteilung an eine Person so, dass diese den Inhalt der Mitteilung mit Hilfe ihrer Sinnesorgane erfassen kann. Man kann unschwer erkennen, dass alle Sinnesorgane nur jeweils abzählbar viele Eindrücke aufzunehmen in der Lage sind. Der für uns hier wesentliche Grundsatz der Abzählbarkeit aller möglichen Informationen bleibt also auch bei Wegfall der oben erwähnten Einschränkung auf optisch erfassbare Schwarz-Weiß-Informationen gewahrt.

Als nächsten Schritt zeigen wir, dass alle möglichen Mitteilungen M zusammen mit allen möglichen Zeitintervallen IT und allen möglichen Personen P, die in irgendeinem solchen Zeitintervall irgendeine mögliche Mitteilung M als "wahr" bezeichnen, in einer Anordnung AO(M,IT,P) abzählbar angeordnet werden können. Das Tripel (M,IT,P) bedeutet dabei, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M im Zeitintervall IT tatsächlich läse, sie als "wahr" bezeichnete.

Dazu wählen wir ein Koordinatensystem im Raum-Zeit-Universum (drei Raumkoordinaten, eine Zeitkoordinate) und zerlegen es in Raum-Zeit-Elemente RZE. Ein Raum-Zeit-Element RZE sei ein (vierdimensionaler) Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm (drei Raumkoordinaten) und der Dauer 0,01 Sek. (eine Zeitkoordinate). Mit Hilfe des vorhin gewählten Koordinatensystems im Raum-Zeit-Universum lassen sich dann alle Elementarwürfel EW in einer Anordnung AO(EW) abzählbar anordnen.

Wir können annehmen, dass jede mögliche Person, die in irgendeinem möglichen Zeitintervall IT irgendeine Mitteilung M als "wahr" bezeichnet, dabei im Raum-Zeit-Universum ein gewisses Volumen einnimmt. Die Größe der Elementarwürfel EW wurde so klein gewählt, dass in jedem zu einer Beurteilung einer Mitteilung M als "wahr" erforderlichen Volumen im Raum-Zeit-Universum sicher mindestens ein Elementarwürfel EW zur Gänze liegt. Durch diesen Elementarwürfel EW ist daher ein Tripel (M,IT,P), besagend, dass die Person P im Zeitintervall IT die Mitteilung M als "wahr" bezeichnet, eindeutig bestimmt. Diese Überlegungen gelten für alle möglichen Mitteilungen M, alle möglichen Zeitintervalle IT und alle möglichen Personen P. Es werden daher jeder möglichen Person P in jedem möglichen Zeitintervall IT alle möglichen Mitteilungen M zur Stellungnahme vorgelegt.

Mit Hilfe der abzählbaren Anordnung AO(M) aller möglichen Mitteilungen M und der abzählbare Anordnung AO(EW) aller möglichen Elementarwürfel EW kann daher wie gewünscht eine abzählbare Anordnung AO(M,IT,P) aller jener Fälle gefunden werden, in denen irgendeine Mitteilung M in irgendeinem Zeitintervall IT von irgendeiner Person P als "wahr" bezeichnet wird. Es sei darauf hingewiesen, dass hier lediglich über Urteile von Personen P über die "Wahrheit" von Mitteilungen M in irgendeinem Zeitintervall IT gesprochen wird. Eine allfällige "Wahrheit" oder "Nicht-Wahrheit" von M in anderen Zeitintervallen IT oder für andere Personen PA bleibt außer Betracht. Auch ein allfälliger "Sinngehalt einer Mitteilung M" für den Autor und/oder für den Leser dieser Arbeit ist irrelevant. Daher die Bezeichnung "Individualanordnung".

Ein Beispiel sind etwa Mitteilungen M = M[RZ(0,1)], die eine reelle Zahl RZ(0,1) zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben[5]. Das Tripel {M[RZ(0,1)],IT,P} besagt in diesem Fall, dass die Person P im Zeitintervall IT die Aussage "M[RZ(0,1)] beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei", als wahr bezeichnet. Es werden also aus allen abzählbar vielen Tripeln (M,IT,P) alle jene herausgefiltert, die besagen, dass die Mitteilung M = M[RZ(0,1)] für die Person P im Zeitintervall IT eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Daraus ergibt sich eine Anordnung AO{M[RZ(0,1)],IT,P} all dieser Tripel {M[RZ(0,1)],IT,P}. Jedes einzelne dieser Tripel beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei. Aus der abzählbaren Anordnung AO{M[RZ(0,1)],IT,P} erhält man daher gleichzeitig eine abzählbare Anordnung AO[RZ(0,1)] von reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Wir nennen diese Anordnung AO[RZ(0,1)] "Individualanordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1" und behaupten, sie ist vollständig.

Tatsächlich muss jeder Versuch, die Unvollständigkeit von AO[RZ(0,1)] durch die Angabe einer in AO[RZ(0,1)] angeblich nicht enthaltenen reellen Zahl zwischen 0 und 1 zu zeigen, misslingen. Behauptet nämlich ein Kritiker der Vollständigkeit von AO{M[ZR(0,1)],IT,P) - nennen wir ihn kritische Person PK - in irgendeinem Zeitintervall ITK, eine reelle Zahl $r = r_K$ zwischen 0 und 1 - etwa die aus der Anordnung AO[RZ(0,1)] mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor gewonnene Diagonalzahl - sei in dieser Anordnung nicht enthalten, es gelte also $r_K \notin$ AO{M[RZ(0,1)],IT,P}, dann verlangen wir von ihm, diese seine Behauptung in die Form einer Mitteilung MK zu bringen - etwa durch eine schriftliche Darstellung der aus der Anordnung AO[RZ(0,1)] mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor gewonnenen Diagonalzahl. MK besagt also nach Meinung von PK, es ist wahr, dass die reelle Zahl r_K zwischen 0 und 1 liegt und eindeutig und widerspruchsfrei durch MK dargestellt wird. Nach unserer Definition der Individualanordnung folgt daraus aber gerade $r_K \in$ AO(M,IT,P). Der Kritiker PK behauptet hingegen $r_K \notin$ AO(M,IT,P) und dies ist ein Widerspruch[6].

In gleicher Weise kann die Abzählbarkeit anderer angeblich überabzählbarer Mengen nachgewiesen werden[7].

Die Abzählbarkeit aller Tripel {M[RZ(0,1),]IT,P} ist als Aussage über die Mächtigkeit der Menge aller solcher Tripel, also auch der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, zu verstehen. Sie darf nicht als Möglichkeit einer tatsächlichen vollständigen Anordnung der

[5] vgl. "Das Münchhausen-Paradoxon" et al., http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/.
[6] Der eigentliche Kern der Überlegungen.
[7] vgl. "Ein Widerspruch in überabzählbaren Mengen" et al., http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/.

reellen Zahlen missverstanden werden[8]. Eine derartige Anordnung ist allein schon deshalb nicht möglich weil diese die Beurteilung aller möglichen Mitteilungen M durch alle möglichen Personen P in allen möglichen Zeitintervallen IT als bekannt voraussetzt. Die Kenntnis solcher Beurteilungen durch andere Personen PA bleibt dem Autor und dem Leser dieser Arbeit aber grundsätzlich versagt. Ganz abgesehen davon, dass jede mögliche Person nur Mitteilungen von endlichem Umfang zu lesen in der Lage sein kann. Dessen ungeachtet können derartige Mengen von jeder möglichen Person P schrittweise aufgebaut werden[9].

Einer tatsächlich vollständigen, also einer "actualen" Anordnung der reellen Zahlen stellt sich somit die Tatsache entgegen, dass zwar die Menge aller Tripel {M[RZ(0,1)],IT,P} abzählbar ist, die Tripel selbst aber nur "potentiell" sinnvoll sind. Sie können daher auch nur zu einer "potentiellen" nicht aber zu einer "actualen" Anordnung führen.

Es ist also nicht möglich, eine abzählbare Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 tatsächlich anzugeben. Aber als wesentliche Aussage verbleibt die Thesis: "Jeder Beweis der Existenz von Mengen mit einer Mächtigkeit $\aleph > \aleph_0$ enthält einen Widerspruch".

[8] Ein sehr häufiges Missverständnis.
[9] vgl. "Ein schrittweiser Aufbau des Kontinuums", http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/.

Ein Widerspruch in überabzählbaren Mengen

(Fassung April 2011)

Abstract

Es sei *M* eine beliebig definierte Menge von Elementen E. Im folgenden Beitrag wird für jede derartige Menge *M* eine abzählbare Anordnung AO{E[*M*]} aller Elemente E $\in$ *M* angegeben. In jedem angeblichen Beweis der Unvollständigkeit dieser Anordnung durch Beschreibung eines in ihr nicht enthaltenen Elementes kann ein Widerspruch nachgewiesen werden.

Die Überlegungen beruhen darauf, dass "alles worüber gesprochen werden kann" - und dazu gehören sicher alle oben erwähnten Elemente E - auch in die Form von schriftlichen Mitteilungen M gebracht werden kann. Alle möglichen derartigen Mitteilungen sind zwar unbegrenzt aber endlich. Gleiches gilt für die Zahl aller möglichen Leser P solcher Mitteilungen und für alle möglichen Zeitpunkte T der Interpretation von M durch P. Man verbleibt also immer im Bereich des Abzählbaren.

Beitrag

Ein bekanntes Beispiel einer überabzählbaren Menge ist das Kontinuum, eine Menge mit der Mächtigkeit der reellen Zahlen. Um die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zu zeigen verwendet man gerne das zweite Diagonalargument von Cantor. Wir beziehen uns im Weiteren auf die Menge der reellen Zahlen RZ[0,1] zwischen 0 und 1[1]. Cantor versucht zu beweisen, dass keine abzählbare Anordnung dieser Menge möglich ist. Zu jeder angeblich vollständigen abzählbaren Anordnung AO{RZ[0,1]} von RZ[0,1] könne eine reelle Zahl r zwischen 0 und 1 gefunden werden, die nicht in AO{RZ[0,1]} enthalten ist.

Cantor geht dabei von einer beliebigen abzählbaren Anordnung AO{RZ[0,1]} von reellen Zahlen $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots\ldots$ zwischen 0 und 1 aus. Diese schreibt man jeweils in der Form von unendlichen Dezimalzahlen $r_n = 0{,}r_{n1}r_{n2}\ldots r_{nn}\ldots\ldots$ an. Man bildet also das folgende Schema:

$$\begin{array}{ll}
r_1 = & 0{,}r_{11}r_{12}\ldots r_{1n}\ldots. \\
r_2 = & 0{,}r_{21}r_{22}\ldots r_{2n}\ldots. \\
\ldots & \ldots \\
r_n = & 0{,}r_{n1}r_{n2}\ldots r_{nn}\ldots. \\
\ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

Nun bildet man eine Zahl $d = 0{,}d_1d_2\ldots d_m\ldots.$ mit der Eigenschaft $\forall m$: $d_m \neq r_{mm}$. Diese "Diagonalzahl"[2] ist offenbar eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 und sie ist ungleich

---

[1] Die Zahlen 0 und 1 werden einbezogen.

[2] Sie wird durch die in der Diagonale des Schemas stehenden Zahlen bestimmt.

allen reellen Zahlen aus diesem Schema denn sie unterscheidet sich jeweils an der m^{ten} Dezimalstelle von r_m. Es gilt also $\forall m$: $d \neq r_m$ womit die Unvollständigkeit des Schemas und damit der Anordnung AO{RZ[0,1]} bewiesen erscheint.

Die Schwäche dieser Argumentation liegt darin, dass eine Diagonalzahl d erst dann als Beweis für die Unvollständigkeit von AO{RZ[0,1]} herangezogen werden darf, wenn alle ihre Dezimalstellen vollständig bekannt sind. Dies setzt aber voraus, dass entweder alle Dezimalstellen tatsächlich angeschrieben werden können - was nur für endlich viele Dezimalstellen möglich ist - oder dass die Bildungsvorschrift aller reellen Zahlen der Anordnung AO{RZ[0,1]} bekannt ist, wie dies etwa bei einer Anordnung aller rationalen Zahlen mit Hilfe des ersten Diagonalargumentes von Cantor der Fall ist. Jede Bildungsvorschrift für die Anordnung AO{RZ[0,1]} kann aber nur dann vollständig - das heißt für alle reellen Zahlen r_n aus AO{RZ[0,1]} - bekannt sein, wenn auch sie selbst durch eine endliche Beschreibung angegeben wird. Versucht man das zweite Diagonalargument anzuwenden ohne dass eine solche endliche Beschreibung vollständig vorliegt dann weiß man in keinem Zeitpunkt, in dem man über die Diagonalzahl spricht, worüber man überhaupt spricht.

Es wird dabei nämlich übersehen, dass die Bildungsvorschrift der Diagonalzahl selbst eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 in endlicher Form beschreibt. Ordnet man nun alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mit Hilfe der sie jeweils beschreibenden Bildungsgesetze an - eine Form der Anordnung die, wie wir zeigen werden, unschwer möglich ist - dann müsste für die Diagonalzahl d sowohl $d \in$ AO{RZ[0,1]} gelten, da d ja eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 ist, als auch $d \notin$ AO{RZ[0,1]}, da mit d ja gerade die Unvollständigkeit von AO{RZ[0,1]} gezeigt werden soll. Die Definition der Diagonalzahl enthält also einen Widerspruch.

Unserem Ziel, eine abzählbare Anordnung AO{RZ[0,1]} aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 anzugeben, steht weiter noch die Frage im Wege, in welcher Sprache die jeweiligen Argumentationen, Beschreibungen und Bildungsgesetze abgefasst werden sollen. Um dieses Problem zu lösen überlegen wir zunächst, welches die Aufgabe einer Sprache ist und was eine Sprache leisten kann. Dazu eine Definition aus Google: "Das Sprechen ist der Vorgang des vorwiegend auf zwischenmenschliche Interaktion ausgerichteten Gebrauchs der menschlichen Stimme wobei artikulierte Sprachlaute erzeugt werden". Eine analoge zwischenmenschliche Interaktion ermöglicht die Schrift und wir wollen uns hier auf schriftliche zwischenmenschliche Interaktionen beschränken. Unserer Ansicht nach ist damit der gesamte Bereich wissenschaftlicher Diskussionen, insbesondere philosophische Abhandlungen, mathematische Sätze, deren Beweise bzw. Widerlegungen etc., erfasst.

Zunächst suchen wir Rahmenbedingungen für alle möglichen zwischenmenschlichen Interaktionen aufzufinden. Dies gelingt etwa mit Hilfe der im Folgenden als "Mitteilungen vom Umfang n" bezeichneten graphischen Darstellungen. Eine

Mitteilung vom Umfang n sei ein quadratischer Raster bestehend aus n^2 Elementarquadraten der Seitenlänge 0,01 mm von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Ein solcher Raster kann z.B. ein Blatt Papier, eine Wandtafel, ein Monitor etc. bedeckt mit sichtbaren Zeichen sein. Unserer Ansicht nach umfasst die Menge dieser Mitteilungen M jedenfalls den oben angesprochenen Diskussionsbereich zur Gänze.

Im Weiteren ordnen wir alle Mitteilungen M vom Umfang n abzählbar an. Dazu ordnen wir einem weißen Elementarquadrat die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jene Ziffer, die dem Elementarquadrat in der Zeile j an der Stelle k zugeordnet wurde bezeichnen wir mit a_{jk}. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl $a(M) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Nun ordnen wir alle möglichen Mitteilungen zunächst in Gruppen nach ihrem Umfang n und anschließend innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) in einer Anordnung AO(M) abzählbar an.

Die Verwendung einer Mitteilung M für eine zwischenmenschliche Interaktion wie oben angesprochen setzt zweifellos voraus, dass es eine Person P gibt, welche M liest bzw. lesen könnte. Ob M für P tatsächlich eine Information bedeutet und falls ja welche kann grundsätzlich nur P selbst entscheiden. In unserem Fall sind zunächst vor allem jene Fälle von Interesse, in denen P sagt, "M stellt für mich eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei dar". Dabei ist es für uns gegenstandslos ob diese Aussage von P mit der Interpretation von M durch den Autor dieses Beitrages oder durch den Leser dieses Beitrages übereinstimmt oder nicht. Die Interpretation bleibt allein P überlassen.

Es hat zunächst den Anschein, als seien wir mit der Anordnung AO(M) aller möglichen Mitteilungen unserem Ziel einer abzählbaren Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 keinen Schritt näher gekommen, sind uns doch die Interpretationen von M durch eine von uns verschiedene Person P grundsätzlich unzugänglich. Ein Ausweg aus dieser Sackgasse kann aber darin gefunden werden, neben der Anordnung aller möglichen Mitteilungen M auch alle möglichen Interpretationen von M durch alle möglichen Personen P abzählbar anzuordnen.

Von einer tatsächlichen Interpretation einer Mitteilung M durch eine Person P kann nur dann gesprochen werden, wenn P die Mitteilung M tatsächlich liest. Von einer möglichen Interpretation wollen wir dann sprechen, wenn angenommen wird, dass auch ohne tatsächliches Lesen P dieser Interpretation von M zugestimmt hätte. Diese etwas hypothetische Formulierung wird es uns ermöglichen den eingangs angekündigten Widerspruch in Beweisen von angeblicher Unvollständigkeit abzählbarer Anordnungen zu zeigen.

Allerdings darf nicht übersehen werden, dass auch der Zeitpunkt der Interpretation von M durch P eine Rolle spielen kann. Die Person P könnte in einem Zeitpunkt über Informationen verfügen, die ihr in einem anderen Zeitpunkt nicht zur Verfügung stehen. Sie könnte etwa eine Sprache gelernt haben und damit einen anderen Zugang zu einer Mitteilung M haben als ohne Kenntnis dieser Sprache. Diesen Überlegungen trägt eine Anordnung aller möglichen Interpretationen von M Rechnung, die berücksichtigt, dass jede mögliche Interpretation jeder möglichen Mitteilung im Raum-Zeit-Universum stattfinden muss.

Dazu wählen wir ein Koordinatensystem im Raum-Zeit-Universum (drei Raumkoordinaten, eine Zeitkoordinate) und zerlegen es in Raum-Zeit-Elemente RZE. Ein Raum-Zeit-Element RZE sei ein (vierdimensionaler) Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm (drei Raumkoordinaten) und der Dauer 0,01 Sek. (eine Zeitkoordinate). Mit Hilfe des vorhin gewählten Koordinatensystems im Raum-Zeit-Universum lassen sich alle Elementarwürfel EW in einer abzählbaren Anordnung AO(EW) anordnen.

Bei jeder möglichen Interpretation einer Mitteilung M durch eine Person P können wir voraussetzen, dass der Lesevorgang eine gewisse Zeit dauert und P dabei im Raum ein gewisses Volumen einnimmt. Jede mögliche Interpretation erfordert daher ein gewisses Volumen im Raum-Zeit-Universum. Die Größe der Elementarwürfel EW wurde so klein gewählt, dass in jedem zu einer Interpretation erforderlichen Volumen Im Raum-Zeit-Universum sicher mindestens ein Elementarwürfel zur Gänze liegt. Durch diesen Elementarwürfel ist daher die Interpretation der Mitteilung M (dieser Lesevorgang) eindeutig gekennzeichnet. Da alle Elementarwürfel in AO(EW) abzählbar angeordnet werden können, lassen sich auch alle möglichen Interpretationen aller möglichen Mitteilungen in allen möglichen Zeitpunkten abzählbar anordnen.

Wir wenden nun diese Überlegungen zunächst auf die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 an. Dazu betrachten wir für jede mögliche Person P alle jene Mitteilungen M, welche in irgend einem Zeitpunkt T von P als eindeutige und widerspruchsfreie Darstellung einer reellen Zahl r zwischen 0 und 1 interpretiert werden. Man kann wegen der Abhängigkeit der Zahl r von M, P und T kurz r = r(M,P,T) schreiben. Wegen der Abzählbarkeit aller möglichen Personen und der Abzählbarkeit aller möglichen Interpretationen aller möglichen Mitteilungen M folgt daraus die Abzählbarkeit aller reellen Zahlen r(M,P,T) zwischen 0 und 1, also aller jener reellen Zahlen, die von irgend einer Person P bei der Interpretation der jeweiligen Mitteilung M in irgend einem Zeitpunkt T als durch M eindeutig und widerspruchsfrei dargestellt erklärt werden. Es sei AO[r(M,P,T)] die so erhaltene Anordnung.

Für jede reelle Zahl r(M,P,T) aus dieser Anordnung gibt es also eine Person P, für die in irgend einem Zeitpunkt T die Mitteilung M eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei darstellt. Wir wählen jetzt AO[r(M,P,T)] als die eingangs angesprochene "vollständige abzählbare Anordnung AO{RZ[0,1]}". und werden zeigen, dass jeder Versuch, mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor die Unvollständigkeit von AO[r(M,P,T)] zu zeigen, misslingt.

Der Kernpunkt der Cantor'schen Argumentation ist die Diagonalzahl d. Ihre Definition ist so gewählt, dass $\forall m$: $d_m \neq r_{mm}$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $\forall m$: $d \neq r_m$. Von einem Kritiker - nennen wir ihn als kritische Person PK - , der in irgendeinem Zeitpunkt TK behauptet, die Diagonalzahl d stelle eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei dar, verlangen wir, diese Behauptung in die Form einer Mitteilung MK zu bringen. Dann ist d = r(MK,PK,TK) eine reelle Zahl zwischen 0 und 1und es gilt daher d = r(MK,PK,TK) $\in$ AO[r(M,P,T)]. Es sei $r_1, r_2, ... r_m, ...$ diese Anordnung AO[r(M,P,T)] und $d = r_m$ stehe an m^{ter} Stelle. Dann gilt definitionsgemäß $d_m = r_{mm}$. Nach dem zweiten Diagonalargument von Cantor müsste also sowohl $d_m \neq r_{mm}$ sein, weil dies die Definition von d erfordert, als auch $d_m = r_{mm}$ gelten, weil r_{mm} die m^{te} Dezimalstelle von d_m ist und dies ist der angekündigte Widerspruch. Der Versuch, mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor die Unvollständigkeit der abzählbaren Anordnung AO[r(M,P,T)] der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zu zeigen, ist also misslungen.

Wir wollen nun die Abzählbarkeit beliebig definierter Mengen *M* von Elementen E zeigen. Wie vorhin bei den reellen Zahlen zwischen 0 und 1 betrachten wir für jede mögliche Person P alle jene Mitteilungen M, welche in irgend einem Zeitpunkt T von P als eindeutige und widerspruchsfreie Darstellung eines Elementes E aus *M* interpretiert werden. Man kann wegen der Abhängigkeit des Elementes E von M, P und T kurz E = E(M,P,T) schreiben. Wegen der Abzählbarkeit aller möglichen Personen P und der Abzählbarkeit aller möglichen Interpretationen aller möglichen Mitteilungen M folgt daraus die Abzählbarkeit aller Elemente E(M,P,T), die von irgend einer Person P bei der Interpretation der jeweiligen Mitteilung M in irgend einem Zeitpunkt T als durch M eindeutig und widerspruchsfrei dargestellt erklärt werden. Es sei AO[E(M,P,T)] die so erhaltene Anordnung.

Für jedes Element E(M,P,T) aus dieser Anordnung gibt es also irgend eine Person P, für die in irgend einem Zeitpunkt T die Mitteilung M ein Element E aus *M* eindeutig und widerspruchsfrei darstellt. Wir wählen jetzt AO[E(M,P,T)] als die eingangs angesprochene "abzählbare Anordnung AO[E(*M*)] aller Elemente E $\in$ *M*" und werden zeigen, dass jeder Versuch, die Unvollständigkeit von AO[E(M,P,T)] zu zeigen, misslingt.

Behauptet nämlich ein Kritiker PK in irgend einem Zeitpunkt TK, es gäbe ein Element EK aus *M*, welches nicht in AO[E(M,P,T)] enthalten ist, verlangen wir von ihm, diese Behauptung in die Form einer Mitteilung MK zu bringen. Stimmt die Behauptung des Kritikers PK, das Element EK sei nicht in AO[E(M,P,T)] enthalten, dann gilt EK $\notin$ AO[E(M,P,T)]. Stimmt seine Behauptung, MK stelle ein Element aus *M* eindeutig und widerspruchsfrei dar, dann gilt per Definitionem EK $\in$ AO[E(M,P,T)]. Damit ist der angekündigte Widerspruch gezeigt.

Zur Herstellung des Widerspruchs in allen Beweisen der Überabzählbarkeit beliebig definierter Mengen haben wir die Anordnung AO[E(M,T,P)] herangezogen. Sie beruht auf der Interpretation aller möglichen Mitteilungen M durch alle möglichen Personen P in allen möglichen Zeitpunkten T. Die einzelnen Elemente dieser Anordnung kann, wie erwähnt; weder der Autor noch irgend ein Leser dieses Beitrages tatsächlich angeben, sind ihm doch alle Interpretationen von Mitteilungen durch andere Personen grundsätzlich nicht zugänglich. Jeder Interpretation haftet das "Individuelle" der jeweiligen interpretierenden Person an. Es erscheint daher sinnvoll, für alle derartigen Anordnungen die Bezeichnung "Individualanordnung" anzuwenden.

Zum Abschluss noch ein Hinweis. Der Widerspruch bei der Anwendung des zweiten Diagonalargumentes von Cantor zum Nachweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen beruht auf einem Zirkelschluss. Ein Zirkelschluss ist der Versuch, eine Aussage zu beweisen, indem diese Aussage selbst als Voraussetzung verwendet wird. Cantor geht einerseits von einer beliebigen Anordnung AO[RZ(0,1)] reeller Zahlen zwischen 0 und 1 aus, argumentiert aber dann mit einer Diagonalzahl, die von jeder in AO[RZ(0,1)] enthaltenen reellen Zahlen verschieden sein muss. Dies kann aber nur dann der Fall sein, wenn tatsächlich jede Anordnung AO[RZ(0,1)] unvollständig, wenn also die reellen Zahlen tatsächlich überabzählbar wären. Die erst zu beweisende Überabzählbarkeit reeller Zahlen wird daher bei diesem Beweis bereits vorausgesetzt. Ein klassische Beispiel eines Zirkelschlusses.

Das Münchhausen-Paradoxon

Bekanntlich hat Münchhausen sich und sein im Sumpf versinkendes Pferd mit starkem Arm an seinem eigenen Zopf aus dem Sumpf gezogen. Dies wäre aber offensichtlich nur unter der Voraussetzung möglich gewesen, hätte der Freiherr einen fester Halt außerhalb des trügerischen Sumpfes gefunden. Tatsächlich musste er aber innerhalb des Sumpfes bleiben, so dass er keine derartige Stütze haben konnte.

Auch im Bereich logischer Schlussfolgerungen kann es geschehen, dass man versucht ist, Ketten von Schlussfolgerungen an Punkten festzumachen, die noch gar nicht zur Verfügung stehen. Dies führt dann zu Zirkelschlüssen. Ein anschauliches Beispiel eines derartigen Zirkelschlusses liefert das gern zum Beweis der Überabzählbarkeit des Kontinuums herangezogene zweite Diagonalargument von Cantor. Bei seiner Anwendung zum Nachweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen RZ(0,1) zwischen 0 und 1 geht man von einer **beliebigen abzählbaren Anordnung AO[RZ(0,1)]** von reellen Zahlen r_1, r_2, ... r_n, ... zwischen 0 und 1 aus und schreibt diese jeweils in der Form von unendlichen Dezimalzahlen $r_n = 0,r_{n1}r_{n2}...r_{nn}.....$ an. Anschließend bildet man mit Hilfe des Rasters der Zahlen r_n eine Zahl $d = 0,d_1d_2...d_m.....$ dergestalt, dass $\forall m$: $d_m \neq r_{mm}$. Daraus folgt $\forall n$: $d \neq r_n$ da die jeweils n^{te} Dezimalstelle von r_n ungleich der n^{ten} Dezimalstelle von d ist[1]. Zu jeder beliebigen abzählbaren Anordnung von reellen Zahlen zwischen 0 und 1 gibt es also eine in dieser Anordnung nicht enthaltene reelle Zahl d und diese Tatsache wird als Beweis der Überabzählbarkeit angenommen.

Naturgemäß spielt bei Fragen des Kontinuums und der Überabzählbarkeit der Begriff des Unendlichen eine entscheidende Rolle. Ein Beispiel liefert etwa die Menge der natürlichen Zahlen n. Zu jeder noch so großen natürlichen Zahl N kann durch Addition von 1 die größere Zahl N+1 gebildet werden und eine derartige schrittweise Ausweitung von endlichen Mengen natürlicher Zahlen findet kein Ende. Sie kann unendlich fortgesetzt werden. **Tatsächlich** angeben lassen sich zwar jeweils nur endlich viele n, ihre **mögliche** Anzahl ist aber unbegrenzt. Sie ist **aktual** endlich aber **potentiell** unendlich. Im Weiteren würden wir von einer **aktual unendlichen Menge** nur dann sprechen, wenn, wie bei endlichen Mengen, **jedes einzelne Element dieser Menge jederzeit tatsächlich angegeben werden kann.** Schon bei den natürlichen Zahlen ist das offenbar nicht der Fall.

Wir gehen zurück zur Diagonalzahl d aus dem zweiten Diagonalargument von Cantor. Sie bleibt unvollständig, solange nicht jede ihrer Dezimalstellen angegeben wird. Eine vollständige Angabe setzt aber voraus, dass entweder **alle Dezimalstellen tatsächlich angeschrieben werden können,** was nur für endlich viele Dezimalstellen möglich ist, oder dass **die Bildungsvorschrift aller reellen Zahlen der abzählbaren Anordnung AO[RZ(0,1)] bekannt ist,** wie dies etwa für eine Anordnung aller rationalen Zahlen mit Hilfe des ersten Diagonalargumentes von Cantor der Fall ist.

[1] Cantor setzt also voraus, dass **vor** der vollständigen Berechnung von d die abzählbare Anordnung AO[RZ(0,1)] bereits **vollständig** vorliegt.

Die Bildungsvorschrift für die Anordnung AO[RZ(0,1)] kann nur dann vollständig - das heißt für alle reellen Zahlen r_n aus AO[RZ(0,1)] - bekannt sein, wenn auch sie in endlicher Form, also etwa durch eine **endliche** Beschreibung, angegeben wird. Versucht man das zweite Diagonalargument anzuwenden, ohne dass eine solche endliche Beschreibung von AO[RZ(0,1)] vollständig vorliegt, **dann weiß man in keinem Zeitpunkt, in dem man über die Diagonalzahl spricht, worüber man überhaupt spricht.** Die für den Nachweis der Unvollständigkeit von AO[RZ(0,1)] notwendige Voraussetzung einer **aktual** vollständig vorliegenden Anordnung AO[RZ(0,1)] kann also nicht erfüllt werden.

Wir zeigen nun, wie das zweite Diagonalargument zum erwähnten Widerspruch führt. Dazu bringen wir zunächst Ordnung in **alle möglichen Bildungsvorschriften von Anordnungen reeller Zahlen RZ(0,1) zwischen 0 und 1.** Dabei verwenden wir den Begriff **"Mitteilungen M vom Umfang n".** Eine Mitteilung M vom Umfang n sei ein quadratischer Raster, bestehend aus n^2 **Elementarquadraten** der Seitenlänge 0,01 mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist, und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit a_{jk}. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl $a(M) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Im Weiteren fassen wir alle Mitteilungen M vom Umfang n zuerst in Gruppen nach ihrem Umfang n und anschließend innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) in einer **Anordnung AO(M)** abzählbar an. Offenbar lassen sich alle möglichen **endlichen** Bildungsvorschriften von Anordnungen reeller Zahlen zwischen 0 und 1 durch solche Mitteilungen M vom Umfang n eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben. Konkret können wir uns unter einer solchen Mitteilung M ein quadratisches weißes Papier oder einen quadratischen Bildschirm, jeweils mit der Seitenlänge $^{n}/_{100}$ mm, vorstellen, auf dem schwarze Zeichen (Schriftzeichen, Formeln etc.) angebracht sind. Wie man sieht lassen sich mit Hilfe solcher Mitteilungen alle nur möglichen schriftlichen Informationen ausdrücken.

Im Weiteren suchen wir der Reihe nach in den Mitteilungen M aus den Anordnungen AO(M) nach solchen Mitteilungen M = M[RZ(0,1)], durch die reelle Zahlen zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden. Diese Suche bewegt sich wie auch das Abzählen natürlicher Zahlen zwar im potentiell Unendlichen, bleibt aber doch stets im Endlichen. Da alle möglichen Mitteilungen M in der Anordnung AO(M) abzählbar angeordnet werden können und alle reellen Zahlen RZ(0,1), die unsere Durchsuchung der Anordnungen zu Tage fördert, durch mindestens eine Mitteilung M = M[RZ(0,1)] eindeutig und widerspruchsfrei dargestellt wird, können alle bei der Durchsuchung gefundenen reellen Zahlen RZ(0,1) in einer **Anordnung AO[RZ(0,1)]** abzählbar angeordnet werden.

Jeder Kritiker, der die Unvollständigkeit von AO[RZ(0,1)] mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor durch die Bildung einer angeblich in AO[RZ(0,1)] nicht enthaltenen Diagonalzahl d beweisen will, muss diese Diagonalzahl jedenfalls **durch eine "kritische" Mitteilung MK eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben**

können. Der Kritiker behauptet dann offenbar **d ∉ AO[RZ(0,1)],** denn die durch MK beschriebene Diagonalzahl d soll ja gerade die Unvollständigkeit von AO[RZ(0,1)] beweisen. Andererseits enthält die Anordnung AO[RZ(0,1)] per definitionem **alle** durch eine Mitteilung M eindeutig und widerspruchsfrei beschreibbaren reellen Zahlen RZ(0,1). Die Vorschrift zur Konstruktion der Diagonalzahl d mit Hilfe des zweiten Diagonalargumentes von Cantor wird aber offenbar selbst durch die kritische Mitteilung MK eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben. Nach der Definition von AO[RZ(0,1)] gilt daher **d ∈ AO[RZ(0,1)]** im Widerspruch zur Behauptung des Kritikers. Damit ist der oben angekündigte Widerspruch hergeleitet.

Der Zirkelschluss des Kritikers beruht darauf, dass er von einer beliebigen abzählbaren Anordnung AO[RZ(0,1)] ausgeht und dabei nicht zwischen potentiell unendlichen und aktual unendlichen Mengen reeller Zahlen unterscheidet. Bleibt er bei der zugrunde gelegten Anordnung AO[RZ(0,1)] im nur potentiell unendlichen Bereich, dann führt seine Argumentation zum eben hergeleiteten Widerspruch. Einen solchen kann er nur vermeiden, wenn er AO[RZ(0,1)] als aktual unendlich voraussetzt. In diesem Fall kann aber die Diagonalzahl d in keinem Zeitpunkt vollständig angegeben werden, da der Kritiker keine Bildungsvorschrift für AO[RZ(0,1)] im aktual Unendlichen angeben kann. Eine solche Bildungsvorschrift würde aktual unendliche und nicht nur potentiell unendliche Mitteilungen M erfordern. Die Anwendung des Diagonalargumentes durch den Kritiker impliziert daher bereits eine aktual unendliche Anordnung AO[RZ(0,1)], womit der Zirkelschluss vollzogen ist. Der Versuch, die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 durch die Angabe einer von keiner Mitteilung M aus der Menge aller Mitteilungen M = M[RZ(0,1)] eindeutig und widerspruchsfrei beschriebenen reellen Zahl RZ(0,1) zwischen 0 und 1 zu beweisen, ist also fehlgeschlagen.

Wir wenden im Folgenden die gleichen Überlegungen auf beliebige angeblich überabzählbare Mengen von Elementen E an. Es sei also eine beliebig definierte Menge $\mathcal{M}$ von Elementen E gegeben. Bei $\mathcal{M}$ kann es sich um die eben behandelte Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 handeln, um die Menge der einstelligen ganzzahligen Funktionen, um die Potenzmenge der natürlichen Zahlen oder welche Menge auch immer. Nun suchen wir wie vorhin der Reihe nach in den Mitteilungen M aus der Anordnung AO(M) nach solchen Mitteilungen M = M{$\mathcal{M}$}, durch die Elemente E ∈ $\mathcal{M}$ eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden. Auch diese Suche bewegt sich wieder zwar im potentiell Unendlichen, bleibt aber doch stets im Endlichen. Da alle möglichen Mitteilungen M in der Anordnung AO(M) abzählbar angeordnet werden können und alle Elemente E = E{$\mathcal{M}$} ∈ $\mathcal{M}$, die unsere Durchsuchung der Anordnung zu Tage fördert, durch mindestens eine Mitteilung M = M{$\mathcal{M}$} eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden, können alle bei der Durchsuchung gefundenen Elemente E in einer Anordnung AO{E[$\mathcal{M}$]} abzählbar angeordnet werden. **Angebliche Beweise der Überabzählbarkeit der Elemente E = E{$\mathcal{M}$} führen also entweder zu einem Widerspruch oder sie beruhen auf der Voraussetzung einer vor der Beweisführung zugrundegelegten aktual unendlichen Anordnung.**

Vorbemerkung

Eine conditio sine qua non zum Verständnis der folgenden Arbeit ist das Verstehen der ersten Fußnote.

Fassung Februar 2011

Man kann über alles reden. Kann man über alles reden?

Den Ausdruck "reden" wollen wir hier im Sinne von "sprechen" verstanden wissen. Dazu eine Definition aus Google: "Das **Sprechen** ist der Vorgang des vorwiegend auf zwischenmenschliche Interaktion ausgerichteten Gebrauchs der menschlichen Stimme, wobei artikulierte Sprachlaute erzeugt werden." Eine analoge zwischenmenschliche Interaktion ermöglicht die **Schrift**. Wir wollen uns in dieser Arbeit auf schriftliche zwischenmenschliche Interaktionen beschränken. Unserer Ansicht nach ist damit der gesamte Bereich wissenschaftlicher Diskussionen, insbesondere philosophische Abhandlungen, mathematische Sätze, deren Beweise bzw. Widerlegungen, erfasst.

Unsere erste Aufgabe sei, Rahmenbedingungen für **alle möglichen zwischenmenschlichen Interaktionen** aufzufinden. Solche Rahmenbedingungen finden wir mit Hilfe der im Folgenden als **Mitteilungen M vom Umfang n** bezeichneten Darstellungen. Eine Mitteilung M vom Umfang n sei ein quadratischer Raster, bestehend aus n^2 **Elementarquadraten** der Seitenlänge 0,01 mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist und die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Ein solcher Raster kann z.B. ein Blatt Papier, eine Wandtafel, ein Monitor etc. sein, auf dem sichtbare Zeichen angebracht sind. Unserer Ansicht nach umfasst die Menge dieser Mitteilungen M den im obigen Absatz angesprochenen Diskussionsbereich zur Gänze.

Im Weiteren ordnen wir alle Mitteilungen M vom Umfang n abzählbar an. Dazu ordnen wir einem weißen Elementarquadrat die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit a_{jk}. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl a(M) = $0,a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Alle möglichen Mitteilungen M ordnen wir nun zunächst in Gruppen nach ihrem Umfang n und anschließend innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) in einer **Anordnung AO(M)** abzählbar an.

Ziel jeder Mittelung ist die Übermittlung von **Information**, insbesondere im Zuge zwischenmenschlicher Interaktion gemäß dem obigen ersten Absatz. Eine unabdingbare Voraussetzung dafür ist es, dass der Leser der Mitteilung deren Inhalt versteht, deren **Sinn erfasst.** Eine Mitteilung M ist **für sich allein genommen sinnlos.** Erst durch eine sie lesende Person P kann sie einen **Sinn** gewinnen und zwar gerade und nur für diese Person. Für jeden anderen Leser kann sie einen völlig anderen Sinn haben oder auch sinnlos sein. Eine Mitteilung in Chinesischer Schrift ist etwa für den Autor dieser Arbeit ohne Sinn, da er des Chinesischen nicht mächtig ist.

Hat eine Mitteilung M für eine lesende Person P einen Sinn, dann darf man wohl sagen, dieser Sinn ist ein Objekt des Denkens von P. Wir können ihn als von P und M abhängiges **Denkobjekt** ansehen und mit **DO(P,M)** bezeichnen.

Wir wollen nun alle möglichen Denkobjekte abzählbar anordnen. Alle möglichen Mitteilungen haben wir bereits in AO(M) abzählbar angeordnet. Um alle möglichen Denkobjekte abzählbar anzuordnen müssen wir nur noch versuchen, alle möglichen Personen P anzuordnen. Dazu wählen wir ein Koordinatensystem im Raum-Zeit-Universum (drei Raumkoordinaten, eine Zeitkoordinate) und zerlegen es in Raum-Zeit-Elemente RZE. Ein Raum-Zeit-Element RZE sei ein (vierdimensionaler) **Elementarwürfel EW** der Seitenlänge 0,01 mm (drei Raumkoordinaten) und der Dauer 0,01 Sek. (eine Zeitkoordinate). Mit Hilfe des vorhin gewählten Koordinatensystems im Raum-Zeit-Universum lassen sich alle Elementarwürfel EW in einer **abzählbaren Anordnung AO(EW)** anordnen. Die Raumkoordinaten dieser Anordnung werden die Grundlage für die von uns gewünschte abzählbare Anordnung aller möglichen Personen P bilden.

Von einem Denkobjekt, dem Sinn einer Mitteilung M für eine Person P, kann nur gesprochen werden, wenn diese Person P die Mitteilung M tatsächlich liest. Von einem möglichen Denkobjekt sprechen wir, wenn eine Person P dieses Denkobjekt als Sinn einer Mitteilung M dann bezeichnet hätte, falls sie diese Mitteilung M tatsächlich gelesen hätte. Diesen von P und M abhängigen fiktiven Lesevorgang **L(P,M**) spielen wir für alle möglichen Mitteilungen M durch. Wir fragen also, welchen Sinn hätte die Mitteilung M für die Person P, falls diese M tatsächlich liest. Daraus ergäben sich mögliche Denkobjekte **DO[L(P,M)].**

Allerdings darf nicht übersehen werden, dass auch der Zeitpunkt des Lesevorganges eine Rolle spielen kann. Die Person P könnte in einem Zeitpunkt über Informationen verfügen, die ihr in einem anderen Zeitpunkt nicht zur Verfügung stehen. Sie könnte etwa eine Sprache gelernt haben und damit einen anderen Zugang zu einer Mitteilung M haben als ohne Kenntnis dieser Sprache. Ein anderes Beispiel wäre der Buchstabe i als Mitteilung M, der je nach dem Umfeld, in dem der Sinn von M gefragt ist, als Teil eines Wortes, als Index, als Zinsrate oder was auch immer verstanden werden und damit unterschiedliche Denkobjekte darstellen kann.

Diesen Überlegungen trägt eine Anordnung aller möglichen Denkobjekte Rechnung, die auf der oben eingeführten Anordnung AO(EW) beruht. Dabei gehen wir davon aus, dass in jedem Raum-Zeit-Volumen, das irgendeine mögliche Person P während irgendeines möglichen Lesevorganges L(P,M) einnimmt, mindestens ein Elementarwürfel EW = **EW[L(P,M)]** zur Gänze liegt. Im Körper der Person P ist genügend Platz für die drei Raumkoordinaten eines Elementarwürfels und die Dauer des Lesevorganges kann jedenfalls als lang genug angenommen werden, damit die Seitenlänge der Zeitkoordinate eines Elementarwürfels Platz findet. Ein so definierter vierdimensionaler Elementarwürfel EW[L(P,M)] kennzeichnet daher den Lesevorgang eindeutig.

Wir wählen nun aus der Anordnung AO(EW) aller Elementarwürfel EW jene EW[L(P,M)] aus, die ein Denkobjekt DO[L(P,M)] eindeutig kennzeichnen. Als Untermenge der Anordnung AO(EW) können diese EW[L(P,M)] abzählbar angeordnet werden und in dieser Reihenfolge ordnen wir die durch EW[L(P,M)] eindeutig gekennzeichneten Denkobjekte DO[L(P,M)], das sind alle möglichen Denkobjekte, in einer Anordnung **AO[DO(P,M)]** abzählbar an. Wegen der Personenbezogenheit dieser Anordnung nennen wir sie **Individualanordnung.** Es handelt sich also um eine abzählbare Anordnung alles Denkbaren.

Aus der Individualanordnung folgt nicht mehr und nicht weniger als dass es keinen widerspruchsfreien Beweis für die Überabzählbarkeit einer Menge geben kann, der darin besteht, ein Element dieser Menge **anzugeben**, das in der Individualanordnung AO[DO(P,M)] nicht enthalten ist. Ein solcher Beweis wird bekanntlich immer wieder mit Hilfe des zweiten Cantor'schen Diagonalargumentes versucht[1]. Wer einen solchen Einwand erhebt, bezeichnen wir ihn als **kritische Person PK**, behauptet also, er könne (mindestens) ein **kritisches Denkobjekt DOK angeben**, das in AO[DO(P,M)] nicht enthalten ist. Dieser Einwand kann folgendermaßen widerlegt werden:

Von PK verlange ich zunächst, er möge mir dieses DOK mitteilen und zwar durch eine wie immer gestaltete Mitteilung M. In der Praxis kann dies im Rahmen des Austausches von E-mails geschehen. Kommt PK diesem Wunsch nach, so bezeichne ich diese seine "kritische" Mitteilung als MK. Der Kritiker PK behauptet also, das durch die Mitteilung MK beschriebene Denkobjekt DOK sei in der Individualanordnung AO[DO(P,M)] nicht enthalten. Er behauptet somit: DOK $\notin$ AO[DO(P,M)]. Andererseits gehört DOK für PK zu den Denkobjekten, denn durch sein Fehlen in der Individualanordnung AO[DO(P,M)] will PK gerade deren Unvollständigkeit beweisen. PK behauptet also gleichzeitig auch DOK $\in$ AO[DO(P,M)] und diese beiden Behauptungen stehen im Widerspruch zu einander. Die bloße Behauptung der Unvollständigkeit der Individualanordnung AO[DO(P,M)] führt also zusammen mit der Angabe eines in AO[DO(P,M)] nicht enthaltenen Denkobjektes zu dem oben angekündigten Widerspruch im Unvollständigkeitsbeweis des Kritikers PK.

Der Titel dieser Arbeit enthält die Behauptung, man könne über alles reden. Diese Behauptung wird durch den eben hergeleiteten Widerspruch nicht widerlegt. Wir haben eben über das Kritische Denkobjekt DOK "geredet". Wie im ersten Absatz angesprochen, wollen wir aber den gesamten Bereich wissenschaftlicher Diskussionen etc. umfassen. Dafür erscheint es gerechtfertigt und notwendig, **widersprüchliche** Argumente, Beweise etc. auszuschließen. **Wir verlangen daher - unserer Ansicht nach ohne Beschränkung der Allgemeinheit - widerspruchsfreie Beweise**. Lie-

[1] Cantor verwendet einen Zirkelschluss. Für das Kontinuum der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 setzt sein Dezimalzahlenschema für die Ermittlung einer Diagonalzahl bereits aktual unendlich viele im Schema angeschriebene reelle Zahlen zwischen 0 und 1 voraus

ße man hingegen Widersprüche zu, wie etwa den Begriff "Die Menge aller Mengen mit bestimmten Eigenschaften", erweitert man zwar der Bereich dessen "worüber man reden kann" aber ohne brauchbaren Gewinn für wissenschaftliche Diskussionen. Eine Anwendung dieser Überlegungen auf die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 ist in der Arbeit "Ein schrittweiser Aufbau des Kontinuums"[2] zu finden.

Zum Abschluss zurück zur Überschrift. **Man kann über alles reden aber man kann nicht über alles widerspruchsfrei reden.**

[2] www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/

Schrittweiser Aufbau des Kontinuums

"Wenn es möglich gewesen wäre, den Turm von Babel zu erbauen, ohne ihn zu erklettern, es wäre erlaubt worden." Dieser Aphorismus von Franz Kafka entspricht genau dem potentiell Unendlichen der Menge der natürlichen Zahlen.

Die Menge MN der natürlichen Zahlen ist wohl das einfachste Beispiel für einen schrittweisen Aufbau einer potentiell unendlichen Menge. Ein solcher Schritt besteht dabei in der Addition von 1 zu einer beliebigen Zahl n. Mit 1 beginnend kann durch Aneinanderreihen von endlich aber unbegrenzt vielen Schritten die gesamte Menge MN aufgebaut werden. Freilich werden auch nach noch so vielen Schritten immer nur endlich viele natürliche Zahlen erreicht, während stets unendlich viele unerreicht bleiben. Trotzdem sind grundsätzlich alle natürlichen Zahlen der potentiell unendlichen Menge MN erreichbar. Man kann sagen, die gesamte potentiell unendliche Menge MN kann schrittweise aufgebaut werden. Dass man diese Menge abzählbar anordnen kann, ist trivial.

Von den natürlichen Zahlen ausgehend können schrittweise weitere Zahlenklassen eingeführt werden. Wählen wir als nächsten Schritt beispielsweise die Menge MR der rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$, gebildet aus natürlichen Zahlen m und n. Dass auch MR abzählbar angeordnet werden kann, ist zwar nicht trivial aber leicht zu zeigen.

Die Zahlen $\frac{m}{n}$ liegen überall dicht. Trotzdem gibt es ausreichend "Zwischenräume" um neue Zahlenklassen einzuführen. Wählen wir als nächsten Schritt beispielsweise die Menge MA der algebraischen Zahlen. Auch für sie steht in den "Zwischenräumen" der Zahlen aus MR genügend Platz zur Verfügung und auch für sie kann unschwer eine abzählbare Anordnung angegeben werden.

Die Erweiterungen der Zahlenklasse MN durch den Schritt zu MR und den weiteren Schritt zu MA sind nur zwei willkürlich gewählte Erweiterungsschritte. Ebenso gut hätten wir MN durch die einzige Zahl ½ erweitern können. Die Abzählbarkeit bliebe trivialerweise gegeben. Analog wären die Einbeziehung der Zahl $\sqrt{2}$ in MN bzw. in MR Erweiterungsschritte, welche die Abzählbarkeit erhalten. Man bleibt dabei aber immer noch im Zahlenbereich MA.

Den Übergang von MN zu MR haben wir vorhin in einem einzigen Schritt vorgenommen. Genauso gut hätten wir dazu auch abzählbar viele Einzelschritt durch Erweiterung von MN durch jede einzelne rationale Zahl $\frac{m}{n}$ verwenden können. Die Möglichkeiten, von MN zu MR zu gelangen erscheinen schon sehr komplex. Gleiches gilt für den Übergang von MN oder MR zu MA. Wesentlich komplexer gestaltet sich das Erweiterungsproblem, wenn man willkürlich definierte neue Zahlenklassen einbezieht. Ein Beispiel wären reelle Zahlen, nennen wir sie ε-Zahlen r_ε, mit folgender Eigenschaft: Es gilt stets $r_\varepsilon > r$ und für alle reellen Zahlen $r^+ > r$ gilt $r_\varepsilon < r^+$. Durch Erweiterung solcher Zahlenklassen um $\varepsilon\varepsilon$-Zahlen $r_{\varepsilon\varepsilon}$ etc. wird die neue Zahlenklasse schon recht unübersichtlich.

Ein anderes Problem mit den Erweiterungen hätten die Intuitionisten. Dazu ein Beispiel. Im Zusammenhang mit dem "tertium non datur" wurde eine reelle Zahl folgendermaßen definiert: $r = 0{,}a_1a_2a_3.....$ und zur Definition von a_n dient die Folge $\Psi(n) = 2n + 1$ der ungeraden natürlichen Zahlen > 1. Ein bekanntes zahlentheoretisches Problem war die Frage, ob diese Folge nur nichtvollkommene Zahlen enthält oder ob in ihr auch vollkommene Zahlen auftreten. Mit Hilfe dieser Folge wird nun $a_n = 0$ gesetzt, wenn $\Psi(n)$ nichtvollkommen ist und $a_n = 1$ gesetzt, wenn $\Psi(n)$ vollkommen ist. Man weiß nun nicht, ob $r = 0$ oder $r > 0$ ist, auch wenn man praktisch $r < \varepsilon$ für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ zeigen kann. Für den Intuitionisten ist r weder gleich Null noch größer als Null. Das tertium non datur gilt nicht und es bleibt offen, ob r tatsächlich eine reelle Zahl ist.

Von der Menge der algebraischen Zahlen MA ausgehend können schrittweise neue Zahlenklassen aus dem transzendenten Bereich eingeführt werden. Dazu genügt es bereits, eine einzige transzendente Zahl, etwa π, einzubeziehen und in gleicher Weise wie eine natürliche Zahl zur Bildung algebraischer Zahlen zu verwenden. Ganze Klassen neuer Zahlen erhält man z.B. durch Hinzufügen von Grenzwerten mit "$n \to \infty$" wie unendliche Summen $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ oder unendliche Produkte $\prod_{n=1}^{\infty} f(n)$. Damit wird etwa das Produkt von Wallis: $\frac{\pi}{2} = \prod_1^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$ einbezogen. Trotz des "Überall dicht Liegens" der Zahlen aus MA ist stets unbegrenzt Platz für neue Zahlen. Innerhalb jeder neuen Zahlenklasse können die in ihr enthaltenen Zahlen in einer klassenbezogenen Reihenfolge unschwer abzählbar angeordnet werden. Es lässt sich erkennen, dass eine solche klassenbezogene Abzählbarkeit jedenfalls dann gewährleistet ist, wenn ein Erweiterungsschritt jeweils nur eine neue Zahl einbezieht.

Wir betrachten nun alle durch schrittweise Erweiterung von MA erreichbaren Zahlen und behaupten, durch diese werde das Kontinuum vollkommen ausgeschöpft. Um dies zu zeigen, führen wir zunächst eine abzählbare Anordnung aller möglichen Objekte unseres Denkens ein.

Eine der ersten Barrieren, auf die wir bei diesem Vorhaben stoßen, ist die Frage, welchen Zugang zu "allen möglichen Objekten unseres Denkens" wir eigentlich haben. Jeder Mensch kann bestenfalls alle möglichen Objekte seines eigenen Denkens untersuchen. Zu Objekten des Denkens eines anderen Menschen hat er keinen Zugang. Dies führt uns sofort zu der altbekannten Frage, wie übereinstimmende Urteile verschiedener Personen überhaupt zustande kommen können. Der Autor ist überzeugt, dass die Richtigkeit der Aussage: "1 + 1 = 2" vom jeweiligen Leser dieser Arbeit bestätigt würde. Die Frage ist nur: Wie kommt er zu dieser Überzeugung?

Diese Frage führt in die Erkenntnistheorie. Eine ausführlichere Behandlung des Themas würd den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher nur so viel: Wenn wir in der Praxis immer davon ausgehen, es gäbe absolute Wahrheiten, also Urteile, die von allen Menschen stets in gleicher Weise gefällt werden, so hängt das mit der Gleichartigkeit unserer Erfahrungen, unserer Sprachentwicklung und (ganz wesentlich) unserer Sinnesorgane zusammen. Beispiele für letzteres sind etwa die Kant'schen Kategorien oder die zu Widersprüchen führenden anschaulichen Vorstellungen von den Elementarteilchen.

In diesem Sinne erscheint auch die Trennung von Naturwissenschaften und Geisteswissenschaften der Problematik nicht angemessen. Was dem Naturwissenschaftler die Bestätigung oder Widerlegung eines Denkmodells durch ein Experiment ist dem Geisteswissenschaftler die Widerlegung einer Annahme durch die Erzeugung eines Widerspruches. Die Analogie zur "Bestätigung" wird von den Geisteswissenschaftlern immer wieder gesucht, manch einer glaubt sie gefunden zu haben, wenn ihm die Richtigkeit einer Annahme als "evident" erscheint. Aber man ist dabei, wie die Erfahrung etwa in der naiven Mengenlehre zeigt, vor Irrtümern nicht gefeit. Viel Arbeit wurde und wird in Versuche gesteckt, die Widerspruchsfreiheit von Teilbereichen der Mathematik nachzuweisen, vielfach mit keinem anderen Erfolg, als zu zeigen: Wenn der Bereich B_1 widerspruchsfrei ist, dann auch der Bereich B_2. Die Falsifizierung leistet eben doch mehr als die Verifizierung.
Trotz der Problematik jeder Allgemeingültigkeit von "wahr" oder "falsch" wollen wir uns der Behandlung dieser Fragen zuwenden und zwar, um unterschiedlichen Ansichten verschiedener Personen über Richtigkeit oder Unrichtigkeit von Aussagen Rechnung zu tragen, in dem wir selbst uns jedes Urteils enthalten und nur die Meinung jeder jeweils in Frage kommenden Person protokollieren. Damit relativieren wir den Begriff "Wahrheit" und sind selbst nur mehr neutraler Beobachter. Dafür müssen wir aber prüfen, wie ein solches Protokoll aussehen müsste.

Jedes Protokoll muss Informationen enthalten, die in einer "Sprache" abgefasst sind. Um den Schwierigkeiten zu entgehen, die der Begriff einer allgemeingültigen Sprache mit sich bringen muss, wollen wir für jede Sprache verwendbare "Mitteilungen M" einführen, die wir folgendermaßen definieren: Eine Mitteilung M vom Umfang n ist ein quadratischer Raster, bestehend aus n^2 "Elementarquadraten" der Seitenlänge 0,01 mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist. Ein solcher Raster kann z.B. ein Blatt Papier, eine Wandtafel, ein Monitor etc. sein, auf dem sichtbare Zeichen angebracht sind. Die Beschränkung auf schriftlich formulierte Mitteilungen stellt bei dieser Definition der zugelassenen Informationen keine Beschränkung der Allgemeinheit dar. Wir erinnern daran, dass von allen mathematischen Sätzen, Beweisen, Theorien etc. stets eine schriftliche Darstellung verlangt wird.

Wir wollen nun alle möglichen Mitteilungen M abzählbar anordnen. Jede Mitteilung vom Umfang n besteht aus n^2 Elementarquadraten, die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Jedes dieser Elementarquadrate ist entweder weiß oder schwarz.

Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit EQ_{jk} und die zugeordnete Ziffer (1 oder 2) mit a_{jk}. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl $a(M) = 0,a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Alle möglichen Mitteilungen M ordnen wir nun zunächst in Gruppen nach ihrem Umfang n und anschließend innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) in einer Anordnung AO(M) abzählbar an.

Eine solche Mitteilung M ist für sich allein genommen "sinnlos". Sie ist ein physikalisches Objekt, ein Blatt Papier, eine Wandtafel, ein Monitor etc. Eine Seite Chinesischer Schriftzeichen ist etwa für den Autor ohne Sinn, da er dieser Sprache bzw. dieser Schrift nicht mächtig ist. Nur durch eine Person P, welche eine Mitteilung M liest und versteht, kann M einen "Sinn" gewinnen und zwar gerade und nur für diese Person P. Ein solcher durch einen Lesevorgang entstandene Sinn ist dann offenbar ein Objekt des Denkens von P. Wir können ihn als von P und M abhängiges Denkobjekt ansehen und mit DO(P,M) bezeichnen.

Wir setzen daher zunächst fort mit einer abzählbaren Anordnung aller möglichen Lesevorgänge. Dabei gehen wir davon aus, dass jede mögliche Person im Zeitpunkt jedes möglichen Lesevorganges L(P) ein gewisses Mindestvolumen im Raum einnimmt und für den Lesevorgang eine gewisse Mindestzeit benötigt. Die Einbeziehung der Zeit ist deshalb notwendig, weil eine Mitteilung M für P in verschiedenen Zeitpunkten unterschiedlichen Sinn haben kann. P kann in einem Zeitpunkt über Wissen verfügen, das ihm in einem anderen Zeitpunkt nicht zur Verfügung steht. Daher muss auch der Zeitpunkt einer möglichen Aussage von P über den Sinn von M in die Überlegungen einfließen.

Nun wählen wir ein Koordinatensystem im Raum-Zeit-Universum (drei Raumkoordinaten und eine Zeitkoordinate) und zerlegen es in Raum-Zeit-Elemente RZE. Ein Raum-Zeit-Element RZE sei ein (vierdimensionaler) Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm (drei Raumkoordinaten) und der Dauer 0,01 Sek. (eine Zeitkoordinate). Mit dem vorhin gewählten Koordinatensystems im Raum-Zeit-Universum lassen sich alle Elementarwürfel EW in einer Anordnung AO(EW) abzählbar anordnen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass in jenem Raum-Zeit-Volumen, das irgendeine mögliche Person P währen irgendeines möglichen Lesevorganges L(P) einnimmt, mindestens ein Elementarwürfel EW[L(P)] zur Gänze liegt. Dieser Elementarwürfel kennzeichnet daher den Lesevorgang L(P) eindeutig. Mit Hilfe der abzählbaren Anordnung AO(EW) aller Elementarwürfel lassen sich alle möglichen Lesevorgänge L(P), die ja jeweils durch mindestens einen EW eindeutig gekennzeichnet sind, abzählbar anordnen. Wir bezeichnen diese abzählbare Anordnung aller möglichen Lesevorgänge mit AO[L(P)].

Wir beenden unsere Ordnungsstruktur mit der abzählbaren Anordnung aller möglichen Denkobjekte DO. Als "Denkobjekt" haben wir den "Sinn" bezeichnet, den eine

"Mitteilung M" für eine "Person P" hat, welche diese Mitteilung liest. Jedes mögliche Denkobjekt DO hat daher eine mögliche Mitteilung M und einen möglichen Lesevorgang L(P) zur Voraussetzung, die zusammen dieses Denkobjekt eindeutig kennzeichnen. Alle möglichen Mitteilungen M sind in AO(M) abzählbar angeordnet, alle möglichen Lesevorgänge L(P) in AO[L(P)]. Aus AO(M) und AO[L(P)] erhält man daher eine abzählbare Anordnung AO[DO(P,M)] aller möglichen Denkobjekte. Wegen ihrer Personenbezogenheit nennen wir sie "Individualanordnung".

Tatsächlich handelt es sich hier um eine abzählbare Anordnung alles Denkbaren. Ist aber alles Denkbare abzählbar, dann gilt dies auch für beliebige Mengen beliebig definierter Elemente. Als Beispiel dienen etwa die reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Diese Zahlenmeng wird üblicherweise als "überabzählbar" angesehen. Als bekannte Begründung dafür wird oft das zweite Diagonal-Argument von Cantor angeführt. Im Folgenden eine Darstellung: Es sei r_1, r_2, ... r_n, ... eine beliebige Anordnung reeller Zahlen zwischen 0 und 1. Man stellt nun jede dieser Zahlen als Dezimalzahl $r_n = 0{,}r_{n1}r_{n2}...r_{nn}.....$ dar und bildet das folgende Schema:

$$\begin{array}{l} r_1 = 0{,}r_{11}r_{12}...r_{1n}.... \\ r_2 = 0{,}r_{21}r_{22}...r_{2n}.... \\ \quad . \qquad\quad . \\ r_n = 0{,}r_{n1}r_{n2}...r_{nn}.... \\ \quad . \qquad\quad . \\ \quad . \qquad\quad . \end{array}$$

Nun bildet man eine Zahl $d = 0{,}d_1d_2...d_n....$ mit $\forall m$: $d_m \neq r_{mm}$. Diese "Diagonalzahl von Cantor" ist offenbar eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 und sie ist ungleich allen reellen Zahlen aus dem Schema denn sie unterscheidet sich jeweils an der n^{ten} Dezimalstelle von r_n. Dies sind die im Schema in der Diagonale stehenden Stellen, daher der Name. Es gilt also $\forall n$: $d \neq r_n$ womit die Unvollständigkeit des Schemas bewiesen scheint.

Wir werden nun aus der Menge RZ(0,1), den reellen Zahlen zwischen 0 und 1, mit Hilfe der Anordnung AO[DO(P,M)] aller möglichen Denkobjekte - wie jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 zweifellos eines ist - eine Anordnung bilden, bei der das zweite Diagonal-Argument von Cantor versagt. Dazu gehen wir schrittweise alle Denkobjekte aus der Anordnung AO[DO(P,M)] durch. Die erste reelle Zahl zwischen 0 und 1 auf die wir dabei stoßen setzen wir an die erste Stelle unserer Anordnung AO[RZ(0,1)]. Es handelt sich also um das erste Denkobjekt aus der Anordnung AO[DO(P,M)], das eine reelle Zahl zwischen 0 und 1widerspruchsfrei darstellt. Es gibt daher eine Person P, die in irgend einem Zeitpunkt aussagt, die Mitteilung M stelle für sie eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei dar.

Unser Problem dabei ist, dass wir gar keinen Zugang zu "allen möglichen Personen P" haben. Wir wissen lediglich, es sind nur abzählbar viele. Grundsätzlich kann keine der eben erwähnten Aussagen einer Person P auf ihre Richtigkeit überprüft werden. Es handelt sich dabei ja um eine von anderen Personen als P selbst per definitionem unüberprüfbare Meinungsäußerung von P.

Wir gehen nun die Denkobjekte aus AO[DO(P,M)] schrittweise weiter durch. Die zweite reelle Zahl zwischen 0 und 1, von der eine Person P aussagt, sie stelle eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei dar, setzen wir an die zweite Stelle von AO[RZ(0,1)]. So bauen wir schrittweise die Anordnung AO[RZ(0,1)] auf. Dabei bewegen wir uns stets im endlichen aber unbegrenzten Bereich sowohl was die möglichen Mitteilungen M als auch was die möglichen Personen P und die möglichen Zeitpunkte der Lesevorgänge L(P) anlangt. Wir sind stets im Bereich des nur potentiell Unendlichen.

Nun werden wir zeigen, dass der Versuch, die Unvollständigkeit unserer Anordnung AO[RZ(0,1)] durch das zweite Diagonal-Argument von Cantor zu beweisen, zu einem Widerspruch führt. Ein solcher Unvollständigkeitsbeweis müsste von irgend einer Person P in irgendeinem Zeitpunkt geführt werden. Es sei PK die Person des Kritikers der Vollständigkeit unserer Anordnung AO[RZ(0,1)] und MK die Mitteilung, mit der PK die Unvollständigkeit durch die Anwendung des zweiten Diagonal-Argumentes von Cantor behauptet. Eine solche Mitteilung MK muss es geben, weil wir eine schriftliche Widerlegung unserer Behauptung über die Vollständigkeit von AO[RZ(0,1)] verlangen.

Für PK stellt MK also im Zeitpunkt der Kritik eine reelle Zahl ZK, eine Diagonalzahl von Cantor, zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei dar, die seiner Meinung nach in unserer Anordnung AO[RZ(0,1)] nicht enthalten ist. Der Kritiker PK behauptet also: ZK $\notin$ AO[RZ(0,1)]. Nun handelt es sich aber bei ZK offenbar um ein Denkobjekt DO(PK,MK) von dem PK behauptet, es stelle eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei dar, denn mit seiner Hilfe soll ja gerade die Unvollständigkeit der von uns vorgenommenen Anordnung AO[RZ(0,1)] gezeigt werden. Damit behauptet PK aber ZK $\in$ AO[RZ(0,1)] im Widerspruch zu seiner früheren Behauptung. Damit ist sein Beweis der Unvollständigkeit von AO[RZ(0,1)] misslungen und der oben vorausgesagte Widerspruch hergeleitet.

In gleicher Weise lassen sich alle Beweise der Überabzählbarkeit von Mengen widerlegen, die darin bestehen, dass ein Kritiker PK zu einer auf AO[DO(P,M)] beruhenden abzählbaren Anordnung AO(E) von Elementen E einer beliebig definierten Menge ein kritisches Element EK angibt, das in AO(E) angeblich nicht enthalten ist.

Mit seinem zweiten Diagonal-Argument will Cantor den Schritt vom potentiell Unendlichen zum aktual Unendlichen vollziehen. Es ist ein Schritt vom Abzählbaren zum Überabzählbaren. Wir wollen diesen Gedanken am Beispiel der natürlichen Zahlen nachvollziehen. Zu jeder noch so großen natürlichen Zahl N kann eine größere N+1 gefunden werden, zu jeder Menge natürlicher Zahlen neue Zahlen. Die Menge der natürlichen Zahlen kann nie ausgeschöpft werden. Da es keine größte natürliche Zahl gibt, wird mit dem Zeichen ∞ eine "Zahl" mit der Eigenschaft $\forall$n: ∞ > n definiert. Der Schritt von den natürlichen Zahlen zu ∞ entspricht dem Schritt vom potentiell

Unendlichen zum aktual Unendlichen. Er entspricht, wie wir noch zeigen werden, dem Schritt ins Kontinuum RZ der reellen Zahlen.

Durch die Einbeziehung von ∞ wird "mit einem Schlag" die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen erfasst. Nun ist unsere Vorstellung von einem Kontinuum eine andere als die von einer Menge natürlicher Zahlen. Untersuchen wir das am Beispiel von Punkten in einem Raum beliebiger Dimension. Ein solcher Punkt wird durch seine Raumkoordinaten festgelegt. Bezeichnen wir seine Umgebung als Kontinuum und betrachten wir einen Weg zum Punkt hin und wieder von ihm weg, dann durchläuft dieser Weg in genügend kleiner Umgebung des Punktes die Orte

Kontinuum → Punkt → Kontinuum.

Das Kontinuum durchdringt jede Punktmenge und schiebt sich stets zwischen zwei beliebige durch Koordinaten festgelegte Punkte. Das selbe leistet aber auch die Menge der durch Koordinaten festlegbaren Punkte nur lautet der Weg zum und vom Punkt hier

andere Punkte → Punkt → andere Punkte

Der entscheidende Schritt ist die Einbeziehung der "Zahl" ∞. Die Menge der durch Koordinaten festlegbaren Punkte wird dadurch unbegrenzt, bleibt aber abzählbar. Alles spielt sich im Bereich der abzählbaren möglichen Denkobjekte aus AO[DO(P,M)] ab. Man muss nur stets im Auge behalten, dass die mit Hilfe dieser Anordnung gewonnene Folge von Punkten mit ihren jeweiligen Koordinaten nicht tatsächlich angegeben werden kann. Dazu wäre es ja - wie bereits erwähnt - notwendig, die persönliche Meinung aller möglichen Personen über den Sinn aller möglichen Mitteilungen zu kennen und das ist grundsätzlich unmöglich. Unsere Aussage über die Mächtigkeit der Punktmengen bleibt aber davon unberührt. Die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen kann nicht überschritten werden.

Abschließend wäre dazu festzustellen: Jeder Versuch, zu Mengen höherer Mächtigkeit aufzusteigen, wie er etwa von Cantor unternommen wurde, führt zu Widersprüchen. Die abzählbare Anordnung AO[DO(P,M)] aller möglichen Denkobjekte setzt solchen Versuchen eine Grenze. Für eine praktische Anordnung von Denkobjekten - etwa der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 - ist AO[DO(P,M)] aber ungeeignet. Was bleibt ist, dass die Menge dessen, woran widerspruchsfrei gedacht werden kann, nur potentiell nicht aber aktual Unendlich ist. Jeder Versuch, durch Angabe angeblich neuer Elemente die Unvollständigkeit einer auf DO[DO(P,M)] beruhenden Anordnung von Elementen einer beliebig definierten Menge nachzuweisen gleicht dem Versuch Münchhausens, sich selbst an seinem Zopf aus dem Sumpf zu ziehen. So wie dem Freiherrn für sein Vorhaben eine Stütze außerhalb des Sumpfes mangelt, so mangelt dem Kritiker der Vollständigkeit ein widerspruchsfreier Nachweis eines in der Anordnung nicht enthaltenen Elementes. Gerade durch seine Kritik hat er ja als Kritiker PK ein solches Element geschaffen. Der erzeugte Widerspruch kann auch kurz in folgende Form gebracht werden: "Es sei M_1 die Menge alles dessen, worüber gesprochen werden kann. Ich spreche jetzt über M_2, das ist die Menge alles dessen, worüber nicht gesprochen werden kann."

Die hier verwendete Methode, die Abzählbarkeit beliebiger Mengen mit Hilfe der Abzählbarkeit aller möglichen Denkobjekte aus AO[DO(P,M)] herzuleiten beruht auf möglichen Aussagen aller möglichen Personen P über den Sinn von Mitteilungen M. Diese Personenbezogenheit bringt etwas Individuelles in die Überlegungen ein. Es ist daher angemessen, die Anordnung AO[DO(P,M)] und alle auf ihr beruhenden Anordnungen - wie etwa die der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 weiter oben - als Individualanordnung zu bezeichnen. Das Heranziehen "aller möglichen Personen P" entspricht dem Grundgedanken dieser Arbeit, nämlich, dass einerseits alles Denkbare in Form von Mitteilungen M beschrieben werden kann und andererseits jede Mitteilung M für sich allein genommen sinnlos ist und erst durch eine sie lesende Person ein Sinn entstehen kann.

Es erscheint jedoch auch wünschenswert, die Kernaussage "Jedes aktual Unendliche führt zu einem Widerspruch" nicht nur mit Hilfe "aller möglichen Personen P" sondern mit Hilfe der Aussagen einer einzigen Person zu beweisen. Eine solche Person muss natürlich der Kritiker PK selbst sein. Es sei also eine beliebig definierte Menge $\mathcal{M}$ von Elementen E gegeben. Wir überlassen es nun PK, für jede mögliche Mitteilung M zu entscheiden, ob durch sie ein Element E der Menge $\mathcal{M}$ eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben wird. Ist dies der Fall, dann gilt "DO(PK,M) = E $\in \mathcal{M}$", ist dies nicht der Fall, dann gilt "DO(PK,M) $\notin \mathcal{M}$". Die Menge der Denkobjekte DO[(PK,M)$\mathcal{M}$], für die PK beim Durchlaufen der abzählbar vielen Mitteilungen M feststellt, sie seien ein Element E der definierten Menge $\mathcal{M}$, ist zweifellos abzählbar. PK muss daher ein "Kritisches Element EK $\notin \mathcal{M}$" angeben, das nicht in dieser abzählbaren Menge enthalten ist. Für dieses Element behauptet PK also: "DO(PK,MK) $\notin$ DO[(PK,M)$\mathcal{M}$]".

Wie in dem weiter oben behandelten Fall der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 muss der Kritiker PK also sowohl DO(PK,MK) = EK $\notin$ DO[(PK,M)$\mathcal{M}$] behaupten, da er ja mit Hilfe von EK die Unvollständigkeit der Anordnung DO(PK,M) zeigen will, gleichzeitig muss er aber auch von DO(PK,MK) = EK $\in$ DO[(PK,M)$\mathcal{M}$] ausgehen, also davon, dass MK für ihn das Denkobjekt DO(PK,MK) = EK eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Damit führt seine Argumentation auf den gleichen Widerspruch wie weiter oben das zweite Diagonal-Argument von Cantor bei dessen Versuch, die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mit Hilfe seiner Diagonalzahl zu beweisen.

Unsere oben aufgestellte Behauptung, alle durch schrittweise Erweiterung der Menge MA der algebraischen Zahlen erreichbaren Zahlen schöpfen das Kontinuum zur Gänze aus, kann also von keinem Kritiker widerspruchsfrei widerlegt werden.

Zum Abschluss die versprochene Analogie zwischen der potentiell unendlichen Menge MN der natürlichen Zahlen und dem Kontinuum RZ der reellen Zahlen. Wie große natürliche Zahlen N und wie umfangreiche Mengen natürlicher Zahlen auch immer betrachtet werden, sie sind unbedeutend gegenüber dem Rest der potentiell unendlichen Menge MN. In analoger Weise sind noch so viele Erweiterungsschritte zur Ausschöpfung des Kontinuums der reellen Zahlen unbedeutend gegenüber dem Rest der potentiell unendlichen Menge RZ der reellen Zahlen des Kontinuums. Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem potentiellen Unendlichen von MN und dem von RZ liegt aber darin, dass die schrittweise Erweiterung in MN durch ein einziges Schrittmodell, der Schritt von n zu n+1, vorgenommen werden kann, während wir für die analogen Erweiterungsschritte in RZ den wesentlich komplexeren Weg über alle möglichen Mitteilungen M und alle möglichen Personen P wählen mussten. Der schrittweise Aufbau des Kontinuums RZ entbehrt daher der einfachen Übersichtlichkeit des analogen schrittweisen Aufbaus der Menge MN der natürlichen Zahlen. Die Analogie zwischen dem schrittweisen Aufbau der abzählbaren potentiell unendlichen Menge MN und dem von RZ bleibt aber bestehen.

Was ist Wahrheit?

"And speech created thought which is the measure of the universe"
(Shelley: Prometheus Unbound)

Wird von "Wahrheit" gesprochen, werden bereits zwei Dinge vorausgesetzt. Nämlich

a) dass es eine zugrundeliegende "Sprache" gibt und
b) dass eine "Person" etwas in dieser Sprache Ausgedrücktes als "wahr" bezeichnet.

Unser erstes Ziel ist es, eine gewisse Ordnung in diese zugrundegelegten Begriffe zu bringen.

Wir beginnen mit der Ordnung der möglichen "Sprachen". Als ersten Schritt dazu gehen wir von "Sprache" zu "Schrift" über. Wir beschränken uns also auf schriftlich darstellbare Sprachen.

Damit schränken wir den Bereich der möglichen Sprachen zunächst stark ein. Immerhin sind Lautstärke, Tonfall, begleitende Körpersprache etc. vielfach entscheidend für die "Information", die mit Hilfe der Sprache übermittelt werden soll. Wir wollen uns aber auch zunächst nur mit jenen Wahrheiten befassen, die traditioneller Weise schriftlich "ausgesprochen", also dargestellt, werden, wie dies etwa für mathematische Beweise der Fall ist.

Haben wir den Bereich der Untersuchungen durch die Voraussetzung der Schriftlichkeit zunächst (scheinbar) stark eingeschränkt, so wollen wir den Bereich der zugelassenen Schrift stark erweitern. Als Schrift werden nämlich alle Informationen in Form einer im Folgenden definierten "Mitteilung" zugelassen.

Unter einer Mitteilung M vom Umfang n verstehen wir einen quadratischen Raster, bestehend aus n^2 "Elementarquadraten" der Seitenlänge 0,01 mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist. Ein solcher Raster kann z.B. ein Blatt Papier, eine Wandtafel, ein Monitor etc. sein, auf dem sichtbare Zeichen angebracht wurden. Die Beschränkung auf schriftlich formulierte Beweise stellt bei dieser Definition der zugelassenen Informationen keine Beschränkung der Allgemeinheit dar. Wir wollen uns also auf solche Beweise beliebiger Behauptungen konzentrieren, die sich in Form einer Mitteilung M darstellen lassen.

Wir ordnen nun alle möglichen Mitteilungen M abzählbar an. Zunächst ordnen wir die Mitteilungen M in Gruppen nach ihrem Umfang n an. Jede Mitteilung vom Umfang n besteht aus n^2 Elementarquadraten, die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Jedes dieser Elementarquadrate ist entweder weiß oder

schwarz. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit EQ_{jk} und die zugeordnete Ziffer (1 oder 2) mit a_{jk}. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl

$$a(M) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$$

eindeutig dargestellt.

<u>Alle möglichen Mitteilungen M ordnen wir nun nach der Größe von a(M) in einer Anordnung AO(M) abzählbar an.</u>

Eine Mitteilung M ist für sich allein genommen "sinnlos". Sie ist ein physikalisches Objekt: ein Blatt Papier, eine Wandtafel, ein Monitor etc.. Eine Seite Chinesischer Schriftzeichen ist etwa für den Autor dieser Arbeit ohne Sinn, da er dieser Sprache bzw. dieser Schrift nicht mächtig ist. Erst durch eine Person P, welche die Mitteilung M liest und versteht, kann M einen "Sinn" gewinnen und zwar gerade für diese Person P. Ein solcher durch einen Lesevorgang entstandene Sinn ist dann offenbar ein Objekt des Denkens von P. Wir können ihn als von P und M abhängiges Denkobjekt ansehen und mit DO(P,M) bezeichnen.

An dieser Stelle ist es notwendig, auf eine Schwäche jeder Sprache hinzuweisen. Verwendete Begriffe sind oft unscharf und daher für die Beurteilung von Aussagen als "wahr" oder "nicht wahr" nur bedingt geeignet. Hierfür nur ein Beispiel: Die im Satz "Gott ist die Liebe" verwendeten Begriffe "Gott", "ist" und "Liebe" werden wohl vielfach für verschiedene Personen unterschiedlichen "Sinn" haben.

<u>Wir setzen also fort mit der abzählbaren Anordnung aller möglichen Lesevorgänge.</u> Dabei gehen wir davon aus, dass jede mögliche Person P im Zeitpunkt jedes möglichen Lesevorganges L(P) ein gewisses Mindestvolumen im Raum einnimmt und für den Lesevorgang eine gewisse Mindestzeit benötigt. Nun wählen wir ein Koordinatensystem im Raum-Zeit-Universum mit drei Raumkoordinaten und einer Zeitkoordinate und zerlegen es in Raum-Zeit-Elemente RZE.

Ein Raum-Zeit-Element RZE sei ein (vierdimensionaler) Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm (drei Raumkoordinaten) und der Dauer 0,01 Sek. (eine Zeitkoordinate). Mit Hilfe des vorhin gewählten Koordinatensystems im Raum-Zeit-Universum lassen sich alle Elementarwürfel EW in einer Anordnung AO(EW) abzählbar anordnen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass in jedem Raum-Zeit-Volumen, das jede mögliche Person P während jedes möglichen Lesevorganges L(P) einnimmt, mindestens ein Elementarwürfel EW[L(P)] zur Gänze liegt. Dieser Elementarwürfel kennzeichnet daher den Lesevorgang L(P) eindeutig.

Mit Hilfe der abzählbaren Anordnung AO(EW) aller Elementarwürfel lassen sich alle möglichen Lesevorgänge L(P), die ja jeweils durch mindestens einen EW eindeutig gekennzeichnet sind, abzählbar anordnen. <u>Wir bezeichnen diese abzählbare Anordnung aller möglichen Lesevorgänge L(P) mit AO[L(P)].</u>

<u>Wir beenden unsere Ordnungsstruktur mit der abzählbaren Anordnung aller möglichen Denkobjekte.</u> Als "Denkobjekt" haben wir den "Sinn" bezeichnet, den eine "Mitteilung M" für eine "Person P" hat, welche diese Mitteilung liest. Jedes mögliche Denkobjekt hat daher eine mögliche Mitteilung M und einen möglichen Lesevorgang L(P) zur Voraussetzung, die dieses Denkobjekt eindeutig kennzeichnen. Alle möglichen Mitteilungen M sind in AO(M) abzählbar angeordnet, alle möglichen Lesevorgänge L(P) in AO[L(P)]. Aus den abzählbaren Anordnungen AO(M) und AO[L(P)] erhält man daher <u>eine abzählbare Anordnung AO[DO(P,M)] aller möglichen Denkobjekte.</u>

In dieser Anordnung spielt die eingangs gestellte Frage "Was ist Wahrheit?" nur mehr insoweit eine Rolle als eine Person P eine in einer Mitteilung M enthaltene Aussage "als wahr" oder "nicht als wahr" bezeichnet. Der Begriff "Wahrheit" wird also nur jeweils in Bezug auf eine bestimmte Person verwendet. Es handelt sich somit um eine "Relative Wahrheit", nämlich bezogen auf die Person P. Ein Begriff "Absolute Wahrheit" wird nicht verwendet. Auch ein Urteil des Autors dieser Arbeit über ein Denkobjekt, also über den Sinn einer Mitteilung M, spielt in der Anordnung nur in jenen Fällen eine Rolle, in denen der Autor die Person P ist. Gleiches gilt für jeden Leser dieser Arbeit.

Aber auch diese relative Wahrheit hat eine Schwäche: Nur die Person P selbst kann ja feststellen, welchen Sinn eine Mitteilung M hat bzw. welches Denkobjekt M für P darstellt. Auch für diese Feststellung gibt es kein anderes Kriterium als die Äußerung von P selbst. P kann von der Richtigkeit seiner Interpretation von M überzeugt sein, selbst wenn diese falsch ist. P kann sich aber auch gegen seine innere Überzeugung äußern, also (subjektiv) die Unwahrheit sagen, oder auch jede Äußerung ablehnen. <u>Das Ziel einer objektiven Wahrheit erweist sich als unerreichbar.</u>

Aus der Möglichkeit einer abzählbaren Anordnung AO[DO(P,M)] aller möglichen Denkobjekte ergeben sich trotz der erwähnten Schwäche des Begriffs der relativen Wahrheit weitreichende Folgerungen. Eine dieser Folgerungen besteht beispielsweise im Bereich der Mathematik darin, dass in Beweisen der Überabzählbarkeit bestimmter Mengen - etwa der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 - ein Widerspruch hergeleitet werden kann. Folgerungen aus der grundsätzlichen Relativität des Begriffs "Wahrheit" sind auch in anderen Bereichen, etwa "Naturrecht", "Religion" etc., zu erwarten.

Die Ausgangsfrage "Was ist Wahrheit?" lässt streng genommen nur die Antworten: "Wahrheit ist etwas Relatives" bzw. "Wahrheit ist etwas Individuelles" zu. Näheres zu diesen Fragen in <http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/>

Ein Widerspruch im zweiten Diagonalargument von Cantor

(Fassung Juli 2010)

Cantor will mit seinem Diagonalargument die Existenz überabzählbarer Mengen zeigen. Als ein Beispiel dient ihm die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

Der von uns zu zeigende Widerspruch beruht darauf, dass die von Cantor zugrunde gelegte Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 als Dezimalzahlen der Gestalt $0{,}a_1a_2...$ bereits das Transfinite impliziert. Mit diesen Dezimalzahlen argumentiert Cantor so, als könnten sie alle wie Dezimalzahlen mit endlich vielen Stellen als etwas aktual Unendliches vollständig angeschrieben werden. Dem ist aber nicht so. Selbst unter der Annahme, es sei möglich, von jeder ausreichend definierten reellen Zahl zwischen 0 und 1 jede beliebige Dezimalstelle zu errechnen, berücksichtigt Cantors Argument nicht, dass in jeder endlichen Zeitspanne - und mehr hat man nicht zur Verfügung - nur potentiell Unendliches mit endlich vielen Dezimalstellen tatsächlich errechnet werden kann. Der gedankliche Schritt von der Möglichkeit unendlicher Dezimalzahlen zu unendlichen Dezimalzahlen zu gelangen, deren Dezimalstellen tatsächlich alle bereits zur Verfügung stehen, führt zu dem von uns zu zeigenden Widerspruch.

Um diesen Widerspruch herzuleiten werden wir eine vollständige Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 angeben, die so gewählt ist, dass von reellen Zahlen außerhalb von ihr per definitionem nicht gesprochen werden kann.

1. Wir beginnen mit der Definition einer Mitteilung M vom Umfang n.
   - 1.1. Unter einer Mitteilung M vom Umfang n verstehen wir einen quadratischen Raster bestehend aus n^2 Elementarquadraten der Seitenlänge 1/100 mm, die jeweils entweder weiß oder schwarz sind. Ein solcher Raster kann etwa ein Blatt Papier oder ein Monitor sein, auf dem sichtbare Zeichen angebracht wurden.
   - 1.2. Alle möglichen derartigen Mitteilungen M können abzählbar angeordnet werden.
     - 1.2.1. Wir ordnen die Mitteilungen M zunächst in Gruppen nach ihren Umfang n. Jede Mitteilung vom Umfang n besteht aus n^2 Elementarquadraten, die in n Zeilen angeordnet sind. Jedes dieser Elementarquadrate ist entweder weiß oder schwarz.
     - 1.2.2. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu.
     - 1.2.3. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit EQ_{jk} und die zugeordnete Ziffer (1 oder 2) mit a_{jk}.
     - 1.2.4. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl
       $$a(M) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}...a_{jk}...a_{nn}$$
       eindeutig dargestellt.
     - 1.2.5. Alle möglichen Mitteilungen M ordnen wir nun nach der Größe von a(M) in einer Anordnung AO(M) abzählbar an.
2. Eine Mitteilung M ist für sich allein genommen "sinnleer". M ist zunächst nichts anderes als eine physikalische Gegebenheit, etwa ein Blatt Papier oder ein Monitor. Eine Seite Mayaschrift oder eine Seite chinesischer Schriftzeichen ist z.B. für den Autor ohne "Sinn", da er diese Sprachen bzw. diese Schriften nicht kennt.
   - 2.1. **Erst durch einen Leser, also durch eine Person P, welche eine Mitteilung M liest, kann M einen "Sinn" gewinnen und zwar für diese Person P.** Dieser Sinn ist offenbar ein Objekt des Denkens der Person P. Wir können ihn daher als Denkobjekt DO(M,P) be-

zeichnen. Ob überhaupt und wenn ja welchen Sinn M für den Autor oder für den Leser dieser Studie hat, ist gegenstandslos.

2.2. Wir sprechen im folgenden vom Sinn einer Mitteilung M für eine Person P gemäß 2.1. unabhängig davon, ob P die Mitteilung M tatsächlich liest. DO(M,P) bezeichnet also jenen Sinn, den M für P für den Fall hat, dass P die Mitteilung M tatsächlich liest.

2.3. Wir wollen nun Ordnung in die Menge aller möglichen Denkobjekte bringen.

2.3.1. Dabei beginnen wir mit der Anordnung aller möglichen Personen PT in irgend einem Zeitpunkt T..

2.3.1.1. Jede mögliche Person PT wird während jedes möglichen Lesevorganges ein gewisses Mindestvolumen im Raum einnehmen. Um Ordnung in alle möglichen Lesevorgänge zu bringen wählen wir im Raum ein Koordinatensystem und zerlegen den Raum in Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm. Diese Elementarwürfel können wir in einer Anordnung AO(EW) abzählbar anordnen.

2.3.1.2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass in jedem Volumen, das jede mögliche Person PT einnimmt, mindestens ein solcher Elementarwürfel EW = EW(PT) liegt, der PT eindeutig kennzeichnet.

2.3.1.3. Alle möglichen Personen PT ordnen wir nun mit Hilfe der sie eindeutig kennzeichnenden Elementarwürfel EW(PT) und deren Anordnung AO(EW) in einer Anordnung AO(PT) abzählbar an.

2.3.2. Wir setzen fort mit der Anordnung aller in beliebigen Zeitpunkten möglichen Lesevorgänge LP aller überhaupt möglichen Personen P.

2.3.2.1. Dazu wählen wir einen Nullpunkt auf der Zeitgeraden und teilen diese in Elementar-Zeitabschnitte EZ der Länge 0.01 sek. ein. Alle Elementar-Zeitabschnitte EZ können wir in einer Anordnung AO(EZ) abzählbar anordnen.

2.3.2.2. Den Zeitabschnitt eines Lesevorganges LP einer Person P auf der Zeitgeraden bezeichnen wir mit LPZ

2.3.2.3. Die Dauer D(LPZ) jedes möglichen Lesevorganges LPZ irgend einer Mitteilung M durch irgend eine Person P ist jedenfalls so lang, dass mindestens ein Elementar-Zeitabschnitt EZ zur Gänze in den Zeitraum des Lesevorganges LPZ fällt. Dieser Elementar-Zeitabschnitt EZ = EZ(LPZ) kennzeichnet den Lesevorgang LPZ daher eindeutig.

2.3.2.4. Es sei T = T(EZ) der jeweilige Beginn eines Elementar-Zeitabschnitts EZ. Dann kennzeichnet T = T[EZ(LP)] den möglichen Lesevorgang LP eindeutig.

2.3.2.5. Alle möglichen Lesevorgänge LPZ ordnen wir nun mit Hilfe der sie eindeutig kennzeichnenden Zeitpunkte T sowie der sie in T eindeutig kennzeichnenden Elementarwürfel EW(PT) in einer Anordnung AO(LP) abzählbar an.

2.3.3. Wir sind davon ausgegangen, dass eine Mitteilung M für sich allein genommen "sinnleer" ist und erst für einen Leser P einen Sinn gewinnen kann. Diesen Sinn haben wir als Objekt des Denkens von P mit DO(M,P) bezeichnet. Der Sinn einer Mitteilung M für eine Person P kann aber auch vom Zeitpunkt T, in dem die Person P die Mitteilung M liest, abhängen. Der Sinn der Mitteilung "Heute" wird für den Autor im allgemeinen vom Tag abhängen, an dem er diese Mitteilung liest. Ein anderes Beispiel: Die Mitteilung "i" kann den Buchstaben i ebenso bedeuten wie etwa $\sqrt{-1}$, je nachdem in welchem Zusammenhang die Mitteilung gelesen wird. Wir wollen einer solchen Abhängigkeit durch die Bezeichnung DO(M,P,T) Rechnung tragen. DO(M,P,T) besagt also, dass M für P im Zeitpunkt T den Sinn DO(M,P,T) hat und zwar unabhängig davon, ob P die Mitteilung M wahrheitsgemäß oder (absichtlich oder irrtümlich) unrichtig interpretiert. Es gibt kein Kriterium über die "Wahrheit" einer Aussage von P. Wir stellen lediglich fest, dass, falls P seine Aussage über den Sinn von M im Zeitpunkt T gemacht hat, diese Tatsache unveränderlich feststeht, was immer P etwa in einem späteren Zeitpunkt hinsichtlich des Sinns der Mitteilung M angibt.

2.3.4. Wir betrachten abschließend noch einmal alle möglichen Personen P, alle möglichen Mitteilungen M und alle möglichen Lesevorgänge LP. Aus ihnen gewinnen wir alle möglichen Denkobjekte $DO(M,P,T) = DO\{M,T[(EZ(LP))]\}$. Diese Denkobjekte bezeichnen gemäß 2.3.3. jeweils jenen Sinn, der Mitteilung M für die Person P gemäß 2.2. im Zeitpunkt T.

2.3.5. Aus der abzählbaren Anordnung AO(M) aller möglichen Mitteilungen M gemäß 1.2.5 und der abzählbaren Anordnung AO(LP) aller möglichen Lesevorgänge LP gemäß 2.3.2.5 gewinnen wir nun unschwer eine abzählbare Anordnung AO(M,LP) aller möglichen Denkobjekte aller möglichen Personen P.

3. Bei den reellen Zahlen zwischen 0 und 1 handelt es sich offenbar um Denkobjekte. Die mit Hilfe des zweiten Cantorschen Arguments hergeleitete Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 steht daher im Widerspruch zur abzählbaren Anordnung AO(M,LP) aller möglichen Denkobjekte gemäß 2.3.5. Wir wollen im folgenden zeigen, worauf dieser Widerspruch zurückzuführen ist.

3.1. Ausgangspunkt dieser Untersuchung ist die von Cantor verwendete Diagonalzahl die wir hier folgendermaßen darstellen wollen:

Es sei $AO(RZ) = \{a_1, a_2, ... a_n, ...\}$ eine beliebige Anordnung von reellen Zahlen zwischen 0 und 1, von der behauptet wird, sie enthalte alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Man stellt nun jede Zahl a_n in Form einer Dezimalzahl $0,a_{n1},a_{n2}...a_{nn}...$ dar und stellt sie in Form des folgenden Rasters zusammen:

$$
\begin{array}{l}
a_1 = 0,a_{11}a_{12}...a_{1n}... \\
a_2 = 0,a_{21}a_{22}...a_{2n}... \\
.\qquad .\qquad . \\
.\qquad .\qquad . \\
a_n = 0,a_{n1}a_{n2}...a_{nn}... \\
.\qquad .\qquad . \\
.\qquad .\qquad .
\end{array}
$$

3.1.1. Auf Grund dieses Rasters bildet man eine Dezimalzahl $b = 0,b_1b_2...b_n...$ mit $b_n = 1$ für $a_{nn} \neq 1$ und $b_n = 2$ für $a_{nn} = 1$.

3.1.2. Die reelle Zahl b liegt zwischen 0 und 1 und unterscheidet sich an der n^{ten} Dezimalstelle b_n von a_{nn}, der jeweiligen n^{ten} Dezimalstelle von a_n. Es gilt also $\forall n: b_n \neq a_{nn}$ und daraus folgt $\forall n: b \neq a_n$. Da die a_{nn} auf der Diagonale des Rasters nach 3.1. liegen, nennt man b auch "Diagonalzahl". Wegen $\forall n: b \neq a_n$ ist die Diagonalzahl b in der Anordnung AO(RZ) nicht enthalten woraus die Unvollständigkeit dieser Anordnung folgt.

3.2. Wir wollen nun die Eigenschaften des Rasters aus 3.1. näher untersuchen.

3.2.1. Die Schlussfolgerung aus 3.1.2., wonach die Anordnung der Zahlen a_n die Diagonalzahl nicht enthält, ist trivial, solange der Raster 3.1. endlich viele Zahlen a_n enthält. Wir werden aber im folgenden zeigen, dass eine Erweiterung dieser Schlussfolgerung auf einen Raster mit unendlich vielen Zahlen a_n unzulässig ist und auf einen Widerspruch führt.

3.2.2. Die Wahl der Dezimalstellen a_{jk} jeweils in der j^{ten} Zeile an k^{ter} Stelle des Rasters nach 3.1. haben wir in keiner Weise eingeschränkt. Daraus folgt unter anderem, dass zwei verschiedene a_n trotz unterschiedlicher Dezimalzahl-Darstellung die selbe Zahl darstellen können. So gilt z.B. 0,199..... = 0,200.... usw. (Das Beispiel 1 = 0,999... kann ausgeschlossen werden, da vorausgesetzt wurde alle a_n liegen **zwischen** 0 und 1). Der Raster aus 3.1. hat aber eine viel grundlegendere Schwäche. Er impliziert bereits unerlaubterweise transfinite Elemente. Erst auf Grund dieser transfiniten Elemente, deren mögliche Existenz ja gerade erst bewiesen werden soll, führt die Cantorsche Anordnung zu einem scheinbaren Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

3.2.3. Als Beispiel eines solchen transfiniten Elementes im Raster 3.1. wählen wir die Zahl 1/π, offenbar eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. So wie auch andere transzendente Zahlen kann sie nie in endlicher Zeit zur Gänze als Dezimalzahl angeschrieben werden, obwohl die Berechnung jeder einzelnen ihrer Dezimalstellen in endlicher Zeit grundsätzlich möglich ist. Ein Raster nach 1.3. muss daher stets - in welchem Zeitpunkt auch immer - unvollständig sein.

3.2.4. **Wir wollen im folgenden eine Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorstellen, die keine derartige transfinite Schwäche aufweist**. Wir werden weiter zeigen, dass jeder Versuch, eine Unvollständigkeit dieser Anordnung zu zeigen, misslingt. Dies zeigen wir insbesondere Am Beispiel des zweiten Cantorschen Diagonalarguments.

3.2.4.1. Ausgangspunkt unserer Überlegungen sind die Mitteilungen M aus 1. Eine abzählbare Anordnung aller möglichen Mittelungen M in Form von AO(M) haben wir in 1.2.5. gegeben.

3.2.4.2. Im Hinblick auf unser Ziel, eine vollständige Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 anzugeben, wollen wir alle jene Mitteilungen M herausfiltern, die eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 **eindeutig und widerspruchsfrei** beschreiben.

3.2.4.3. Wie in 2. dargelegt sind aber Mitteilungen M für sich allein genommen sinnleer. Sie können, wie in 2.1. erläutert, erst im Zusammenhang mit einem möglichen Leser P einen Sinn erhalten, Für ein mögliches Lesen im Zeitpunkt T haben wir diesen Sinn in 2.3.3. als Denkobjekt DO(M,P,T) bezeichnet.

3.2.4.4. Wir führen daher die folgende "Individual-Anordnung" AO[M,P,T,RZ(01)] ein. Sie besteht aus der Anordnung aller jener Denkobjekte DO [M,P,T,RZ(01)] aus der Menge der Denkobjekte DO(M,P,T), die eine reelle Zahl RZ(01) zwischen 0 und 1 darstellen. Dabei handelt es sich also um alle Mitteilungen M von denen irgend eine Person P in irgend einem Zeitpunkt T gemäß 2.2. bejaht, dass M eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Die Bezeichnung "Individual-Anordnung" soll darauf hinweisen, dass die Frage der Aufnahme eines Denkobjektes in diese Anordnung von der persönlichen Meinungsäußerung eines Individuums P abhängt.

3.2.4.5. Wir behaupten nun, Die Individual-Anordnung aus 3.2.4.4. enthält als Denkobjekte alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Dies ist eine universelle Aussage. Sie besagt nämlich, dass nicht nur für den Autor alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 durch eine Mittelung M nach 1.1. eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden können, sondern dass dies auch für alle möglichen Personen gilt. Da die Denkobjekte aus 3.2.4.4. abzählbar sind, steht diese Behauptung in Widerspruch zu Cantor, der die Unvollständigkeit jeder abzählbaren Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 postuliert und diese Unvollständigkeit mit Hilfe seines zweiten Diagonalarguments beweisen will. Wir zeigen im folgenden, dass dieser Beweis misslingen muss.

3.2.4.6. Jeder Kritiker der Vollständigkeit der Individual-Anordnung muss eine mögliche Person P aus 2.3.1. sein. Wir nennen ihn PK. Er muss in irgend einem Zeitpunkt T = TK die Unvollständigkeit der Individual-Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 aus 3.2.4.4. behaupten. Wir werden zeigen, dass Cantors zweites Diagonalargument nicht geeignet ist, eine solche Behauptung zu beweisen.

3.2.4.6.1. Dazu bilden wir zunächst eine Mitteilung MK, welche die Individual-Anordnung aus 3.2.4.4. sowie eine auf Grund dieser Anordnung mit Hilfe des zweiten Cantorschen Diagonalarguments gebildete Diagonalzahl enthält. **Eine solche Mitteilung kann unschwer etwa aus den Formulierungen dieser Studie gebildet werden**. Will PK ein so formuliertes zweites Cantorsches Diagonalargument zum Beweis der Unvollständigkeit der Anordnung aus 3.2.4.4. verwenden, muss er in irgend einem Zeitpunkt TK bejahen, dass MK für ihn eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt.

3.2.4.6.2. Das kritische Denkobjekt DOK = DO[MK,PK,TK,RZ(0,1)] stellt also in TK nach Aussage von PK selbst eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 dar und ist somit gemäß 3.2.4.4. in der Individualanordnung enthalten. Das Problem für PK liegt darin, dass er einerseits irgend einmal bejahen muss, DOK stelle eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 dar, denn durch sie soll ja gerade die Unvollständigkeit der Individual-Anordnung gezeigt werden, und andererseits gerade dadurch das Denkobjekt DOK gemäß 3.2.4.4. in die Individual-Anordnung einbringt. Damit ist der eingangs behauptete Widerspruch in Cantors zweitem Diagonalargument für die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 herbeigeführt. qed.

.

Eine Individual-Anordnung

Was kann die Sprache leisten?

(Fassung Juli 2010)

- Unter "Sprache" verstehen wir phonetische Äußerungen. Wir beschränken uns im folgenden auf solche, die in einer "Schrift" wiedergegeben werden können. Damit werden z.B. alle wissenschaftlichen Diskussionen, insbesondere alle philosophischen oder mathematischen Überlegungen, umfasst.
- Unter "Schrift" verstehen wir alle optisch erkennbaren graphischen Darstellungen. Wir beschränken uns im folgenden auf Mitteilungen M vom Umfang n. Unter einer Mitteilung M vom Umfang n verstehen wir einen quadratischen Raster bestehend aus n^2 Elementarquadraten der Seitenlänge 1/100 mm, die jeweils weiß oder schwarz sind.
- Die Beschränkungen auf solche phonetische Äußerungen, die schriftlich wiedergegeben werden können bzw. auf optisch erkennbare graphische Darstellungen in Form von Mitteilungen M vom Umfang n stellen im Hinblick auf Diskontinuität der durch die Sinnesorgane "Ohr" und "Auge" erfassbaren Eindrücke keine Beschränkung der Allgemeinheit dar.
- **Eine Mitteilung M ist für sich allein genommen "sinnlos".** M ist zunächst nichts anderes als eine physikalische Gegebenheit, etwa ein Blatt Papier oder ein Monitor. Eine Seite Mayaschrift oder eine Seite chinesischer Schriftzeichen ist für den Autor ohne Sinn, da er diese Sprachen bzw. diese Schriften nicht kennt. Gleiches gilt für jegliche Schrift. Jede Mitteilung M gewinnt nur "Sinn" für jemanden, der die Sprache bzw. die Schrift in der M abgefasst ist kennt.
- **Erst durch eine Person P, welche die Mitteilung M "liest", kann M einen "Sinn" gewinnen.** Ein solcher Sinn ist dann offenbar ein Objekt des Denkens von P. Wir können ihn als DO(P,M) bezeichnen. Wir wollen nun für beliebige Personen P und beliebige Mitteilungen M Ordnung in die Menge der möglichen DO(P,M) bringen. Im Hinblick auf spätere Schlussfolgerungen wollen wir uns auf die **Frage nach der Abzählbarkeit aller möglichen Denkobjekte** konzentrieren.
- Wir beginnen mit der Anordnung aller möglichen Personen P.
    - Jede mögliche Person P wird im Zeitpunkt jedes möglichen Lesevorganges ein gewisses Mindestvolumen im Raum einnehmen. Um Ordnung in die möglichen Lesevorgänge zu bringen wählen wir im Raum ein Koordinatensystem und zerlegen den Raum in Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm. Diese Elementarwürfel ordnen wir abzählbar in einer AO(EW) an.
    - Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass in dem Volumen, das jede mögliche Person P im Zeitraum jedes möglichen Lesevorganges einnimmt, mindestens ein solcher Elementarwürfel EW liegt. Aus der Abzählbarkeit der Elementarwürfel EW folgt **(1)** die **Abzählbarkeit aller möglichen Personen.**
    - Alle möglichen Personen P ordnen wir nun mit Hilfe der sie jeweils eindeutig kennzeichnenden Elementarwürfel EW abzählbar in einer AO(P) an.
- Wir setzen fort mit der Anordnung aller möglichen Mitteilungen M.
    - Die Mitteilungen werden zunächst nach ihrem Umfang n in Gruppen angeordnet. Jede Mitteilung vom Umfang n besteht aus n^2 Elementarquadraten, die in n Zeilen angeordnet sind. Jedes Elementarquadrat ist entweder weiß oder schwarz.

  - Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu.
  - Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit EQ_{jk} und die zugeordnete Ziffer mit a_{jk}.
  - Jede Mitteiling M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl

    $$\mathbf{a(M)=0,a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}...a_{jk}...a_{nn}}$$

    eindeutig dargestellt. Daraus folgt **(2)** die **Abzählbarkeit aller möglichen Mitteilungen.**
  - Alle möglichen Mitteilungen M ordnen wir nun nach der Größe von a(M) abzählbar in einer AO(M) an.
- Wir setzen fort mit der Anordnung aller möglichen Lesevorgänge L.
  - Wir wählen einen Nullpunkt auf der Zeitgeraden und teilen diese in Elementar-Zeitabschnitte EZ der Länge 0,01 sek. ein.
  - Den Zeitabschnitt eines Lesevorganges L auf der Zeitgeraden bezeichnen wir mit LZ.
  - Die Dauer D(L) jedes möglichen Lesevorgangs L irgendeiner Mittelung M durch irgendeine Person P ist jedenfalls so lange, dass mindestens ein EZ zur Gänze in LZ liegt. Dieser EZ = EZ(L) kennzeichnet L daher eindeutig.
  - Es sei T = T(EZ) der Zeitpunkt am Beginn des Elementar-Zeitabschnittes EZ. Dann kennzeichnet T = T[EZ(L)] den möglichen Lesevorgang L eindeutig. Aus der Abzählbarkeit der Zeitpunkte T folgt **(3)** die **Abzählbarkeit aller möglichen Lesevorgänge.**
  - Alle möglichen Lesevorgänge L ordnen wir nun mit Hilfe der sie jeweils eindeutig kennzeichnenden Zeitpunkte T abzählbar in einer AO(L) an.
- Wir sind davon ausgegangen, dass eine Mitteilung M für sich allein genommen "sinnlos" ist und erst für einen Leser P einen Sinn gewinnen kann. Diesen haben wir als Denkobjekt DO(P,M) bezeichnet. Der Sinn einer Mitteilung M für eine Person P kann aber auch vom Zeitpunkt T, in dem P die Mitteilung liest, abhängig sein. Der Sinn einer Mitteilung "HEUTE" wird für den Autor davon abhängen, an welchem Tag er diese Mitteilung liest. Die Mitteilung "i" kann den Buchstaben i ebenso wie $\sqrt{-1}$ bedeuten, je nachdem in welchem Zusammenhang die Mitteilung gelesen wird. Wir können einer solchen Abhängigkeit durch die Bezeichnung DO(P,M,T) Rechnung tragen. DO(P,M,T) besagt also, dass M für P im Zeitpunkt T den Sinn DO(P,M,T) hat.
- Nun betrachten wir abschließend noch einmal alle möglichen Personen P, alle möglichen Mitteilungen M und alle möglichen Lesevorgänge L. Aus ihnen gewinnen wir alle möglichen Denkobjekte DO(P,M,L). Aus der **(1)** abzählbaren Anordnung AO(P) aller möglichen Personen P, der **(2)** abzählbaren Anordnung AO(M) aller möglichen Mitteilungen M und der **(3)** abzählbaren Anordnung AO(L) aller möglichen Lesevorgänge gewinnen wir eine abzählbare Anordnung AO(P,M,L) aller möglichen Denkobjekte. Dies bedeutet **(4)** die **Abzählbarkeit aller möglichen Denkobjekte.** Alle Beweise der Existenz überabzählbarer Mengen enthalten daher einen Widerspruch.

Anmerkung: Diese Überlegungen sind relevant für alle Untersuchungen, die sich mit dem ersten Hilbert-Problem, mit überabzählbaren Mengen, also mit Kardinalzahlen $\aleph_\alpha$ mit $\alpha \geq 1$ und ähnlichen Fragen befassen.

Statement:

Beweise der Existenz überabzählbarer Mengen enthalten Widersprüche

Erläuterung:

- Ausgangspunkt solcher Beweise sind Mengen **M** von Objekten **O** mit bestimmten, die Menge kennzeichnenden Eigenschaften **E**. Also etwa die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, die Menge der einstelligen ganzzahligen Funktionen, die Potenzmenge der natürlichen Zahlen etc..
- Die hier untersuchten Beweise werden so geführt, dass zu jeder abzählbaren Menge **M = {O(E)}** von Objekten **O(E)** mit der kennzeichnenden Eigenschaft **E** ein in der jeweiligen Menge angeblich nicht enthaltenes kritisches Objekt **O_k(E)** mit dieser Eigenschaft angegeben wird. Für dieses kritische Objekt wird somit **$O_k(E) \notin M = \{O(E)\}$** behauptet. O_k kann z.B. eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 sein, die in einer angeblich vollständigen abzählbaren Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht enthalten ist. Vgl. etwa das zweite Diagonalverfahren nach CANTOR.
- Von Beweisen fordern wir, dass sie in irgendeinem Zeitraum in irgendeiner Sprache für irgendeinen Menschen widerspruchsfrei formuliert werden können.
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit fordern wir hier von Beweisen, dass sie in deutscher Sprache, schriftlich in Form von **endlichen** - wenn auch unbegrenzten - **Informationen** verfasst werden können und von dem diesen Beweis beurteilenden **Menschen** für eine **Mindestdauer Δt** (z.B. 1 Sek.) als richtig angesehen werden.
- Diese Beschränkung kann natürlich auch insoweit gelockert werden, als solche Beweise in Form beliebiger von menschlichen Sinnesorganen erfassbaren endlichen - wenn auch unbegrenzten - Informationen bestehen können.
- Ein im Statement behaupteter Widerspruch kann nun folgendermaßen herbeigeführt werden:
  - Alle möglichen Mindestdauern Δt können abzählbar angeordnet werden.
  - Alle möglichen endlichen (unbegrenzten) Informationen können abzählbar angeordnet werden.
  - Alle möglichen Menschen können auf Grund ihrer räumlich- zeitlichen Ausdehnung abzählbar angeordnet werden.
  - Aus den Möglichkeiten dieser drei abzählbaren Anordnungen lässt sich der behauptete Widerspruch herleiten.
- Lit. dazu etwa "Eine Individualanordnung" in < http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/>

Anmerkung:

Dieses Statement ist relevant für alle Untersuchungen, die sich mit dem ersten Hilbert-Problem, mit überabzählbaren Mengen also mit Kardinalzahlen $\aleph_\alpha$ mit $\alpha \geq 1$ und ähnlichen Fragen befassen.

Gedanken zum Kontinuum

Wir betrachten Punktmengen. Solange wir uns im nur potentiell Unendlichen bewegen enthalten solche Punktmengen nur endlich viele Punkte aus einem wie auch immer definierten "Raum". Wie groß auch immer eine solche Punktmenge gewählt wurde, **die tatsächliche Punktmenge auch im nur potentiell Unendlichen** ist **unendlich mal größer.**

Die Umgebung eines Punktes P beim beliebigen Durchlaufen im Raum sieht daher so aus: **"andere Punkte - P - andere Punkte".**

Führt man nun ein aktual Unendliches ein ändert sich die Umgebung jedes Punktes P der gesamten potentiell unendlichen Punktmenge <u>**plötzlich**</u> **für alle (potentiell) unendlich vielen Punkte zu "Kontinuum - P - Kontinuum".** Das aktual Unendliche fließt so in das potentiell Unendliche ein, dass es jeden einzelnen dessen (des potentiell Unendlichen) Punkte vollständig umhüllt **und zwar plötzlich, also "at once".** Man sieht dabei deutlich, wie angemessen dieser Ausdruck ist.

Mein Ziel ist es aber zu zeigen, **dass die Einführung eines derartigen "at once infinite" zu einem Widerspruch führt.** Nur durch einen Widerspruch kann ja ein System falsifiziert werden. Diesen Widerspruch werde ich mit Hilfe einer abzählbaren Anordnung aller möglichen **"Denkobjekte"** herbeiführen. Als Denkobjekt bezeichne ich dabei **"alles woran irgend eine mögliche Person je denken kann".** Dazu gehören die vorhin erwähnten Punkte P (ebenso wie die aus ihnen gebildeten Punktmengen). Sind aber alle **denkbaren** Punkte abzählbar dann verliert das at once infinite seinen Inhalt.

Wie können wir nun eine Ordnung in **"alle möglichen Denkobjekte"** bringen? Dazu fordern wir, dass jedes mögliche Denkobjekt jeder möglichen Person von dieser Person in Form einer schriftlichen Mitteilung M beschrieben werden kann. Dies bedeutet insoweit keine wesentliche Einschränkung als eine solche Beschreibung auch "das Objekt, an das ich gerade denke" oder "das Objekt, an das ich zu einem bestimmten Zeitpunkt gedacht habe" lauten kann. Solche Beschreibungen werden noch weiter unten für den Nachweis eines Widerspruchs verwendet.

Als ersten Schritt ordnen wir **"alle möglichen Mitteilungen M"** an. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit lassen wir als eine **"Mitteilung M vom Umfang n"** jeden quadratischen Raster zu, der aus n^2 Elementarquadraten der Seitenlänge 0,01mm besteht von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist. Alle möglichen Mitteilungen ordnen wir zunächst in Gruppen nach ihrem Umfang n an. Jede Mitteilung vom Umfang n besteht aus n^2 Elementarquadraten, die in n Zeilen zu n Stellen angeordnet sind. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit EQ_{jk} und die zugeordnete Ziffer (1 oder 2) mit a_{jk}. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl

$$a(M) = 0,a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$$

eindeutig dargestellt. Alle möglichen Mitteilungen M ordnen wir jetzt zunächst in Gruppen nach ihrem Umfang n und innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) in einer Anordnung **AO(M)** abzählbar an.

Um zu einer Anordnung aller möglichen Denkobjekte zu gelangen erinnern wir daran, dass wir gefordert haben, jedes mögliche Denkobjekt jeder möglichen Person *P* (kursiv geschrieben zur Unterscheidung von der weiter oben verwendeten Bezeichnung P für einen Punkt im Raum) müsse von dieser durch eine Mitteilung M beschrieben werden können. Diese Forderung ist offenbar gleichbedeutend mit der Feststellung, *P* erkläre, beim Lesen der Mitteilung M, der "Sinn" dieser Mitteilung sei ein bestimmtes Denkobjekt DO. Dieses Denkobjekt ist offenbar von der Person *P* und von der Mitteilung M abhängig und kann durch DO(*P*,M) bezeichnet werden. Wir merken aber bereits hier an, dass ein und die selbe Mitteilung M für eine Person *P* in verschiedenen Zeitpunkten und an verschiedenen Orten unterschiedlichen Sinn haben kann.

Der Sinn einer Mitteilung ergibt sich also erst durch einen **Lesevorgang**. Wir bezeichnen mit L(*P*) einen Lesevorgang durch eine Person *P*. Nun setzen wir fort mit einer **abzählbaren Anordnung AO[L(*P*)] aller möglichen Lesevorgänge L(*P*).** Um die Abhängigkeit des Sinnes einer Mitteilung auch von Ort und Zeit des Lesens berücksichtigen zu können wählen wir zunächst ein Koordinatensystem im Raum-Zeit-Universum mit drei Raumkoordinaten und einer Zeitkoordinate.

Mit Hilfe dieses Koordinatensystems zerlegen wir das Raum-Zeit-Universum in Raum-Zeit Elemente RZE. Ein Raum-Zeit-Element RZE sei ein (vierdimensionaler) Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm (drei Raumkoordinaten) und der Dauer 0,01 Sek. (eine Zeitkoordinate). Mit Hilfe des vorhin gewählten Koordinatensystems im Raum-Zeit-Universum lassen sich alle Elementarwürfel EW in einer Anordnung **AO(EW)** abzählbar anordnen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass in jedem Raum-Zeit-Volumen, das jede mögliche Person *P* während jedes möglichen Lesevorganges L(*P*) einnimmt mindestens ein Elementarwürfel EW([L(*P*)] zur Gänze liegt. Dieser Elementarwürfel kennzeichnet daher den Lesevorgang L(*P*) eindeutig.

Mit Hilfe der abzählbaren Anordnung AO(EW) aller Elementarwürfel lassen sich alle möglichen Lesevorgänge L(*P*), die ja jeweils durch mindestens einen EW eindeutig gekennzeichnet sind, abzählbar anordnen. Wir bezeichnen diese abzählbare Anordnung aller möglichen Lesevorgänge L(P) mit **AO[L(*P*)]**.

Wir beenden unsere Ordnungsstruktur mit der **abzählbaren Anordnung aller möglichen Denkobjekte.** Als Denkobjekt haben wir den Sinn bezeichnet, den eine Mitteilung M für eine Person *P* hat, welche diese Mitteilung liest. Jedes mögliche Denkobjekt hat daher eine mögliche Mitteilung M und einen möglichen Lesevorgang

L(*P*) zur Voraussetzung, die dieses Denkobjekt eindeutig kennzeichnen. Alle möglichen Mitteilungen M sind in AO(M) abzählbar angeordnet, alle möglichen Lesevorgänge L(*P*) in AO[L(*P*)]. Aus den abzählbaren Anordnungen AO(M) und AO[L(*P*)] erhält man daher die gewünschte abzählbare Anordnung AO[DO(*P*,M)] aller möglichen Denkobjekte. Wir bezeichnen diese Denkobjekte als **durch eine Mitteilung M darstellbar.**

Wir halten fest, dass der Sinn einer Mitteilung M sich nur durch eine individuelle Meinungsäußerung einer Person *P* manifestieren kann. Es gibt kein Kriterium für die Richtigkeit oder die Unrichtigkeit einer solchen Meinung, **außer sie enthält einen Widerspruch in sich. Dieser würde die Unrichtigkeit der Meinung beweisen.**

Es bleibt noch zu zeigen, dass das Einfließen eines "at once infinite" zu einem solchen Widerspruch führt. Wir haben oben gezeigt, dass die Menge aller möglichen Denkobjekte abzählbar ist. Welche Eigenschaften müssten Elemente *E* haben, die nicht in der Anordnung AO[DO(*P*,M)] enthalten sind? Sie sind offenbar keine möglichen Denkobjekte im Sinne unserer obigen Definition. Das heißt, es kann keine Person *P* geben, die irgendwann irgendwo an ein solches Element *E* denkt.

Wir zeigen nun, jede Behauptung eines Kritikers *PK*, der von Elementen *E* spricht, die nicht in der Anordnung AO[DO(*P*,M)] enthalten sind, führt zu einem Widerspruch. Dies zeigen wir folgendermaßen: Es sei *EK* ein Element *E*, von dem *PK* behauptet, es sei nicht in AO[DO(*P*,M)] enthalten. *PK* behauptet also ***EK*** $\notin$ **AO[DO(*P*,M)]** und zwar **für alle möglichen Mitteilungen M.**

Zweifellos ist *EK* im Zeitpunkt dieser Behauptung ein Denkobjekt *DOK* von *PK*. Dieser Kritiker muss seine Behauptung an irgend einer Stelle des Raum-Zeit-Universums aufstellen. Es gibt daher ein kritisches Raum-Zeit-Element *RZEK*, welches das Element *EK* eindeutig kennzeichnet. Der Kritiker muss feststellen, dass die Mitteilung *M*: "Das Element , an das ich im Raum-Zeit-Element *RZEK* gedacht habe", *EK* eindeutig kennzeichnet. Daraus folgt aber: ***EK*** $\in$ **AO[DO(*P*,*M*)].**

Aus *EK* $\notin$ AO[DO(*P*,M)] für alle M und *EK* $\in$ AO[DO(*P,M*)] folgt der oben erwähnte Widerspruch.

Schlussbemerkung: Treten zwischen zwei Systemen Widersprüche auf, müssen sie auf unterschiedlichen Axiomen beruhen. Im vorliegenden Fall ist es offenbar meine Forderung, dass alles worüber man sprechen kann (in meiner Terminologie also alle Denkobjekte) in Form einer Mitteilung M, also schriftlich, dargestellt werden kann. Mathematiker fordern selbstverständlich schriftliche Beweise (z.B. Vier-Farben-Satz, Großer Fermat etc.). Diese Schriftlichkeit fehlt aber oft in Axiomensystemen (z.B. Mengenlehre). Dadurch kommt es zu widersprüchlichen Konstruktionen wie: "Ich betrachte zunächst die Menge M_1 bestehend aus allen Elementen E_1 über die gesprochen werden kann. Anschließend spreche ich über die Menge M_2 bestehend aus allen Elementen E_2 über die nicht gesprochen werden kann".

L’homme ordinateur

Vor über 260 Jahren schrieb De la Mettrie sein wohl bekanntestes Werk „L’homme machine“. Es enthielt weltanschauliche Standpunkte, die man sowohl äußerst extrem als auch äußerst konsequent nennen konnte. Jedenfalls gaben sie den Anstoß zu weitreichenden Diskussionen und Überlegungen. Das Buch basiert auf Ähnlichkeiten, die sein Autor zwischen dem Menschen als Lebewesen und einer mehr oder weniger mechanischen Maschine sah. Analog dazu beruht die hier vorgelegte Studie auf Ähnlichkeiten, die ihr Autor zwischen dem Menschen als denkendem Wesen und einem Computer herausstellen will.

Zunächst der Computer: Wir gehen von Computern aus, die darauf programmiert wurden, Lochkartenfolgen zu lesen und nach jedem Lesevorgang entweder keine oder wieder eine Lochkartenfolge auszugeben. Uns interessiert dabei weder Umfang noch Inhalt der eingegebenen bzw. der ausgegebenen Lochkartenfolgen.

Wir bezeichnen sowohl die Eingabe als auch die Ausgabe von Lochkartenfolgen als „Information“ und zwar unabhängig davon ob diese beiden tatsächlich für einen außenstehenden Betrachter einen „Sinn“ ergeben. Der Begriff „Sinn“ einer Information spielt in diesen Betrachtungen keine Rolle. Es kommt lediglich darauf an, ob ein Computer eine und wenn ja welche Lochkartenfolge er bei Eingabe einer bestimmten Lochkartenfolge ausgibt.

Die Anzahl der Lochkarten einer Folge bezeichnen wir als „Umfang der Information“ und den Vorgang der Eingabe von Lochkartenfolgen zusammen mit der daraus resultierenden Ausgabe von Lochkartenfolgen als „Informationsaustausch“.

Um Ordnung in die Menge aller möglichen Informationsaustausche zu bringen zerlegen wir unsere Raum-Zeit-Welt in Elementarwürfel der Kantenlänge ε und der Dauer δ. Durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems in der Raum-Zeit-Welt ordnen wir nun alle Elementarwürfel abzählbar an.

Jeder an einem Informationsaustausch teilnehmende Computer muss einen gewissen Teil des Raumes unserer Welt einnehmen und jeder Ein- bzw. Ausgabevorgang muss eine gewisse Mindestzeit dauern. Wählen wir die Kantenlänge ε der Elementarwürfel und deren Dauer δ genügend klein, dann können wir für jeden möglichen Informationsaustausch erreichen, dass jedenfalls mindestens ein Elementarwürfel zur Gänze innerhalb des vom Informationsaustausch benötigten Teiles der Raum-Zeit-Welt liegt. Dieser Elementarwürfel kennzeichnet den Informationsaustausch eindeutig. Mit Hilfe der abzählbaren Anordnung aller Elementarwürfel erhalten wir somit eine abzählbare Anordnung aller möglichen Informationsaustausche.

Wir wollen jetzt den auf eine Eingabe und eine Ausgabe beschränkten Informationsaustausch auf eine Diskussion erweitern. Als Diskussion zwischen zwei Computern C_1 und C_2 bezeichnen wir einen Vorgang, bei welchem die jeweilige Ausgabe des einen Computers als Eingabe in den anderen Computers verwendet wird und umgekehrt. Dabei wollen wir auch die Möglichkeit einschließen, dass die Programmierung der Computer geändert werden kann. Die ausgegebene Lochkartenfolge eines Computers ist daher nicht mehr nur von der eingegebenen Lochkartenfolge abhängig sondern auch noch vom Zeitpunkt t in welchem die Ein- und die Ausgabe stattfinden.

Die Diskussion beginnt also mit der Ausgabe einer Lochkartenfolge F_1 durch den Computer C_1 in einem Zeitpunkt t_1 und der Eingabe von F_1 in den Computer C_2. Dieser gibt daraufhin in einem Zeitpunkt t_2 eine Lochkartenfolge $F_2 = F_2(C_2, F_1)$ aus. F_2 wiederum wird von Computer C_1 als Eingabe verwendet und führt in einem Zeitpunkt t_3 zur Ausgabe einer Lochkartenfolge $F_3 = F_3(C_1, F_2)$ und so fort. Es handelt sich nach wie vor um jeweils beliebig lange und beliebig gestaltete Lochkartenfolgen, deren Inhalte lediglich durch F_1 und durch die Programmierungen von C_1 und C_2 in den jeweiligen Zeitpunkten t_1, t_2, t_3 ... bestimmt werden.

Mit Ausnahme der Voraussetzung, dass jeder Computer in jedem Zeitpunkt auf eine eingegebene Lochkartenfolge entweder keine oder eine weitere Lochkartenfolge ausgibt wurden die Eigenschaften der Computer in keiner Weise eingeschränkt. Man kann daher als Computer in unserem Modell durchaus auch jeweils einen mit einem Lochkartenleser und einem Lochkartenschreiber versehenen Menschen einsetzen.

Wir wollen unser Modell jetzt auf eine Diskussion zwischen zwei Personen anwenden. Dabei spielt es keine Rolle ob diese Diskussion mündlich, schriftlich oder in welcher Form immer abgehalten wird. Wichtig ist, dass die Sprache der Diskussion in eine endliche Anzahl von Lochkarten „übersetzt“ werden kann. Nun wollen wir auch vom „Sinn“ eingegebener und ausgegebener Lochkarten sprechen. Eine endliche Lochkartenfolge F hat für eine Person P im Zeitpunkt t genau dann die Bedeutung oder den Sinn S = S(F,P,t) wenn P in t bereit ist zu sagen: „F bedeutet für mich S“. Wir bemerken, dass Bedeutung oder Sinn einer Lochkartenfolge F damit nur relativ zu einer Person P und einem Zeitpunkt t erklärt ist.

Soll es zwischen zwei Personen P_1 und P_2 zu einer sinnvollen Diskussion kommen, müssen sich beide einer gemeinsamen Sprache bedienen. Für unser Lochkartenmodell bedeutet das, es sollte während der Diskussion stets $S(F,P_1,t) = S(F,P_2,t)$ für alle verwendeten Folgen F gelten. Als Beispiel wählen wir etwa den „Sinn“ des Buchstabens „i“ und greifen zwei der möglichen Bedeutungen heraus, nämlich:

- $i = \sqrt{-1}$,
- i ist eine Zinsintensität aus der Finanzmathematik.

Man kann davon ausgehen, dass sich die Bedeutung von i im Allgemeinen aus dem Rahmen ergibt, in dem die Diskussion abläuft.

Ein Kriterium dafür, ob dies tatsächlich der Fall ist, wird aber nur schwer anzugeben sein. Es sind ja nicht nur Irrtümer, Missverständnisse und mangelnde Kenntnisse der jeweiligen Sprache oder Materie zu berücksichtigen. In unserem Modell dürfen wir auch bewusste Unwahrheiten nicht ausschließen. Da die Diskussion aber nur zwischen P_1 und P_2 abläuft ist der allfällige „Sinn“ einer Lochkartenfolge für den Autor und für den Leser dieser Studie ohne Bedeutung.

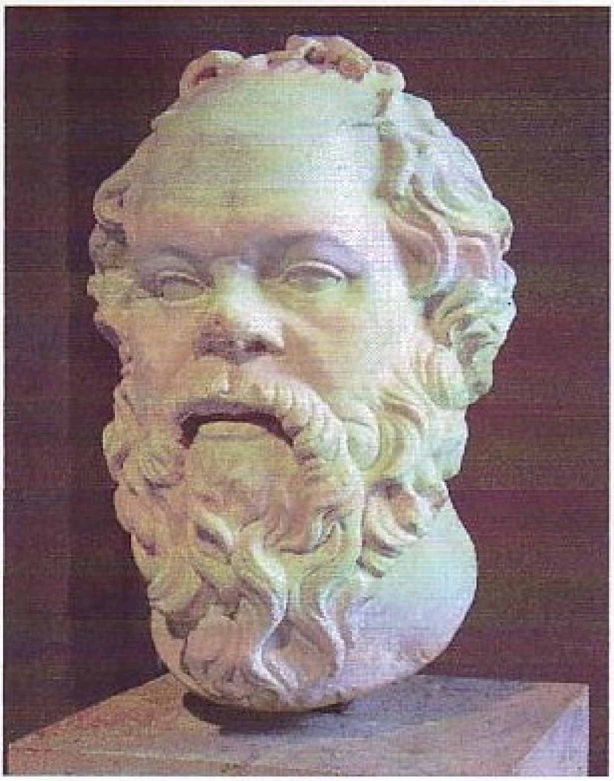
Wir wollen nun als Thema einer solchen Diskussion Beweise der Existenz überabzählbarer Mengen wählen und Widersprüche in klassischen Beweisen der Überabzählbarkeit von Mengen aufzeigen.

Ein klassischer Beweis der Überabzählbarkeit einer Menge M wird in der Form geführt, dass zu jeder abzählbaren Menge *M*, die angeblich alle Elemente von M enthält, ein „kritisches“ Element $E_k \in$ M mit $E_k \notin M$ angegeben wird. Ein Widerspruch in einer solchen Beweisführung kann folgendermaßen gezeigt werden:

Die Angabe eines derartigen kritischen Elementes E_k ist eine mathematische Aussage, die in die Form einer Lochkartenfolge F gebracht werden kann. Von P_k, dem Kritiker der Vollständigkeit von M, wird nun verlangt, er solle zu jeder möglichen Lochkartenfolge F jeweils angeben, ob diese ein Element E $\in$ M eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt oder nicht. Da die Menge der möglichen Lochkartenfolgen abzählbar ist, erzeugt P_k durch seine Auswahl von Elementen E $\in$ M eine abzählbare Menge von Elementen. Diese Menge nennen wir M. Da sie auf Grund der Auswahl von P_k gebildet wurde gilt $M = M(P_k)$.

Wir behaupten nun, M sei eine abzählbare Menge, die alle Elemente E $\in$ M enthält. Will nun P_k die Überabzählbarkeit von M durch die Angabe eines angeblich nicht in M enthaltenen kritischen Elementes $E_k \in$ M beweisen, so müsste für dieses E_k sowohl $E_k \in M(P_k)$ [nach Definition von M durch P_k selbst] als auch $E_k \notin M(P_k)$ [wegen der von P_k behaupteten Unvollständigkeit von M] gelten. Jede das Element E_k eindeutig beschreibende Lochkartenfolge F_k enthält daher einen Widerspruch. Es ist P_k also nicht gelungen, ein kritisches Element E_k aus M, das nicht in M enthalten ist, wie gefordert eindeutig und widerspruchsfrei zu beschreiben. Sein Beweis der Überabzählbarkeit von M ist daher misslungen.

ΓΝΩΘΙ ΣΕΑΥΤΟΝ



DER BABYLONISCHE SCHUBLADENKASTEN

Karl-Heinz Wolff

Der Schubladenkasten

Hat ein Schubladenkasten n Laden und legt man m > n Objekte hinein, dann muss in mindestens einer Lade mehr als ein Objekt enthalten sein. Diese Überlegung findet sich in mathematischen Darstellungen. Anders, wenn es sich um einen unendlich großen Schubladenkasten handelt. Dann können immer wieder neue Objekte allein in eine Lade gelegt werden.

Das Modell eines unendlich großen Schubladenkastens lässt sich aber auch für weit grundlegendere Überlegungen heranziehen. Dies wird in der nachfolgenden Studie „Erkenne dich selbst“ getan[1].

Archimedes sagte: „Gebt mir einen Platz, wo ich stehen kann, so will ich die Erde bewegen“. Philosophische Systeme gehen gerne von solchen als a priori sicher angesehenen Sätzen aus. „Ich denke, also bin ich“ ist ebenso wie Kants Kategorien solch ein sicherer Ausgangspunkt. Die Sicherheit wird allerdings etwas relativiert, wenn man berücksichtigt, dass alle derartigen Kernsätze viel mehr voraussetzen, als gemeiniglich angenommen. Wird der Begriff „Sein“ aus dem ersten Kernsatz wirklich immer für alle in gleicher Weise interpretiert? Werden Raum und Zeit wirklich immer für alle in gleichem Sinn verstanden? Wie steht es mit Begriffen aus religiösen Bereichen, etwa in Sätzen wie „Gott ist die Liebe“? Verstehen wirklich immer alle darunter das selbe? Anders gefragt: Werden überhaupt Sätze aus Philosophie, Naturwissenschaft oder was auch sonst wirklich immer von allen in gleicher Weise interpretiert?

Betrachtet man wissenschaftliche Sätze, Diskussionen, Beweisführungen etc. dann haben sie alle folgendes gemeinsam. Jeder, der etwas derartiges formuliert, geht davon aus, dass jeder andere, der diese Formulierung hört oder liest, sie „im selben Sinn versteht“ wie der Autor der Formulierung. Ist dies nicht der Fall, etwa weil der eine die Sprache des anderen nicht versteht oder weil er die in der Formulierung verwendeten Begriffe nicht kennt, dann erscheint zwischen diesen beiden eine Diskussion oder eine Beweisführung erst dann möglich, wenn dieses mangelnde Verständnis nachträglich hergestellt wird. Durch erlernen einer gemeinsamen Sprache, durch nähere Erklärung verwendeter Begriffe u.s.w.

In der Mathematik etwa verlangt man von Sätzen, dass sie bewiesen werden können. Solche Beweise werden in schriftlicher Form verlangt, also in Form von „Mitteilungen“ wie sie in 1. der nachfolgenden Studie dargelegt sind. Von diesen in Beweisen verwendeten Mitteilungen wird verlangt, dass sie „allgemein verständlich“ sind, dass also alle genügend ausgebildeten Menschen diese Mitteilungen „im selben Sinn verstehen“.

Sokrates ging bei seinen Argumentationen davon aus, dass es stets möglich ist, dieses gemeinsame Verständnis herzustellen, indem er seinem Gesprächspartner die Fragen nur auf einem diesem vorerst zumutbar erscheinenden Niveau stellte, deren Beantwortung aber nach und nach das zunächst fehlende Wissen erzeugte. So erfolgversprechend diese Methode bei entsprechend passend gewählten Fragen auch sein kann – und die überlieferten Beispiele geben genügend Zeugnis davon – so setzt sie doch zweifellos ein gewisses Mindestmaß an Verständnismöglichkeit (ebenso auch an Verständnisbereitschaft!) voraus. Offensichtlich erfordert der Gedankenaustausch aber auch eine „gemeinsame Sprache“.

Versucht man z.B. möglichst allgemeingültige Aussagen über Beweisführungen zu machen, muss man diese grundsätzliche Bedeutung der Sprache berücksichtigen. Aber was ist eigentlich eine „Beweisführung ermöglichende Sprache“?

Um nicht als Arbiter Mundi aufzutreten wollen wir nicht nur einen möglichst umfangreichen Sprachbegriff zulassen sondern auch unbegrenzte Argumentationen.

---

[1] Es erscheint zweckmäßig, erst einmal diese Studie zu lesen, dann die vorliegenden Überlegungen und schließlich deren Inhalt mit der Studie abzugleichen.

Lassen wir doch allen Individuen ihre Individualität. Schränken wir sie nicht durch die Forderungen von „Logik“ ein. Lassen wir jeden Widerspruch zu. Nur: ***Wer sich zu einem Argumentationsgebäude, wie es etwa die Mathematik darstellt, bekennt, von dem verlangen wir, dass seine Beweisführungen keinen Widerspruch beinhalten.***

Auf den ersten Blick erscheinen so die damit zugelassenen Argumentationen und Beweisführungen völlig unstrukturiert und für eine sachliche Diskussion unbrauchbar. Es zeigt sich aber, dass mit solch einer kritiklosen Ausweitung der zulässigen Argumentationen keineswegs auf eine Strukturierung verzichtet wird. Die Struktur liegt allerdings nicht mehr nur in der Struktur der verwendeten Sprache sondern auch ganz wesentlich in der Struktur der argumentierenden Personen, was Zeit und Ort der Argumentation betrifft. Einer Aussage für sich allein können wir keinen „Sinn“ zuordnen. Keine Aussage darf für sich allein als richtig, falsch oder was immer angesehen werden.

Für uns sind schriftliche Aussagen für sich allein betrachtet demnach nichts anderes als graphische Darstellungen ohne Sinninhalt[2]. Erst durch die Kombination einer solchen Aussage mit einer Person in einem bestimmten Zeitpunkt[3] sprechen wir vom „Sinn“ dieser Aussage und zwar vom Sinn, den diese Aussage für die betreffende Person in dem betreffenden Zeitpunkt hat. Für uns gibt es keine absolute Wahrheit. „Jede Wahrheit ist für uns relativ“. Relativ zur Person und zum Zeitpunkt, in dem diese Person die Aussage liest.

Eine einfache Überlegung zeigt, dass es für andere Personen kein Kriterium gibt festzustellen, welchen Sinn die Aussage für die erste Person tatsächlich hatte. Wir unterscheiden also streng zwischen Aussagen für sich allein – die Mitteilungen gem. 1. der Studie – und der Kombination solcher Aussagen mit einer Person, die eine solche Mitteilung liest. Erst durch eine solche Kombination wird einer Mitteilung ein „Sinn“ zugeordnet. In der Studie tragen wir dem mit der Einführung von „Denkobjekten“ gem. 5. Rechnung

Wie man sehen wird kommt es in der Studie im wesentlichen nur auf jene Aussagen an, durch die eine Person einen Widerspruch zu einer eigenen Aussage erzeugt. Solche Aussagen, durch welche sich Personen gegenüber ihren eigenen Aussagen in Widerspruch setzen[4], lassen wir nicht als Argumente zu. Dabei ist es für uns nicht notwendig, einen eigenen Standpunkt hinsichtlich der Wahrheit dieser Aussagen einzunehmen.

Setzt man voraus, dass die Wahrheit mathematischer Sätze unabhängig vom Menschen ist, lassen sich die Widersprüche in den diversen Beweisen der Überabzählbarkeit nach 9. und die absolute Wahrheit als e-mail nach 10. einfacher herstellen.

Die von Cantor in seiner Mengenlehre eingeführten Kardinalzahlen $\aleph_n$ sollten stufenweise zu immer höheren Mächtigkeiten führen. Das erinnert an den Turmbau zu Babel. Lasset uns einen Turm bauen bis in den Himmel. Das Unternehmen scheitert aber am Schubladenargument. Alle Mitteilungen lassen sich gem. 1.6. abzählbar anordnen. Alle (möglichen) Leser solcher Mitteilungen lassen sich gem. 3.5. abzählbar anordnen. Damit lassen sich auch alle möglichen Denkobjekte gem. 5.4. abzählbar anordnen. Überabzählbare Mengen, also solche mit einer Mächtigkeit größer als $\aleph_0$, können daher nicht widerspruchsfrei gebildet werden.

[2] Vgl. 1. Anordnung aller Mitteilungen M
[3] Vgl. 3. Anordnung aller möglichen Lesevorgänge LV, 3.5
[4] Vgl. 8. Kritische Fragen an den Kritiker

ERKENNE DICH SELBST

ΓΝΩΘΙ ΣΕΑΥΤΟΝ

Zusammenfassung

Zusammenfassung:

Alles worüber gesprochen werden kann wird in einer Menge ***M*** abzählbar angeordnet. Auf Grund dieser Anordnung lassen sich alle Beweise der Überabzählbarkeit von Mengen widerlegen.

Unser Ziel ist es, Aussagen zu untersuchen. Aussagen müssen in Raum und Zeit gemacht werden. Ein solcher Vorgang erfordert ein Minimum an Raum (für die aussagende Person P) und an Zeit (für die Dauer der Aussage). Wir beziehen uns im Folgenden auf Aussagen, die von beliebigen Personen in irgendeiner Sprache in endlicher (aber unbegrenzter) Zeit gemacht werden können. Als Minimum an Raum für die aussagende Person wählen wir einen Elementarwürfel EW der Seitenlänge $^1/_{100}$ mm und als Minimum an Zeit für die Aussage $^1/_{100}$ sec.[5]. Als Raumzeitelemente RZE führen wir Elementarwürfel von der Dauer $^1/_{100}$ sek. ein.

Aussagen sind ohne Beschränkung der Allgemeinheit in Form schriftlicher Mitteilungen M zu machen[6]. Als Beispiel können etwa mathematische Sätze herangezogen werden wie: „Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar“.

Die Schlussfolgerung verläuft wie folgt:
- Alle Mitteilungen lassen sich abzählbar anordnen.
- Alle Raumzeitelemente lassen sich abzählbar anordnen.

Aus der Kombination dieser beiden Anordnungen erhält man die gewünschte abzählbare Anordnung ***M*** von allem, worüber gesprochen werden kann.

Betrachten wir etwa die reellen Zahlen. Sie gehören zweifelsfrei zu den Objekten, über die gesprochen werden kann. Sie bilden damit eine Untermenge von ***M*** und können daher abzählbar angeordnet werden. Wir werden ein Beispiel einer solchen Anordnung geben. Gleiches gilt für alle Elemente angeblich überabzählbarer Mengen. Auch solche sind Untermengen von ***M.*** Wir werden zeigen, dass alle Beweise der Überabzählbarkeit von Mengen einen Widerspruch beinhalten.

In unseren Überlegungen spielt der „Sinn einer Aussage“, also der „Sinn einer Mitteilung“, zunächst keine Rolle. Betrachtet werden lediglich mögliche Aussagen möglicher Personen. Ob und wie die aussagende Person, ob und wie der Autor dieser Arbeit oder ob und wie der Leser dieser Arbeit eine Aussage „versteht“ ist für die Schlussfolgerungen irrelevant. Wie untersuchen vorerst lediglich, wie sich eine beliebige Person zu einer beliebigen Aussage äußern kann.

Um den vorhin erwähnten Widerspruch in einem Beweis der Überabzählbarkeit zu erhalten ist es notwendig, die Person PK, des Kritikers der Abzählbarkeit, einzubeziehen. Von ihm wird gefordert, dass er in irgendeinem Zeitpunkt die Richtigkeit eines Beweises der Überabzählbarkeit einer Menge bestätigt. Auf Grund einer solchen Bestätigung wird ihm dann ein Widerspruch nachgewiesen.

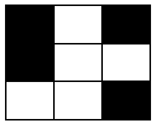
---

[5] Alle hier angestellten Überlegungen hinsichtlich der Abzählbarkeit bleiben auch anwendbar, wenn statt der vierdimensionalen Raum-Zeit ein beliebigdimensionaler Raum zugrunde gelegt wird, wie er etwa in den Stringtheorien auftritt

[6] Alle hier angestellten Überlegungen einschließlich der Beschreibung der „Welt“ in den Schlussbemerkungen auf S. 10 bleiben auch anwendbar, wenn statt schriftlicher Mitteilungen M beliebige Informationsmedien, wie z.B. Botenstoffe, zugrunde gelegt werden.

1. Anordnung aller Mitteilungen M:

1.1. Eine quadratische Mitteilung der Größe n setze sich aus n^2 Elementarquadraten der Seitenlänge $^{1}/_{100}$ mm zusammen
1.2. Jedes Elementarquadrat ist entweder weiß oder schwarz.
1.3. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu.
1.4. Eine Mitteilung M mit der Seitenlänge $^{n}/_{100}$ mm, bestehend aus n^2 Elementarquadraten, wird dann durch die Dezimalzahl $a(M) = 0,a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}...a_{ik}...a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Die folgende Mitteilung mit n=3, deren Seitenlänge der besseren Anschaulichkeit wegen erheblich größer als $^{3}/_{100}$ mm gewählt wurde, wird etwa durch a(M) = 0,212211112 dargestellt:



1.5. Wird n genügend groß gewählt, lassen sich alle schriftlichen Mitteilungen durch (mindestens) eine Dezimalzahl a(M) eindeutig darstellen. Ein Beispiel einer aus Elementarquadraten zusammengesetzten Mitteilung ist etwa das Bild auf einem Fernsehbildschirm mit entsprechender Auflösung.
1.6. Alle schriftlichen Mitteilungen lassen sich nach der Größe von a(M) abzählbar anordnen. Die Mitteilung M_{n1} stehe dabei an der $n1^{ten}$ Stelle der Anordnung[7].
1.7. Die gewählte Seitenlänge der Elementarquadrate von $^{1}/_{100}$ mm stellt offenbar ebenso wie die Beschränkung auf quadratische Mitteilungen keine Beschränkung der Allgemeinheit dar.

2. Anordnung aller Raumzeitelemente RZE:

2.1. Ein Elementarwürfel EW habe die Seitenlänge $^{1}/_{100}$ mm.
2.2. Durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems können solche Elementarwürfel, die das ganze Universum überdecken, abzählbar angeordnet werden. Es sei EW_{n2} der Elementarwürfel, an der $n2^{ten}$ Stelle dieser Anordnung.
2.3. Ein Zeitelement t habe die Dauer von $^{1}/_{100}$ sec.
2.4. Durch geeignete Wahl einer Zeitkoordinate können alle solchen Zeitelemente abzählbar angeordnet werden. Es sei t_{n3} das Zeitelement an der $n3^{ten}$ Stelle dieser Anordnung.
2.5. Ein Raumzeitelement RZE besteht in einer Kombination eines Elementarwürfels EW_{n2} an der Stelle n2 in der Anordnung der Elementarwürfel EW mit einem Zeitelement t_{n3} an der Stelle n3 in der Anordnung der Zeitelemente t.
2.6. Auf Grund der abzählbaren Anordnung der Elementarwürfel EW gem. 2.2. und der abzählbaren Anordnung der Zeitelemente t gem. 2.4. können auch alle Raumzeitelemente RZE abzählbar angeordnet werden. Es sei RZE_{n4} das Raumzeitelement an der $n4^{ten}$ Stelle dieser Anordnung mit n4 = n4(n2,n3).

[7] Die hier verwendeten Indizes n1, ... n9 zur Bezeichnung von Stellen in abzählbaren Anordnungen werden einfach in der Reihenfolge nummeriert, in der sie in dieser Arbeit eingeführt werden.

3. Anordnung aller möglichen Lesevorgänge LV:

3.1. Jeder mögliche Lesevorgang LV von denkbaren Personen P in irgend einem Zeitpunkt T kann durch mindestens einen Elementarwürfel EW_{n2} eindeutig beschrieben werden[8].

3.2. Jeder mögliche Lesezeitraum ΔT habe die Länge $\Lambda = \Lambda(\Delta T)$. Es sei Λ stets ein ganzzahliges Vielfaches von $^{1}/_{100}$ sec., also des Zeitelementes t.

3.3. Es sei $t = t(\Delta T)$ das Zeitelement am Ende des Lesezeitraumes ΔT.

3.4. Wir bilden nun Lesezeitelemente $LZE = LZE[t(\Delta T),\Lambda(\Delta T)]$, bestehend aus allen möglichen Kombinationen von gem. 2.4. abzählbar angeordneten Zeitelementen t mit beliebigen Lesezeiträumen ΔT gem. 3.2.. Alle möglichen Lesezeitelemente LZE werden nun nach der Lage von $t = t(\Delta T)$ auf der Zeitkoordinate in Gruppen und innerhalb dieser Gruppen nach der Länge von $\Lambda = \Lambda(\Delta T)$ abzählbar angeordnet. In dieser Anordnung stehe das Lesezeitelement LZE an der Stelle n5.

3.5. Alle möglichen Lesevorgänge LV lassen sich nun durch eine Kombination aller denkbaren lesenden Personen P (abzählbar gem. 3.1. und 2.2.) mit allen möglichen Lesezeitelementen (abzählbar gem. 3.4.) abzählbar anordnen. Es sei ΔT_{n6} der mögliche Lesevorgang an der $n6^{ten}$ Stelle dieser Anordnung mit $n6 = n6(n2,n5)$.

4. Der Schubladenkasten *M*:

4.1. Die gesuchte Menge ***M*** wird als Schubladenkasten dargestellt, der aus einer Kombination aller möglichen Lesevorgänge LV mit allen möglichen Mitteilungen M gebildet wird.

4.2. Für jede Kombination eines möglichen Lesevorganges LV (abzählbar gem. 3.5.) mit einer möglichen Mitteilung M (abzählbar gem. 1.6.) ist genau eine Schublade reserviert. Die Kombination (LV,M) lässt sich daher ebenfalls abzählbar anordnen.

4.3. In dieser Anordnung stehe die Kombination (LV,M) an der $n7^{ten}$ Stelle mit $n7 = n7(n1,n6)$.

4.4. Für jeden möglichen Lesevorgang LV ist ein Abschnitt des Schubladenkastens reserviert und in jeder Schublade dieses Abschnitts liegt genau ein Mitteilung M.

4.5. Nur wenn ein potentieller Leser P eine Schublade tatsächlich öffnet, kann er die darin enthaltene Mitteilung lesen. Es bleibt aber offen, ob er die Mitteilung tatsächlich liest, ob er sie versteht, ob er bereit ist, sich zu dieser Mitteilung zu äußern, ob er ein Urteil über die Mitteilung abgibt etwa der Art:: „Die Mitteilung ist richtig“ oder „Die Mitteilung ist falsch“. Uns interessieren hier zunächst lediglich jene Urteile, die er über solche Mitteilungen abgibt, die in Beweisführungen, insbesondere in mathematischen Beweisen, eine Rolle spielen. Dabei wollen wir nur die möglichen Urteile des potentiellen Lesers P hinsichtlich ihrer Widerspruchsfreiheit diskutieren ohne uns selbst ein Urteil über die in Rede stehenden Mitteilungen zu bilden.

4.6. Die abzählbare Menge ***M*** ist insoweit vollständig, als wir zeigen werden, dass jede Behauptung, es gebe etwas (z.B. reelle Zahlen), für die in ***M*** kein Platz sei, zu einem Widerspruch führt.

---

[8] Jede in irgendeinem Zeitpunkt lesende Person muss so viel Raum einnehmen, dass mindestens ein Elementarwürfel in ihr enthalten ist, der sie eindeutig kennzeichnet.

5. Das Denkobjekt DO = DO(M,P,ΔT):

5.1. **Im weiteren ziehen wir den „Sinn einer Mitteilung“ in die Betrachtungen ein.** Allerdings wollen wir nicht nach Plato[9] vom Menschen unabhängige Wahrheiten postulieren. Wir behandeln hier den Sinn einer Mitteilung immer nur in Bezug auf einen potentiellen Leser. Wir lassen also zu, dass eine Mitteilung für einen Leser einen bestimmten Sinn, für einen anderen Leser oder für den selben Leser in einem anderen Zeitpunkt einen ganz anderen (oder gar keinen) Sinn hat.

5.2. Der Buchstabe i etwa kann als Mitteilung für einen Leser eine Zinsrate, für einen anderen Leser oder für den selben Leser zu einem anderen Zeitpunkt $\sqrt{-1}$ bedeuten u.s.w. Die Bedeutung für den Autor oder für den Leser dieser Arbeit spielt dabei keine Rolle.

5.3. Wir stellen daher jetzt die Fragen: Welche Bedeutung hat eine Mitteilung M in einem Lesezeitraum ΔT für einen Leser P? Welches Denkobjekt DO beschreibt eine Mitteilung M in einem Lesezeitraum ΔT für einen Leser P? Gibt es ein Denkobjekt DO, von dem ein Leser P in ΔT behauptet, dass es durch die Mitteilung M eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben wird, dann bezeichnen wir es mit DO(M,P,ΔT). Es ist das erste mal, dass in unsere Überlegungen so etwas wie „Sinn einer Mitteilung“ einfließt. Es handelt sich aber nicht um den Sinn einer Mitteilung für den Autor oder für den Leser dieser Arbeit sondern ausschließlich um den Sinn der Mitteilung für einen Leser P am Ende eines Lesezeitraums ΔT.

5.4. Da alle möglichen Mitteilungen M, alle möglichen Leser P und alle möglichen Lesezeiträume ΔT abzählbar angeordnet werden können, gilt dies auch für alle Denkobjekte DO(M,P,ΔT). Steht die Mitteilung M = M_{n1} in der Anordnung der Mitteilungen M gem. 1.6. an $n1^{ter}$ Stelle und der Lesevorgang LV = LV(P,ΔT) in der Anordnung der Lesevorgänge gem. 3.5. an $n6^{ter}$ Stelle dann sei DO_{n8} das an $n8^{ter}$ Stelle der Anordnung der Denkobjekte DO(M,P,ΔT) stehende Denkobjekt mit n8 = n8(n1,n6).

5.5. Der „Sinn einer Mitteilung“ für einen potentiellen Leser gem. 5.1. ist für niemand Anderen erkennbar. Erkennbar sind nur konkrete Äußerungen, die der potentielle Leser über den Sinn einer Mitteilung macht, z.B. „richtig“ oder „falsch“. Aber auch ob diese Äußerungen für den potentiellen Leser selbst richtig oder falsch sind, ist für jeden Anderen nicht erkennbar.

6. Der Kritiker PK:

6.1. Wir betrachten jetzt eine Person PK, die in irgendeinem Zeitpunkt T die Unvollständigkeit von ***M*** - wie in 4.6. angesprochen - behauptet und dies durch die Angabe einer überabzählbaren Menge **M** beweisen will, deren Elemente ihrer Ansicht nach nicht alle in ***M*** enthalten seien

6.2. Aus den zahlreichen Beweisen der Überabzählbarkeit von Mengen wählen wir zunächst ein Diagonalverfahren von Cantor, mit welchem die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen r aus (0,1), dem Intervall 0 < r < 1, gezeigt werden soll. Es sei R(0,1) eine abzählbare Anordnung aller reellen Zahlen r_n mit $r_n \in (0,1)$ wobei n = 1, 2, ... und $r_n = 0.r_{n1}r_{n2}...r_{nn}....$ Cantor bildet nun eine weitere Dezi-

[9] Sokrates hat in seinen Dialogen seine Gesprächspartner zu Erkenntnissen geführt, die jene durch geeignete Fragestellungen selbst hätte gewinnen können. Es handelte sich also stets um die persönliche „subjektive Wahrheit“ des jeweiligen Dialogpartners, zu deren Erkenntnis Sokrates nur durch seine Fragen beigetragen hat. Nicht zufällig scheint Sokrates kein schriftliches Werk hinterlassen zu haben. Dieses hätte wohl vom Menschen unabhängige „objektive Wahrheiten“ enthalten müssen, deren Problematik Sokrates davon abhielt.

malzahl c $\in$ (0,1) mit c = $0.c_1c_2...c_k...$ und mit der Eigenschaft, dass ihre k^{te} Dezimalstelle c_k von der k^{ten} Dezimalstelle von r_k, das ist r_{kk}, verschieden gewählt wurde. Es gilt also $\forall k$: $c_k \neq r_{kk}$ und daher auch $\forall n$: $r_n \neq c$.

6.3. Schreibt man die reellen Zahlen r_n zeilenweise untereinander dann stehen die kritischen Dezimalstellen r_{kk}, in denen sich r_k von c unterscheidet in der Diagonale der Matrix (r_{nk}). Die „Diagonalzahl“ c, offenbar eine reelle Zahl aus (0,1), ist demnach nicht in der Menge R(0,1) enthalten. Damit will PK die Unvollständigkeit der abzählbaren Anordnung R(0,1) beweisen.

7. Ein Widerspruch in der Argumentation von PK:

7.1. PK setzt voraus, dass jede reelle Zahl r_n aus dem Diagonalverfahren in Form einer unendlichen Dezimalzahl angegeben werden kann. Es lassen sich aber nur endliche Dezimalzahlen tatsächlich anschreiben. Dezimalzahlen wie etwa $^1/_3$ = 0.3333... oder allgemeine periodische Dezimalzahlen lassen sich nicht vollständig als Dezimalzahlen anschreiben. Man kann aber stets für ein beliebiges k ihre k^{te} Dezimalstelle angeben. Damit kann man auch prinzipiell für jedes k eine von r_{kk} verschiedene Dezimalstelle c_k angeben, wie dies für das Diagonalverfahren notwendig ist.

7.2. Bei transzendenten Zahlen, wie z.B. π, ist dies aber nicht mehr der Fall. Zwar wird die Zahl der bekannten Dezimalstellen für solche transzendenten Zahlen mit zunehmender Rechenkapazität der Computer immer größer, es bleiben aber immer unendlich viele Dezimalstellen unbekannt.

7.3. Wir können solche transzendenten Zahlen zwar eindeutig definieren, aber eben nur in endlicher Form. Ob als Grenzwert, ob in geometrischer Form, für jede transzendente Zahl τ gibt es eine Definition in Form einer (endlichen) Mitteilung M = M(τ), die τ eindeutig beschreibt.

7.4. Unser Ziel ist es, einen Widerspruch in der Argumentation von PK aufzudecken. Das „kritische Element“ in seiner Argumentation ist offenbar seine Diagonalzahl c. Um zu einem Widerspruch zu gelangen wollen wir zeigen, **dass bereits die Definition der Diagonalzahl einen Widerspruch enthält und c gar nicht widerspruchsfrei definiert werden kann.**

7.5. Wir verlangen daher im Folgenden, dass PK jeweils selbst entscheiden muss, ob eine bestimmte Mitteilung M eine reelle Zahl aus (0,1) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Wir überlassen also ihm die Auswahl und die Anordnung der Mitteilungen aus dem Schubladenkasten.

8. Kritische Fragen an den Kritiker PK:

8.1. Es sei $R_{PK}(0,1)$ jene durch Entscheidung von PK gem. 7.5 gewonnene Anordnung reeller Zahlen aus (0,1). Um $R_{PK}(0,1)$ zu bilden stellen wir zu jeder Mitteilung M aus dem Schubladenkasten an PK die Frage: „Beschreibt M eine reelle Zahl aus (0,1) eindeutig und widerspruchsfrei?“ Dabei gehen wir die Mitteilungen der Reihe nach von a(M) = 0, a(m) = 1, usw. durch. Sobald PK von einer Mitteilung sagt, sie beschreibe für ihn eine reelle Zahl aus (0,1) eindeutig und widerspruchsfrei, tragen wir diese Zahl als erste in die Anordnung $R_{PK}(0,1)$ ein. Sobald PK von einer weiteren Mitteilung sagt, dass sie eine reelle Zahl aus (0,1) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, tragen wir diese Zahl als nächste in $R_{PK}(0,1)$ ein usw. Wir erstellen $R_{PK}(0,1)$ also ausschließlich auf Grund der Angaben von PK selbst. Von dieser Anordnung behaupten wir PK gegenüber, sie sei vollständig und enthalte alle reellen Zahlen aus (0,1).

8.2. Unter den Mitteilungen M tritt auch jene „kritische“ Mitteilung M = MK auf, welche die von PK selbst angegebenen Konstruktion der Diagonalzahl c gem. 6.2. zusammen mit der $R_{PK}(0,1)$ zugrundeliegenden Konstruktion gem. 8.1. beschreibt. Da PK, um die Unvollständigkeit von $R_{PK}(0,1)$ zu zeigen, sagt, c beschreibe eine reelle Zahl aus (0,1) eindeutig und widerspruchsfrei, tragen wir auch c in $R_{PK}(0,1)$ ein. Dabei stehe c dort in der k^{ten} Zeile, d.h. es ist $c = r_k$.

8.3. Nun konfrontieren wir PK mit seinen Entscheidungen. Auf Grund seiner Aussage gem. 8.2. ist c eine reelle Zahl aus (0,1) die als r_k an der k^{ten} Stelle in der Anordnung $R_{PK}(0,1)$ steht. Es gilt also $c_k = r_{kk}$ im Gegensatz zu der von PK selbst in 6.2. erhobenen Forderung $c_k \neq r_{kk}$. Es ist daher - nach Meinung des Autors – dem Kritiker PK nicht gelungen, mit Hilfe der Diagonalzahl c gem. 6.2. eine in $R_{PK}(0,1)$ nicht enthaltene reelle Zahl aus (0,1) eindeutig und widerspruchsfrei zu beschreiben.

8.4. Andere Beweise der Überabzählbarkeit von Mengen beruhen auf dem selben Prinzip. So wird etwa die Überabzählbarkeit der Menge der einstelligen ganzzahligen Funktionen oder die der Potenzmenge der Menge der natürlichen Zahlen durch die Angabe jeweils eines „kritischen“ Elementes EK gezeigt. Bei der vorhin betrachteten Menge der reellen Zahlen war das kritische Element EK = c. Auch hier lässt sich ein Widerspruch durch Argumentation gem. 8.1. und 8.2. herleiten.

9. Die absolute Wahrheit:

9.1. Die Frage, welches Denkobjekt DO durch eine Mitteilung M widerspruchsfrei beschrieben wird, haben wir in **5** nur in Abhängigkeit vom Leser P der Mitteilung und vom Lesezeitraum ΔT behandelt und damit den Begriff „Wahrheit“ relativiert. Wir wollen nun die Möglichkeit der Existenz absoluter Wahrheiten mit einbeziehen. Wir nehmen also etwa an, die Wahrheit mathematischer Sätze sei absolut und vom Menschen unabhängig,

9.2. Dem kann leicht durch eine Erweiterung des Schubladenkastens ***M*** Rechnung getragen werden. Nimmt man absolute Wahrheiten an, ist für eine Mitteilung M ein Lesevorgang durch einen Leser P in einem Lesezeitraum ΔT nicht notwendig, um den „Sinn der Mitteilung M“ gem. 5.2. zu definieren. Der einzig wahre Sinn von Mitteilungen ist dann ja von jedem Leser P unabhängig.

9.3. Wir postulieren also zusätzlich einen „Arbiter Mundi“, jemand der stets im Besitz der absoluten Wahrheit ist. Nennen wir diesen potentiellen Leser PW. Der Schubladenkasten bestand bisher aus den Abschnitten für alle möglichen Lesevorgänge LV durch alle denkbaren lesenden Personen P gem. 3.5. Nun erweitern wir ihn um einen Abschnitt für PW. Auch in diesem Abschnitt gibt es für jede Mitteilung M eine Schublade und PW entscheidet unabhängig von einem Lesezeitraum über den „Sinn von M“:

9.4. Welchen Sinn eine Mitteilung für irgendeinen möglichen Leser hat, können wir nur durch Befragen dieses Lesers erfahren. In den allermeisten Fällen erscheint uns eine solche ausdrückliche Befragung entbehrlich. Wir sind dann überzeugt, dass die Wahrheit für diese Person die selbe ist, wie für uns. Dies gilt insbesondere für Fragen nach der Wahrheit mathematischer Sätze. Dabei glauben wir, die absolute Wahrheit zu kennen, also das Urteil von PW über eine Mitteilung M.

9.5. Etwas komplexer wird die Frage nach absoluter Wahrheit aber in Bereichen wie Weltanschauungen, Religionen, etc.. Die Wahrheit eines „Dogmas“, der Inhalt eines „Naturrechts“ werden vielfach nicht in gleicher Weise als erkennbar gesehen wir etwa die Richtigkeit des Pythagoreischen Lehrsatzes.

9.6. Ebenso wenig wird der Inhalt von Begriffen wie „Gott“ von allen möglichen Personen P in gleicher Weise gesehen. Trotzdem erheben viele den Anspruch, im Besitz der Wahrheit darüber zu sein, und daher das Recht zu haben, anderen diese Wahrheit aufzuzwingen.

10. Die absolute Wahrheit als e-mail:

10.1. Die Mitteilungen M in **1** waren rein grafische Schwarz-Weiß-Darstellungen ohne „Sinninhalt“. Erst in **5** sind wir auf den Sinn einer Mitteilung eingegangen indem wir Denkobjekte DO in Abhängigkeit vom Leser P postuliert haben. Um absolute Wahrheit, also den wahren Sinn einer Mitteilung, zu kennzeichnen, haben wir den Besitzer der absoluten Wahrheit, den Arbiter Mundi, als Person PW eingeführt. Unsere Schlussfolgerungen lassen sich stark vereinfacht darstellen, wenn wir davon ausgehen, dass alle Diskussionen über die Gültigkeit von Sätzen auch durch den Austausch von e-mails geführt werden können.

10.2. Alle e-mails bestehen aus höchstens N verschiedenen Zeichen Z_1, Z_2, ... Z_N, wobei N durch die Tastatur des jeweiligen Keyboards bestimmt ist[10].

10.3. Ein e-mail der Länge L besteht aus einer Verteilung der N Zeichen auf L Stellen. Es gibt daher N^L verschiedene e-mails der Länge L. Es sei n9 die Stelle des n9[ten] e-mails in dieser Anordnung. Alle möglichen e-mails lassen sich nun nach ihrer Länge L in Gruppen und innerhalb dieser Gruppen nach ihrer Stelle n9 abzählbar anordnen.

10.4. Eine Abzählbare Anordnung alles dessen, worüber gesprochen werden kann, wird nun analog zu **4** gewonnen, indem man den Schubladenkasten ***M***, bestehend aus allen Kombinationen (LV,M) durch einen Schubladenkasten ***Me***, bestehend aus allen e-mails gem. (10.2.) und (10.3.) ersetzt. Ein Widerspruch in der Argumentation von PK kann nun analog zu **8** hergeleitet werden[11].

11. Schlussbemerkungen:

11.1. Ein Widerspruch im Begriff „Überabzählbare Mengen“ hat weitgehende Auswirkungen. So löst sich etwa das erste Hilbert-Problem von selbst, wenn das „Kontinuum“ nicht überabzählbar ist.

11.2. Dem Begriff der überabzählbaren Mengen liegt ein Gedankenfehler zu Grunde, der etwa folgendermaßen beschrieben werden kann: „Ich bilde die Menge alles dessen, worüber man sprechen kann. Dann bilde ich die Menge alles dessen, was außerhalb dieser Menge liegt“. Diese Begriffsbildung gleicht dem Versuch Münchhausens, sich selbst an seinem Zopf aus dem Sumpf zu ziehen. Jeder Versuch, über etwas außerhalb von ***M*** zu sprechen, muss auf Grund der Definition von ***M*** zu einem Widerspruch führen.

11.3 Wittgenstein verdanken wir die schöne Formulierung: „Die Welt ist alles, was der Fall ist“. Dies als absolute Wahrheit zu akzeptieren fällt sicher leicht. Es bleibt allerdings die Frage offen, ob „alles was der Fall ist“ für alle Personen P den selben Sinn hat. Davon ausgehend möchten wir formulieren:

Die Welt ist alles, worüber gesprochen werden kann

[10] Natürlich sind auch hochgestellte, tiefergestellte, kursiv geschriebene Zeichen, das Leerzeichen etc. vorgesehen.

[11] Der Autor hat dies bereits in einer Arbeit: “Zur Problematik der absoluten Überabzählbarkeit; Philosophia Naturalis, Band 13, Heft 4, 3[tes] Vierteljahr 1972, Verlag Anton Hain“ dargestellt.

Bezeichnungen:

a(M) Eine die Mitteilung M eindeutig darstellende Dezimalzahl. (1.4.)
c Eine Diagonalzahl nach Cantor. (6.2.)
c_k Die k^{te} Dezimalstelle von c. (6.2.)
ΔT Ein Lesezeitraum (3.2.)
DO Ein Denkobjekt, welches durch eine Mitteilung M für einen Leser P in einem Lesezeitraum ΔT eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben wird. (5.2.)
EK Ein „kritisches“ Element einer Menge, welches nach Meinung des Kritikers PK nicht in einer aus ***M*** gewonnenen abzählbaren Anordnung dieser Menge enthalten ist. (8.4.)
EW Ein Elementarwürfel der Seitenlänge $^1/_{100}$ mm. (2.1.)
Λ Die Länge eines Lesezeitraumes. (3.2.)
LV Ein Lesevorgang durch einen Leser P in irgendeinem Zeitpunkt T. (3.1.)
LZE Ein Lesezeitelement. (3.4.)
M Eine quadratische schriftliche Mitteilung, bestehend aus n^2 Elementarquadraten der Seitenlänge $^1/_{100}$ mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist. (1.1.; 1.2.)
M Eine Menge von Elementen, die nach Ansicht des Kritikers PK nicht in ***M*** enthalten sind. (6.1.)
M Ein Schubladenkasten, in dem „Alles worüber gesprochen werden kann“ abzählbar angeordnet ist. (**4**)
Me Ein Schubladenkasten bestehend aus allen e-mails gem. (10.2). (10.4)
MK Die Mitteilung, von der der Kritiker PK feststellt, sie beschreibe sowohl die aus ***M*** gewonnene abzählbare Anordnung R(0,1) als auch die Diagonalzahl c eindeutig und widerspruchsfrei. (8.2.)
n1 Stelle der Mitteilung M_{n1} in der abzählbaren Anordnung aller Mitteilungen M. (1.6.)
n2 Stelle des Elementarwürfels EW_{n2} in der abzählbaren Anordnung aller Elementarwürfel EW. (2.2.)
n3 Stelle des Zeitelementes t_{n3} in der abzählbaren Anordnung aller Zeitelemente t. (2.4.)
n4 Stelle des Raumzeitelementes RZE_{n4} in der abzählbaren Anordnung aller Raumzeitelemente RZE. (2.6.)
n5 Stelle eines Lesezeitelementes LZE in der abzählbaren Anordnung aller Lesezeitelemente. (3.4.)
n6 Stelle eines Lesevorganges in der abzählbaren Anordnung aller Lesevorgänge (3.5.)
n7 Stelle einer Kombination (LV,M) eines Lesevorganges LV mit einer Mitteilung M in der abzählbaren Anordnung dieser Kombinationen. (4.3.)
n8 Stelle eines Denkobjektes DO in der abzählbaren Anordnung aller Denkobjekte. (5.4.)
n9 Stelle eines e-mails in der abzählbaren Anordnung aller e-mails. (10.3.)
P Eine Person als potentieller Leser einer Mitteilung. (3.1.)
PK Ein Kritiker der Abzählbarkeit. (6.1.)
PW Ein „Arbiter Mundi“, jemand im Besitz der absoluten Wahrheit. (9.3.)
r Eine reelle Zahl. (6.2.)
r_{nk} Die k^{te} Dezimalstelle der reellen Zahl r_n in der n^{ten} von R (0,1). (6.2.)
R(0,1) Eine abzählbare Anordnung aller reellen Zahlen r aus dem Intervall (0,1). (6.2.)
$R_{PK}(0,1)$ Eine von PK gewählte abzählbare Anordnung reeller Zahlen aus (0,1). (8.1.)
RZE Ein Raumzeitelement als Elementarwürfel von der Dauer $^1/_{100}$ sek. (2.5.)
t Ein Zeitelement der Länge $^1/_{100}$ sek. (2.3.)
T Der Zeitpunkt eines Lesevorganges LV. (3.1.)
τ Eine transzendente Zahl. (7.3.)
$\aleph_n$ Eine Kardinalzahl

Rekapitulation

Zur Kontrolle der in dieser Arbeit verwendeten Schlussfolgerungen wollen wir noch einmal deren wesentliche Struktur darstellen:

- Ausgangspunkt ist die Tatsache, dass alle Aussagen, Argumentationen, Diskussionsbeiträge etc. stets in die Form von Mitteilungen M gem. **1** gebracht werden können, die für sich allein betrachtet grafische Darstellungen ohne jeden Sinninhalt sind.
- Erst wenn ein Leser P in einem Zeitraum ΔT eine Mitteilung M liest, kann sie gem. **5** für ihn einen Sinn erhalten.
- Da alle möglichen Mitteilungen M gem. **1** und alle möglichen Lesevorgänge LV gem. **3** abzählbar angeordnet werden können gilt dies gem. **5** auch für alle möglichen Objekte unseres Denkens.
- Als solche Objekte können beispielsweise reelle Zahlen, einstellige Funktionen, Elemente von Potenzmengen bzw. Elemente beliebiger Mengen gewählt werden. Die Abzählbarkeit bleibt immer erhalten.
- Behauptet ein Kritiker PK gem. **6** die Existenz überabzählbarer Mengen, kann seine Behauptung gem. **7** und **8** stets widerlegt werden.

Entscheidend bei dieser letzten Schlussfolgerung ist, dass der Kritiker selbst gem. **8** durch seine Aussagen den Widerspruch notwendig herbeiführt. Meinungen anderer Personen wie der Autor, der Leser dieser Arbeit usw. über den Wahrheitsgehalt dieser Aussagen sind irrelevant. Der Grundsatz **„Jede Wahrheit ist relativ“** bleibt gewahrt.

ZAHLEN ZÄHLEN

Kurzfassung: Es wird eine abzählbare Anordnung „aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1“ gegeben. Auf Grund dieser Anordnung wird eine beliebige Diagonalzahl nach Cantor gebildet. Anschließend wird gezeigt, dass bereits die Definition dieser Diagonalzahl einen Widerspruch enthält. Der Versuch, die Unvollständigkeit der Anordnung durch die Bildung einer Diagonalzahl zu zeigen, misslingt.

Definitionen:

Π : = (2, 3, ... π_i, ...) ist die Folge aller der Größe nach angeordneten Primzahlen

α_i, (i = 1, 2, ... ω), sind ω zugelassene Schriftzeichen, beispielsweise Buchstaben, Ziffern, Symbole, das Spatium usw. in verschiedenen Schriftarten, wie Latein, Griechisch, Gotisch, mager, fett usw., auf der Zeile, höher- oder tiefergestellt usw.

Ω: = $\{\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_\omega\}$ ist die Menge aller zugelassenen Schriftzeichen. Es kann sich z.B. um alle in einer Druckerei oder auf einem PC zur Verfügung stehenden Zeichen handeln.

^{L}ZF : = $\alpha_{i1}\ \alpha_{i2} ...\ \alpha_{iL}$ ist eine Zeichenfolge ZF der Länge L, bestehend aus L angeordneten Schriftzeichen $\alpha_k \in \Omega$ mit k = i1, i2, ... iL.

ZF(E) bedeute, ein Element E (eine Zahl oder ein sonstiges Denkobjekt) werde durch die Zeichenfolge ZF eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben.

Jeder durch eine endliche Zeichenfolgen ZF(r) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibbaren reellen Zahl r mit 0 < r < 1 wird eine natürliche Zahl n = n[ZF(r)] wie folgt zugeordnet:
Für ZF(r): = $\alpha_{i1}\ \alpha_{i2} \dots \alpha_{iL}$ sei n[ZF(r)] = $\pi_1^{i1} \bullet \pi_2^{i2} \bullet \dots \bullet \pi_L^{iL}$ wobei π_k die k^te Primzahl aus der Folge Π ist. Jeder endlichen Zeichenfolge ZF wird damit genau eine natürliche Zahl n[ZF] zugeordnet. Nun können alle Zeichenfolgen nach der Größe von n in einer Folge **ZFA** angeordnet werden.

Jeder reellen Zahl r mit 0 < r < 1 wird eine natürliche Zahl n_r wie folgt zugeordnet:
Es sei M$\{$ZF(r)$\}$ die Menge aller jener Zeichenfolgen ZF(r), welche die Zahl r eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben. Nun sei $n_r = \min_{M\{ZF(r)\}} n[ZF(r)]$. Man wählt also aus allen r eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Zeichenfolgen jene mit dem kleinsten zugeordneten n. Alle durch eine endliche Zeichenfolge eindeutig und widerspruchsfrei beschreibbaren reellen Zahlen r zwischen 0 und 1 können nun nach der Größe von n_r in einer Anordnung A(r) abzählbar angeordnet werden.

Behauptung: Die Anordnung A(r) ist vollständig.

Einwand nach Cantor:

Die reellen Zahlen aus A(r) können in (unendliche) Dezimalzahlen entwickelt werden. Es sei r_n die n^{te} reelle Zahl aus A(r) mit

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0.r_{11}\ r_{12}\ .....\ r_{1n}\ .....\\
r_2 &= 0.r_{21}\ r_{22}\ .....\ r_{2n}\ .....\\
&\dots\\
r_n &= 0.r_{n1} r_{n2}\ .....\ r_{nn}\ .....\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Man bildet nun nach Cantor eine **Diagonalzahl** c = 0.$c_1\ c_2$ ..... c_n ..... mit $\forall n$: $c_n \neq r_{nn}$. Dies wird etwa durch $c_n = r_{nn} + 1$ für $r_{nn} \neq 9$ und $c_n = 0$ für $r_{nn} = 9$ erreicht. Es gilt dann $0 \leq c \leq 1$ und, wie von Cantor gefordert, $\forall n$: $c \neq r_n$, Die Diagonalzahl fehlt also in der Anordnung A(r), diese ist unvollständig.

Gegenbeweis:

Der Einwand geht davon aus, dass die Diagonalzahl c durch die hier gegebene Definition **eindeutig und widerspruchsfrei** beschrieben wurde. Diese Definition hat die Form einer Zeichenfolge ZF(c). Nun sei $m_c = n_c = \min_{M\{ZF(c)\}} n[ZF(c)]$ die kleinste c zugeordnete natürliche Zahl. Die c beschreibende Zeichenfolge steht also in ZFA an der Stelle m = m_C und es gilt $c_n = r_{mn}$, insbesondere $c_m = r_{mm}$, im Widerspruch zur Forderung von Cantor $\forall n$: $c_n \neq r_{nn}$. Der Versuch, c gemäß Cantor eindeutig und widerspruchsfrei zu beschreiben, ist also misslungen. Damit ist auch der Einwand nach Cantor hinfällig.

esse est percipi

„And speech created thought which is the measure of the universe“ (Shelley: Prometheus unbound)

01: „Sein ist Wahrgenommen werden“
02: „Existenz“ hat „Wahrnehmung“ zur Voraussetzung
03: Ohne Wahrnehmung keine Existenz
04: Ohne Sinnesorgane (die „wahr“nehmen können) keine Existenz
05: Der Begriff „Existenz“ gewinnt erst im Bereich des „Wahrnehmbaren“ Sinn
06: „Wahrnehmbares“ gewinnt erst durch einen „Wahrnehmenden“ Sinn
07: Der Begriff „Angst“ gewinnt erst durch ein Subjekt „das Angst hat“ Sinn
08: Der Begriff „Blau“ gewinnt erst durch ein Subjekt „das etwas als Blau sieht“ Sinn
09: Der Begriff „Zwei“ gewinnt erst durch ein Subjekt „das eine Menge der Mächtigkeit Zwei erkennt“ Sinn
10: Alles Wahrnehmbare ist (auf Grund der Art und Weise in der wir Wahrgenommenes nur beschreiben können) gequantelt, also abzählbar
11: Der Begriff „Existenz“ gewinnt also erst im Bereich des Abzählbaren einen Sinn
12: Zahlen beruhen auf „Abzählen“
13: Der Vorgang des Abzählens ist eine vom Einzelwesen früh erlernte Erfahrung
14: Natürliche Zahlen werden (wie Raum und Zeit) als Kategorien a posteriori erfahren
15: Natürliche Zahlen sind nicht vom Denksubjekt unabhängig
16: Reelle Zahlen, die durch (abzählbare) Rechenoperationen und/oder Definitionen gebildet werden, sind abzählbar
17: Eine „Mitteilung“ enthält die Übermittlung von Wahrnehmungsinhalten einer Person P1 an eine andere Person P2.
18: Es kann wegen der Subjektbezogenen Wahrnehmungsinhalte kein Kriterium geben, ob durch eine solche Übermittlung P2 den selben Wahrnehmungsinhalt wie P1 empfängt.
19: Es gibt nicht einmal eine Definition dessen, was „der selbe Wahrnehmungsinhalt für P1 und für P2“ bedeutet.
20: Eine dem entsprechende „Meinungsübereinstimmung“ ist in vielen Bereichen leicht zu erzielen, beruht aber nur auf der Gleichartigkeit der Sinnesorgane und der Erfahrungen.
21: Dies gilt insbesondere auch für Denkobjekte der Mathematik wie z.B. Zahlen.
22: Es gibt kein Kriterium, ob P1 und P2 unter der natürlichen Zahl 1 jeweils „das selbe verstehen“.
23: Das selbe gilt für „Verknüpfungen von natürlichen Zahlen“ durch Rechenoperationen.
24: Das selbe gilt für alle Aussagen in irgend einer „Sprache“.
25: Jedes „sinnvolle Sprechen“ setzt eine vorherige Einigung über die verwendete „Sprache“ voraus.
26: Eine solche Einigung wird praktisch stets ohne entsprechenden Hinweis nur implizit vorausgesetzt, ist aber essentiell.
27: Jede Mitteilung ist abzählbar, endlich aber unbegrenzt.
28: Alles Mitteilbare ist abzählbar, endlich aber unbegrenzt
29: Nur Wahrnehmbares ist mitteilbar
30: Der Begriff „Existenz“ kann nur auf Mitteilbares sinnvoll (widerspruchsfrei) angewendet werden
31: Alles Existierende ist abzählbar, endlich aber unbegrenzt
32: Die reellen Zahlen sind abzählbar, endlich aber unbegrenzt
33: Das Cantor’sche Diagonalverfahren führt bei geeigneter Wahl der Anordnung der reellen Zahlen zu einem Widerspruch; ebenso alle bekannten Beispiele angeblich überabzählbarer Mengen (Vgl. „UNIVERSALANORDNUNG“ unter „www,fam.tuwien.ac.at/~wolff/universal.doc“)
34: Der Begriff „Überabzählbar“ beruht letztlich auf <u>einem</u> Vorurteil: „Es gibt eine vom Menschen unabhängige Wahrheit“ (lt. Plato)

Das Spiel „Dodge Ball“ und die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

In ihrem Buch „Coincidences, Chaos, and all That Math Jazz – Making Light of Weighty Ideas“ (Verlag W. W. Norton & Co) stellen die beiden Autoren *Edward B. Burger* und *Michael Starbird* das folgende Spiel zwischen zwei Personen “Dodge Ball” vor:

Spieler 1 hat einen Zettel mit sechs untereinanderstehenden Reihen zu je sechs Kästchen.

Spieler 1

1						
2						
3						
4						
5						
6						

Spieler 2 hat nur eine Reihe von Kästchen, nummeriert von eins bis sechs:

Spieler 2

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Spieler 1 beginnt und füllt die erste Reihe Kästchen (horizontal) nach Belieben mit X- oder O-Symbolen, z. B. XOXXXO. Dann kommt Spieler 2 an die Reihe. Er malt entweder ein X oder ein O in sein erstes Kästchen. Dann ist wieder Spieler 1 dran und so weiter. Spieler 1 gewinnt, wenn eine seiner sechs Reihen am Ende die selbe Sequenz wie die Reihe von Spieler 2 hat. Kann Spieler 2 allen sechs Kombinationen von Spieler 1 „ausweichen“, hat er gewonnen.

Ein simples Spiel, für das Spieler 2 eine simple Gewinntaktik hat: Er trägt in sein erstes Kästchen jenes Symbol ein, das *nicht* im ersten Kästchen der ersten Reihe von Spieler 1 steht. In sein zweites Kästchen trägt er jenes Symbol ein, das *nicht* im zweiten Kästchen der zweiten Reihe von Spieler 1 steht und so weiter. Auf diese Weise verhindert er eine Übereinstimmung seiner Reihe mit jeder Reihe von Spieler 1.

Was aber, sagen dann die Autoren, wenn es unendlich viele unendlich lange Reihen gibt? Gewinnt dann – in dieser freilich äußerst fiktiven Situation – Spieler 2 immer noch? Gewiss doch, er kann ja unendlich lang die oben genannte Taktik anwenden. Aber, und jetzt wird es spannend: Was ist, wenn Spieler 1 die Unendlichkeit ausnützt und einfach *alle* möglichen unendlich vielen Symbol-Kombinationen hinschreibt? Dann bleibt ja dem Spieler 2 keine weitere mehr übrig; seine Reihe muss doch dann einer der von Spieler 1 aufgeschriebenen gleichen? Eben nicht, sagen Burger und Starbird. Selbst dann kann Spieler 2 mit seiner Taktik noch eine dazufügen. Denn, um es kurz zu machen: Die Menge aller unendlich vielen Kombinationen ist größer (gemeint ist, von größerer Mächtigkeit) als die Menge aller unendlich vielen Reihen von Spieler 1.

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese letzte Argumentation nicht haltbar ist:

Eine scheinbar triviale tatsächlich aber essentielle Voraussetzung für dieses Spiel liegt nämlich darin, dass die beiden Spieler *alle* auftretenden Symbolkombinationen *lesen* können. Jeder Spieler muss – um, wie vorgesehen, die Symbole vergleichen zu können – einen Überblick über *alle* bis zu seiner jeweiligen Entscheidung *aufgeschriebenen* Symbole haben. Kein Problem bei allen *endlichen* Spielen, also solchen mit einer endlichen Anzahl von Kästchen bzw. Reihen. Anders liegen die Dinge aber

„wenn es unendlich viele unendlich lange Reihen gibt“. Dann kann nämlich eine Reihe gar nicht vollständig *angeschrieben* werden. Der Spieler 1 kann zwar beliebig viele Symbole in jeder Reihe eintragen aber eben *nur endlich viele*. Wie kann es da überhaupt zu unendlich langen Reihen kommen? Offenbar nur dadurch, dass Spieler 1 ein *Bildungsgesetz* für die Konstruktion der betreffenden Reihe angibt. Etwa in der Art: „XXOXOOXXO....“ mit dem Hinweis, dass „alle weiteren Stellen gleich O“ sind. Ein anderes derartiges Bildungsgesetz wäre etwa: An der n^{ten} Stelle der Reihe steht X, wenn die n^{te} Dezimalstelle der Zahl π gerade ist, sonst O. Diese Reihe wäre eindeutig definiert, kann aber nie vollständig *angeschrieben* werden. Sie gestattet aber dem Spieler 2 in seiner Reihe jede Stelle unter Berücksichtigung der entsprechenden Stelle der Reihe von Spieler 1 festzusetzen.

Ein Spiel mit unendlich langen Reihen ist daher nur möglich, wenn Spieler 1 für jede von ihm angegebene Reihe ein *endliches Bildungsgesetz* angibt. Endliche Bildungsgesetze können aber offensichtlich entsprechend ihrer Formulierung *abzählbar angeordnet* werden. Die Menge aller Reihen, die von Spieler 1 angegeben werden können, ist somit *abzählbar*. Es kann also sehr wohl *unendlich viele unendlich lange Reihen* geben; jedoch nur, wenn diese Reihen *jeweils vollständig beschrieben* werden können, erfüllen sie die Voraussetzungen des Spieles. Es sind daher alle Mengen solcher Reihen abzählbar. Die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen wird nicht überschritten.

ÜBERABZÄHLBARE MENGEN ?

(Eine Diskussionsgrundlage)

Vorbemerkung:

Mathematische Aussagen müssen in irgend einer Sprache gemacht werden. Ausgangspunkt jedweder Diskussion über ein Wissensgebiet im allgemeinen und Mathematik im besonderen findet in einer Umgangssprache statt. Alle Aussagen in einer Umgangssprache sind endlich, wenn auch unbegrenzt, also abzählbar. Es erscheint darum interessant, jene Schlussfolgerungen, die zur Entstehung überabzählbarer Mengen führen, im Hinblick auf ihre sprachlichen Eigenschaften zu untersuchen.

In seinem Buch „Einsteins Schleier" schlägt der Experimentalphysiker Anton Zeilinger vor: „Wirklichkeit und Information sind das selbe" Die Quantelung der physikalischen Wirklichkeit entspräche damit der Quantelung jeder Information, also auch jener, die in mathematischen Objekten enthalten ist.

Inhaltsverzeichnis

1. Eine neue abzählbare Anordnung AM(n) **der natürlichen Zahlen** n**:**
Zunächst werden mathematische Aussagen etwas ungewohnt geordnet. Die Sprache, in der solche Aussagen gemacht werden, bildet den Beginn jeglicher Diskussion ebenso wie jeglicher Beweisführung. Die vorliegende Diskussionsgrundlage verwendet die Deutsche Sprache. Sie wendet sich an Leser, die dieser Sprache mächtig sind. Auf die Bedeutung der Sprache wird weiter unten noch näher eingegangen.

1.1. Die Mitteilungen M**:**
Aussagen der hier behandelten Art werden in die Form von Mitteilungen M gebracht, die auf einem genügend großen Blatt Papier angeschrieben werden können. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird vorausgesetzt, dass diese Mitteilungen quadratisch sind und sich aus Elementarquadraten der Seitenlänge 10^{-2} mm zusammensetzen, von denen jedes einzelne entweder weiß oder schwarz ist. Offenbar lassen sich alle schriftlichen mathematischen Arbeiten so darstellen.

1.1.1. Eine Anordnung der Mitteilungen M **innerhalb einer Gruppe** G(m)**:**
Jeder Mitteilung mit der Seitenlänge $m \cdot 10^{-2}$ mm entspricht eineindeutig eine Zahl Z(M) = $0.a_{11},a_{12}, \ldots a_{1m},a_{21},a_{22}, \ldots\ldots a_{mm}$, wobei a_{ij} genau dann i ist, wenn das j^{te} Elementarquadrat in der i^{ten} Zeile schwarz und 0 wenn es weiß ist. Diese Zahlen Z(M) werden in Gruppen G(m) gleicher Seitenlänge $m \cdot 10^{-2}$ mm zusammengefasst. Die erste Mitteilung in der Gruppe G(1) hat wegen m = 1 die Seitenlänge 10^{-2} mm. Da in G(1) nur ein einziges Elementarquadrat liegt besteht G(1) nur aus den beiden Zahlen 0.0 und 0.1, entsprechend einem weißen und einem schwarzen Elementarquadrat. Die Gruppe G(2) enthält alle Mitteilungen der Seitenlänge $2 \cdot 10^{-2}$ mm. Die Mitteilungen dieser Gruppe bestehen aus 4 Elementarquadraten, entsprechend den 16 Zahlen 0.0000, 0.0001, 0.0010, ... 0.1110, 0.1111. Analog werden alle weiteren Miteilungen mit Seitenlängen $n \cdot 10^{-2}$mm und $n > 2$ in Gruppen zu 2^{n^2} Zahlen zusammengefasst und nach der Größe dieser Zahlen innerhalb jeder Gruppe angeordnet.

1.1.2. Eine abzählbare Anordnung A(M) **aller Mitteilungen** M**:**
Wegen der eineindeutigen Zuordnung M $\Leftrightarrow$ Z(M) aus **1.1.1.** folgt aus der Anordnung der Zahlen Z(M) nach ihrer Größe die gewünschte abzählbare Anordnung A(M) aller Mitteilungen.

1.1.3. Der Schubladenkasten SK(M) **für alle Mitteilungen** M**:**
Nach bekanntem Vorbild entspricht die Anordnung A(M) einem Schubladenkasten SK(M), dessen Laden jeweils eine aller möglichen Mitteilungen M enthalten.

1.2. Der „Sinn" einer Mitteilung:
Alle schriftlichen mathematischen Arbeiten lassen sich in Form einer Mitteilung M der beschriebenen Art darstellen. Der Leser einer solchen Miteilung muss aber deren „Sinn" erfassen können. So muss etwa für ihn 1 die Zahl Eins, 2 die Zahl Zwei usw. bedeuten. Allgemein ist davon auszugehen, dass der Leser die verwendete Sprache versteht. Insbesondere muss er die in dieser Sprache beschriebenen (mathematischen) Objekte kennen und erkennen, also den Sinn einer Miteilung erfassen.

1.3. Eine die natürliche Zahl n **eindeutig und widerspruchsfrei beschreibende Mitteilung** M(n)**:**
Die geforderte Widerspruchsfreiheit soll ausschließen, dass dubiose Beschreibungen Eingang finden wie etwa „Die kleinste natürliche Zahl, größer als 5 und kleiner als 3. Diese Forderung ist das zentrale Element der Beweisführung. Mit ihrer Hilfe werden später klassische Beweise der Überabzählbarkeit von Mengen widerlegt. In den

Schubladen des Schubladenkastens SK(M) finden sich für jede natürliche Zahl n Mitteilungen M(n), die diese Zahl eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben, offenbar sogar unendlich viele. Vergrößert man nämlich die Seitenlänge einer beliebigen Mitteilung durch Hinzufügen lediglich weißer Elementarquadrate bleibt der Sinn einer als schwarze Grafik auf weißem Grund verstandene Mitteilung unverändert. Wird eine Mitteilung aber als weiße Grafik auf schwarzem Grund verstanden, gilt das Gleich für das Hinzufügen schwarzer Elementarquadrate. Da sich auch jede optische Vervielfachung jeder Mitteilung in einer Schublade aus SK(M) findet, gibt es unendlich viele weitere Mitteilungen des selben Inhaltes (wenn nicht ein absoluter Maßstab in der Mitteilung eine Rolle spielt). Andererseits enthält SK(M) auch – und sogar weit überwiegend – völlig sinnlose graphische Darstellungen. Für die gewünschte Anordnung der natürlichen Zahlen reicht es aber aus, sich auf jene Schubladen zu beschränken, in denen eine eindeutige und widerspruchsfreie Beschreibung einer natürlichen Zahl n auftritt.

1.4. Der Schubladenkasten SK[M(n)] **für alle Mitteilungen** M(n)**:**
In diesem Schubladenkasten werden alle jene Mitteilungen M(n) zusammengefasst, die eine natürliche Zahl n eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben.

1.5. Die Auswahl einer einzigen n **eineindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilung** MR(n) **aus der Menge aller Mitteilungen** M(n)**:**
Im Weiteren soll aus allen ein n beschreibenden Mitteilungen M(n) eine einzige zur Beschreibung ausgewählt werden. Das könnte etwa die erste Mitteilung im Schubladenkasten SK[M(n)] sein, die n eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Aber auch jedes andere Auswahlverfahren ist zulässig. Es muss nur eine eineindeutige Zuordnung MR(n) $\Leftrightarrow$ n gewährleistet sein.

1.6. Der reduzierte Schubladenkasten SK[MR(n)] **für alle Mitteilungen** MR(n)**:**
In diesem Schubladenkasten werden alle jene Mitteilungen MR(n) zusammengefasst, die je eine natürliche Zahl n eineindeutig und widerspruchsfrei beschreiben. Damit kommen aber auch die Leser der Mitteilungen ins Spiel. Je nach ihrer Sprachkenntnis aber auch je nach ihrem Wissensstand können verschiedene Leser die Frage, ob eine Mitteilung M eine natürliche Zahl n eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, unterschiedlich beurteilen. Das ändert aber nichts an der grundsätzlichen Möglichkeit der abzählbaren Anordnung der natürlichen Zahlen nach diesem bisher allerdings unüblichen Prinzip.

1.7. Die neue abzählbare Anordnung AM(n) **der natürlichen Zahlen** n **mit Hilfe der Mitteilungen** MR(n) **aus dem reduzierten Schubladenkasten** SK[MR(n)]**:**
Im reduzierten Schubladenkasten SK[MR(n)] sei MR(n) jene einzige Mitteilung, die n eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Es sei nun $\mathcal{M} = \{M\}$ die Menge aller Mitteilungen M aus A(M) und $\mathcal{M}$R(n) = $\{$MR(n)$\}$ die Menge aller Mitteilungen MR(n) aus dem reduzierten Schubladenkasten SK[MR(n)]. Die Abzählbarkeit von $\mathcal{M}$R(n) $\subset \mathcal{M}$ folgt aus der Abzählbarkeit von $\mathcal{M}$ und es sei A[MR(n)] diese abzählbare Anordnung der Mitteilungen MR(n). Wegen der eineindeutigen Zuordnung MR(n) $\Leftrightarrow$ n aus **1.5.** ergibt sich aus der abzählbaren Anordnung A[MR(n)] die gewünschte neue abzählbare Anordnung AM(n) der natürlichen Zahlen n. Dass die natürlichen Zahlen n auch anders als etwa nach ihrer Größe abzählbar angeordnet werden können, ist trivial. Die Methode, Elemente einer Menge mit Hilfe der sie beschreibenden Mitteilungen anzuordnen, ist neu und wird im folgenden auf Mengen angewendet, für deren Überabzählbarkeit klassische Beweise vorliegen.

2. Eine abzählbare Anordnung AM(r)] **der reellen Zahlen** r **aus dem Intervall** (0,1]**:**
Als erstes Beispiel einer abzählbaren Anordnung von als überabzählbar geltenden Mengen wird die Menge der reellen Zahlen aus dem Intervall (0,1] herangezogen. Analog der Anordnung der natürlichen Zahlen n gemäß **1.7.** werden die reellen Zahlen r aus (0,1] mit Hilfe von sie beschreibenden Mitteilungen M(r) angeordnet.

2.1. Das zweite Diagonalverfahren von Cantor:
Mit Hilfe dieses Verfahrens beweist Cantor, dass jede abzählbare Anordnung von reellen Zahlen r aus (0,1] unvollständig sein muss.

2.1.1. Eine beliebige Anordnung A(r) **der reellen Zahlen** r **aus dem Intervall** (0,1]**:**
Die reellen Zahlen r_n aus der Anordnung A(r) werden als unendliche Dezimalzahlen angeschrieben:

$r_1 = 0.a_{11},a_{12}, \dots a_{1n}, \dots..$
$r_2 = 0.a_{21},a_{22}, \dots a_{2n}, \dots..$
:
$r_n = 0.a_{n1},a_{n2}, \dots a_{nn}, \dots..$
:

2.1.2. Beweis der Unvollständigkeit von A(r) **mit Hilfe einer Diagonalzahl** D[A(r)]**:**
Um zu beweisen, dass A(r) nicht alle reellen Zahlen r aus (0,1] enthalten kann, bildet Cantor eine „Diagonalzahl“ D[A(r)] = b = $0.b_1b_2 \dots b_k \dots..$, welche den Bedingungen $\forall k: b_k \neq a_{kk}$ genügt. D[A(r)] = b unterscheidet sich also jedenfalls an den Stellen a_{kk} der Diagonale der Anordnung A(r) aus **2.1.1.** von jedem r_k, so dass $\forall k: b \neq r_k$ gilt. Daraus folgt $b \notin A(r)$. Cantor liefert damit zu jeder beliebigen abzählbaren Anordnung A(r) der reellen Zahlen r aus (0,1] eine weitere reelle Zahl r = D[A(r)] aus (0,1], die in A(r) nicht enthalten ist. Damit beweist Cantor die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen r aus (0,1].

2.2. Die reelle Zahlen r **aus dem Intervall** (0,1] **eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilungen** M(r)**:**
In den Schubladen des Schubladenkastens SK(M) finden sich analog **1.3.** für jede reelle Zahl r aus (0,1] unendlich viele Mitteilungen M(r), die diese Zahl eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben.

2.3. Der Schubladenkasten SK[M(r)] **für alle Mitteilungen** M(r)**:**
In diesem Schubladenkasten werden alle jene Mitteilungen M(r) zusammengefasst, die eine reelle Zahl r aus dem Intervall (0,1] eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben.

2.4. Die Auswahl einer einzigen r **eineindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilung** MR(r) **aus der Menge aller Mitteilungen** M(r)**:**
Wie in **1.5.** wird aus dem Schubladenkasten **2.3.** zu jedem r eine einzige r beschreibende Mitteilung MR(r) ausgewählt, die eine eineindeutige Zuordnung MR(r) ⇔ r gewährleistet.

2.5. Der reduzierte Schubladenkasten SK[MR(r)] **für alle Mitteilungen** MR(r)**:**
Dieser Schubladenkasten wird analog **1.6.** gebildet und enthält somit genau jene Miteilungen MR(r), die eine reelle Zahl r aus (0,1] eineindeutig beschreiben.

2.6. Eine abzählbare Anordnung AM(r) **der reellen Zahlen** r **aus dem Intervall** (0,1] **mit Hilfe der Mitteilungen** MR(r) **aus dem reduzierten Schubladenkasten** SK[MR(r)]**:**

Im reduzierten Schubladenkasten SK[MR(r)] sei MR(r) jene einzige Mitteilung, die r eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Es sei wieder $\mathcal{M} = \{M\}$ die Menge aller Mitteilungen M aus A(M) und $\mathcal{M}$R(r) = {MR(r)} die Menge aller Mitteilungen MR(r) aus dem reduzierten Schubladenkasten SK[MR(r)]. Die Abzählbarkeit von $\mathcal{M}R(r) \subset \mathcal{M}$ folgt wieder aus der Abzählbarkeit von $\mathcal{M}$ und es sei A[MR(r)] diese abzählbare Anordnung der Mitteilungen MR(r). Wegen der eineindeutigen Zuordnung MR(r) $\Leftrightarrow$ r aus **2.4.** ergibt sich aus der abzählbaren Anordnung A[M(r)] die gewünschte abzählbare Anordnung AM(r) der reellen Zahlen r aus (0,1]. Dieses Ergebnis ist alles andere als trivial und widerspricht dem zweiten Diagonalverfahren von Cantor.

2.7. Auch mit Hilfe des zweiten Cantor'schen Diagonalverfahrens kann die Unvollständigkeit dieser abzählbaren Anordnung AM(r) **aller reellen Zahlen** r **aus dem Intervall** (0,1] **nicht gezeigt werden:**

Um die Abzählbarkeit der reellen Zahlen r aus (0,1] gemäß Cantor zu widerlegen, wird im folgenden das Diagonalverfahren auf die eben hergeleitete Anordnung AM(r) angewendet. Die entscheidende Rolle spielt dabei die Diagonalzahl D[AM(r)] gemäß **2.1.2.**. Zunächst wird AM(r) in die Form aus **2.1.1.** gebracht. D[AM(r)] ist dann eine reelle Zahl aus (0,1] der Form $b = 0.b_1b_2, ...$, die sich von jedem r_k aus AM(r) in ihrer k^{ten} Dezimalstelle $b_k \neq a_{kk}$ unterscheidet, also in der Anordnung AM(r) nicht aufscheint. Diese Argumentation übersieht aber einen Widerspruch, der in der Definition der Diagonalzahl selbst liegt. Will ein Kritiker der Vollständigkeit der Anordnung AM(r) nämlich das Cantor'sche Diagonalverfahren anwenden, muss er die Diagonalzahl $D[AM(r)] = b = 0.b_1b_2 ... b_n .....$ mit $\forall n: b_n \neq a_{nn}$ durch eine Mitteilung M{D[AM(r)]} eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben. Damit liegt für ihn diese Mitteilung in einer Schublade des reduzierten Schubladenkastens SK[MR(r)], ist also aus der Menge $\mathcal{M}$R(r) und hat damit in der Anordnung AM(r) einen festen Platz. Dieser Platz sei r_k. Wegen der eineindeutigen Zuordnung MR(r) $\Leftrightarrow$ r aus **2.6.** folgt daraus M{D[AM(r)]} $\Leftrightarrow r_k$. Für die k^{te} Dezimalstelle von r_k gilt daher $a_{kk} = b_k$, im Widerspruch zu $\forall k: b_k \neq a_{kk}$ gemäß **2.1.2.**. Die im zweiten Cantor'schen Diagonalverfahren entscheidende Diagonalzahl konnte somit vom Kritiker nicht widerspruchsfrei beschrieben werden. Damit ist sein Versuch, die Unvollständigkeit von AM(r) zu zeigen, misslungen. Der Grund für dieses Misslingen liegt darin, dass bereits die Beschreibung des „Cantor'schen" Elementes durch eine Mitteilung diesem einen Platz in der Anordnung sichert.

3. Eine Abzählbare Anordnung AM[P(n)] **der Elemente** P(n) **der Potenzmenge** ***M***[P(n)] **der Menge der natürlichen Zahlen** n**:**

Das nächste Beispiel einer abzählbaren Anordnung von als überabzählbar geltenden Mengen sei die Potenzmenge ***M***[P(n)] der Menge der natürlichen Zahlen n, also die Menge aller aus natürlichen Zahlen n gebildeten Mengen. Wieder werden die Elemente P(n) der Potenzmenge mit Hilfe der sie beschreibenden Mitteilungen M[P(n)] angeordnet.

3.1. Ein Beweis der Überabzählbarkeit der Menge *M*[P(n)]:

Wieder wird für eine beliebige abzählbare Anordnung von Elementen der Menge ein Element beschrieben, das in der Anordnung nicht enthalten ist.

3.1.1. Eine beliebige abzählbare Anordnung A[P(n)] **der Elemente der Menge** ***M***[P(n)]**:**
Für die Elemente der Potenzmenge ***M***[P(n)] sei eine beliebige abzählbare Anordnung A[P(n)] gegeben und es sei $P(n)_k$ das k^{te} Element in dieser Anordnung.

3.1.2. Ein klassischer Beweis der Unvollständigkeit von A[P(n)]**:**
Der Kritiker der Vollständigkeit der abzählbaren Anordnung A[P(n)] bildet die „Cantor'sche" Menge $C = \{k \mid k \notin P(n)_k\}$, also die Menge jener natürlichen Zahlen k, die jeweils nicht im k^{ten} Element der abzählbaren Anordnung A[P(n)] enthalten sind. Es gilt also jedenfalls $\forall k$: $C \neq P(n)_k$ und damit $C \notin A[P(n)]$. Andererseits ist C als Menge von natürlichen Zahlen k definiert und damit Element der Potenzmenge ***M***[P(n)]. Mit $C \notin A[P(n)]$ beweist der Kritiker die Unvollständigkeit der Anordnung A[P(n)].

3.2. Die Elemente P(n) **der Potenzmenge** ***M***[P(n)] **eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilungen** M[P(n)]**:**
In den Schubladen des Schubladenkastens SK(M) finden sich analog **1.3.** für jedes Element P(n) aus der Potenzmenge ***M***[P(n)] unendlich viele Mitteilungen M[P(n)], die dieses Element eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben.

3.3. Der Schubladenkasten SK{M[P(n)]} **für alle Mitteilungen** M[P(n)]**:**
In diesem Schubladenkasten werden alle jene Mitteilungen M[P(n)] zusammengefasst, die ein Element P(n) der Potenzmenge ***M***[P(n)] eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben.

3.4. Die Auswahl einer einzigen P(n) **eineindeutig beschreibenden Mitteilung** MR[P(n)] **aus der Menge aller Mitteilungen** M[P(n)]**:**
Wie in **1.5.** wird aus dem Schubladenkasten **3.3.** zu jeder Menge P(n) eine einzige P(n) beschreibende Mitteilung MR[P(n)] ausgewählt, die eine eineindeutige Zuordnung MR[P(n)] $\Leftrightarrow$ P(n) gewährleistet.

3.5. Der reduzierte Schubladenkasten SK{MR[P(n)]} **für alle Mitteilungen** MR[P(n)]**:**
Dieser Schubladenkasten wird wieder analog **1.6.** gebildet und enthält somit genau jene Mitteilungen MR[P(n)], die ein Element P(n) aus ***M***[P(n)] eineindeutig beschreiben.

3.6. Eine abzählbare Anordnung AM[P(n)] **der Elemente** P(n) **der Potenzmenge** ***M***[P(n)] **der Menge der natürlichen Zahlen** n **mit Hilfe der Mitteilungen** MR[P(n)] **aus dem reduzierten Schubladenkasten** SK{MR[P(n)]}**:**
Im reduzierten Schubladenkasten SK{MR[P(n)]} sei MR[P(n)] jene einzige Mitteilung, die P(n) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Es sei wieder $\mathcal{M} = \{M\}$ die Menge aller Mitteilungen M aus A(M) und $\mathcal{M}$MR[P(n)] = {MR[P(n)]} die Menge aller Mitteilungen MR[P(n)] aus dem reduzierten Schubladenkasten SK{MR[P(n)]}. Die Abzählbarkeit von $\mathcal{M}$RM[P(n)] $\subset \mathcal{M}$ folgt wieder aus der Abzählbarkeit von $\mathcal{M}$ und es sei A{MR[P(n)]} diese abzählbare Anordnung der Mitteilungen MR[P(n)]. Wegen der eineindeutigen Zuordnung MR[P(n)] $\Leftrightarrow$ P(n) aus **3.4.** ergibt sich aus der abzählbaren Anordnung A{MR[P(n)]} die gewünschte abzählbare Anordnung AM[P(n)] der Elemente der Potenzmenge ***M***[P(n)].

3.7. Auch mit Hilfe der klassischen Beweismethode nach 3.1.2. kann die Unvollständigkeit der abzählbaren Anordnung AM[P(n)] **der Elemente** P(n) **der Potenzmenge *M*[**P(n)] **der Menge der natürlichen Zahlen** n **nicht gezeigt werden:**
Es sei wieder $P(n)_k$ das k^{te} Element in der Anordnung AM[P(n)]. Der Kritiker der Vollständigkeit dieser Anordnung bildet die „Cantor'sche" Menge C = $\{k \mid k \notin P(n)_k\}$ und folgert daraus gemäß **3.1.2.** C $\notin$ AM[P(n)]. Er muss dabei davon ausgehen, dass C eineindeutig und widerspruchsfrei durch eine Mitteilung MR(C) aus dem reduzierten Schubladenkasten SK{MR[P(n)]} beschrieben wird. Damit ist MR(C) eine Mitteilung aus der abzählbaren Menge $\mathcal{M}$RM[P(n)] der Mitteilungen MR[P(n)] und stehe dort als $MR[P(n)]_k$ an der k^{ten} Stelle der abzählbaren Anordnung A{MR[P(n)]}. Wegen der eineindeutigen Zuordnung MR[P(n)] $\Leftrightarrow$ P(n) aus **3.4.** folgt daher MR(C) $\Leftrightarrow$ $P(n)_k$.= C. Die vom Kritiker beschriebene „Cantor'sche" Menge C steht damit an k^{ter} Stelle in der auf Grund der Anordnung der Mitteilungen gewonnenen abzählbaren Anordnung AM[P(n)]. Somit müsste sowohl $P(n)_k$ = C $\in$ AM[P(n)] nach Definition von $P(n)_k$ als auch C $\notin$ AM[P(n)] nach Behauptung des Kritikers gelten. Die „Cantor'sche" Menge C konnte daher vom Kritiker nicht widerspruchsfrei beschrieben werden. Damit ist sein Beweis der Überabzählbarkeit von ***M***[P(n)] misslungen. Der Grund für dieses Misslingen liegt wieder darin, dass bereits die Beschreibung der „Cantor'schen" Menge C durch eine Mitteilung MR(C) dieser Menge einen Platz in der Anordnung sichert.

4. Eine abzählbare Anordnung AM(E) **der Elemente** E **einer beliebigen Menge *M***(E)**:**
Als letztes Beispiel der abzählbaren Anordnung einer Menge wird eine beliebige allgemeine Menge ***M***(E) von Elementen E betrachtet. Wieder behaupte ein Kritiker der Abzählbarkeit der Elemente dieser Menge, zu jeder beliebigen abzählbaren Anordnung A(E) ein „Cantor'sches" Element C aus ***M***(E) angeben zu können, das in dieser Anordnung nicht enthalten ist.

4.1. Die Elemente E **der Menge *M***(E) **eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilungen** M(E)**:**
In den Schubladen des Schubladenkastens SK(M) finden sich analog **1.3.** für jedes Element E aus ***M***(E) unendlich viele Mitteilungen M(E), die dieses Element eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben.

4.2. Der Schubladenkasten SK{M(E)} **für alle Mitteilungen** M(E)**:**
In diesem Schubladenkasten werden alle jene Miteilungen M(E) zusammengefasst, die ein Element E aus ***M***(E) eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben.

4.3. Die Auswahl einer einzigen E **eineindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilung** MR(E) **aus der Menge aller Mitteilungen** M(E)**:**
Wie in **1.5.** wird aus dem Schubladenkasten **4.2.** zu jedem Element E eine einzige E beschreibende Mitteilung MR(E) ausgewählt, die eine eineindeutige Zuordnung MR(E) $\Leftrightarrow$ E gewährleistet.

4.4. Der reduzierte Schubladenkasten SK[MR(E)] **für alle Mitteilungen** MR(E)**:**
Dieser Schubladenkasten wird wieder analog **1.6.** gebildet und enthält somit genau jene Mitteilungen MR(E), die ein Element E aus ***M***(E) eineindeutig beschreiben.

4.5. Eine abzählbare Anordnung AM(E) **der Elemente** E **der Menge *M***(E) **mit Hilfe der Mitteilungen** MR(E) **aus dem reduzierten Schubladenkasten** SK[MR(E)]**:**

Im reduzierten Schubladenkasten SK[MR(E)] sei MR(E) jene einzige Mitteilung, die E eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Es sei wieder $\mathcal{M} = \{M\}$ die Menge aller Mitteilungen M aus A(M) und $\mathcal{M}$MR(E) = {MR(E)} die Menge aller Mitteilungen MR(E) aus dem reduzierten Schubladenkasten SK[MR(E)]. Die Abzählbarkeit von $\mathcal{M}$MR(E) $\subset \mathcal{M}$ folgt wieder aus der Abzählbarkeit von $\mathcal{M}$ und es sei A[MR(E)] diese abzählbare Anordnung der Mitteilungen MR(E). Wegen der eineindeutigen Zuordnung MR(E) $\Leftrightarrow$ E aus **4.3.** ergibt sich aus der abzählbaren Anordnung A[MR(E)] die gewünschte abzählbare Anordnung AM(E) der Elemente E der Menge ***M***(E).

4.6. Jeder Versuch, die Unvollständigkeit der Anordnung AM(E) **durch die Beschreibung eines in dieser Anordnung angeblich nicht enthaltenen „Cantor'schen" Elementes** C **aus** ***M***(E) **nachzuweisen, misslingt:**
Der Kritiker der Vollständigkeit der abzählbaren Anordnung AM(E) beschreibt ein „Cantor'sche" Element C, von dem er C $\notin$ AM(E) behauptet. Er muss dabei davon ausgehen, dass C eineindeutig und widerspruchsfrei durch eine Mitteilung MR(C) aus dem reduzierten Schubladenkasten SK[MR(E)] beschrieben werden kann. Damit ist MR(C) eine Mitteilung aus der abzählbaren Menge $\mathcal{M}$MR(E) und stehe dort als $MR(C)_k$ an der k^{ten} Stelle. Wegen der eineindeutigen Zuordnung MR(E) $\Leftrightarrow$ E aus **4.3.** folgt daraus $MR(C)_k \Leftrightarrow E_k = C$. Das Element C steht damit an k^{ter} Stelle in der Anordnung AM(E). Somit müsste sowohl $C = E_k \in$ AM(E) nach Definition von E_k als auch C $\notin$ AM(E) nach Behauptung des Kritikers gelten. Das „Cantor'sche" Element C konnte daher vom Kritiker nicht widerspruchsfrei beschrieben werden. Damit ist sein Beweis der Überabzählbarkeit von ***M***(E) misslungen. Wieder muss bereits die Beschreibung des „Cantor'schen" Elementes diesem einen Platz in der Anordnung sichern.

5. Die Einbeziehung des Lesers:
Eine Schwäche der hier verwendeten Methode, Elemente einer Menge mit Hilfe der sie beschreibenden Mitteilungen abzählbar anzuordnen, könnte darin gesehen werden, dass der einbezogene Leser der Mitteilungen gewisse Voraussetzungen erfüllen muss. Er muss der verwendeten Sprache mächtig sein, er muss Mindestkenntnisse in Mathematik oder in einem anderen für die Mengenbildung notwendigen Fachgebiet besitzen usf.. Dies bedeutet aber keine Einschränkung der Schlüssigkeit der Beweisführung für die Abzählbarkeit. Es wird lediglich vorausgesetzt, dass die Diskussion in Form von schriftlichen Mitteilungen M gemäß **1.1.** geführt wird. Da jeder Informationsaustausch – und ein solcher ist für beliebige „Beweisführungen" unabdingbar – unter Verwendung endlicher, den Mitteilungen M analogen Informationselementen vorgenommen werden muss.

5.1. Eine abzählbare Anordnung aller möglichen Lesevorgänge:
Bei jedem möglichen Lesevorgang muss der Leser einen bestimmten Mindestteil des Raumes einnehmen und er benötigt zum Lesen eine bestimmte Mindestzeit. Dies ermöglicht es, auch alle potentiellen Lesevorgänge in der vierdimensionalen Raumzeit abzählbar anzuordnen.

5.1.1. Der raumzeitliche Elementarwürfel $W_E(x_1,x_2,x_1,t)$**:**
Die Raumzeit (ξ_1,ξ_2,ξ_3,τ) wird in raumzeitliche Elementarwürfel W_E der Seitenlänge 1 mm und der Dauer 1 Sekunde zerteilt. Der Elementarwürfel $W_E(x_1,x_2,x_3,t)$ enthalte die Raumzeitpunkte (ξ_1,ξ_2,ξ_3,τ) mit $x_i \le \xi_i < x_i + 1$ mm, (i = 1,2,3) und $t \le \tau < t + 1$ sek.

5.1.2. Eine abzählbare Anordnung $A(W_E)$ **der Elementarwürfel:**

Ausgehend von einem beliebig gewählten Ursprung im raumzeitlichen Koordinatensystem können diese Würfel unschwer abzählbar angeordnet werden. Es sei $A(W_E)$ diese Anordnung und $n[W_E(x_1,x_2,x_3,t)]$ die Nummer von $W_E(x_1,x_2,x_3,t)$ in $A(W_E)$.

5.1.3. Die anlässlich eines beliebigen Lesevorganges die Elemente E **einer beliebigen Menge** ***M***(E) **eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilungen** $M(E,x_1,x_2,x_3,t)$**:**

Jeder potentielle Lesevorgang kann wegen dem von ihm mindestens in Anspruch genommenen Raumzeitvolumen durch mindestens einen Elementarwürfel eindeutig gekennzeichnet werden. Für die ein Element E aus ***M***(E) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilungen $M(E,x_1,x_2,x_3,t)$ sei dies der Elementarwürfel $W_E(E,x_1,x_2,x_3,t)$, der gemäß **5.1.2.** die Nummer $n[W_E(E,x_1,x_2,x_3,t)]$ erhalten habe. Die Entscheidung darüber, ob diese Miteilung das Element tatsächlich eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, trifft ausschließlich der Leser im Zeitraum des Lesens.

5.1.4. Der raumzeitliche Schubladenkasten $SK[M(E,x_1,x_2,x_3,t)]$ **für alle das Element** E **aus** ***M***(E) **eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilungen** $M(E,x_1,x_2,x_3,t)$**:**

Für jeden Elementarwürfel $W_E(x_1,x_2,x_3,t)$ werden alle Mitteilungen $M(E,x_1,x_2,x_3,t)$ in einem Schubladenkasten $SK[M(E,x_1,x_2,x_3,t)]$ zusammengefasst. Analog **1.3.** finden sich darin für jedes Element E unendlich viele E eindeutig und widerspruchsfrei beschreibende Mitteilungen.

5.1.5. Die Auswahl einer einzigen E **eineindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Mitteilung** $MR(E,x_1,x_2,x_3,t)$ **aus der Menge aller Mitteilungen** $M(E,x_1,x_2,x_3,t)$**:**

Wie in **1.5.** wird aus dem Schubladenkasten **5.1.4.** zu jedem Element E eine einzige E beschreibende Mitteilung $MR(E,x_1,x_2,x_3,t)$ ausgewählt, die eine eineindeutige Zuordnung $MR(E,x_1,x_2,x_3,t) \Leftrightarrow E$ gewährleistet.

5.1.6. Der reduzierte raumzeitliche Schubladenkasten $SK[MR(E,x_1,x_2,x_3,t)]$ **für alle Mitteilungen** $MR(E,x_1,x_2,x_3,t)$**:**

Dieser Schubladenkasten wird wieder analog **1.6.** gebildet und enthält somit genau jene Mitteilungen $MR(E,x_1,x_2,x_3,t)$, die ein Element E aus ***M***(E) eineindeutig beschreiben.

5.1.7. Eine abzählbare Anordnung $AM(E,x_1,x_2,x_3,t)$ **der Elemente** E **der Menge** ***M***(E) **mit Hilfe der Mitteilungen** $MR(E,x_1,x_2,x_3,t)$ **aus dem reduzierten Schubladenkasten** $SK[MR(E,x_1,x_2,x_3,t)]$**:**

Im reduzierten Schubladenkasten $SK[MR(E,x_1,x_2,x_3,t)]$ sei $MR[E,x_1,x_2,x_3,t)]$ jene einzige Mitteilung, die E eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Wieder sei $\mathcal{M} = \{M\}$ die Menge aller Mitteilungen M aus A(M) und $\mathcal{M}MR(E,x_1,x_2,x_3,t) = \{MR(E,x_1,x_2,x_3,t)\}$ die Menge aller Mitteilungen $MR(E,x_1,x_2,x_3,t)$ aus dem reduzierten Schubladenkasten $SK[MR(E,x_1,x_2,x_3,t)]$. Die Abzählbarkeit von $\mathcal{M}MR(E,x_1,x_2,x_3,t) \subset \mathcal{M}$ folgt wieder aus der Abzählbarkeit von $\mathcal{M}$ und es sei $A[MR(E,x_1,x_2,x_3,t)]$ diese abzählbare Anordnung der Mitteilungen $MR(E,x_1,x_2,x_3,t)$. Wieder ergibt sich daraus wegen der eineindeutigen Zuordnung $MR(E,x_1,x_2,x_3,t) \Leftrightarrow E$ aus **5.1.5.** die gewünschte abzählbare Anordnung $AM(E,x_1,x_2,x_3,t)$ der Elemente E der Menge ***M***(E) für jeden durch einen Elementarwürfel $W_E(E,x_1,x_2,x_3,t)$ eindeutig gekennzeichneten potentiellen Lesevorgang..

5.1.8. Jeder Versuch, die Unvollständigkeit der Anordnung $AM(E,x_1,x_2,x_3,t)$ **durch die Beschreibung eines in dieser Anordnung angeblich nicht enthaltenen „Cantor'schen" Elementes** C **aus** ***M***(E) **nachzuweisen, misslingt:**

Der Kritiker der Vollständigkeit der abzählbaren Anordnung AM(E,x_1,x_2,x_3,t) beschreibt ein „Cantor'sches" Element C, von dem er C $\notin$ AM(E, x_1,x_2,x_3,t)) behauptet. Diese Kritik muss analog **5.1.3.** durch mindestens einen Elementarwürfel W_E(C,x_1,x_2,x_3,t) eindeutig gekennzeichnet sein. Die entsprechende Mitteilung M(C,x_1,x_2,x_3,t) bezeichnet also nach Aussage des Kritikers ein Element C aus ***E***(E) eindeutig und widerspruchsfrei. Unter allen diesen Mitteilungen aus dem Schubladenkasten SK(E,x_1,x_2,x_3,t) wird wieder jene Mitteilung MR(C,x_1,x_2,x_3,t) aus dem reduzierten Schubladenkasten SK[MR(E,x_1,x_2,x_3,t)] ausgewählt, die C eineindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Damit ist aber MR(C,x_1,x_2,x_3,t) eine Mitteilung aus der abzählbaren Menge $\mathcal{M}$MR(E,x_1,x_2,x_3,t) und stehe dort als MR(C,x_1,x_2,x_3,t)$_k$ an k^{ter} Stelle. Aus der eineindeutigen Zuordnung MR(E,x_1,x_2,x_3,t) $\Leftrightarrow$ E aus **5.1.5.** folgt daraus MR(C,x_1,x_2,x_3,t)$_k$ $\Leftrightarrow$ E_k = C. Das Element C steht damit an k^{ter} Stelle in der Anordnung AM(E,x_1,x_2,x_3,t). Somit müsste sowohl C = $E_k \in$ AM(E,x_1,x_2,x_3,t) nach Definition von E_k als auch C $\notin$ AM(E,x_1,x_2,x_3,t) nach Behauptung des Kritikers gelten. Das „Cantor'sche Element C konnte daher vom Kritiker nicht widerspruchsfrei beschrieben werden. Damit ist sein Beweis der Überabzählbarkeit von ***M***(E) misslungen.

5.2. Die Relativierung der Wahrheit:
In **5.1.3.** wurde festgehalten, dass bei den hier behandelten potentiellen Lesevorgängen die Entscheidung über die Frage, ob eine Mitteilung ein Element eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, dem jeweiligen Leser überlassen bleibt. Damit entscheidet er frei darüber, ob Aussagen wahr oder falsch sind. Auch Irrtümer oder sogar bewusste Unwahrheiten sind in den Betrachtungen eingeschlossen. Der potentielle Leser kann daher auch E $\in$ ***M***(E) $\wedge$ E $\notin$ ***M***(E) behaupten. Für den Autor ist dann allerdings die geforderte Widerspruchsfreiheit nicht gegeben und er erkennt darauf begründete Beweise nicht an.

5.3. Das Modell der Lesegeräte:
Potentielle Leser werden etwa so betrachtet wie Lesegeräte, die auf wie immer geartete Dateneingaben zu wie immer gearteten „Aussagen" kommen. Die Frage, ob solche Aussagen wahr sind oder nicht, ist sekundär. Nur die objektive Arbeitsweise der Lesegeräte wird beobachtet.

6. Die Bedeutung der Umgangssprache:
Abschließend noch eine Bemerkung zur Frage „Metasprache", also Mitteilungen in denen wieder über Miteilungen gesprochen wird Ein möglicher Einwand, die hier auf Grund von Mitteilungen vorgenommenen Anordnungen beträfen nur Elemente einer Metasprache, übersieht, dass in jeder Diskussion vorausgesetzt werden muss (!), die Diskutanten hätten sich zu Beginn auf irgend eine „Umgangssprache" geeinigt, in der sie die Diskussion beginnen. Ordnet man dieser Umgangssprache im Stufenbau der Metasprachen die Stufe 1 zu, dann kann der Stufenbau nur nach oben – und zwar unbegrenzt – fortgesetzt werden, bleibt aber immer endlich. Mit Hilfe der Umgangssprache die Überabzählbarkeit von Mengen zu beweisen zu wollen gleicht der Ankündigung: „Ich fasse zunächst alle Denkobjekte in einer Gruppe zusammen, über die gesprochen werden kann, und spreche jetzt über Denkobjekte außerhalb dieser Gruppe". Jeder Versuch, die Cantor'schen Elemente als Ausgangspunkte für den Start ins Überabzählbare heranzuziehen, ist ebenso zum Misslingen verurteilt wie der Versuch Münchhausens, sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zu ziehen.

7. Verwendete Bezeichnungen in alphabetischer Reihenfolge:

A(M): Eine abzählbare Anordnung aller Mitteilungen M
AM(E): Eine abzählbare Anordnung der Elemente E einer beliebigen Menge ***M***(E) mit Hilfe der sie beschreibenden Mitteilungen M(E)
AM(E,x_1,x_2,x_3,t): Eine abzählbare Anordnung der Elemente E einer beliebigen Menge ***M***(E) mit Hilfe der sie beschreibenden Mitteilungen M(E,x_1,x_2,x_3,t)
AM(n): Eine neue abzählbare Anordnung der natürlichen Zahlen n mit Hilfe der sie beschreibenden Mitteilungen M(n)
AM[P(n)]: Eine abzählbare Anordnung der Elemente P(n) der Potenzmenge ***M***[P(n)] der Menge der natürlichen Zahlen n mit Hilfe der sie beschreibenden Mitteilungen M[P(n)]
AM(r): Eine abzählbare Anordnung der reellen Zahlen r aus dem Intervall(0,1]
A[MR(E,x_1,x_2,x_3,t)]: Eine abzählbare Anordnung der Mitteilungen MR(E,x_1,x_2,x_3,t)
A[MR(n)]: Eine abzählbare Anordnung der Mitteilungen MR(n)
A{MR[P(n)]}: Eine abzählbare Anordnung der Mitteilungen MR[P(n)]
A[MR(r)]: Eine abzählbare Anordnung der Mitteilungen MR(r)
AMR(x_1,x_2,x_3,t): Eine abzählbare Anordnung aller potentiellen Lesevorgänge
A[P(n)]: Eine beliebige Anordnung der Elemente P(n) der Menge ***M***[P(n)]
A(r): Eine beliebige Anordnung der reellen Zahlen aus dem Intervall (0,1]
A(W_E): Eine abzählbare Anordnung aller Elementarwürfel
C: Ein zum Nachweis der Überabzählbarkeit einer Menge von einem Kritiker angegebenes Element aus eben dieser Menge
D[A(r)]: Eine Cantor'sche Diagonalzahl auf Grund der Anordnung A(r)
D[AM(r)]: Eine Cantor'sche Diagonalzahl auf Grund der Anordnung AM(r)
E: Ein Element einer beliebigen Menge ***M***(E)
E_k: Ein Element, das in einer abzählbaren Anordnung an k^{ter} Stelle steht
G(m): Die Gruppe aller Mitteilungen M mit der Seitenlänge $m \cdot 10^{-2}$ mm
M: Eine Mitteilung in Form beliebiger quadratischer graphischer Darstellungen
M(C,x_1,x_2,x_3,t): Eine Mitteilung, die das Element C in dem durch den Elementarwürfel W_E(x_1,x_2,x_3,t) gekennzeichneten potentiellen Lesevorgang eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt
M{D[AM(r)]}: Eine Mitteilung, welche die Diagonalzahl D[AM(r)] eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt
M(E): Eine Mitteilung, die das Element E eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt
M(E,x_1,x_2,x_3,t): Eine Mitteilung, die das Element E in dem durch den Elementarwürfel W_E(x_1,x_2,x_3,t) gekennzeichneten potentiellen Lesevorgang eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt
M(n): Eine Mitteilung, die n eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt
M[P(n)]: Eine Mitteilung, die P(n) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt
M(r): Eine Mitteilung, die r eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt
MR(C): Eine das Cantor'sche Element C eindeutig und widerspruchsfrei beschreibende Mitteilung
$MR(C)_k$: Die k^{te} Mitteilung aus der abzählbaren Anordnung A[MR(E)]
MR(C,x_1,x_2,x_3,t) = $MR(C,x_1,x_2,x_3,t)_k$: Die C eineindeutig und widerspruchsfrei beschreibende Mitteilung, die in der abzählbaren Anordnung A[MR(E,x_1,x_2,x_3,t) an k^{ter} Stelle steht
MR(E): Die E eineindeutig und widerspruchsfrei beschreibende Mitteilung M aus dem reduzierten Schubladenkasten SK[MR(E)]
MR(E,x_1,x_2,x_3,t): Die E eineindeutig und widerspruchsfrei beschreibende Mitteilung M(E,x_1,x_2,x_3,t) aus dem reduzierten Schubladenkasten SK[MR(E,x_1,x_2,x_3,t)]
MR(n): Die n eineindeutig und widerspruchsfrei beschreibende Mitteilung M aus dem

reduzierten Schubladenkasten SK[MR(n)]

MR[P(n)]: Die P(n) eineindeutig und widerspruchsfrei beschreibende Mitteilung M aus dem reduzierten Schubladenkasten SK{MR[P(n)]}

$MR[P(n)]_k$: Die k^{te} Mitteilung aus der abzählbaren Anordnung A{MR[P(n)]}

MR(r): Die r eineindeutig und widerspruchsfrei beschreibende Mitteilung M aus dem reduzierten Schubladenkasten SK[MR(r)]

M(E) Eine beliebige Menge von Elementen E

M[P(n)]: Die Potenzmenge der Menge der natürlichen Zahlen

$\mathcal{M}$: Die Menge aller Mitteilungen M

$\mathcal{M}$MR(E): Die Menge aller Mitteilungen MR(E)

$\mathcal{M}MR(E,x_1,x_2,x_3,t)$: Die Menge aller Mitteilungen $MR(E,x_1,x_2,x_3,t)$

$\mathcal{M}$MR[P(n)]: Die Menge aller Mitteilungen MR[P(n)]

$\mathcal{M}$R(n): Die Menge aller Mitteilungen MR(n)

$\mathcal{M}$R(r): Die Menge aller Mitteilungen MR(r)

$n[W_E(x_1,x_2,x_3,t)]$: Die Nummer des Elementarwürfels $W_E(x_1,x_2,x_3,t)$ in $A(W_E)$

$n[W_E(E,x_1,x_2,x_3,t)]$: Die Nummer des Elementarwürfels $W_E(E,x_1,x_2,x_3,t)$ in $A(W_E)$

P(n): Ein Element der Potenzmenge ***M***[P(n)] der Menge der natürlichen Zahlen

$P(n)_k$: Die k^{te} Menge aus der abzählbaren Anordnung A[P(n)]

SK(M): Ein Schubladenkasten, mit genau einer Lade für jede Mitteilung M aus A(M)

SK[M(E)]: Ein Schubladenkasten mit genau einer Lade für jede Mitteilung M(E)

$SK[M(E,x_1,x_2,x_3,t)]$: Ein raumzeitlicher Schubladenkasten mit genau einer Lade für jede Mitteilung $M(E,x_1,x_2,x_3,t)$

SK[M(n)]: Ein Schubladenkasten mit genau einer Lade für jede Mitteilung M(n)

SK{M[P(n)]: Ein Schubladenkasten mit genau einer Lade für jede Mitteilung M[P(n)]

SK[M(r)]: Ein Schubladenkasten mit genau einer Lade für jede Mitteilung M(r)

SK[MR(E)]: Ein reduzierter Schubladenkasten mit genau einer Mitteilung MR(E) für jedes E

$SK[MR(E,x_1,x_2,x_3,t)]$: Ein reduzierter raumzeitlicher Schubladenkasten mit genau einer Mitteilung $MR(E,x_1,x_2,x_3,t)$ für jedes E

SK[MR(n)]: Ein reduzierter Schubladenkasten mit genau einer Mitteilung MR(n) für jedes n

SK{MR[P(n)]}: Ein reduzierter Schubladenkasten mit genau einer MR[P(n)] für jedes P(n)

SK[MR(r)]: Ein reduzierter Schubladenkasten mit genau einer Mitteilung MR(r) für jedes r

$W_E(x_1,x_2,x_3,t)$: Ein raumzeitlicher Elementarwürfel mit der Seitenlänge 1 mm und der Dauer 1 Sekunde bestehend aus den Raumzeitpunkten (ξ_1,ξ_2,ξ_3,τ) mit $x_i \leq \xi_i < x_i + 1$ mm, (i = 1,2,3) und $t \leq \tau < t + 1$ sek.

$W_E(C,x_1,x_2,x_3,t)$:

$W_E(E,x_1,x_2,x_3,t)$: Raumzeitlicher Elementarwürfel, der den potentiellen Lesevorgang, dessen Mitteilung das Element C bzw ein Element E aus ***M***(E) jeweils eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, gemäß **5.1.3.** eindeutig kennzeichnet

(x_1,x_2,x_3,t): Ein Punkt der vierdimensionalen Raumzeit

(ξ_1,ξ_2,ξ_3,τ): Ein Punkt der vierdimensionalen Raumzeit

Z(M): Eine jeder Mitteilung M zur Nummerierung eineindeutig zugeordnete Zahl

AUTOR: Karl-Heinz Wolff, TU Wien

Erste Veröffentlichung dieser Methode in „Zur Problematik der absoluten Überabzählbarkeit“ in „PHILOSOPHIA NATURALIS“, Bd. 13, Heft 4, 3. Vierteljahr 1972, Verlag Anton Hain-Meisenheim/Glan

DEFINITION, ERKLÄRUNG UND MATHEMATISCHER BEWEIS

(Karl-Heinz Wolff)

Definitionen und Erklärungen haben gemeinsam, daß sie einen unbekannten oder nicht vollständig bekannten Begriff durch bekannte Begriffe erläutern bzw. darstellen. Der Unterschied zwischen Definition und Erklärung liegt (m.E.) darin, daß durch eine Definition (im Gegensatz zur einfachen Erklärung) eine eineindeutige Zuordnung von „Begriff" und „Definition dieses Begriffes" gegeben wird.

Zur Bezeichnung der „Begriffe" werden ebenso wie zur „Definition" oder zur „Erklärung" Worte und Sätze verwendet. Offenbar sind Definitionen ebenso wie Erklärungen nur dann sinnvoll, wenn die zu ihrer Darstellung verwendeten Worte und Sätze als „bekannt" vorausgesetzt werden können. Ist auch nur ein in einer Definition verwendetes Wort, auch nur ein verwendeter Satz nicht „bekannt", also nicht verständlich, dann muß dieses Wort, dieser Satz, selbst definiert werden. Eine Definition (und ebenso eine Erklärung) ist daher nur dann vollständig, wird nur dann ihrer Aufgabe gerecht, wenn sie nur mehr „bekannte", also verständliche Worte und Sätze enthält.

Daraus folgt, daß Definition, Erklärung, ja daß ganz allgemein ein Sprechen über etwas nur sinnvoll sein kann, wenn vorher über den Sinn eines gewissen Grundstocks von Worten und Wortkombinationen Einvernehmen besteht.

Anders ausgedrückt, Definitionen und Erklärungen verschieben nur die Frage nach dem Sinn, nach der Bedeutung von Worten und Sätzen im Bereich der Worte und Sätze, also in einer Sprache hin und her. Soll die Sprache zur Verständigung zwischen zwei verschiedenen Individuen dienen, muß zwischen ihnen bereits Einvernehmen über die Bedeutung eines solchen Grundstocks von Worten und Wortkombinationen bestehen. (Vgl. die Kategorien Kants).

In der Mathematik bieten sich die natürlichen Zahlen als ein solcher Grundstock an, also als etwas, worüber Einvernehmen vorausgesetzt werden darf. Sie lassen sich durch das einfache Experiment des Abzählens verstehen. Ein Experiment, das jeder Mensch im Laufe seines Lebens (lernend) vollzogen hat. Die Einführung der natürlichen Zahlen mit Hilfe eines Axiomensystems ist natürlich ebenfalls möglich. Fraglich ist nur, ob die dabei verwendeten Begriffe, die zum Verständnis des Systems notwendig sind, eher (früher) vorausgesetzt werden können als die natürlichen Zahlen. Für mich möchte ich diese Frage verneinen.

Das Heranziehen der natürlichen Zahlen als Grundstock hat unter anderem auch den Vorteil, daß „12 = 3 x 4" nicht (nach Kant) als synthetisches Urteil a priori sondern als Ergebnis eines „Experiments", nämlich des Abzählens von drei Reihen á vier Elementen, verstanden wird.

Das Hin- und Herschieben der Frage nach der Bedeutung von Worten und Sätzen im Bereich der Worte und Sätze birgt m.E. die große Gefahr, sich in immer komplexere Strukturen zu verlieren. Dies scheint mir z.B. für den Bereich der axiomatischen Mengenlehre ebenso zu gelten wie für sogenannte überabzählbare Mengen.

Die Anwendung der vorstehenden Überlegungen auf mathematische Beweise ist offensichtlich. Auch jede mathematische Beweisführung setzt ein vorheriges Einvernehmen über die Bedeutung eines Grundstocks von Worten und Wortkombinationen voraus. Dies implizit vorauszusetzen erscheint mir unzulässig. Nur so fand - ungerechtfertigt - das sogenannte „aktual Unendliche" Eingang in die Mathematik.

Sprechen wir über Zahlen

(Karl-Heinz Wolff)

Die Überschrift ist insoweit irreführend, als der Autor ja schreibt und nicht mit dem Leser spricht. Was Mathematik im allgemeinen und Zahlen im besonderen betrifft, geht man wohl nicht fehl in der Annahme, daß über alles, worüber gesprochen werden kann, auch geschrieben werden kann. Mathematische Sätze, mathematische Beweise, müssen sogar schriftlich vorliegen, wenn sie allgemein anerkannt werden sollen.

Will man sich gegenüber einer Person verständlich machen, muß diese Person die gewählte Sprache verstehen. Will man sich schriftlich verständlich machen, muß der Leser nicht nur die Schrift kennen sondern auch die Bedeutung der verwendeten Zeichen, Worte und Wortkombinationen.

Wir gehen zunächst davon aus, daß für die schriftliche Darstellung eine gewisse Anzahl von Zeichen zur Verfügung stehen, wie Buchstaben, Ziffern, Symbole, Rechenzeichen, das Spatium usw. Diese Zeichen können kursiv, fettgedruckt, höher- oder tiefergestellt verwendet werden. Es können lateinische, griechische, gotische usw. Buchstaben zugelassen sein. Es kann sich dabei etwa um alle in einer Druckerei oder in einem Computer zur Verfügung stehenden Zeichen handeln. Allgemein nehmen wir an, es stehen ω verschiedene Zeichen α_i mit i = 1, 2, ... ω zur Verfügung und wir bezeichnen die Zeichenmenge mit $\boldsymbol{\Omega}: = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots , \alpha_\omega\}$.

Was kann nun alles geschrieben werden? Wir bezeichnen eine Zeichenfolge, die aus genau L zeilenweise angeordneten Zeichen besteht, mit ${}^{L}ZF$. Offenbar gibt es genau ω^L verschiedene Zeichenfolgen ${}^{L}ZF$ der Länge L.

Wir wollen ja über Zahlen sprechen. Betrachten wir also Zeichenfolgen, die Zahlen beschreiben. Solche Zeichenfolgen sind z.B. „1“ oder „17“. Der Computer ermöglicht auch andere Beschreibungen wie z.B. „10^3“. Diese Zahl kann aber auch durch „1000“ beschrieben werden. Einigt man sich etwa auf die Beschreibung „$\mathbf{a}^{\mathbf{b}}$“ ist gleichbedeutend „**a**exp**b**“, dann kann die recht große Zahl 9exp$\{$9exp[9exp(9exp9)]$\}$ durch eine Zeichenfolge ${}^{23}ZF$ lediglich der Länge L = 23 aus einer verhältnismäßig kleinen Zeichenmenge in einer Zeile beschrieben werden.

Betrachten wir als nächstes Dezimalzahlen: „$\frac{1}{2}$“ kann als Dezimalzahl in der Form „0.5“ beschrieben werden. Die Dezimalzahl-Beschreibung von „$\frac{1}{3}$“ wird problematisch, da hier wegen $\frac{1}{3}$= 0'333..... unendlich viele Dezimalstellen ungleich Null auftreten. Verwenden wir die übliche Beschreibung $0'\dot{3}$ (sprich: Null Komma Drei periodisch), dann ist $\frac{1}{3}$ wenigstens scheinbar als unendliche Dezimalzahl beschrieben. Wir wissen, daß jede Dezimalstelle gleich 3 ist. Aber das Gleiche gilt, wenn man will, auch für die Zahl 1, die als 1’000..... = $1'\dot{0}$ oder 0’999..... = $0'\dot{9}$ ebenfalls als unendliche Dezimalzahl beschrieben werden kann.

Diese Beispiele sollen in die Problematik unendlicher Dezimalzahlen einführen. Weitere Beispiele sind transzendente Zahlen, wie z.B. e = 2.71828... Aber auch hier gibt es (natürlich) endliche Beschreibungen wie etwa e = $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Wir wenden uns nun der Anordnung von Zahlen zu. Für natürliche Zahlen bietet sich als erstes eine Anordnung ihrer Größe nach an, also 1, 2, ... n, n+1,..... Diese Art der Anordnung ist bei den rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ (a,b natürliche Zahlen) nicht möglich. Hier hilft man sich etwa durch eine Anordnung zunächst in Zahlengruppen nach der Größe von $a + b$ und innerhalb dieser Gruppen nach der Größe von a. Etwas umständlicher aber unschwer können auch die algebraischen Zahlen abzählbar angeordnet werden.

Wir bemerken, daß alle diese Anordnungen letzten Endes auf der Anordnung jener natürlichen Zahlen beruhen, die zur **Berechnung** der anzuordnenden Zahlen herangezogen werden. Die natürlichen Zahlen sind das Herz jeder abzählbaren Anordnung.

Bei transzendenten Zahlen, wie etwa e, versagen diese Methoden der Anordnung. Man sagt z.B., daß es nicht möglich sei, die reellen Zahlen in einer Folge abzählbar anzuordnen. Einen eleganten Beweis dafür hat Cantor mit Hilfe eines nach ihm benannten Diagonalverfahrens geliefert:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschränken wir uns auf die reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Zunächst nehmen wir an, es gäbe eine Folge (r_n) = *RA(0,1)* aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 und zeigen dann, wie Cantor einen Widerspruch zur Behauptung der Vollständigkeit dieser Folge herbeiführt. Dazu schreiben wir die reellen Zahlen aus der Folge in Form unendlicher Dezimalzahlen folgendermaßen an:

$$
\begin{array}{l}
r_1 = 0'\, r_{1,1}\, r_{1,2} \ldots r_{1,n} \ldots\ldots \\
r_2 = 0'\, r_{2,1}\, r_{2,2} \ldots r_{2,n} \ldots\ldots \\
\;.\quad\;\; . \\
\;.\quad\;\; . \\
r_n = 0'\, r_{n,1}\, r_{n,2} \ldots r_{n,n} \ldots\ldots \\
\;.
\end{array}
$$

Nun bilden wir eine reelle Zahl c = 0' $c_1 c_2 \ldots c_n$ ..... , für die lediglich $\forall n$: $c_n \neq r_{n,n}$ gefordert wird. Von 10 möglichen Ziffern für jede Dezimalstelle ist bei der Wahl von c nur eine verboten, 9 sind erlaubt. Man sieht sofort, daß ein solches c in der Folge *RA(0,1)* nicht enthalten sein kann, da jede derartige „Cantor'sche Diagonalzahl“ sich von jeder Zahl $r_n \in$ *RA(0,1)* in der n^{ten} Dezimalstelle unterscheidet.

Für den Beweis nach Cantor ist es unerheblich, in welcher Weise die Zahlen in der Folge *RA(0,1)* angeordnet wurden. Sein Beweis der Unvollständigkeit gilt ja für **jede** Folge.

Ist das wirklich so ?

Bevor wir auf diese Frage konkret eingehen, betrachten wir noch einmal die sich einer abzählbaren Anordnung so zäh widersetzenden transzendenten Zahlen. Man kann sie ja nicht in Form unendlicher Dezimalzahlen **anschreiben**. Für ihre Beschreibung sind jeweils umfangreichere Ausdrücke notwendig. Es ist zu erwarten, daß, je komplexere Beschreibungen zugelassen werden, desto mehr transzendente Zahlen beschrieben werden können.

Betrachten wir einmal die Cantor'sche Diagonalzahl c selbst. Wie lautet ihre Beschreibung? Um c zu beschreiben muß zuerst eine Folge (r_n) von reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorliegen. Erst auf Grund einer solchen konkreten Folge kann die gesuchte Diagonalzahl etwa durch $c_n = 1$ für $r_{n,n} \neq 1$ und $c_n = 2$ für $r_{n,n} = 1$ beschrieben werden.

c wird also nicht durch eine „Formel" im klassischen mathematischen Sinn beschrieben, wie etwa eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$, sondern „verbal", also durch Worte. Aber auch die rationalen und die algebraischen Zahlen lassen sich letztlich „verbal" beschreiben.

Dies legt es nahe, eine Anordnung von Zahlen auf Grund ihrer **verbalen** Beschreibung zu versuchen. Verbale Beschreibungen können in Form von Zeichenfolgen ZF vorgenommen werden. Wir betrachten also alle Zeichenfolgen ZF, welche eine reelle Zahl r = r(ZF) beschreiben. ${}^{L}ZF$ mit $r = r({}^{L}ZF)$ sei eine solche Zeichenfolge der Länge L. Werden die Ziffern 0 bis 9 in der Zeichenmenge $\boldsymbol{\Omega}$ zugelassen, dann ist ${}^{1}ZF = 1$ eine Zeichenfolge, welche die reelle Zahl 1 beschreibt, ${}^{2}ZF = 17$ eine Zeichenfolge, welche die reelle Zahl 17 beschreibt, usw.

Natürlich gibt es eine Vielzahl von verbalen Beschreibungen einer reellen Zahl. Es kann 1 auch durch die Zeichenfolge „a geteilt durch a", 17 auch durch „siebzehn" oder „vierunddreißig geteilt durch zwei", usw. beschrieben werden.

Zeichenfolgen lassen sich unschwer abzählbar anordnen. Legt man die Zeichenmenge $\boldsymbol{\Omega}$ zugrunde, dann hat eine Zeichenfolge ${}^{L}ZF_n$ der Länge L die Gestalt $\alpha_{n_1}\,\alpha_{n_2}\,...\,\alpha_{n_L}$ mit $\alpha_{n_k} \in \boldsymbol{\Omega}$ und $k = n_1, n_2 \,...\, n_L$. Zur abzählbaren Anordnung bilden wir für jede solche Zeichenfolge ${}^{L}ZF_n$ eine Hilfszahl $\Pi({}^{L}ZF_n) = 2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot ... \cdot \pi_k{}^{n_k}\cdot ... \cdot \pi_L{}^{n_L}$, wobei π_k die k^{te} Primzahl in der Primzahlenfolge $\boldsymbol{\Pi} := (2, 3, ...\, \pi_i, ...)$ ist. Wäre etwa α_1 der Buchstabe „a" und α_2 der Buchstabe „b", dann entspricht die Hilfszahl $\Pi = 2 = 2^1 = \pi_1{}^1$ der Zeichenfolge „α_1", also dem „a", die Hilfszahl $\Pi = 4 = 2^2 = \pi_1{}^2$ der Zeichenfolge α_2, also dem „b", die Hilfszahl $\Pi = 18 = 2^1 \times 3^2 = \pi_1{}^1 \times \pi_2{}^2$ der Zeichenfolge „$\alpha_1\alpha_2$", also „ab", usw.

Wir können also **alle** endlichen Zeichenfolgen ZF nach der Größe ihrer Hilfszahlen $\Pi(ZF)$ in einer Folge $(ZF_n) = ZFA$ abzählbar anordnen. Dazu setzen wir $\min_{(ZF)} \Pi(ZF) = \Pi(ZF_1) = 2$ und im weiteren $\forall n\text{:}\ \Pi(ZF_n) < \Pi(ZF_{n+1})$. Man erhält nun etwa $\Pi(ZF_2) = 4$ mit $ZF_2 = \alpha_2$, $\Pi(ZF_3) = 6$ mit $ZF_3 = \alpha_1\alpha_1$, $\Pi(ZF_4) = 8$ mit $ZF_4 = \alpha_3$ usw.

Im weiteren betrachten wir alle reellen Zahlen r(ZF) mit 0 < r(ZF) < 1, die durch eine Zeichenfolge ZF eindeutig und widerspruchsfrei (!) beschrieben werden. Diese reellen Zahlen ordnen wir nach der Größe der Hilfszahlen Π(ZF) der sie beschreibenden Zeichenfolgen ZF in einer Folge (r_n) = *RA(0,1)* abzählbar an. Da reelle Zahlen durch mehrere Zeichenfolgen eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden können, tritt jede solche reelle Zahl in der Folge *RA(0,1)* mehrfach auf. Wir behaupten:

1) In der Folge *RA(0,1)* sind alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthalten.
2) Eine Cantor'sche Diagonalzahl kann nicht widerspruchsfrei eingeführt werden.

Die Anordnung der reellen Zahlen in der Folge *RA(0,1)* hängt natürlich von der zugrunde gelegten Zeichenmenge $\boldsymbol{\Omega}$ ab, sowie vom „Sinn", den der Leser einer Zeichenfolge zubilligt. Wir wollen annehmen, daß darüber ebenso Einvernehmen besteht, wie bei der Interpretation der vorhandenen mathematischen Literatur und es sei r_n die n^{te} reelle Zahl in der Folge *RA(0,1)*. Als Dezimalzahl geschrieben habe sie die Form: $r_n = 0' \, r_{n,1} \, r_{n,2} \ldots r_{n,n} \ldots..$

Wir versuchen nun, die Unvollständigkeit der Folge *RA(0,1)* nach Cantor zu beweisen. Dazu bilden wir eine Diagonalzahl $c = 0' \, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots..$ mit $\forall n$: $c_n \neq r_{n,n}$. Könnte ein solches c gefunden werden, müßte $\forall n$: $c \neq r_n$ gelten. Damit wäre $c \notin$ *RA(0,1)*, die Folge also unvollständig.

Tatsächlich kann aber für die von uns gewählte Folge *RA(0,1)* ein solches c nicht widerspruchsfrei gefunden werden. Zweifellos gibt es eine Zeichenfolge *ZF* mit c = c(*ZF*), die einerseits die Bildung der zugrunde gelegten Folge *RA(0,1)* und andererseits das darauf beruhende Bildungsgesetz von c beschreibt. *ZF* ist also eine Zeichenfolge, welche die reelle Zahl c mit 0 < c < 1 eindeutig beschreibt. Wird c durch *ZF* aber auch **widerspruchsfrei** beschrieben?

Für die Zeichenfolge *ZF* können wir die Hilfszahl Π(*ZF*) bilden, die *ZF* eindeutig kennzeichnet. Für die Folge *RA(0,1)* haben wir alle Zeichenfolgen ausgewählt, die eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben. Wäre dies für c = c(*ZF*) der Fall, dann hätte *ZF* ausgewählt werden müssen und c hätte entsprechend der Größe der Hilfszahl Π(*ZF*) **definitionsgemäß** einen Platz in der Folge *RA(0,1)*. Dort stehe c etwa an der n^{ten} Stelle, d.h. es wäre $c = r_n$. Daraus folgt aber $c_n = r_{n,n}$ im Widerspruch zu $\forall n$: $c_n \neq r_{n,n}$, wie dies für die Cantor'sche Diagonalzahl gefordert wurde.

Dieser Widerspruch beruht darauf, daß alle endlichen Zeichenfolgen ZF nach der Größe ihrer Hilfszahlen Π(ZF) in einer Folge *ZFA* abzählbar angeordnet werden können. Unabhängig davon, welcher „Sinn" einer bestimmten Zeichenfolge zugesprochen wird, ist für jede ein Platz in der Folge *ZFA* reserviert. Damit wird aber die Definition jeder Cantor'schen Diagonalzahl selbst widersprüchlich. Das erforderliche c kann durch keine Zeichenfolge ZF widerspruchsfrei beschrieben werden. Beweise, in denen in sich widersprüchliche Begriffe als widerspruchsfrei verwendet werden, bezeichnet der Autor als mißlungen.
Dies gilt für ihn auch hinsichtlich des obigen Versuches, mit Hilfe einer Cantor'schen Diagonalzahl die Unvollständigkeit der abzählbaren Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in der Folge *RA(0,1)* zu beweisen.

Ein leises Unbehagen bei der Betrachtung der Folge *RA(0,1)* liegt für den Autor darin begründet, daß sie auf einer Anordnung von Zeichenfolgen beruht, einer Anordnung, die auf den ersten Blick nichts mit Mathematik zu tun hat. In der Mathematik ist man an Anordnungen, wie die der natürlichen Zahlen (die bekanntlich von Gott stammen), gewöhnt. Die weiter oben beschriebene Anordnung der rationalen Zahlen ist man ebenfalls noch gewohnt. Auch die Auswahl der von uns für die Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 heranzuziehenden rationalen Zahlen bereitet keine Schwierigkeit. Man wählt dabei in der durch die natürlichen Zahlen a und b gebildeten Gruppe nur jene rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ aus, die zwischen 0 und 1 liegen, also alle a mit $1 \leq a < \frac{b}{2}$.

Etwas umständlicher ist schon die Anordnung der algebraischen reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Zwar ist die Anordnung der algebraischen Gleichungen unproblematisch, doch gibt es keine allgemeine Formel für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung, deren Grad höher als 4 ist. Um zu einer Anordnung aller reellen algebraischen Zahlen zwischen 0 und 1 zu kommen, muß man daher zunächst alle Wurzeln a + bi mit nicht verschwindendem Imaginärteil b ausscheiden und aus den verbleibenden die mit 0 < a < 1 auswählen. Diese Aufgabe erscheint durchaus der Aufgabe vergleichbar, eine Zeichenfolge ZF daraufhin zu überprüfen, ob durch sie eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben wird.

Für den Autor ist der für eine Entscheidung in beiden Fällen notwendige Arbeitsaufwand zweitrangig. Entscheidend ist die Tatsache, daß es sich sowohl bei der Menge der algebraischen Zahlen als auch bei der Menge der zu prüfenden Zeichenfolgen um **abzählbare** Mengen handelt. Es treten also bisher noch keine Mengen auf, deren Mächtigkeit die der natürlichen Zahlen übersteigt, wie etwa das Kontinuum im klassischen Sinn.

Überabzählbare Mengen werden aber auch rein mengentheoretisch eingeführt, etwa durch die Bildung der „Potenzmenge“ einer unendlichen Menge. Wir wollen nicht weiter ins Detail gehen. Hier nur soviel: Auch die Bildung der Potenzmenge M und insbesondere die Auswahl eines ihrer Elemente ist nur mit Hilfe verbaler Beschreibungen möglich, bewegt sich daher wieder nur im Bereich der Zeichenfolgen. Zu jedem verbal beschriebenen Element E aus M gibt es daher Zeichenfolgen ZF mit E = E(ZF), die E eindeutig beschreiben. Alle solchen Elemente E = E(ZF) können nach der Größe der Hilfszahlen Π(ZF) (also entsprechend dem Platz der Zeichenfolge ZF in *ZFA*) in einer Folge abzählbar angeordnet werden. Jede Beschreibung eines Elementes der Potenzmenge M, das in dieser Folge nicht enthalten sei, enthält wiederum einen Widerspruch.

Man kann eben Mathematik (wie alle anderen Wissenschaften) nur mit Worten einer problembezogenen Sprache betreiben (Mit Worten läßt sich trefflich streiten...). Der Versuch, durch eine notwendigerweise verbale Konstruktion überabzählbarer Mengen über den Bereich der abzählbaren Zeichenfolgen bzw. der durch sie beschreibbaren Objekte hinaus zu gelangen, gleicht dem Versuch Münchhausens, sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zu ziehen. Dieser Versuch wird ja dem Reich der Märchen und Sagen zugeordnet. Aber das ist ein anderes Thema.

Die Menge der reellen Zahlen als Untermenge einer abzählbaren Menge (Was kann die „Umgangssprache“ leisten ?)

And speech created thought which is the measure of the universe (SHELLEY).
Jedes mathematische Lehrbuch, jeder mathematische Satz, jede Diskussion über mathematische Themen wird in der Praxis in einer „Umgangssprache“ abgefasst; die vorliegende Arbeit etwa in einer Deutschen Sprache. Es herrscht aber Einverständnis darüber, dass der „Sinn einer Aussage“ von der für sie gewählten Sprache unabhängig ist und dass es grundsätzlich immer möglich ist, Aussagen von einer Umgangssprache in eine andere zu übersetzen, ohne dass deren Sinn verloren geht. Zumindest wollen wir nur solche Umgangssprachen zulassen, in die alle Aussagen in Deutscher Sprache übersetzt werden können. Ziel unserer Überlegungen ist es letztlich zu zeigen, dass es nicht widerspruchsfrei möglich ist, über den Bereich der „endlichen umgangssprachlichen Aussagen“ hinaus zu gelangen. Alle derartigen Aussagen werden wir als Teil einer abzählbaren Anordnung von „Zeichenfolgen“ darstellen, ohne dass allen diesen Zeichenfolgen ein Sinngehalt zukommen muss. Am Beispiel der nach diesen Grundsätzen angeordneten natürlichen Zahlen lässt sich einfach zeigen, dass eine analoge Anordnung für alle Denkobjekte möglich ist, „über die man sprechen kann“, insbesondere auch über die reellen Zahlen. Einwände dagegen führen zu Widersprüchen.

1. Eine abzählbare Anordnung der natürlichen Zahlen:

1.1. Die „Umgangssprache“:

1.1.1. Die von uns hier verwendete Umgangssprache ist Deutsch. Es kann sich aber genauso gut um jede beliebige existierende oder neu zu konstruierende Sprache handeln. Einzige Voraussetzung ist, dass in diese andere Sprache und aus dieser anderen Sprache alle behandelten mathematischen Sätze, Beweisführungen etc. „sinngemäß richtig“ übersetzt werden können.

1.1.2. Die Voraussetzung einer „sinngemäß richtigen“ Übersetzung bedeutet keine unzulässige Beschränkung der Allgemeinheit, findet doch jeder verbale oder schriftliche Gedankenaustausch unter der Voraussetzung statt, alle Diskussionsteilnehmer seien sich über den Sinn der jeweils verwendeten Begriffsbezeichnungen einig.

1.2. Eine Darstellung der Menge aller möglichen Aussagen der Umgangssprache als Teilmenge einer abzählbaren Menge von Zeichenfolgen:

1.2.1. Die Sprache ist ursprünglich ein akustisches Phänomen. Sie dient der Verständigung. Gleiches gilt für das (abgesehen von Blindenschrift etc.) optische Phänomen der Schrift. Im Hinblick darauf, dass wissenschaftliche Aussagen letztlich immer schriftlich niedergelegt werden, befassen wir uns im weiteren ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit schriftlichen Aussagen.

1.2.2. Um alle schriftlichen Aussagen in der Umgangssprache als Teilmenge einer abzählbaren Menge von Zeichenfolgen darzustellen, bestimmen wir zunächst die zulässigen Schriftzeichen. Die vorliegende Arbeit wird auf einem PC geschrieben. Es wäre daher naheliegend, alle auf dem PC zur Verfügung stehenden Zeichen zuzulassen. Wir wollen ganz allgemein l verschieden Zeichen zulassen. Der Zeichenvorrat Z bestehe daher aus $Z = \{z_1, z_2, \dots z_j, \dots z_l\}$. Z soll jedenfalls auch die Leerstelle enthalten.

1.2.3. Alle möglichen Zeichenfolgen können nun unschwer abzählbar angeordnet werden. Dazu gruppieren wir sie zunächst nach ihrer Länge. In der Gruppe s fassen wir alle Zeichenfolgen $(z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_s})$ der Länge s zusammen. Jede Zeichenfolge entsteht aus der Verteilung der l zur Verfügung stehenden verschiedenen Zeichen auf die s zur Verfügung stehenden Plätze. Es gibt also innerhalb der Gruppe s genau l^s verschiedenen Zeichenfolgen, die unschwer von $(z_1, z_1, \dots, z_1)$ bis $(z_l, z_l, \dots, z_l)$ angeordnet werden können.

1.2.4. Die gemäß (1.2.3) vorgenommene abzählbare Anordnung aller endlichen aber unbeschränkten Zeichenfolgen enthält somit alle möglichen endlichen schriftlichen Aussagen der Umgangssprache. Die Anordnung ist rein formaler

Natur. Es wurde hier vermieden, auf einen allfälligen „Sinn“ der Zeichenfolgen einzugehen und etwa zwischen sinnvollen, sinnlosen, mehrdeutigen, widersprüchlichen etc. Aussagen zu unterscheiden. Wichtig ist aber, dass jedenfalls alle jene Aussagen, die in einer Diskussion über ein mathematisches Thema in der Umgangssprache gemacht werden können, enthalten sind.

1.3. Die natürlichen Zahlen:

1.3.1. Kant hat den Kategorien „Raum“ und „Zeit“ zentrale Bedeutung beigemessen, weil er der Meinung war, sie wären unabhängig von der Erfahrung a priori Realität. Wir wollen den natürlichen Zahlen zentrale Bedeutung beimessen. Zwar nehmen wir sie nicht als a priori, unabhängig von der Erfahrung, vorgegeben an doch ist das „Experiment des Abzählens“ so fundamental, dass es nahezu analog der Erfahrung von Raum und Zeit für jedermann nachvollziehbar erscheint. Ist daher z.B. von der „Anzahl n“ der Kugeln in einem Sack die Rede, so wird man davon ausgehen dürfen, dass jeder Zählende zum selben Ergebnis gelangt.

1.3.2. Diese Bemerkung erfordert allerdings eine Ergänzung. Soll „jeder Zählende“ zum selben Ergebnis gelangen, muss er gewisse Voraussetzungen erfüllen. Er muss etwa im Stande sein, den Zählvorgang vorzunehmen, er muss bereit sein, das Ergebnis wahrheitsgemäß wiederzugeben etc.. Die Tatsache, dass in der (Deutschen) Sprache zuerst nur die Begriffe „eins“ und „viel“ entwickelt wurden scheint darauf hin zu deuten, dass der Vorgang des Zählens nicht völlig trivial ist. Neben der Bezeichnung eines einzelnen Objektes, etwa „Baum“, wurde offenbar zunächst nur ein Wort für den Begriff „viel Baum“, nämlich „Bäume“ entwickelt, das für zwei Bäume ebenso anzuwenden war wie für einen ganzen Wald. Erst durch den Vorgang des Abzählens konnte der Begriff „Bäume“ genauer umschrieben werden.

.

1.4. Die Darstellung der natürlichen Zahlen in der Umgangssprache:

1.4.1. Man wird wohl davon ausgehen können, dass der für Aussagen in der Umgangssprache zur Verfügung stehende Zeichenvorrat die Ziffern 0 bis 9 enthält. Mit ihrer Hilfe lassen sich alle natürlichen Zahlen im Dezimalsystem darstellen. Es zeigt sich darüber hinaus, dass alle diese Zahlen unendlich oft in der abzählbaren Menge der Zeichenfolgen auftreten. Jede als Zeichenfolge in der Umgangssprache angeschriebene Zahl bleibt ja im allgemeinen unverändert, wenn man vor oder nach ihr eine beliebige Anzahl von Leerstellen an die Zeichenfolge anschließt. Jede etwa in der Gruppe s enthaltene Zahl findet sich daher auch in allen Gruppen $s + r$ mit $r \geq 1$.

1.4.2. Die natürlichen Zahlen treten aber noch viel häufiger auf. Die Zahl 1 kann auch verbal in der Form „eins“ oder „EINS“ dargestellt werden. Aber auch „1 mal 1“, „3/3“, „1^5“, „$\sqrt{1}$“ etc. sind mögliche Darstellungen.

1.4.3. Die Frage, welche natürliche Zahl eine bestimmte Zeichenfolge darstellt, kann aus den verschiedensten Gründen unentscheidbar sein. Die Zahl kann von einer in der Zeichenfolge enthaltenen unentscheidbaren Frage abhängen, sie kann von einer zwar grundsätzlich entscheidbaren aber noch nicht entschiedenen Frage abhängen, die Zeichenfolge kann so umfangreich sein, dass die zu ihrer Durchmusterung notwendige Zeit alle praktischen Möglichkeiten übersteigt etc..

1.4.4. Wir gehen jedenfalls davon aus, dass die abzählbare Menge der Zeichenfolgen zu jeder natürlichen Zahl mindestens eine Zeichenfolge enthält, welche diese Zahl eindeutig und widerspruchsfrei darstellt. Das bedeutet, dass der Leser dieser Zeichenfolge in Analogie zum Abzählen von n Kugeln gemäß (1.3.2) im Stande und bereit sein muss, ihren umgangssprachlichen Sinn in gleicher Weise zu erkennen wie üblicherweise der Leser einer in der Umgangssprache geschriebenen mathematischen Arbeit.

.

1.4.5. Der Vollständigkeit halber halten wir fest, dass wir nur solche durch endliche Zeichenfolgen beschreibbare Denkobjekte als natürliche Zahlen gelten lassen, die grundsätzlich durch einen Zählvorgang erreicht werden können. Die Anzahl der tatsächlich durch einen Zählvorgang erreichbaren Zahlen ist natürlich unter anderem durch die für das Zählen erforderliche Zeit beschränkt. So wird man etwa die Zahl $10^{10^{100}}$ in der Praxis nicht durch Abzählen erreichen können. Als Dezimalzahl ist sie zwar grundsätzlich aber ihres Umfanges wegen nicht tatsächlich beschreibbar, da im Weltall nur Raum zum Anschreiben eines verschwindenden Bruchteiles dieser Zahl zur Verfügung steht.

1.5. Eine Darstellung der Menge der natürlichen Zahlen als Teilmenge einer abzählbaren Menge:

1.5.1. Betrachten wir nun die Anordnung der Zeichenfolgen als Schubladenkasten. Jede Zeichenfolge stellt genau eine Schublade dar. In jede Schublade, deren Zeichenfolge eine natürliche Zahl eindeutig und widerspruchsfrei in der Umgangssprache beschreibt, legen wir die betreffende Zahl.

1.5.2. Wie wir gemäß (1.4) gesehen haben, liegt damit im Regelfall in unendlich vielen Schubladen die selbe natürliche Zahl. In alle jene Schubladen, in denen keine natürliche Zahl liegt, weil die betreffende Zeichenfolge keine natürliche Zahl eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, legen wir die Zahl 1. Damit liegt in jeder Schublade des Schubladenkastens genau eine natürliche Zahl.

1.5.3. Die Menge der Zeichenfolgen und damit die Menge der Schubladen ist abzählbar. Damit ist die Menge der in den Schubladen liegenden natürlichen Zahlen wie gefordert als Teilmenge einer abzählbaren Menge dargestellt worden.

1.6. Eine abzählbare Anordnung der Menge der natürlichen Zahlen:

1.6.1. Die natürlichen Zahlen liegen in dem in (1.5) beschriebenen Schubladenkasten ziemlich ungeordnet. Es liegt nahe, zu versuchen, die natürlichen Zahlen „dichter zu packen" und den Schubladenkasten so zu verkleinern, dass für jede natürliche Zahl nur mehr genau eine Schublade übrig bleibt. Dies ist unschwer möglich. Man braucht sich nur auf genau jene Schubladen zu beschränken, in denen eine bestimmte natürliche Zahl n jeweils in der abzählbaren Anordnung der Schubladen zum ersten Mal aufscheint und lässt alle übrigen Schubladen, die ebenfalls n enthalten, weg.

1.6.2. Eine Verdichtung gemäß (1.6.1) setzt allerdings voraus, dass die Frage, ob eine bestimmte Zeichenfolge eine natürliche Zahl n eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, „objektiv" eindeutig und widerspruchsfrei beantwortet werden kann. In einer Diskussion über diese Frage zwischen zwei Personen P_1 und P_2 lassen wir nur solche in Form einer Zeichenfolge in der Umgangssprache ausgedrückten Argumente zu, die für beide Diskutanten in gleicher Weise verständlich sind. Weiter müssen beide Diskutanten ein und die selbe Zeichenfolge in der Umgangssprache stets in ein und dem selben Sinn verwenden. Wo dies nicht der Fall ist, wie etwa bei der üblichen Verwendung der Zeichenfolge „die natürliche Zahl x", die in dieser Form keine natürliche Zahl eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, verlangen wir, dass die Zahl x durch Erweiterung der sie beschreibenden Zeichenfolge spezifiziert wird, bis eine und nur eine natürliche Zahl durch sie eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben wird.

1.6.3. Die Einschränkung gemäß (1.6.2) scheint auf den ersten Blick trivial zu sein. Sie soll die Diskutanten auch nur daran hindern, die umgangssprachliche Beschreibung natürlicher Zahlen zu verlassen, diese etwa nur abstrakt als Menge von Elementen mit bestimmtem Eigenschaften zu behandeln, und nur diese Elemente in der weiteren Diskussion umgangssprachlich zu beschreiben, ohne die jeweilige natürliche Zahl, die ein derartiges Element darstellt, eindeutig und widerspruchsfrei zu beschreiben. Die Trivialität beruht offenbar darauf, dass uns der Begriff „natürliche Zahl“ klar und eindeutig erscheint, da, wie in (1.2.1) dargelegt, der Vorgang des Abzählens ein anscheinend von jedermann jederzeit nachvollziehbares Experiment ist. Betrachtet man aber statt der natürlichen Zahlen etwa reelle Zahlen, zu denen man nicht in gleicher einfacher experimenteller Weise gelangen kann, wird die Frage der abzählbaren Anordnung komplexer.

2. Eine abzählbare Anordnung der reellen Zahlen entsprechend der abzählbaren Anordnung der natürlichen Zahlen gemäß (1):

2.1. Die Darstellung der reellen Zahlen in der Umgangssprache:

2.1.1. Bei den natürlichen Zahlen kann aus wiederholten Zählvorgängen sehr leicht die Rechenregel der Addition abgeleitet werden. Deren Umkehrung, die Subtraktion, führt über die natürlichen Zahlen hinaus zur Null und zu den negativen ganzen Zahlen. Die reellen Zahlen werden aber im Allgemeinen nicht durch so einfache Rechenvorgänge wie Addition und Subtraktion erzeugt.

2.1.2. Die mehrfache Anwendung der Addition natürlicher Zahlen kann zur Multiplikation führen, wobei der Bereich der natürlichen Zahlen nicht verlassen wird. Aber schon die Umkehrung der Multiplikation, die Division, führt zu den rationalen Zahlen, wobei die Division durch Null zunächst ausgeschlossen bleiben soll.

2.1.3. Sukzessive können immer mehr Arten reeller Zahlen definiert (entdeckt ?!) werden. Algebraische Zahlen etwa können mit Hilfe algebraischer Gleichungen, deren reelle Lösungen sie sind, dargestellt werden. Weitere reelle Zahlen können durch Grenzwertbildungen ebenso gewonnen werden wie durch die Einbeziehung reeller Lösungen nicht algebraischer Gleichungen. Der Phantasie sind keine sehr engen Granzen gesetzt aber alle diese neu definierten Zahlen haben eines gemeinsam: es kann über sie in der Umgangssprache gesprochen werden und man kann sie in der Umgangssprache eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben, wobei allerdings die grundsätzliche Problematik von Beschreibungen in der Umgangssprache, etwa gemäß (1.2.4), nicht übersehen werden darf.

2.1.4. Etwas problematischer wird es auch, wenn neue Zahlen durch Beschreibungen wie „alle Denkobjekte mit den Eigenschaften E_1 bis E_s“ eingeführt werden. Hier wird es manchmal notwendig sein, nachzuweisen, dass diese Objekte unseres Denkens auch widerspruchsfrei definiert wurden. Außerdem wird mit einer derartigen Definition vielfach kein einzelnes Denkobjekt sondern eine Menge von Denkobjekten angegeben während es zu den Eigenschaften einer reellen Zahl doch gehören sollte, dass über sie als einzelne Zahl gesprochen werden kann. Nach den Erfahrungen mit allzu unkritischen Mengenbildungen (die Menge aller Mengen ...) ist hier sicher Vorsicht am Platz.

2.1.5. Für unsere weiteren Überlegungen genügt es aber, sich auf jene reellen Zahlen zu beschränken, die gemäß (2.1.3) eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden können.

2.2. Eine Darstellung der Menge der reellen Zahlen als Teilmenge einer abzählbaren Menge von Zeichenfolgen:

2.2.1. Wir betrachten wieder den Schubladenkasten gemäß (1.5.1). Nun legen wir in jede Schublade, deren Zeichenfolge eine reelle Zahl eindeutig und widerspruchsfrei in der Umgangssprache beschreibt, die betreffende Zahl. In alle jene Schubladen, in denen keine reelle Zahl liegt, weil die betreffende Zeichenfolge keine reelle Zahl eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, legen wir die Zahl 1. Damit liegt in jeder Schublade des Schubladenkastens genau eine reelle Zahl.

2.2.2. Da die Menge der Schubladen abzählbar ist, wurde gemäß (2.2.1) die Menge der reellen Zahlen wie gefordert als Teilmenge einer abzählbaren Menge dargestellt.

.

2.3. Eine abzählbare Anordnung der Menge der reellen Zahlen:

2.3.1. Wie die natürlichen Zahlen gemäß (1.5.1) sind die reellen Zahlen im Schubladenkasten gemäß (2.2.1) weitgehend ungeordnet. Wir verdichten zunächst die Anordnung indem wir analog (1.6.1) für jede reelle Zahl nur jene Schublade belassen, in der diese Zahl zum ersten Mal auftritt. In den verbleibenden Schubladen tritt dann jede reelle Zahl genau einmal auf. Daraus erhalten wir eine abzählbare Anordnung aller reellen Zahlen, soweit diese im Schubladenkasten enthalten sind.

2.3.2. Auch hier machen wir die Einschränkung auf „sinnvolle Diskussionen gemäß (1.6.3)“. Diese Einschränkung erweist sich als nicht trivial. Bekanntlich wurden zahlreiche Beweise dafür entwickelt, dass jede angeblich vollständige abzählbare Anordnung der reellen Zahlen unvollständig sein muss. Zum Nachweis wird meist zu jeder derartigen Anordnung eine reelle Zahl angegeben, die in der angeblich vollständigen Anordnung nicht enthalten ist.

2.3.3. Einer der bekanntesten Unvollständigkeitsbeweise wird mit Hilfe der „Diagonalzahl nach Cantor“ erbracht. Ausgehend von einer angeblich vollständigen Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 wird eine neue reelle Zahl zwischen 0 und 1 gebildet, die so konstruiert ist, dass sie von jeder reellen Zahl der Anordnung verschieden ist.

2.4. Der Beweis der Unvollständigkeit jeder abzählbaren Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nach Cantor:

2.4.1. Es sei $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots..$ eine beliebige Anordnung reeller Zahlen zwischen 0 und 1. Zum Beweis, dass diese Anordnung unvollständig ist, stellen wir jede dieser reellen Zahlen als Dezimalzahl dar. Wir erhalten das folgende Schema:

$$
\begin{array}{l}
r_1 = 0{,}r_{11}r_{12} \ldots r_{1n} \ldots.. \\
r_2 = 0{,}r_{21}r_{22} \ldots r_{2n} \ldots.. \\
\;\vdots \\
r_n = 0{,}r_{n1}r_{n2} \ldots r_{nn} \ldots.. \\
\;\vdots
\end{array}
$$

2.4.2. Nun bilden wir eine Zahl $d = 0{,}d_1d_2 \ldots d_m \ldots..$ mit $\forall m: d_m \neq r_{mm}$. Diese „Cantor’schen Diagonalzahl“ liegt zwischen 0 und 1 und sie unterscheidet sich jeweils an der m^{ten} Dezimalstelle von der reellen Zahl r_m der Anordnung (2.4.1), also an den Stellen der Diagonale . Sie ist daher von allen reellen Zahlen r_n der Anordnung verschieden: $\forall n: d \neq r_n$. Die Anordnung (2.4.1) der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 ist daher unvollständig.

2.4.3. Die Darstellung der Anordnung der reellen Zahlen gemäß (2.4.1) ist aber irreführend. Zwar kann sicher jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 grundsätzlich in eine Dezimalzahl entwickelt werden doch wird dabei übersehen, dass sie, sofern sie nicht nur endlich viele Dezimalstellen aufweist, nicht in dieser Form eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden kann. Die Zahl ⅓ kann nicht vollständig angeschrieben werden, doch ist die Beschreibung ihrer n^{ten} Dezimalstelle trivial. Anders aber etwa die Zahl π - 3. Die Berechnung der n^{ten} Dezimalstelle dieser reellen Zahl zwischen 0 und 1, die offenbar durch eine einfache Zeichenfolge eindeutig und widerspruchsfrei in der Umgangssprache beschrieben werden kann, wird mit steigendem n immer schwieriger.

2.5. Das Versagen der Cantor’schen Beweisführung bei der Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 gemäß (2.3.1):

2.5.1. Wir ordnen zunächst die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 gemäß (2.3.1) abzählbar an. Um deren Unvollständigkeit nach Cantor zu zeigen, muss eine aus der Anordnung gewonnene Dezimalzahl gebildet werden, deren n^{te} Dezimalstelle von der n^{ten} Dezimalstelle der n^{ten} reellen Zahl jeweils verschieden ist. Die Anordnung gemäß (2.3.1) lässt sich zusammen mit dem Bildungsgesetz einer passenden Diagonalzahl d gemäß (2.4.2) unschwer in (mindestens) einer Zeichenfolge Z_d gemäß (1.1.3) darstellen.

2.5.2. Der Kritiker der Vollständigkeit der Anordnung gemäß (2.3.1) will Z_d zum Beweis für die Unvollständigkeit heranziehen. Für ihn beschreibt daher jede Zeichenfolge Z_d eine reelle Zahl d zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei. Die Diagonalzahl d liegt daher für ihn in jener Schublade, deren Zeichenfolge Z_d in der Anordnung (1.2.3) an erster Stelle auftritt. Für ihn hat daher d als reelle Zahl zwischen 0 und 1 einen Platz in der Anordnung der reellen Zahlen r_n gemäß (2.4.1). Es sei dies der Platz n. Für ihn gilt daher $d = r_n$.

2.5.3. Wegen der Definition von d folgt aus $d = r_n$, dass die n^{te} Dezimalstelle von d von der n^{ten} Dezimalstelle von r_n verschieden sein muss, also $d_n \neq r_{nn}$. Dies steht aber in Widerspruch zu (2.5.2), wonach wegen $d = r_n$ auch $d_n = r_{nn}$ gelten muss. Dem Kritiker ist es also nicht gelungen, eine in der Anordnung gemäß (2.3.1) nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei (!) zu beschreiben.

2.6. Das Versagen der Cantor'schen Beweisführung bei einer ungeordneten Darstellung aller reellen Zahlen gemäß (2.2.1):

2.6.1. Beim Übergang von der Darstellung der reellen Zahlen gemäß (2.2.1) zur Darstellung gemäß (2.3.1) war es notwendig, für jede Zeichenfolge zu entscheiden, ob durch sie eine reelle Zahl eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben wird. Dies erforderte eine Einschränkung auf sinnvolle Diskussionen gemäß (1.6.2).

2.6.2. Auf diese Einschränkung kann verzichtet werden, wenn lediglich gezeigt werden soll, dass die Menge der reellen Zahlen Teilmenge einer abzählbaren Menge ist. Dafür ist es ausreichend, zu zeigen, dass die Behauptung, der Schubladenkasten gemäß (1.5.1) enthalte für jede reelle Zahl mindestens eine Schublade, deren Zeichenfolge diese Zahl eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, durch die Bildung einer Cantor'schen Diagonalzahl nicht widerlegt werden kann.

2.6.3. Im Gegensatz zu (2.4.1) gehen wir jetzt nicht von einer vollständigen abzählbaren Anordnung aller reellen Zahlen aus sondern von der vollständigen abzählbaren Anordnung aller Zeichenfolgen gemäß (1.2.3). In dieser Anordnung ersetzen wir jene Zeichenfolgen, die eine reelle Zahl eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben, durch diese Zahl. Die übrigen Zeichenfolgen lassen wir unverändert.

2.6.4. Eine Cantor'sche Diagonalzahl $d = 0,d_1d_2 \ldots d_n \ldots\ldots$ hat wieder die Eigenschaft, dass ihre n^{te} Dezimalstelle ungleich der n^{ten} Dezimalstelle jener reellen Zahl ist, die in der n^{ten} Zeile der Anordnung steht. Steht in der n^{ten} Zeile keine reelle Zahl, dann kann die n^{te} Dezimalstelle von d beliebig gewählt werden. Der Widerspruch zur behaupteten Vollständigkeit folgt wieder daraus, dass auch diese Diagonalzahl d von allen in der Anordnung gemäß (2.6.3) enthaltenen reellen Zahlen verschieden sein muss.

2.6.5. So wie in (2.5.1) lässt sich die abzählbare Anordnung aller Zeichenfolgen gemäß (2.6.3) zusammen mit dem Bildungsgesetz einer passenden Diagonalzahl d gemäß (2.6.4) unschwer in (mindestens) einer Zeichenfolge Z_d gemäß (1.2.3) darstellen. Der Kritiker der Vollständigkeit der Menge der gemäß (2.6.3) eindeutig und widerspruchsfrei beschriebenen reellen Zahlen will Z_d zum Beweis der Unvollständigkeit heranziehen. Für ihn bezeichnet daher die Zeichenfolge Z_d eine reelle Zahl eindeutig und widerspruchsfrei. Damit ist aber gemäß (2.6.3) diese Zeichenfolge durch die reelle Zahl d zu ersetzen. Steht diese Zeichenfolge in der n^{ten} Zeile der Anordnung, dann müsste analog (2.5.3) $d_n \neq d_n$ gelten. Dem Kritiker ist es also nicht gelungen, eine im Schubladenkasten gemäß (1.4.1) nicht enthaltene reelle Zahl eindeutig und widerspruchsfrei zu beschreiben.

3. Eine abzählbare Anordnung der Elemente beliebiger Mengen:

3.1. Eine abzählbare Anordnung der einstelligen ganzzahligen Funktionen:

3.1.1. Wir betrachten wieder den Schubladenkasten gemäß (1.5.1) und legen in jede Schublade, deren Zeichenfolge eine einstellige ganzzahlige Funktion eindeutig und widerspruchsfrei in der Umgangssprache beschreibt, die betreffende Funktion F(x). In alle jene Schubladen, in denen keine einstellige ganzzahlige Funktion liegt, legen wir die Funktion $F_1(x) = x$. Damit liegt in jeder Schublade des Schubladenkastens genau eine einstellige ganzzahlige Funktion.

3.1.2. Wir verdichten analog (1.6.1) die Anordnung der einstelligen ganzzahligen Funktionen im Schubladenkasten, indem wir für jede Funktion nur jene Schublade belassen. In der diese Funktion zum ersten Mal auftritt. In den verbleibenden Schubladen tritt dann jede Funktion genau einmal auf. Daraus erhalten wir eine abzählbare Anordnung aller einstelligen ganzzahligen Funktionen, soweit diese im Schubladenkasten enthalten sind. Es sei $F_n(x)$ die n^{te} Funktion dieser Anordnung $A = \{F_n(x)\}$.

3.1.3. Der Kritiker der Vollständigkeit dieser Anordnung bildet nun eine in der Anordnung nicht enthaltene einstellige ganzzahlige Funktion, wir nennen sie das Cantor'sche Element FC(x), folgendermaßen: $\forall n$: $FC(n) = F_n(n) + 1$. Daraus folgt $\forall n$: $FC(x) \neq F_n(x)$, woraus für den Kritiker die Unvollständigkeit der Anordnung A bewiesen ist.

3.1.4. Das vom Kritiker zum Beweis der Unvollständigkeit der Anordnung A herangezogene Cantor'sche Element FC(x) kann analog (2.5.1) durch eine Zeichenfolge Z_{FC} eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden. FC(x) liegt daher in der Z_{FC} entsprechenden Schublade. Es sei dies die m^{te} Schublade der Anordnung A. Daraus folgt $FC(x) = F_m(x)$. Nach Definition von FC(x) gemäß (3.1.3) müsste daher $F_m(m) = F_m(m) + 1$ gelten und dies ist ein Widerspruch. Dem Kritiker ist es also nicht gelungen, eine in der Anordnung A gemäß (3.1.2) nicht enthaltene einstellige ganzzahlige Funktion eindeutig und widerspruchsfrei zu beschreiben.

3.2. Eine abzählbare Anordnung der Elemente der Potenzmenge der Menge der natürlichen Zahlen:

3.2.1. Wir legen in jede Schublade des Schubladenkastens, deren Zeichenfolge ein Element der Potenzmenge der Menge der natürlichen Zahlen eindeutig und widerspruchsfrei in der Umgangssprache beschreibt, dieses Element. In alle jene Schubladen, in denen kein derartiges Element liegt, legen wir das Element $\{1\}$, also die Menge, bestehend aus der natürlichen Zahl 1. Damit liegt in jeder Schublade des Schubladenkastens genau ein Element der Potenzmenge der natürlichen Zahlen.

3.2.2. Wir verdichten analog (1.6.1) und belassen nur jene Schubladen, in der ein Element der Potenzmenge jeweils zum ersten Mal auftritt. Aus der Anordnung dieser verbleibenden Schubladen erhalten wir eine abzählbare Anordnung aller Elemente der Potenzmenge der natürlichen Zahlen, soweit diese Elemente im Schubladenkasten enthalten sind. Es sei M_n das n^{te} Element dieser Anordnung $\{M_n\}$ von Elementen der Potenzmenge.

3.2.3. Der Kritiker der Vollständigkeit dieser Anordnung bildet nun als Cantor'sches Element die Menge $MC = \{n \mid n \notin M_n\}$, also die Menge jener natürlichen Zahlen n, die jeweils nicht in der n^{ten} Menge der Anordnung $\{M_n\}$ enthalten sind. Daraus folgt $\forall n$: $MC \neq M_n$ und daher $MC \notin \{M_n\}$.

3.2.4. Das vom Kritiker zum Beweis der Unvollständigkeit der Anordnung $\{M_n\}$ herangezogene Cantor'sche Element MC kann analog (2.5.1) durch eine Zeichenfolge Z_{MC} eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden. MC liegt daher in der Z_{MC} entsprechenden Schublade. Es sei dies die m^{te} Schublade aus $\{M_n\}$. Daraus folgt $MC = M_m$ in Widerspruch zur Definition von MC gemäß (3.2.3), wonach $\forall n$: $MC \neq M_n$.

3.3. Eine abzählbare Anordnung der Elemente beliebiger Mengen:

3.3.1. Der Schubladenkasten lässt sich offenbar zur abzählbaren Anordnung der Elemente beliebiger Mengen verwenden. Voraussetzung ist nur, dass die einzelnen Elemente jeweils durch mindestens eine Zeichenfolge gemäß (1.2.3) eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden können.

3.3.2. Wird von einer beliebige Menge gesprochen, dann unterscheiden wir zwischen durch Zeichenfolgen eindeutig und widerspruchsfrei beschreibbaren Elementen, die dieser Menge angehören, Elementen deren Zugehörigkeit zur Menge zweifelhaft ist und Elementen, die der Menge sicher nicht angehören. Bei der Menge kann es sich auch um die leere Menge handeln.

3.3.3. Wir belassen nun zunächst nur jene Schubladen im Schubladenkasten, deren Zeichenfolge ein Element der Menge eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Handelt es sich bei der Menge um die leere Menge, dann enthält der Schubladenkasten keine einzige Schublade. Gibt es mehrere Zeichenfolgen, die ein Element der Menge eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben, dann belassen wir im weiteren nur jene Schublade, die in der Anordnung an erster Stelle steht. Daraus erhalten wir eine abzählbare Anordnung aller Elemente der Menge, soweit diese im Schubladenkasten enthalten sind. Wir behaupten, diese Anordnung sei vollständig.

3.3.4. Der Kritiker der Vollständigkeit dieser Anordnung bildet nun ein Cantor'sches Element EC der Menge und behauptet $EC \notin M$. Dieses Element EC kann analog (2.5.1) durch eine Zeichenfolge Z_{EC} eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden. EC liegt daher in der Z_{EC} entsprechenden Schublade und es müsste $EC \in M$ gelten. Dem Kritiker ist es also nicht gelungen, ein in der Anordnung (3.3.3) nicht enthaltenes Element der Menge eindeutig und widerspruchsfrei zu beschreiben.

4. Eine Verallgemeinerung der Umgangssprache:

4.1. Die Bildschirmmitteilung:

4.1.1. Die bisherige Beschränkung der Untersuchungen auf die Beschreibung von Objekten unseres Denkens mittels Zeichenfolgen in einer Umgangssprache stellt für den Autor keine Beschränkung der Allgemeinheit dar. Er geht davon aus, dass, welche Sprache auch immer gewählt wird, eine Übersetzung aus dieser Sprache in die hier gewählte Deutsche Umgangssprache immer eindeutig möglich ist und umgekehrt.

4.1.2. Der auf Zeichenfolgen gemäß (1.2.3) beruhende Schubladenkasten gemäß (1.5.1) kann jedoch unschwer verallgemeinert werden. Dazu wollen wir an die Stelle der Zeichenfolgen „Bildschirmmitteilungen“ treten lassen. Eine solche Bildschirmmitteilung

- sei quadratisch,
- bestehe aus Elementarquadraten der Seitenlänge 0,01mm und

- jedes Elementarquadrat sei entweder weiß oder schwarz.

4.1.3. Durch geeignete Wahl der weißen und der schwarzen Elementarquadrate kann im Rahmen der Rastergenauigkeit jedes gewünschte graphische Bild dargestellt werden. Da auch alle Zeichenfolgen gemäß (1.2.3) graphisch dargestellt werden können, enthält die Menge der Bildschirmmitteilungen alle Zeichenfolgen.

4.2. Eine abzählbare Anordnung der Bildschirmmitteilungen:

4.2.1. Wir ordnen die Bildschirmmitteilungen zunächst in Gruppen nach der Anzahl der Elementarquadrate an. Die n^{te} Gruppe enthält die Bildschirmmitteilungen bestehend aus n^2 Elementarquadraten. Jedes davon ist entweder weiß oder schwarz. Es gibt also in der n^{ten} Gruppe 2^{n^2} verschiedene Bildschirmmitteilungen die aus je n^2 Elementarquadraten bestehen. Wir kennzeichnen sie durch das n^2 –tupel $(m_{11}, m_{12}, \dots m_{n(n-1)}, m_{nn})$ mit $m_{jk} = 0$ wenn das k^{te} Elementarquadrat in der j^{ten} Zeile weiß ist und $m_{jk} = 1$ wenn es schwarz ist. Die n^2-tupel reichen also von (0,0, ... 0) bis (1,1, ... 1). Innerhalb der n^{ten} Gruppe ordnen wir nun im weiteren die Bildschirmmitteilungen nach der Größe der bis zu n^2-stelligen Zahl $m_{11} \dots m_{nn}$ an.

4.2.2. Analog zu (1.5.1) betrachten wir die Anordnung der Bildschirmmitteilungen als Schubladenkasten. Jede Bildschirmmitteilung stellt genau eine Schublade dar. Wir können nun sagen, wir legen in jede Schublade, deren Bildschirmmitteilung ein bestimmtes Denkobjekt eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, dieses Denkobjekt. Damit können alle Überlegungen und Schlussfolgerungen, die wir aus der Anordnung von Zeichenfolgen (1.2.3) gewonnen haben, übertragen werden. Der Umfang der mit Hilfe der Bildschirmmitteilungen beschreibbaren Denkobjekten wird allerdings nicht wirklich erhöht. Grundsätzlich lässt sich jede Bildschirmmitteilung auch in genügend lange Zeichenfolgen „übersetzen“. Viele Darstellungen vereinfachen sich aber wenn man etwa an die Arabische oder die Chinesische Sprache denkt. Die Bildschirmmitteilungen sind aber nur ein erster Schritt hin zu einer weiteren Verallgemeinerung, die es gestatten wird, auf unterschiedliche Sprachen, unterschiedliche Kenntnisse und unterschiedliche Meinungen einzugehen. Diese Verallgemeinerung wird es auch ermöglichen, die „Wahrheit einer Aussage“ zu relativieren.

5. Die Relativierung der Wahrheit:

5.1. Die Einbeziehung des Lesers einer Bildschirmmitteilung und des Zeitpunkts des Lesens:

5.1.1. Wir haben bisher häufig davon gesprochen, dass eine Zeichenfolge, allgemeiner eine Bildschirmmitteilung, ein bestimmtes Denkobjekt „eindeutig und widerspruchsfrei“ beschreibt. Diese Forderung haben wir grundsätzlich im Hinblick auf jeden Leser einer Bildschirmmitteilung erhoben. Das bedeutet natürlich jeweils eine starke Einschränkung der in Frage kommenden Leser. Dieser muss nicht nur der verwendeten Umgangssprache mächtig sein, er muss auch die nötige Sachkenntnis in der in Rede stehenden Materie mitbringen. Eine Erweiterung der bisher verwendeten Anordnungen von Bildschirmmitteilungen soll diese Einschränkung beseitigen.

5.1.2. Als erstes sollen alle möglichen Leser einer Bildschirmmitteilung einzeln betrachtet werden. Wir sprechen dann nicht mehr vom absoluten „Sinn“ einer Bildschirmmitteilung sondern nur mehr von der „Bedeutung einer Bildschirmmitteilung für eine bestimmte Person in einem bestimmten Zeitpunkt“. Zur abzählbaren Anordnung aller möglichen Personen in allen möglichen Zeitpunkten zerlegen wir die Raumzeit in vierdimensionale Elementarwürfel, mit der Seitenlänge der Elementarlänge und der Dauer der Elementarzeit. Diese Einteilung ist natürlich viel zu fein aber dafür sehr anschaulich.

5.1.3. Jeder mögliche Lesevorgang muss von einem Leser in einem Zeitraum vorgenommen werden. Es muss daher mindestens einen Elementarwürfel geben, der diesen Lesevorgang eindeutig bestimmt. Dazu muss lediglich der Elementarwürfel aus dem Raum, den der Leser einnimmt, und dem Zeitraum des Lesens gewählt werden. Die Elementarwürfel lassen sich offenbar unschwer abzählbar anordnen. Damit ist eine Abzählbare Anordnung aller möglichen Lesevorgänge gegeben.

5.1.4. Wir verknüpfen nun die abzählbare Anordnung aller Bildschirmmitteilungen mit der abzählbaren Anordnung aller möglichen Lesevorgänge und bilden daraus einen Schubladenkasten gemäß (1.5.1). Für jede mögliche Bildschirmmitteilung und für jeden möglichen Lesevorgang reservieren wir eine Schublade. Den Inhalt dieser Schubladen werden wir im weiteren noch bestimmen.

5.2. Die Relativierung der Bedeutung einer Bildschirmmitteilung:

5.2.1. Im Gegensatz zur absoluten Bedeutung einer Bildschirmmitteilung, wie sie noch in (4) stillschweigend vorausgesetzt erscheint, wird es durch (5.1) möglich, von einer solchen absoluten Bedeutung abzusehen und nur mehr von der relativen Bedeutung, bezogen auf einen bestimmten Leser in einem bestimmten Zeitraum, zu sprechen.

5.2.2. Damit geben wir selbst kein Urteil über die Bedeutung einer Bildschirmmitteilung mehr ab sondern überlassen solche Urteile ausschließlich den jeweiligen Lesern in den jeweiligen Zeiträumen. Es sind daher etwa auch folgende Urteile möglich:

„Es gibt eine natürliche Zahl, die größer als 5 und kleiner als 3 ist“
„Es gibt die größte reelle Zahl, die kleiner als 1 ist“

5.2.3. Auch der Frage der Wahrheit solcher Aussagen gegenüber dem Leser selbst kommt keine Bedeutung zu. Der Leser kann bewusst falsch aussagen, er kann sich irren, er kann die Aussage gar nicht verstehen, all dies ist irrelevant. Für uns ist nur wesentlich, dass für alle möglichen Aussagen über die Bedeutung aller einzelnen Bildschirmmitteilungen jeweils eine Schublade reserviert werden kann. Wir vermeiden damit, uns selbst ein Urteil über die Bedeutung einer Bildschirmmitteilung anzumaßen und den Standpunkt eines arbiter mundi einnehmen zu müssen.

.

5.3. Eine Abzählbare Anordnung aller durch eine Bildschirmmitteilung beschreibbaren Denkobjekte:

5.3.1. Gemäß (5.2) darf von der Bedeutung einer Bildschirmmitteilung nur auf den jeweiligen Leser und den jeweiligen Zeitraum des Lesens bezogen gesprochen werden. Diese Bedeutung wollen wir als Denkobjekt bezeichnen. Wir sagen, der Leser denkt im Zeitraum des Lesens an die Bedeutung der Bildschirmmitteilung.

5.3.2. In jede Schublade des Schubladenkastens gemäß (5.1.4) legen wir jetzt das dieser Schublade entsprechende Denkobjekt. Ein solches kann etwa eine bestimmte Zahl oder ein bestimmter Begriff sein. Es ist aber möglich, und es ist bei der überwiegenden Mehrheit der Schubladen so, dass am Ort und im Zeitraum des betreffenden Elementarwürfels gar kein möglicher Leser der Bildschirmmitteilung existiert. In diesem Fall lassen wir die betreffende Schublade leer.

5.3.3. Existiert zu einem Elementarwürfel ein möglicher Leser, dann wird es häufig der Fall sein, dass die Bildschirmmitteilung für ihn unverständlich, mehrdeutig, widerspruchsvoll etc. ist. In all diesen Fällen legen wir das mögliche Urteil des Lesers in die Schublade. In jenen Fällen, in denen der Leser von einer bestimmten Bedeutung der Bildschirmmitteilung spricht (wenn er sie tatsächlich gelesen hat) bzw. sprechen würde (für den Fall des Lesens) legen wir diese Bedeutung als Denkobjekt in die Schublade.

5.3.4. Wir entfernen nun alle leeren Schubladen aus dem Schubladenkasten. Der verbleibende Schubladenkasten enthält nur Schubladen in denen Denkobjekte enthalten sind. Diese Denkobjekte sind nun gemäß der Anordnung (5.1.4) abzählbar angeordnet.

5.3.5. Die Anordnung (5.3.4) enthält auch alle überhaupt möglichen Denkobjekte. Gäbe es nämlich eine Person P, die behauptet, ein Objekt ihres Denkens DO(P) sei nicht in der Anordnung (5.3.4) enthalten, dann beschreibe ich diese Person P, den Zeitpunkt T ihrer Behauptung und DO(P) als das Denkobjekt von P in T durch eine Bildschirmmitteilung BM[P,T]. Dieser Bildschirmmitteilung entspricht zusammen mit mir als Leser und dem Zeitpunkt, in dem ich BM[P,T] beschreibe, mindestens eine Schublade gemäß (5.1.4). Dadurch kann dieses Denkobjekt, da es durch meine Bezugnahme auf P auch mein Denkobjekt geworden ist, in die betreffende Schublade gelegt werden und ist damit im Schubladenkasten enthalten.

6. Die Grenze der Sprache:

6.1. Die Menge alles dessen, worüber gesprochen werden kann:

6.1.1. In der Anordnung gemäß (5.1.4) werden alle möglichen Lesevorgänge betrachtet, ohne auf Sinn oder Bedeutung des Gelesenen einzugehen. Wir betrachten all dies von außen, beobachten lediglich das (möglich) Tun von (möglichen) Subjekten und deren Reaktionen auf einen (möglichen) Lesevorgang.

6.1.2. Es besteht eine gewisse Analogie zur Beobachtung der Monitore von Computern auf Dateneingaben mittels Lochkarten. Die Programmierung der Computer ist uns unbekannt. Wir beobachten lediglich das Bild des jeweiligen Monitors nach Einlesen einer Lochkarte und beschreiben, welches Bild am Monitor welches Computers in welchem Zeitpunkt bei Eingabe welcher Lochkarte erscheint. Die Anzahl der dabei jeweils einzugebenen möglichen Lochkarten ist ebenso wie die Anzahl der mit Lochkarten zu fütternden möglichen Computer zwar unbegrenzt aber jeweils endlich.

6.1.3. Über etwas zu sprechen erfordert eine abzählbare Menge von Worten, allgemeiner eine abzählbare Menge von Bildschirmmitteilungen, und mindestens ein Subjekt, für das diese Worte, diese Bildschirmmitteilung, eine bestimmte Bedeutung haben oder auch nicht. Die Menge dieser (möglichen) Bedeutungen ist für uns die Menge alles dessen, worüber gesprochen werden kann.

6.2. Sinnlose Spracherweiterungen:

6.2.1. Zu den möglichen Denkobjekten gehören auch die Sprachen selbst. In der vorliegenden Arbeit wird die Deutsche Umgangssprache verwendet, um über die Verwendbarkeit von Umgangssprachen zu sprechen. Der Abschnitt (5.3.5) kann als Bildschirmmitteilung angesehen werden. In ihr wird von Bildschirmmitteilungen gesprochen, die selbst wieder Aussagen über Bildschirmmitteilungen enthalten können.

6.2.2. Man kann also einen Stufenbau von Bildschirmmitteilungen errichten, der niemals abgeschlossen ist. Über jede Bildschirmmitteilung an der jeweils höchsten Stufe des gerade betrachteten Stufenbaues kann wieder in einer neuen übergeordneten Bildschirmmitteilung gesprochen werden, analog dem Fortschreiten in der Reihe der natürlichen Zahlen von n zu n + 1. Die natürlichen Zahlen sind endlich aber unbegrenzt. Man führt dann den Grenzwert $\lim_{n \to \infty} n = \infty$

ein. Er hat aber im Stufenbau der Bildschirmmitteilungen kein sinnvolles Äquivalent.

6.2.3. Spricht man von der Menge alles dessen, worüber gesprochen werden kann, dann ist es nicht sinnvoll, Sätze wie: “Ich spreche jetzt über Denkobjekte außerhalb der Menge dessen, worüber gesprochen werden kann“ zu bilden. Dieser Satz enthält einen Widerspruch in sich, der den Widersprüchen in (2,5,3), (2,6,5), (3,1,4), (3,2,4) und (3,3,4) entspricht. Jeder Versuch, über den durch eine Umgangssprache beschreibbaren Bereich hinaus zu gelangen, gleicht dem Versuch Münchhausens, sich selbst am eigenen Zopf aus dem Sumpf zu ziehen. Münchhausen fehlt ein Bezugspunkt außerhalb des Sumpfes, an dem er sich festhalten könnte. In gleicher Weise gibt es kein Bezugssystem, in dem man widerspruchsfrei über Denkobjekte sprechen könnte, die außerhalb der Menge dessen liegen, worüber gesprochen werden kann.

6.2.4. Es erscheint sinnvoll zu sagen: „Die Welt ist alles, worüber gesprochen werden kann“.

AUTOR: Karl – Heinz WOLFF, TU Wien

ABZÄHLBARKEIT

RELATIVE WAHRHEIT UND UNIVERSALANORDNUNG

(Karl-Heinz Wolff)

Kurzfassung: Mathematische Beweise müssen endlich sein. Objekte der Mathematik, wie z.B. reelle Zahlen, müssen in endlicher Form beschrieben werden können. Alles, was in endlicher Form beschrieben werden kann, läßt sich abzählbar anordnen, also auch die in endlicher Form beschreibbaren reellen Zahlen. Wir bilden zunächst eine abzählbare Anordnung aller möglichen endlichen Aussagen und nennen sie ihres universellen Charakters wegen *Universalanordnung.* Aus ihr gewinnen wir weitere abzählbare Anordnungen aller (in endlicher Form beschreibbaren) Objekte unseres Denkens, insbesondere auch der reellen Zahlen.
Die Unvollständigkeit einer Folge von reellen Zahlen wird üblicherweise durch die Einführung einer Cantor'schen Diagonalzahl bewiesen. Diese wird aber selbst in endlicher Form beschrieben und hat damit ihren festen Platz in einer solchen Folge. Durch sie kann daher nicht die Unvollständigkeit dieser Folge bewiesen werden. Vielmehr wird gezeigt, daß bereits die Definition jeder derartigen Cantor'schen Diagonalzahl einen Widerspruch in sich enthält.

Stichworte: Abzählbare Anordnung, Cantor'sches Diagonalverfahren (Kritik), Kontinuumhypothese, Überabzählbare Mengen (Kritik), Universalanordnung, Wahrheit als relativer Begriff, Cantor's diagonal process (critic), continuum hypothesis, countable arrangement, uncountability.

EINFÜHRUNG:

Von wissenschaftlichen Aussagen fordern wir, daß sie schriftlich formuliert werden können. Sie lassen sich dann in einer Fachbibliothek zusammenfassen.

Kurd Laßwitz (1848 - 1910) hat eine *Universalbibliothek* eingeführt, die etwa folgendermaßen aufgebaut ist: Eine Seite bestehe aus 100 Zeilen à 100 Zeichen (Buchstaben, Zahlen, Symbolen, dem Spatium usw.) und ein Band der Bibliothek aus 1000 Seiten. Der erste Band enthalte etwa nur Spatien, sei also leer. Im zweiten Band stehe an der ersten Stelle ein a, im übrigen sei der Band leer. In den folgenden Bänden rücke das einzelne a stellenweise, zeilenweise und seitenweise vor. Da es 100 x 100 x 1000 = 10^7, also 10 Millionen Stellen gibt, steht das a im 10000001^{ten} Band an der letzten Stelle der letzten Zeile der letzten Seite, während der Band im übrigen leer ist. Jede mögliche Verteilung aller zur Verfügung stehenden Zeichen auf 1000 Seiten mit je 100 Zeilen mit je 100 Stellen bildet einen eigenen Band der Bibliothek.

Diese Bibliothek enthält alles, was jemals geschrieben wurde, aber auch alles, was jemals geschrieben werden kann. Sie umfaßt Goethes Faust ebenso wie die vorliegende Arbeit des Autors. Eine Schrift, deren Umfang einen Band übersteigt, die also aus mehr als 10 Millionen Zeichen besteht, findet sich auf mehrere Bände aufgeteilt. Das Auffinden eines bestimmten Bandes würde sich allerdings äußerst mühsam gestalten. Geht man von einem Zeichenvorrat von 500 Zeichen (Buchstaben in verschiedenen Schriftarten, auf der Zeile geschrieben, höher- oder tiefergestellt, Sonderzeichen usw.) aus, dann gibt es genau $500^{10,000.000}$ verschiedene Bände. Die Bibliothek fände also in unserem Universum bei weitem keinen Platz.

Bei aller Vielfalt, die eine Auswahl aus 500 Zeichen gestattet, wären gewisse Schriftwerke, wie chinesische, japanische oder koreanische, ebenso wie Zeichnungen oder Graphiken nicht in der Universalbibliothek enthalten. Wir ersetzen daher die Bände durch quadratische Bilder, gebildet aus weißen und schwarzen Quadraten der Seitenlänge $1/100^{\text{tel}}$ mm. Die gewählte Feinheit des Rasters gestattet die Darstellung praktisch aller Schriften und Graphiken. Jedes derartige Bild kann als Mitteilung M für eine Person P in einem Zeitraum ΔT angesehen werden.

Wir zeigen nun, daß alle möglichen Mitteilungen M für alle möglichen Personen P in allen möglichen Zeiträumen ΔT in einer *Universalanordnung aller Aussagen* abzählbar angeordnet werden können. Aus ihr kann man weitere abzählbare Anordnungen gewinnen. Ist etwa eine Person P in einem Zeitraum ΔT bereit zu bejahen, daß eine Mitteilung M für sie ein bestimmtes Denkobjekt, z.B. eine reelle Zahl, eindeutig beschreibt, dann kann diesem Denkobjekt der entsprechende Platz in der Universalanordnung zugeordnet und daraus die neue Anordnung als Folge aller ausgewählten Denkobjekte, z.B. aller reellen Zahlen, gewonnen werden.

Bei einer abzählbaren Anordnung der reellen Zahlen in einer Folge (r_n) wird üblicherweise eine Cantor'sche Diagonalzahl zum Beweis der Unvollständigkeit dieser Folge eingeführt. Der Beweis versagt aber im Falle einer auf der Universalanordnung beruhenden Folge der reellen Zahlen, da auch jede Cantor'sche Diagonalzahl c einen Platz in der Folge hat. Steht sie dort an n^{ter} Stelle, dann wird für sie $c_n \neq c_n$ gefordert. c läßt sich also dann nicht widerspruchsfrei definieren, wenn die Folge (r_n) auf Grund der Universalanordnung gebildet wurde.

1. Wahrheiten sind relativ:

1.1. Begriffe sind grundsätzlich unscharf.

1.1.1. Begriffe werden durch Erfahrung *empirisch* gewonnen bzw. gebildet und enthalten daher Unschärfen der Außenwelt und der Begriffs*bildung.*

1.1.1.1. Die Menschen sind einander in ihrem materiellen Aufbau durch Vererbung ähnlich.

1.1.1.2. Die Außenwelt wird durch Vermittlung von Sinnesorganen auf innere *bewußte* (dem Bewußtsein zugängliche) und auf innere *unbewußte* Speicher abgebildet.

1.1.1.2.1. Es besteht in dieser Hinsicht eine *Analogie* zwischen Mensch und Computer.

1.1.1.2.2. Es entsprechen

a) der Aufnahme, der Verarbeitung und der Speicherung von bewußten und/oder unbewußten Sinneseindrücken durch den Körper die Eingabe, die Verarbeitung und die Speicherung von Daten in einem Computer,

b) dem bewußten Erleben von optischen, akustischen, gedanklichen usw. Eindrücken die Ausgabe von Daten des Computers auf einem Monitor bzw. auf einem sonstigen Datenträger.

1.1.1.3. Die selbe Außenwelt, der gleichartige Aufbau der Menschen (1.1.1.1) und die gleichartigen Abbildungen (1.1.1.2) führen zu gleichartigen Speicherinhalten und Speicherausgaben auch für verschiedene Menschen.

1.1.2. Die Gleichartigkeit der Begriffsbildung für Sprache und Denken erweist sich als Zweckmäßig für das Überleben des Einzelnen und der Menschheit.

1.1.2.1. Auf Gefahren kann durch vererbtes und/oder erlerntes Verhalten zweckmäßig reagiert werden.

1.1.3. Verbleibende Unschärfen der Begriffsbildung stehen dem nicht entgegen.

1.1.3.1. Begriffe wie „Tier“ oder „Pflanze“ bewähren sich im täglichen Leben, auch ohne daß sie genau definiert bzw. gegeneinander genau abgegrenzt werden müssen.

1.1.3.2. Begriffe aus Sätzen wie „Gott ist die Liebe“ können auch ohne genaue Abstimmung der Begriffsinhalte verwendet werden (und werden dies auch).

1.1.4. Begriffsinhalte können trotz 1.1.1.3 wegen 1.1.1 von verschiedenen Personen oder von ein und der selben Person in verschiedenen Zeiträumen (!) unterschiedlich interpretiert bzw. verstanden werden.

1.2. Der „Inhalt einer Mitteilung“ hängt von der Interpretation der in ihr verwendeten Begriffe durch den jeweiligen Leser dieser Mitteilung ab.

1.2.1. Mitteilungen werden im allgemeinen von einer Person an eine andere Person gemacht.

1.2.2. Mitteilungen können von einer Person für sie selbst (zur Erinnerung) gemacht werden.

1.2.3. Wegen 1.1.4 kann ein und die selbe Mitteilung von zwei verschiedenen Personen oder von ein und der selben Person in zwei verschiedenen Zeiträumen unterschiedlich interpretiert werden.

1.2.3.1. Die Mitteilung „ACHT“ kann z.B. als Zahl, als Wort aus dem Satz „IN ACHT UND BANN TUN“ oder als Teil einer Mitteilung wie „ACHTUNG“ oder „PACHT“ verstanden werden.

1.2.3.2. Welche Interpretation der Leser der Mitteilung „ACHT“ tatsächlich wählt, hängt davon ab, in welchem Zusammenhang er sie liest. Anders ausgedrückt, ist die Interpretation vom *Zustand* des Lesers im Zeitraum des Lesens abhängig, analog dem *Zustand* eines Computers im Zeitraum der Eingabe von Daten.

1.3. Die Wahrheit einer Mitteilung wollen wir nur relativ zu der die Mitteilung lesenden Person und zum Zeitraum des Lesens beurteilen.

1.3.1. Die Wahrheit einer Mitteilung für deren Leser im Zeitraum des Lesens hängt von der Interpretation der Mitteilung durch den Leser ab.
1.3.2. Wegen 1.2.3 kann die Wahrheit einer Mitteilung von zwei Personen oder von einer Person in zwei verschiedenen Zeiträumen unterschiedlich beurteilt werden.
1.3.3. Eine Person kann die Wahrheit einer Mitteilung *irrtümlich* oder auch *absichtlich (!)* falsch beurteilen denn unsere Welt beinhaltet auch *Irrtümer* und *Unwahrheiten (Lügen)*, so daß sich ein Begriff „relative Wahrheit“ im Sinne von 1.3 als zweckmäßig für die Beschreibung der Welt anbietet.
1.3.4. Um nicht als *arbiter mundi* zu agieren, bezeichnen wir auch irrtümliche oder lügnerische Beurteilungen als *relative Wahrheiten für den Beurteilenden.*
1.3.5. Dem Leser dieser Arbeit bleibt es unbenommen, die Existenz *absolut wahrer,* also für alle Personen jederzeit wahrer Mitteilungen zu postulieren. Dieser Standpunkt steht nicht im Widerspruch zur vorliegenden Arbeit, in der lediglich der Begriff *relative Wahrheit* in bestimmtem Sinn definiert wird, und hat auch keine Bedeutung für die vom Autor beabsichtigten Aussagen.

2. Aussagen sind Mitteilungen einer bestimmten Person in einem bestimmten Zeitraum:

2.1. Die Mitteilung M, bezogen auf eine Person P in einem Zeitraum ΔT, bezeichnen wir als Aussage A(M,P,ΔT).

2.1.1. Diese Definition von A(M,P,ΔT) erfordert nicht, daß die Person P die Mitteilung M im Zeitraum ΔT tatsächlich liest.
2.1.2. Der Zeitraum ΔT kann sowohl in der für ein *tatsächliches* Lesen als auch in einer für ein *potentielles* Lesen erforderlichen Zeit liegen.

2.2. Durch die Bezugnahme auf einen bestimmten Leser P und einen bestimmten Zeitraum ΔT werden Interpretation und allfällige Wahrheit einer Mitteilung eindeutig.

<u>2.3. Als wahre Aussagen bezeichnen wir solche, bei denen der Leser P *bereit* ist, die Mitteilung M im Zeitraum ΔT des Lesens als *wahr* zu bezeichnen.</u>

2.3.1. Diese Definition einer wahren Aussage berücksichtigt die Relativität des Wahrheitsbegriffes nach 1.3.4 und deckt sich nicht mit dem Wahrheitsbegriff der Alltagssprache, die diesen Begriff als absolut begreift.
2.3.2. Die Wahrheit einer Aussage nach 2.3 ist daher unabhängig von Meinung und Wissen des Autors und unabhängig von Meinung und Wissen des Lesers dieser Arbeit definiert.

<u>2.4. Beweise von Aussagen bezeichnet der Autor dann als relativ zu einer Person P im Zeitraum ΔT mißlungen, wenn P die Beweisführung im Zeitraum ΔT nicht anerkennt.</u>

2.4.1. Eine Beweisführung setzt voraus, daß vorher zwischen Beweisführendem und Beweisannehmendem Übereinstimmung über die verwendeten Begriffe, Schlußmethoden usw. hergestellt wurde.
2.4.2. Der Beweisannehmende kann den Beweis wegen Verwendung von *in seinen Augen* widersprüchlichen Begriffen, falscher Schlußfolgerungen, aber auch ohne Angabe von Gründen und sogar wider besseres Wissen ablehnen.
2.4.3. Der Autor läßt Widersprüche in Beweisen dort zu, wo der Widerspruch (in seinen Augen) notwendiges Element der Schlußfolgerung ist (z.B. argumentum e contrario), er bezeichnet aber Beweise als mißlungen (natürlich nur relativ zu seiner Person), die in sich widersprüchliche Begriffe (wie z.B. die kleinste natürliche Zahl, größer als vier und kleiner als drei) als widerspruchsfrei verwenden. *Er wendet sich im weiteren nur an jene Leser, die Beweisführungen aufgrund in sich widersprüchlicher Begriffe ebenfalls ablehnen.*

<u>3. Alle möglichen Aussagen (2) können abzählbar angeordnet werden. Wir bezeichnen diese Anordnung als *UNIVERSALANORDNUNG:*</u>

<u>3.1. Alle Mitteilungen, die Gegenstand einer Aussage sind, können schriftlich festgehalten werden.</u>

3.1.1. Im üblichen Sprachgebrauch sind Mitteilungen mündliche oder schriftliche Aussagen.
3.1.2. Allgemeiner können alle durch Sinnesorgane aufnehmbare Reize als Mitteilungen gelten.
3.1.2.1. Schriftliche Mitteilungen werden in Form optisch lesbarer Datenträger gemacht, wie beispielsweise die vorliegende Arbeit.
3.1.2.2. Mitteilungen sind auch in anderer Form, etwa akustisch durch Sprache, in Blindenschrift usw. möglich.
3.1.2.3. Die von uns verwendete Beschreibung der Welt im allgemeinen und der möglichen Sinneseindrücke im besonderen gestattet die Übersetzung jeder möglichen Mitteilung in eine schriftliche, woraus 3.1 folgt.

<u>3.2. Alle möglichen schriftlichen Mitteilungen können abzählbar angeordnet werden.</u>

3.2.1. Ein *Elementarquadrat* sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 1/100^{tel} mm, das entweder weiß oder schwarz ist.
3.2.2. Eine quadratische Anordnung von n^2 derartigen Elementarquadraten bezeichnen wir als *schriftliche Mitteilung der Größe* n^2.
3.2.3. Jede mögliche schriftliche Mitteilung nach 3.1 kann in Form einer schriftlichen Mitteilung der Größe n^2 bei genügend großem n dargestellt werden.
3.2.3.1. Jede beliebige graphische Darstellung, also auch jede schriftliche Darstellung im gebräuchlichen Sinn, kann in Form einer schriftlichen Mitteilung der Größe n^2 bei genügend großem n dargestellt werden.
3.2.3.2. Eine schriftliche Mitteilung, etwa schwarz auf weiß, erfährt durch eine Vergrößerung des weißen Untergrunds keine Änderung ihres Inhaltes (ihrer Interpretation durch einen Leser), so daß jede schriftliche Mitteilung durch unendlich viele schriftliche Mitteilungen der Größe n^2 mit beliebig großem n dargestellt werden kann.
3.2.4. Jeder schriftlichen Mitteilung M_n der Größe n^2 wird eine Dezimalzahl $a(M_n) = 0'a_1a_2 \ldots a_{n^2}$ zugeordnet, mit $a_{in+k} = 1$, wenn das k^{te} Elementarquadrat in der i + 1ten Zeile schwarz ist, und $a_{in+k}= 2$, wenn es weiß ist (i = 0,...,n-1; k = 1,...,n).
3.2.5. Alle möglichen schriftlichen Mitteilungen M aus 3.2.2 können nun nach der Größe der ihnen gemäß 3.2.4 zugeordneten Dezimalzahlen a(M) abzählbar angeordnet werden.

<u>3.3. Alle möglichen Kombinationen von *Personen* P mit *Zeiträumen* ΔT aus 2.1 können abzählbar angeordnet werden.</u>

3.3.1. Von einer Aussage gemäß 2 wird gesprochen, wenn eine Person P eine Mitteilung M in einem Zeitraum ΔT *liest* bzw. *lesen könnte.*
3.3.2. Wir führen *Raum-Zeit-Elemente* in Form von vierdimensionalen Würfeln mit der Seitenlänge 1/100^{tel} mm und der Dauer 1/100^{tel} Sekunde ein.
3.3.3. Durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems im Raum-Zeit-Kontinuum können wir dieses in abzählbar viele Raum-Zeit-Elemente (3.3.2) zerlegen.
3.3.4. Ein Raum-Zeit-Element aus dem von einer Person P in einem Zeitraum ΔT, der im Zeitraum eines *tatsächlichen* oder eines *potentiellen* Lesevorganges liegt, eingenommenen Volumens des Raum-Zeit-Kontinuums bezeichnen wir mit RZE (P,ΔT).
3.3.5. Zu jeder *möglichen* Kombination einer Person P mit einem Zeitraum ΔT aus 2.1 kann (mindestens) ein RZE(P,ΔT) gemäß 3.3.4 gefunden werden, welches aus dem Volumen dieser Person und dem Zeitraum ΔT im Raum-Zeit-Kontinuum stammt und daher diesen (potentiellen) Lesevorgang eindeutig kennzeichnet.
3.3.6. Es sei n = n[RZE(P,ΔT)] der Platz des RZE(P,ΔT) in der abzählbaren Anordnung der Raum-Zeit-Elemente nach 3.3.3.
3.3.7. Wir bezeichnen mit $m(P,\Delta T) = \min\limits_{(P,\Delta T)} n[RZE(P,\Delta T)]$ jenen für alle Kombinationen einer Person P mit einem (potentiellen) Lesezeitraum ΔT in Betracht kommenden Platz gemäß 3.3.6 mit dem niedrigsten n = n[RZE(P,ΔT)].
3.3.8. Die Ordnungszahlen m(P,ΔT) liefern, ihrer Größe nach geordnet, eine abzählbare Anordnung aller möglichen Kombinationen von Personen P mit Zeiträumen ΔT aus 2.1.

3.4. Durch Kombination der abzählbaren Anordnungen 3.2 und 3.3 bilden wir eine abzählbare Anordnung aller möglichen Aussagen 2 und bezeichnen sie als *UNIVERSALANORDNUNG.*

3.4.1. Jeder Aussage A(M,P,ΔT) nach 2.1 ordnen wir eine Zahl
z = z[A(M,P,ΔT)] = m(P,ΔT) + a(M) unter Verwendung von 3.3.7 und 3.2.4 zu.
3.4.2. Alle Aussagen nach 2.1 ordnen wir nun nach der Größe von z an, wobei die Aussage A(M,P,ΔT) die Ordnungszahl n = n(M,P,ΔT) erhält.
3.4.3. Wir bezeichnen diese Anordnung als *UNIVERSALANORDNUNG.* Die Aussage A(M,P,ΔT) steht in der Universalanordnung an $n(M,P,\Delta T)^{ter}$ Stelle.
3.4.4. In der Universalanordnung ist jede tatsächlich gemachte Aussage enthalten.
3.4.4.1. Eine tatsächlich gemachte Aussage wird von einer konkreten Person P in einem konkreten Zeitraum ΔT gemacht und kann in Form einer schriftlichen Mitteilung M dargestellt werden. Sie steht daher in der Universalanordnung an der Stelle n = n(M,P,ΔT).
3.4.4.2. Wegen der Vielzahl von RZE(P,ΔT) aus dem von P in ΔT gemäß 3.3.4 eingenommenen Volumen im Raum-Zeit-Kontinuum gibt es eine Vielzahl, wegen 3.2.3.2 unendlich viele Aussagen A(M,P,ΔT), die eine tatsächlich gemachte Aussage eindeutig kennzeichnen.
3.4.4.3. In der Universalanordnung gibt es daher unendlich viele Plätze n = n(M,P,ΔT) für jede tatsächlich gemachte Aussage.
3.4.5. In der Universalanordnung ist jede sinnlose Aussage ebenso enthalten wie jede mögliche graphische Darstellung M als „Leseobjekt" jeder möglichen Person P.
3.4.6. In der Universalanordnung sind Aussagen enthalten, deren Mitteilungen so umfangreich sind, daß der zum Lesen erforderliche Zeitraum die Lebensdauer jeder Person P übersteigt, weshalb über die (relative) Wahrheit dieser Aussage keine Angabe möglich ist.
3.4.7. In der Universalanordnung sind Mitteilungen enthalten, die in einer P unbekannten Sprache abgefaßt sind, so daß P über den Inhalt der Mitteilungen nichts sagen kann.
3.4.8. In der Universalanordnung sind alle Aussagen enthalten, die bei der Beurteilung der vorliegenden Arbeit durch irgendeinen Leser gemacht werden können.

3.5. Die Möglichkeit, alle möglichen Aussagen in einer Universalanordnung abzählbar anzuordnen, beruht darauf, daß alle möglichen Mitteilungen zwar beliebig groß sein können aber immer endlich sein müssen.

4. Für alles, woran gedacht werden kann, also für jedes mögliche Denkobjekt, gibt es (mindestens) einen Platz in der Universalanordnung, dessen Ordnungszahl das Denkobjekt eindeutig kennzeichnet.

4.1. Ist eine Person P in einem Zeitraum ΔT bereit zu bejahen, daß ein Denkobjekt DO durch eine Mitteilung M eindeutig beschrieben wird, dann ordnen wir diesem Denkobjekt die Aussage $A_{DO}(M,P,\Delta T)$ mit der Ordnungszahl $n_{DO}(M,P,\Delta T)$ zu. Diese Aussage und ihre Ordnungszahl kennzeichnen das Denkobjekt eindeutig.

4.1.1. Eine Person P kann in einem Zeitraum ΔT etwa bereit sein zu bejahen, daß eine Mitteilung „2“ oder „zwei“ oder „Zwei“ oder „6:3“ oder „two“ oder „deux“ usw. „die natürliche Zahl Zwei“ in dem Sinne, in dem der Autor und/oder der Leser diese letzte Mitteilung interpretieren, eindeutig beschreibt.

4.1.2. Irrtümer und/oder bewußte Verfälschungen bei der Interpretation der jeweiligen Mitteilung durch die Person P bzw. den Autor bzw. den Leser werden nicht ausgeschlossen.

4.1.3. Zur eindeutigen Kennzeichnung eines Denkobjektes DO durch eine Ordnungszahl $n_{DO}(M,P,\Delta T)$ genügt die *Bereitschaft* der Person P, im Zeitraum ΔT zu bejahen, daß die Mitteilung M das Denkobjekt eindeutig beschreibt. Es wird nicht gefordert, daß sich P mit M *tatsächlich* befaßt; vielmehr handelt es sich um eine *potentielle Interpretation* der Mitteilung M durch die Person P im Zeitraum ΔT.

4.1.4. Im Sinne der Analogie 1,1,1,2,1 entspricht die *Bereitschaft* der Person P im Zeitraum ΔT eine Mitteilung M in bestimmter Weise zu interpretieren, unabhängig davon, ob sich P mit M in ΔT tatsächlich befaßt, der *„Bereitschaft“* eines Computers, einen Datensatz in bestimmter Weise zu verarbeiten und entsprechende Daten auszugeben, unabhängig davon, ob der Datensatz tatsächlich eingegeben wird.

4.2. Gibt eine Person P an, im Zeitraum ΔT an ein Denkobjekt DO gedacht zu haben, das für sie durch keine Mitteilung M eindeutig beschrieben werden kann, dann bilden wir die Mitteilung $\mathcal{M}$ mit dem Wortlaut „Das Denkobjekt, an das die Person P im Zeitraum ΔT gedacht hat“ (geschrieben auf einem quadratischen Untergrund). Für diese Person P, aber auch für den Autor PA und für den Leser PL, müssen dann (von Lügen und Irrtümern abgesehen) in jedem nach ΔT gelegenen Zeitraum $\mathit{\Delta T}$ die Ordnungszahlen $n_{DO}(\mathcal{M},P,\mathit{\Delta T})$, $n_{DO}(\mathcal{M},PA,\mathit{\Delta T})$ und $n_{DO}(\mathcal{M},PL,\mathit{\Delta T})$ das Denkobjekt DO eindeutig kennzeichnen.

4.3. Woran man nicht denken kann, daran soll man nicht denken.

4.3.1. Ein „Denkobjekt, an das nicht gedacht werden kann,“ enthält in sich einen Widerspruch.

4.3.2. Wird ein solches Denkobjekt in einem Beweis als widerspruchsfrei verwendet, bezeichnet der Autor den Beweis gemäß 2.4.3 als mißlungen.

4.3.3. Der Autor wendet sich nur an jene Leser, die solche Beweise ebenfalls ablehnen.

4.4. Alles, woran gedacht werden kann (jedes mögliche Denkobjekt DO), kann für (mindestens) eine Person P in (mindestens) einem Zeitraum ΔT durch (mindestens) eine Mitteilung M eindeutig beschrieben werden, so daß $n_{DO}(M,P,\Delta T)$ dieses Denkobjekt eindeutig kennzeichnet.

4.4.1..Der Begriff „Mögliches Denkobjekt“ setzt die Möglichkeit der Existenz einer Person P, die in einem Zeitraum ΔT an das Denkobjekt denken könnte, voraus.

4.4.2. Im Fall 4.1 kennzeichnet die Aussage $A(M,P,\Delta T)$ mit der Ordnungszahl $n_{DO}(M.P.\Delta T)$, im Fall 4.2 die Aussage $A(\mathcal{M},P,\mathit{\Delta T})$ mit der Ordnungszahl $n_{DO}(\mathcal{M},P,\mathit{\Delta T})$ das Denkobjekt DO eindeutig.

4.5. Über alles, woran gedacht werden kann, kann auch gesprochen werden.

4.5.1. Jedes Denkobjekt DO, an welches gedacht werden kann, wird wegen 4.4 durch (mindestens) eine Aussage $A(M,P,\Delta T)$ der Universalanordnung eindeutig gekennzeichnet.
4.5.2. Unter Verwendung dieser Aussage kann daher über das Denkobjekt DO gesprochen werden.

5. Die Welt ist abzählbar:

5.1. Eine allgemein anerkannte Definition des Begriffes „Welt" ist dem Autor nicht bekannt.

5.1.1. Wittgenstein's „Die Welt ist alles, was der Fall ist" erscheint dem Autor als Definition deshalb nicht geeignet, weil für ihn der Begriff „der Fall sein" zumindest ebenso einer Definition bedarf wie der Begriff „Welt" selber.

5.2. Die Welt ist alles, woran gedacht werden kann.

5.2.1. Diese vom Autor gewählte Definition ist wegen 4.5 gleichbedeutend mit der Definition „Die Welt ist alles, worüber gesprochen werden kann".
5.2.2. Wollte eine Person P einen Teil der Welt außerhalb der Definition 5.2 postulieren, dann müßte es eine Mitteilung M geben, die für P in irgendeinem Zeitraum ΔT „etwas" außerhalb der durch 5.2 definierten Welt eindeutig beschreibt. Dieses „Etwas" ist für P im Zeitraum ΔT ein Objekt DO seines Denkens. $n_{DO}(M,P,\Delta T)$ ist die Ordnungszahl dieses Denkobjektes in der Universalanordnung. Die Behauptung, es könne über dieses Denkobjekt nicht gesprochen werden, enthält also einen Widerspruch. Wegen 2.4.3 ist für den Autor daher die Behauptung der Unvollständigkeit der Definition 5.2 falsch.

5.3. Alles, woran gedacht werden kann, also die Welt, kann gemäß 4, entsprechend dem zugeordneten Platz in der Universalanordnung, abzählbar angeordnet werden.

5.3.1. Alles, woran gedacht werden kann, wird durch (mindestens) eine Ordnungszahl $n(M,P,\Delta T)$ gemäß 4.4, also durch mindestens einen Platz in der Universalanordnung, eindeutig gekennzeichnet.
5.3.2. Die Welt kann daher nach der Größe der Ordnungszahlen, die alles, woran gedacht werden kann, eindeutig kennzeichnen, abzählbar angeordnet (gödelisiert) werden.

5.4. Die reellen Zahlen zwischen Null und Eins können in einer Folge (r_n) = *RA(0,1)* abzählbar angeordnet werden.

5.4.1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschränken wir uns auf die reellen Zahlen zwischen Null und Eins. Wir betrachten nun alle Aussagen $A_r(M,P,\Delta T)$, in denen eine Person P im Zeitraum ΔT bejaht, daß die Mitteilung M eine reelle Zahl r mit $0 < r < 1$ eindeutig kennzeichnet.

5.4.2. Jeder derartigen Aussage entspricht gemäß 3.4.2 ein Platz $n_r(M,P,\Delta T)$ in der Universalanordnung.

5.4.3. Es sei $m = m(r) = \min\limits_{(r)} n_r(M,P,\Delta T)$ der Platz aus 5.4.2 mit der niedrigsten Ordnungszahl.

5.4.4. Nun ordnen wir die reellen Zahlen r mit $0 < r < 1$ nach der Größe von m in einer Folge (r_n) = *RA(0,1)* abzählbar an. m = m(r) bezeichnet dabei gemäß 5.4.3 den Platz der Aussage $A_r(M,P,\Delta T)$ *in der Universalanordnung*. m dient also nur der *Anordnung* der reellen Zahlen und bezeichnet *nicht* den Platz von r in der Folge *RA(0,1)*.

5.4.5. Der Versuch, durch die Einführung einer Cantor'schen Diagonalzahl die Unvollständigkeit der Folge *RA(0,1)* zu beweisen, mißlingt.

5.4.5.1. Die n^{te} reelle Zahl in der Folge *RA(0,1)* habe die Dezimaldarstellung

$r_n = 0' \, r_{n,1} \, r_{n,2} \ldots \; r_{n,n} \ldots..$

5.4.5.2. Wir nehmen an, ein Kritiker PK der Vollständigkeit der Folge *RA(0,1)* gemäß 5.4.4 bildet eine Dezimalzahl (nach Cantor) der Gestalt $c = 0' \, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots..$ mit $\forall n : c_n \neq r_{n,n}$, folgert daraus $\forall n$: $c \neq r_n$, daher $c \notin$ *RA(0,1)*, und behauptet, damit wegen $0 < c < 1$ die Unvollständigkeit der Folge *RA(0,1)* der Dezimalzahlen zwischen Null und Eins bewiesen zu haben.

5.4.5.3. Wir bilden nun eine Mitteilung MK, welche die Vorschriften zur Bildung der Folge *RA(0,1)* aus 5.4.4 und der Cantor'schen Diagonalzahl c aus 5.4.5.2 enthält.

5.4.5.4. Wird der Einwand des Kritikers PK im Zeitraum ΔTK gemacht, dann ist PK in ΔTK offenbar bereit zu bejahen, daß durch die Aussage $A(MK,PK,\Delta TK)$ die Cantor'sche Diagonalzahl c eindeutig gekennzeichnet wird. Die Ordnungszahl $n_c(MK,PK,\Delta TK)$ bezeichnet dann nach 4.1 einen Platz in der Universalanordnung, der c eindeutig kennzeichnet.

5.4.5.5. Nun ist $m = m(c) = \min\limits_{(c)} n_c(MK,PK,\Delta TK)$ nach 5.4.3 der c zugeordnete Platz in der Universalanordnung mit der niedrigsten Ordnungszahl. c ist offenbar eine reelle Zahl zwischen Null und Eins. Gemäß 5.4.4 gilt daher $c \in$ *RA(0,1)*.

5.4.5.6. In der abzählbaren Anordnung *RA(0,1)* der reellen Zahlen zwischen Null und Eins gemäß 5.4.4 habe c den Platz $n = n(c)$ mit $r_{n(c)} = c$.

5.4.5.7. Aus $c = r_{n(c)}$ folgt für die $n(c)^{te}$ Dezimalstelle $c_{n(c)} = r_{n(c),n(c)}$ im Widerspruch zur Definition von c in 5.4.5.2, die $\forall n$: $c_n \neq r_{n,n}$ fordert,

5.4.5.8. Die Vorschrift zur Konstruktion einer Cantor'schen Diagonalzahl c auf Grund der Folge *RA(0,1)* nach 5.4.5.1 *enthält damit einen Widerspruch.* Der Autor bezeichnet daher den Beweis des Kritikers für die Unvollständigkeit der abzählbaren Anordnung der reellen Zahlen zwischen Null und Eins in der Folge *RA(0,1)* wegen der Verwendung des in sich widersprüchlichen Begriffes der Diagonalzahl c aus 5.4.5.2 gemäß 2.4.3 als mißlungen.

5.5. Beweise der Überabzählbarkeit einer beliebigen Menge $\{E\}$, die in der Definition eines Elementes *E* der Menge bestehen, dem nach Meinung des Kritikers kein Platz in der Universalanordnung eindeutig zugeordnet werden kann, enthalten einen Widerspruch in sich. Der Autor bezeichnet solche Beweise gemäß 2.4.3 als mißlungen.

5.5.1. Um dies zu zeigen, betrachten wir alle Aussagen $A_E(M,P,\Delta T)$, in denen eine Person P in einem Zeitraum ΔT bejaht, daß ein Element E der Menge $\{E\}$ durch die Mitteilung M eindeutig beschrieben wird. Die Aussage $A_E(M,P,\Delta T)$ kennzeichnet dann das Element E eindeutig.

5.5.2. Jeder Aussage $A_E(M,P,\Delta T)$ aus 5.5.1 entspricht gemäß 3.4.2 ein Platz $n_E(M,P,\Delta T)$ in der Universalanordnung, der das Element E eindeutig kennzeichnet.

5.5.3. Wir bezeichnen mit $m = m(E) = \min\limits_{(E)} n_E(M,P,\Delta T)$ den Platz jener das Element E kennzeichnenden Aussage mit der niedrigsten Ordnungszahl.

5.5.4. Nun ordnen wir alle Elemente der Menge $\{E\}$, für die eine Aussage $A_E(M,P,\Delta T)$ vorliegt, nach der Größe von m in einer Folge (E_n) = *EA* abzählbar an. m = m(E) bezeichnet dabei gemäß 5.5.3 den Platz der Aussage $A_E(M,P,\Delta T)$ *in der Universalanordnung* und n den Platz des Elementes E in der Folge *EA*.

5.5.5. Wir nehmen nun an, ein Kritiker PK will in einem Zeitraum ΔTK die Unvollständigkeit von *EA* durch die Definition eines Elementes *E* mit $E \in \{E\}$ und $E \notin EA$ beweisen.

5.5.6. In diesem Fall bilden wir eine Mitteilung MK, welche die vom Kritiker gegebene Definition des Elementes *E* aus 5.5.5 enthält.

5.5.7. Der Kritiker behauptet $E \in \{E\}$, so daß für ihn die Aussage $A_E(MK,PK,\Delta TK)$ das Element *E* eindeutig kennzeichnet.

5.5.8. Wegen des Vorliegens einer Aussage $A_E(MK,PK,\Delta TK)$, welche *E* eindeutig kennzeichnet, ist gemäß 5.5.4 das Element *E* in der Folge *EA* enthalten. Es gilt also $E \in EA$ und dies steht im Widerspruch zur Behauptung des Kritikers, es gelte $E \notin EA$.

5.5.9. Wie in 2.4.3 festgehalten, bezeichnet der Autor den Beweis des Kritikers für die Unvollständigkeit der Folge *EA* wegen des Widerspruchs in 5.5.8 als mißlungen.

5.6. Die abzählbare Anordnung der Welt (5.2) im Rahmen der Universalanordnung (3.4) ist nur eine *potentielle* Anordnung; eine *tatsächliche* Anordnung aller möglichen Denkobjekte, also der Welt, durch eine konkrete Person PK in einem konkreten Zeitraum ΔTK ist prinzipiell nicht möglich.

5.6.1. Eine Aussage $A(M,P,\Delta T)$ kann nur auf Grund der *Interpretation* von M durch P in ΔT einem Denkobjekt eindeutig zugeordnet werden.

5.6.2. Eine einzelne Person PE kann wegen der Beschränktheit der zur Verfügung stehenden (Lebens-) Zeit Mitteilungen M nur in beschränktem Umfang und in beschränkter Anzahl interpretieren.

5.6.3. Eine einzelne Person PE kann auch nicht die Interpretation aller möglichen Mitteilungen M durch alle möglichen Personen P in allen möglichen Zeiträumen ΔT kennen.

5.6.4. Wegen 5.6.2 und 5.6.3 kann die Frage nach dem einem bestimmten Platz in der Universalanordnung zugeordneten Denkobjekt von einer einzelnen Person PE nur für eine beschränkte Anzahl solcher Plätze beantwortet werden..

6. In einer konkreten Schrift können die Welt im allgemeinen und die reellen Zahlen im besonderen *tatsächlich* abzählbar angeordnet werden:

6.1. Eine konkrete Schrift bestehe in der zeilenweisen Anordnung endlich vieler Zeichen.

6.1.1. Solche Zeichen sind etwa Buchstaben, Ziffern, Satzzeichen, das Spatium usw.
6.1.2. Zeichen können in verschiedenen Schriftarten (lateinisch, griechisch, gotisch, kursiv, fett usw.), klein oder groß geschrieben, sowie höher- oder tiefergestellt verwendet werden.
6.1.3. Es können mathematische und logistische Zeichen und Symbole verwendet werden.
6.1.4. Es können bestimmten Zeichen mit fester Bedeutung verwendet werden, wie z.B. die Zahlen „π“ oder „e“ (Basis der natürlichen Logarithmen) usw.
6.1.5. Eine konkrete Schrift kann etwa aus allen einer Buchdruckerei oder in einem Computer zur Verfügung stehenden Lettern und Zeichen bestehen.
6.1.6. Alles jemals schriftlich Festgehaltene, also auch die gesamte mathematische Literatur samt der vorliegenden Arbeit, kann in einer solchen konkreten Schrift dargestellt werden.

6.2. Alles, was in einer konkreten Schrift geschrieben werden kann, läßt sich in einer Folge *ZFA* abzählbar anordnen.

6.2.1. Eine Zeichenfolge ${}^{L}ZF$ der Länge L in einer konkreten Schrift 6.1 bestehe aus L in beliebig vielen Zeilen hintereinander angeordneten Zeichen.
6.2.2. Verwendet man in der konkreten Schrift etwa ω verschiedene Zeichen (einschließlich des Spatiums und unter Berücksichtigung der Schriftart, von höher- oder tiefergestellt, usw.) dann gibt es genau ω^{L} verschiedene Zeichenfolgen ${}^{L}ZF$ der Länge L.
6.2.3. Wir ordnen alle Zeichenfolgen endlicher Länge in einer Folge *ZFA* abzählbar an.
6.2.3.1. Es sei $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\omega\}$ die Menge der zur Verfügung stehenden Zeichen. Eine Zeichenfolge ${}^{L}ZF_n$ der Länge L hat dann die Form „$\alpha_{n1}\,\alpha_{n2}\,...\,\alpha_{nL}$“ mit $\alpha_{nk} \in \Omega$.
6.2.3.2. Wir bilden für jede Zeichenfolge ZF = ${}^{L}ZF_n$ eine Hilfszahl $\Pi(ZF) = \Pi({}^{L}ZF_n) =$ $= 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot ... \cdot \pi_L^{\,n_L}$, wobei π_k die k^{te} Primzahl in der Primzahlenfolge Π: = (2, 3, ... π_i .....) ist. Π(ZF) kennzeichnet dann ZF eindeutig. Wäre etwa α_1 der Buchstabe „a“ und α_2 der Buchstabe „b“, dann entspricht die Hilfszahl $\Pi = 2 = 2^1 = \pi_1^{\,1}$ der Zeichenfolge „α_1“, also „a“, die Hilfszahl $\Pi = 4 = 2^2 = \pi_1^{\,2}$ der Zeichenfolge „α_2“, also „b“, die Hilfszahl $\Pi = 6 =$ $= 2^1 \times 3^1 = \pi_1^{\,1} \times \pi_2^{\,1}$ der Zeichenfolge „$\alpha_1\alpha_1$“, also „aa“, die Hilfszahl $\Pi = 18 = 2^1 \times 3^2 =$ $= \pi_1^{\,1} \times \pi_2^{\,2}$ der Zeichenfolge „$\alpha_1\alpha_2$“, also „ab“, usw.
6.2.3.3. Wir können also **alle** endlichen Zeichenfolgen ZF nach der Größe ihrer Hilfszahlen Π(ZF) in einer Folge (ZF_n) = *ZFA* abzählbar anordnen. Dazu setzen wir $\min\limits_{(ZF)} \Pi(ZF) = \Pi(ZF_1) = 2$ und im weiteren $\forall n$: $\Pi(ZF_n) < \Pi(ZF_{n+1})$. Man erhält nun etwa $\Pi(ZF_2) = 4$ mit $ZF_2 = \alpha_2$, $\Pi(ZF_3) = 6$ mit $ZF_3 = \alpha_1\alpha_1$, $\Pi(ZF_4) = 8$ mit $ZF_4 = \alpha_3$, usw.

6.3. Alles, woran der Autor denken kann, läßt sich für ihn durch eine Zeichenfolge gemäß 6.2.1 *in jedem Zeitpunkt* eindeutig beschreiben.

6.3.1. DO(ZF) bedeutet für den Autor, das Denkobjekt DO wird durch die Zeichenfolge ZF jederzeit für ihn eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben.

6.4. Der Autor ordnet nun die Welt (5.2) in jener Reihenfolge der Denkobjekte DO abzählbar an, die der Reihenfolge der sie eindeutig beschreibenden Zeichenfolgen in der Folge *ZFA* gemäß 6.2.3.3 entspricht.

6.5. Der Autor wendet sich im weiteren nur an jene Leser, welche die selbe Schrift und die selben Beschreibungen von Denkobjekten verwenden, wie der Autor.

6.5.1. Eine Person P verwendet genau dann die selbe Schrift und die selben Beschreibungen von Denkobjekten wie der Autor, wenn jede Zeichenfolge ZF für P das selbe Denkobjekt beschreibt wie für den Autor.

6.6. Aus der Folge *ZFA* wird eine abzählbare Anordnung der reellen Zahlen in einer Folge (r_n) = *RA* gewonnen, in der jede reelle Zahl genau einmal vorkommt.

6.6.1. Zunächst werden aus der Folge *ZFA* jene Zeichenfolgen ausgewählt, durch die reelle Zahlen eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden.

6.6.2. Wird eine reelle Zahl r durch mehrere Zeichenfolgen ZF mit r = r(ZF) eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben, wählen wir jene Zeichenfolge mit der kleinsten Hilfszahl $\Pi(r) = \min_{(r(ZF))} \Pi(ZF)$ aus und ordnen die reellen Zahlen r nach der Größe von $\Pi(r)$ in einer Folge *RA* abzählbar an.

6.6.3. Eine durch eine unendliche Dezimalzahl beschriebene reelle Zahl kann nur dann gemäß 6.6.1 ausgewählt werden, wenn sie *auch* durch eine Zeichenfolge endlicher Länge eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden kann. So kann etwa π nicht durch die unendliche Dezimalzahl 3'14159..... beschrieben werden sondern nur durch eine endliche Zeichenfolge wie z.B. „Die Fläche des Einheitskreises“ oder eine der bekannten Definitionen durch Grenzwerte.

6.6.4. Die reelle Zahl r habe als Dezimalzahl die Gestalt $r = R_m R_{m-1} \ldots R_1' \, r_1 r_2 \ldots r_i \ldots\ldots$ In dieser Form der Beschreibung einer reellen Zahl müssen natürlich unendliche Dezimalzahlen zugelassen werden, wie etwa für π oder für 1/3.

6.6.5. Für die Zahl r = 15'24 gilt etwa m = 2, $R_2 = 1$, $R_1 = 5$, $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, und $r_i = 0$ für i > 2.

6.6.6. Die n ^{te} reelle Zahl r_n in der Folge (r_n) habe nach 6.6.4 die Gestalt

$r_n = R_{n,m} \, R_{n,m-1} \ldots \; R_{n,1}' \, r_{n,1} \, r_{n,2} \ldots \; r_{n,i} \ldots\ldots$

6.6.7. Wegen 6.6.2 wird jeder durch eine Zeichenfolge beschreibbaren reellen Zahl r genau *eine* Hilfszahl $\Pi(r)$ zugeordnet, so daß sie genau *einen* Platz in der Folge *RA* hat.

6.7. Der Versuch, durch die Definition einer Cantor'schen Diagonalzahl die Unvollständigkeit der Folge *RA* aller reellen Zahlen zu beweisen, mißlingt.

6.7.1. Wir nehmen an, ein Kritiker der Vollständigkeit der Folge *RA* der reellen Zahlen bildet eine Cantor'sche Diagonalzahl der Gestalt c = 0' c_1c_2 ... c_n ..... mit $\forall$n: $c_n \neq r_{n,n}$, so daß c in der Folge *RA* nicht enthalten sein kann.

6.7.2. Die Vorschrift zur Konstruktion von c kann in (mindestens) einer Zeichenfolge ZF so dargestellt werden, daß c = c(ZF) eindeutig beschrieben wird. Gemäß 6.6.7 hat c dann entsprechend der Größe der Hilfszahl Π(c) genau einen Platz in der Folge *RA*. Dieser Platz sei n(c).

6.7.3. Gemäß 6.6.6 ist $r_{n(c),i}$ die i ^{te} Dezimalstelle der n(c) ^{ten} reellen Zahl in der Folge *RA*. Nach 6.7.2 ist $r_{n(c)}$ = c. Für i = n(c) müßte also $c_{n(c)} = r_{n(c),n(c)}$ und wegen 6.7.1 gleichzeitig $c_{n(c)} \neq r_{n(c),n(c)}$ gelten. Dies ist ein Widerspruch.

6.7.4. Die Cantor'sche Diagonalzahl c ist also in sich selbst widersprüchlich und die c beschreibende Zeichenfolge ZF mit c = c(ZF) aus der Folge *ZFA* beschreibt nicht, wie in 6.6.1 gefordert, eine reelle Zahl widerspruchsfrei. Der Autor bezeichnet daher den vom Kritiker geführten Beweis der Unvollständigkeit der Folge *RA* der reellen Zahlen gemäß 2.4.3 als mißlungen.

6.8. Für eine Zeichenfolge ZF definieren wir ZF - beschreibbare Zahlen.

6.8.1. Wir bezeichnen eine Zahl, die durch eine Zeichenfolge ZF eindeutig beschrieben werden kann, als ZF - beschreibbar.

6.8.2. Welche Zahlen ZF - beschreibbar sind, hängt von der zur Verfügung stehenden Zeichenmenge Ω sowie von den diesen Zeichen zugemessenen Bedeutungen ab.

6.8.2.1. Wird ein Schriftsatz zur Übermittlung einer Information von einer Person P_1 an eine Person P_2 verwendet, müssen sich P_1 und P_2 vorher über die Bedeutungen der Zeichen bzw. Zeichenkombinationen aus Ω einigen.

6.8.3. Mit $\Omega = \{0,1\}$ können Mengen dieser Zeichen gebildet werden, die keine weitere Bedeutung haben. Einigt man sich aber auf das binäre Zahlensystem, sind jede natürliche Zahl und die Null ZF - beschreibbar.

6.8.4. Erweiterungen von Ω, etwa durch Operationszeichen $\{$+, -, x, :$\}$ oder durch Zeichen fester Bedeutung, wie π, e, usw., erweitern die Menge der ZF - beschreibbaren Zahlen.

6.8.5. Für a^b = a exp b wird die Zahl *z* = 9exp$\{$9exp[9exp(9exp9)]$\}$ durch eine Zeichenfolge ZF = ^{23}ZF der Länge L = 23 beschrieben. Es gibt genau ω^{23} verschiedene Zeichenfolgen ^{23}ZF und es ist $\omega^{23} << z$. Nur ein sehr kleiner Teil der natürlichen Zahlen kleiner als *z* kann daher ^{23}ZF - beschreibbar sein.

6.8.6. Bezeichnen wir mit $N({}^{L}ZF)$ die Anzahl der ${}^{L}ZF$ - beschreibbaren natürlichen Zahlen und mit $M({}^{L}ZF)$ die größte ${}^{L}ZF$ - beschreibbare natürliche Zahl, dann wird für genügend großes L jedenfalls $N({}^{L}ZF) << M({}^{L}ZF)$ sein. Je länger eine Zeichenfolge ${}^{L}ZF$ ist, um so größer ist die größte ${}^{L}ZF$ - beschreibbare natürliche Zahl $M({}^{L}ZF)$ aber um so kleiner ist der Anteil $N({}^{L}ZF) / M({}^{L}ZF)$ der ${}^{L}ZF$ - beschreibbaren natürlichen Zahlen an der Zahlenmenge $\{0, M({}^{L}ZF)\}$.

6.8.7. Bei vorgegebener Zeichenmenge Ω und vorgegebener Bedeutung der Zeichen bzw. der Zeichenkombinationen stellen wir allgemein die ***Frage nach der Verteilung der ${}^{L}ZF$ - beschreibbaren natürlichen (bzw. rationalen, bzw. reellen usw.) Zahlen auf der Zahlengeraden für verschiedene Längen L der Zeichenfolgen.*** Insbesondere fragen wir nach der Anzahl $N({}^{L}ZF)$ der ${}^{L}ZF$ - beschreibbaren natürlichen Zahlen und nach der größten solchen Zahl $M({}^{L}ZF)$.

<u>6.9. Es gibt nur endlich viele einzelne Zahlen.</u>

6.9.1. Die Menge der Zahlen ist unendlich.

6.9.2. Die Menge der durch Zeichenfolgen tatsächlich beschreibbaren Zahlen ist endlich.

6.9.2.1. Um festzustellen, ob eine Zeichenfolge eine Zahl (allgemein ein Element einer Menge) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, muß diese Zeichenfolge zur Gänze gelesen werden.

6.9.2.2. Zeichenfolgen mit einer Länge größer als etwa 10^{20} können ihres Umfanges wegen nie zu Ende gelesen werden.

6.9.2.2.1. Das Lesen eines Bandes der Universalbibliothek (Einführung) erfordert mehr als einen Tag. Zeichenfolgen in einer Länge von 35000 Bänden sind daher nicht mehr lesbar.

6.9.2.2.2. Auch wenn durch den Einsatz von Computern die Größenordnung vielleicht um einen Faktor von 10^{15} vergrößert werden könnte, bleibt eine Länge von ca. 10^{20} Zeichen obere Grenze für die Lesbarkeit.

6.9.2.3. Die Frage, ob eine Zeichenfolge eine Zahl (allgemein ein Element einer Menge) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, wird mit genügend langer Zeichenfolge unentscheidbar. Aus 6.9.2.2 folgt daher 6.9.2.

6.9.3. Wegen 6.9.2 können aus der unendlichen Menge der natürlichen Zahlen nur endlich viele einzeln ausgewählt werden, über die gesprochen werden kann, woraus 6.9 folgt. Diese Feststellung beinhaltet natürlich eine Definition des Begriffes „Einzelne Zahl“.

6.9.4. Bei der in der Universalbibliothek zugrunde gelegten Zeichenmenge von 500 Zeichen gibt es höchstens ca. $500^{10^{20}}$ lesbare Zeichenfolgen. Nur ein verschwindend kleiner Bruchteil davon beschreibt verschiedene (!) Zahlen eindeutig und widerspruchsfrei. Die Anzahl einzelner Zahlen im Sinne von 6.9.3 ist daher um Größenordnungen kleiner.

6.9.5. Der hier sich zeigende Unterschied zwischen potentiell unendlich und aktual unendlich beruht darauf, daß auch Mathematik nur in Raum und Zeit betrieben werden kann.

6.10. Die Welt gemäß 5 ist umfangreicher als die Menge der lesbaren Zeichenfolgen.

6.10.1. In 6.1 wurde eine konkrete Schrift vorausgesetzt. In 6.5 wurde weiters vorausgesetzt, daß der Leser alle Zeichenfolgen im selben Sinne interpretiert, wie der Autor.
6.10.2. Für jede lesbare Zeichenfolge gibt es eine Vielzahl von möglichen Interpretationen. Eine Zeichenfolge kann etwa nur als graphische Darstellung angesehen werden, wobei es auch auf die Form der Schriftzeichen und auf die Zeilenwahl ankommt. Sie kann bei entsprechender Übereinkunft als Darstellung einer akustischen Mitteilung dienen oder als Mitteilung durch andere Sinnesorgane.
6.10.3. Die gewählte Interpretation hängt von der jeweils lesenden Person P und vom Zeitraum ΔT des Lesens ab.
6.10.4. Durch die Einbeziehung von P und ΔT übersteigt der Umfang der Welt gemäß 5 den Umfang der Zeichenfolgen erheblich, bleibt aber natürlich abzählbar.

7. Kann die Unvollständigkeit einer auf der Universalanordnung beruhenden abzählbaren Anordnung der reellen Zahlen zwischen Null und Eins durch eine Diagonalzahl bewiesen werden? Eine Diskussion:

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Universalanordnung (Pkt 3.4 aus „Abzählbarkeit; Relative Wahrheit und Universalanordnung“). **Der Autor A** behauptet, in dieser abzählbaren Anordnung von Denkobjekten sind **alle reellen Zahlen zwischen Null und Eins** als Denkobjekte enthalten. **Ein Kritiker K** will die Unvollständigkeit der Anordnung durch die Einführung einer Diagonalzahl beweisen.

Die Diskussion darüber beginnt A mit folgender Anordnung **RA(0,1)**:

(1) Für alle A(M,P,ΔT) (vgl. 2.1 aus „Abzählbarkeit; ....“) mit $P \neq K$ wird an die Stelle n = n(M,P,ΔT) (vgl. 3.4.3) von RA(0,1) die Zahl 0’4999..... gesetzt.

(2) Für alle A_Z(M,K,ΔT), für welche **K in ΔT bejaht**, daß M eine reelle Zahl Z zwischen Null und Eins eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, wird an die Stelle n = n(M,K,ΔT) von RA(0,1) diese Zahl Z gesetzt.

(3) Für alle A(M,K,ΔT), für welche K in ΔT nicht bereit ist zu bejahen, daß M eine reelle Zahl zwischen Null und Eins eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, wird an die Stelle n = n(M,K,ΔT) von RA(0,1) die Zahl 0’4999..... gesetzt.

In der so gewonnenen abzählbaren Anordnung RA(0,1) sind **definitionsgemäß nach Meinung von K** alle Zahlen reell und liegen zwischen Null und Eins. A behauptet darüber hinaus, **daß alle reellen Zahlen zwischen Null und Eins ihren Platz in RA(0,1) haben**. Die an der n^{ten} Stelle stehende Zahl sei $r_n = 0'r_{n1}r_{n2}\ldots r_{nn}\ldots\ldots$ mit $r_{ni} \in (0,1, ..., 9) \wedge \neg\forall i: r_{ni} = 0 \wedge \neg\forall i: r_{ni} = 9$.

Der Einwand von K lautet: Auf Grund von RA(0,1) wird eine Diagonalzahl $c = 0'c_1c_2 \ldots c_n \ldots\ldots$ mit $\forall n: c_n \neq r_{nn}$ gebildet, woraus $\forall n: c \neq r_n$ folgt.

A verlangt eine Konkretisierung von c.

K konkretisiert c z.B. durch $c_n = 1$ für $r_{nn} \neq 1$ und $c_n = 2$ für $r_{nn} = 1$.

A bildet eine Mitteilung MK, welche die Vorschrift zur Bildung von RA(0,1) sowie die von K gegebene Vorschrift zur Bildung von c enthält. Um seine Kritik aufrecht zu erhalten muß K in einem Zeitintervall ΔT bejahen, daß MK die reelle Zahl c zwischen Null und Eins eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Gemäß (2) der Vorschrift zur Bildung von RA(0,1) steht c damit an der Stelle r_n mit n = n(MK,K,ΔT) in RA(0,1). **Gemäß der von K gegebenen Definition müßte daher $c_n = r_{nn} \neq r_{nn}$ gelten.** Die Diagonalzahl c wird daher nicht wie gefordert widerspruchsfrei beschrieben, so daß an die Stelle n = n(MK,K,ΔT) gemäß (3) der Vorschrift zur Bildung von RA(0,1) die Zahl 0’4999..... zu setzen ist. Daher bezeichnet A den Versuch, durch die Bildung einer Diagonalzahl die Unvollständigkeit der abzählbaren Anordnung RA(0,1) der reellen Zahlen zwischen Null und Eins zu beweisen, **als misslungen.**

ÜBERABZÄHLBAR ?
ABZÄHLBARE ANORDNUNG BELIEBIGER MENGEN

(Karl-Heinz Wolff)

Π: = $(2, 3, \ldots \pi_i, \ldots\ldots)$ ist die Folge aller der Größe nach angeordneten Primzahlen.

α_i mit i = 1, 2, ... ω sind zugelassene Schriftzeichen, beispielsweise Buchstaben, Ziffern, Symbole, verschiedene Schriftarten, das Spatium, usw.

Ω: = $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\omega\}$ ist die Menge aller zugelassenen Schriftzeichen. Es kann sich z.B. um alle in einer Druckerei zur Verfügung stehenden Zeichen handeln.

${}^{L}ZF_n$: = $\alpha_{n_1}\alpha_{n_2} \ldots \alpha_{n_L}$ ist eine Zeichenfolge der Länge L, bestehend aus L angeordneten Schriftzeichen $\alpha_k \in \Omega$ mit k = $n_1, n_2, \ldots n_L$.

E(ZF) bedeute, das Element E werde durch die Zeichenfolge ZF eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben.

$\{E \mid B_1, B_2, \ldots B_m\}$ ist die Menge aller E, welche die Bedingungen $B_1, B_2, \ldots B_m$ erfüllen.

$(E \mid B_1, B_2, \ldots B_m \mid A)$ ist die Folge aller E, welche die Bedingungen $B_1, B_2, \ldots B_m$ erfüllen und gemäß A abzählbar angeordnet sind.

Abzählbare Anordnung aller Zeichenfolgen in einer Folge (ZF_n) = *ZFA*:

$\forall(ZF = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_L}): \Rightarrow \Pi(ZF) = 2^{i_1} \cdot 3^{i_2} \cdot \ldots \cdot \pi_L^{\,i_L}$.

ZFA: = $\left(ZF \mid ZF \text{ endlich} \mid \Pi(ZF_1) = 2 \wedge \forall n: \Pi(ZF_n) < \Pi(ZF_{n+1})\right)$.

Definition: $\Pi(E)$: = $\min\limits_{(E(ZF))} \Pi(ZF)$

Abzählbare Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in einer Folge (r_n) = *RA(0,1)*:

RA(0.1): = $\left(r \mid r \in R, 0 < r < 1, \exists\Pi(r) \mid \Pi(r_1) = \min\limits_{(r)} \Pi(r) \wedge \forall n: \Pi(r_n) < \Pi(r_{n+1}) \wedge\right.$

$\left.\wedge\ r_n = r_{n,1}\, r_{n,2} \ldots\ r_{n,n} \ldots\ldots\right)$.

Einwand (EC) nach Cantor:

(EC): = $\exists \boldsymbol{c} \in \{c \mid 0 < c < 1, c \in R, c = 0'c_1c_2 \ldots c_n \ldots\ldots, \forall n: c_n \neq r_{n,n}\} \Rightarrow \forall n: \boldsymbol{c} \neq r_n \Rightarrow \boldsymbol{c} \notin RA(0,1)$.

Gegeneinwand:

$\exists$**(EC)** $\Rightarrow \exists\{\mathbf{ZF} \mid \mathbf{ZF} \in \boldsymbol{ZFA},\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\mathbf{ZF})\} \neq \{\varnothing\} \Rightarrow \exists\Pi(\mathbf{c}) \Rightarrow \exists n: \boldsymbol{c} = r_n \in RA(0,1) \Rightarrow$ **W!**

Abzählbare Anordnung aller Elemente E einer Menge {E} in einer Folge (E_n) = *EA.*

EA: = $\left(E \mid E \in \{E\}, \exists\Pi(E) \mid \Pi(E_1) = \min\limits_{(E)} \Pi(E) \wedge \forall n: \Pi(E_n) < \Pi(E_{n+1})\right)$

Einwand (E*E*) durch Definition eines in *EA* nicht enthaltenen Elementes *E* ∈ {E}.

(E*E*): = $\exists \boldsymbol{E} \in \{E \mid E \in \{E\}, \forall n: E \neq E_n\} \Rightarrow \boldsymbol{E} \notin EA$.

Gegeneinwand:

$\exists$**(E*E*)** $\Rightarrow \exists\{\mathbf{ZF} \mid \mathbf{ZF} \in \boldsymbol{ZFA},\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\mathbf{ZF})\} \neq \{\varnothing\} \Rightarrow \exists\Pi(E) \Rightarrow \exists n: E = E_n \in EA \Rightarrow$ **W!**

ERLÄUTERUNGEN:

Abzählbare Anordnung aller Zeichenfolgen in einer Folge *ZFA*:

Für jede Zeichenfolge ZF = 0'$\alpha_{i1}\ \alpha_{i2} \ldots \alpha_{iL}$ der Länge L bilden wir das Produkt Π(ZF) aus den Potenzen $\pi_k^{i_k}$ der ersten L Primzahlen, wobei der Exponent i_k der k^{ten} Primzahl π_k den Index des k^{ten} Zeichens α_k bildet. Offenbar gibt es zu jeder endlichen Zeichenfolge ZF genau eine solche Ordnungszahl Π(ZF), welche ZF eindeutig kennzeichnet.

Zur Anordnung aller Zeichenfolgen betrachten wir alle endlichen ZF und beginnen mit der kleinsten möglichen Zahl für Π(ZF), also 2. Die zugehörige Zeichenfolge, es handelt sich offenbar um die Folge „α_1", ordnen wir als erste Zeichenfolge ZF_1 an. Alle weiteren endlichen Zeichenfolgen ZF_n werden dann nach der Größe von $\Pi(ZF_n)$ angeordnet.

Definition:

Kann ein Element E eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden, dann gibt es immer mehrere Zeichenfolgen, welche dies tun. So kann man etwa die selbe Beschreibung in verschiedenen Schriftarten vornehmen. Die kleinste Zahl Π(ZF) aller E eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Zeichenfolgen ZF bezeichnen wir mit Π(E). Im Unterschied zur Anordnung der Zeichenfolgen, die wir unabhängig von einer allfälligen „Bedeutung" für einen Leser vorgenommen haben, erfordert die Bildung von Π(E) eine Interpretation von ZF.

Abzählbare Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in einer Folge (r_n) = *RA(0,1).*

Wir betrachten alle reellen Zahlen r zwischen 0 und 1, die durch eine endliche Zeichenfolge eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden. Eine solche Beschreibung für ein r ist genau dann möglich, wenn eine Zahl Π(r) existiert. Diese reellen Zahlen r ordnen wir nach der Größe von Π(r) in einer Folge *RA(0,1)* an und betrachten sie als unendliche Dezimalzahlen.

Einwand nach Cantor:

Jede Dezimalzahl c zwischen 0 und 1, die sich jeweils in ihrer n^{ten} Dezimalstelle von $r_{n,n}$ unterscheidet, ist von allen r_n verschieden. Sie kann also in der Folge *RA(0,1)* nicht enthalten sein. Ein solches ***c*** kann etwa durch ***c*** = 0'$c_1c_2 \ldots c_n$ ..... mit $c_n = 1$ für $r_{n,n} \neq 1$ und $c_n = 2$ für $r_{n,n} = 1$ beschrieben werden.

Gegeneinwand:

Jede Cantor'sche Dezimalzahl $\boldsymbol{c}$ kann durch (mindestens) eine Zeichenfolge eindeutig beschrieben werden. Wäre die Beschreibung auch widerspruchsfrei, dann gäbe es eine Zahl $\Pi(\boldsymbol{c})$, deren Größe für $\boldsymbol{c}$ einen Platz r_n in der Folge *RA(0,1)* sichert. Damit wird die Forderung von Cantor „ $\boldsymbol{c}_\mathbf{n} \neq r_{n,n}$" zu „ $\boldsymbol{c}_\mathbf{n} \neq \boldsymbol{c}_\mathbf{n}$". Die n^{te} Dezimalstelle von $\boldsymbol{c}$ müßte definitionsgemäß (!) von sich selbst verschieden sein und dies ist ein Widerspruch. Die Beschreibung kann daher nicht, wie gefordert, widerspruchsfrei vorgenommen werden.

Abzählbare Anordnung aller Elemente E einer Menge $\{E\}$ in einer Folge (E_n) = *EA.*

Es werden alle Elemente der Menge $\{E\}$ betrachtet, die durch eine endliche Zahlenfolge eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden. Eine solche Beschreibung für ein E ist genau dann möglich, wenn eine Zahl $\Pi(E)$ existiert. Diese E ordnen wir nach der Größe von $\Pi(E)$ in einer Folge *EA* an.

Einwand durch Definition eines in der Folge nicht enthaltenen Elementes *E* aus $\{E\}$.

Es wird ein in der Folge *EA* nicht enthaltene Element *E* der Menge $\{E\}$ definiert, also durch eine Zeichenfolge eindeutig beschrieben. Für *E* gilt also definitionsgemäß $E \notin EA$.

Gegeneinwand:

Da dem Einwand ein konkret definiertes Element *E* zugrunde liegt, kann das in der Folge *EA* nicht enthaltene Element durch (mindestens) eine Zeichenfolge ZF mit *E* = *E*(ZF) eindeutig beschrieben werden. Wäre die Beschreibung auch widerspruchsfrei, dann gäbe es eine Zahl $\Pi(E)$, deren Größe für *E* einen Platz E_n in der Folge *EA* sichert. Damit gilt $E \in EA$ im Widerspruch zur Definition von *E*, in der $E \notin EA$ verlangt wurde. Die Beschreibung kann daher nicht, wie gefordert, widerspruchsfrei vorgenommen werden.

Stichworte: Abzählbare Anordnung, Diagonalverfahren nach Cantor (Kritik), Kontinuum, Kontinuumhypothese, Überabzählbare Mengen (Kritik), Universalanordnung, Cantor's diagonal process, countable arrangement, uncountability (Critic),

ARBEITEN ZUM THEMA
DER BEGRIFFSRELATIVITÄT

K.-H. WOLFF

INHALTSVERZEICHNIS

And speech created thought
Which is the measure of the universe.

SHELLEY

Vorbemerkung:

Die folgenden Darstellungen sind Versuche einer Kritik an manchen, nach Meinung des Autors unzulässigen Verallgemeinerungen von Begriffen, die letztlich zu einer ebenso unzulässigen Verabsolutierung solcher Begriffe führen, zu formulieren. Es soll vorallem die jedem Begriff innewohnende Relativität seiner Bedeutung bewußt gemacht werden. Erst in zweiter Linie sind gewisse Folgerungen, etwa für die Problematik der überabzählbaren Mengen, Gegenstand der Überlegungen.

Die unterschiedlichen Darstellungen sollen verschiedene Wege zum wesentlichen Inhalt der Aussagen anbieten. Man kann jedoch ohne Schwierigkeiten sehen, daß etwa der in der ersten Arbeit (1972) verwendete Begriff des "Vorwissens" in späteren Arbeiten durch den "Zustand" des Kybernetischen Systems (der Person) P im Zeitpunkt t ersetzt wird. In beiden Fällen wird jedoch lediglich die jeder Aussage bzw. jeder Mitteilung innewohnende Relativität berücksichtigt.

Der Kernpunkt der Aussagen ist der folgende: Jeder Versuch, die Menge alles Existierenden über die Menge alles für irgendeine Person in irgendeinem Zeitpunkt potentiell denkbaren, also potentiell mitteilbaren, hinaus zu erweitern gleicht dem Versuch Münchhausens sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zu ziehen.

ZUR PROBLEMATIK DES BEGRIFFES DER ÜBERABZÄHLBARKEIT

1. Alles Denkbare ist mitteilbar.

1.1 Alles Erfahrbare wird in Empfindungen und in Gedanken geteilt.

1.2 Alles Formulierbare, d.h. in einer Schrift Ausdrückbare, wird als Gedanke, alles Nichtformulierbare als Empfindung bezeichnet.

1.2.1 Durch 1.2 wird lediglich eine Definition von Gedanken und Empfindungen gegeben, die für die weiteren Ableitungen ausreicht.

1.2.2 Die in 1.2 verwendeten Begriffe "Schrift" bzw. "ausdrückbar" müssen nicht näher erläutert werden; es genügt im wesentlichen, daß Mitteilungen nach 4.1, 4.6.2.2, 4.7.2.2, 4.8.2.2 und 5.3 als in einer Schrift ausdrückbar verstanden werden.

1.2.3 Nach der Definition 1.2 können auch Gedanken über Empfindungen ausgedrückt werden.

1.3 Gedanken können Objekte eindeutig beschreiben.

1.3.1 Gedanken als formulierbare Erfahrung können in schriftlichen "Mitteilungen" formuliert werden.

1.3.2 Die Mitteilung: "Der Schmied schmiedet ein Eisen" beschreibt kein Objekt eindeutig.

1.3.3 Die Mitteilung "Schmied" ist im allgemeinen mehrdeutig. Sie kann einen Namen, einen Beruf oder eine bestimmte Person beschreiben; sie kann ein Objekt eindeutig beschreiben, wenn die Eindeutigkeit der Bezeichnung "Schmied" durch vorhergehende Mitteilungen sichergestellt wurde.

1.3.4 Die Mitteilung "Josef Schmied, geboren am 12.12.1949 in Villach, Österreich" wird im allgemeinen eindeutig sein. Durch sie wird das Objekt Josef Schmied eindeutig beschrieben.

1.4 Die Menge der Mitteilungen, durch die ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird, ist eine Teilmenge der Menge aller Mitteilungen.

1.4.1 Je nach dem Vorwissen ist eine Mitteilung verständlich oder nicht.

1.4.1.1 Zum Verständnis jeder Mitteilung sind gewisse Vorkenntnisse, wie z.B. Kenntnisse der Sprache, in der die Mitteilung abgefaßt ist, erforderlich.

1.4.1.2 Neben der Kenntnis der Sprache muß auch die Kenntnis spezieller Begriffe, spezieller Bezeichnungen, allgemein eine gewisse Fachkenntnis vorausgesetzt werden.

1.4.1.3 Alle beim Lesen einer Mitteilung vorhandenen Kenntnisse werden als Vorwissen bezeichnet.

1.4.2 Mangelndes Vorwissen kann durch Lernen erworben werden.

1.4.2.1 Das Lernen z.B. einer Sprache oder eines Kalküls kann selbst in einer Mitteilung formuliert werden, wie z.B. in Lehrbüchern.

1.4.2.2 Ist eine für eine Person P_1 verständliche Mitteilung für eine Person P_2 mangels ausreichenden Vorwissens unverständlich, so kann der zur Erwerbung dieses Vorwissens notwendige Lernvorgang in einer Mitteilung formuliert werden, mit der zusammen die ursprüngliche Mitteilung auch für die Person P_2 verständlich wird.

1.4.2.3 Eine für P_1 verständliche Mitteilung, die durch keinen wie immer gearteten, in Form einer Mitteilung formulierbaren Lernvorgang für P_2 verständlich gemacht werden kann, kann nicht Gegenstand einer sinnvollen Diskussion zwischen P_1 und P_2 sein (vgl. 3.3.3).

1.4.3 Da der Sinn einer Mitteilung vom Vorwissen abhängt, ist die Entscheidung, ob durch eine Mitteilung ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird, vom Vorwissen und damit personenabhängig.

2. Alle Mitteilungen können abzählbar angeordnet werden.

2.1 Wegen 1.2 ist es ausreichend, sich auf schriftliche Mitteilungen zu beschränken.

2.2 Als Bildschirmmitteilung vom Maß n^2 wird ein Raster von schwarzen oder weißen Elementarquadraten der Seitenlänge 1/10 mm bezeichnet, die in n Zeilen zu je n Elementarquadraten angeordnet sind.

2.2.1 In solchen Bildschirmmitteilungen kann alles dargestellt werden, was auf einem schwarz-weißen Fernsehbildschirm aufgezeichnet werden kann.

2.2.2 Alle schriftlichen Mitteilungen können in Form einer Bildschirmmitteilung dargestellt werden.

2.2.3 Im allgemeinen kommt jede Mitteilung in der Menge der Bildschirmmitteilungen unendlich oft vor.

2.2.3.1 Im allgemeinen bleibt der Sinn einer Mitteilung unverändert, wenn das Schriftbild der Mitteilung auf das 2-, 3-, ..., n-, ...-fache vergrößert wird.

2.2.3.2 Dies gilt nicht, wenn ein absoluter Maßstab, z.B. der Abstand zweier Punkte, essentieller Inhalt der Mitteilung ist.

2.3 Die Menge aller Bildschirmmitteilungen kann abzählbar angeordnet werden.

2.3.1 Zunächst wird jedem weißen Elementarquadrat die Ziffer 0 und jedem schwarzen Elementarquadrat die Ziffer 1 zugeordnet.

2.3.2 Jeder Mitteilung vom Maße n^2 wird eine $(n^2 + 2)$-stellige Zahl zugeordnet, deren erste und deren letzte Stelle 1 ist und deren $(r - 1)n + s + 1^{te}$ Stelle 0 oder 1 ist, je nachdem, ob in der r^{ten} Zeile das s^{te} Elementarquadrat weiß oder schwarz ist.

2.3.3 Die Bildschirmmitteilungen werden nun nach der Größe der gemäß 2.3.2 zugeordneten Zahlen angeordnet.

2.4 Die Menge aller Bildschirmmitteilungen heiße Universalschrift.

2.4.1 Wegen 2.2.2 enthält die Universalschrift alle schriftlichen Mitteilungen.

3. Alle Denkobjekte können in einer Universalanordnung abzählbar angeordnet werden.

3.1 Die Mitteilungen aus der Universalschrift können in der Reihenfolge ihrer Anordnung nach 2.3 durchgemustert werden.

3.2 Es werden jene Mitteilungen ausgewählt, durch die ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird.

3.3 Die Menge der so erhaltenen Denkobjekte ist personenunabhängig.

3.3.1 Um 3.3 zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß es zu jeder Mitteilung $M(P_1)$, durch die für eine Person P_1 ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird, eine Mitteilung $M(P_2)$ gibt, durch die für eine Person P_2 das Denkobjekt eindeutig beschrieben wird.

3.3.2 Es sind drei Fälle möglich:

3.3.2.1 Entweder versteht P_2 die Mitteilung $M(P_1)$ in gleicher Weise wie P_1, dann gilt $M(P_1) = M(P_2)$ und diese Mitteilung beschreibt für P_1 und P_2 dasselbe Denkobjekt eindeutig, oder

3.3.2.2 P_2 versteht $M(P_1)$ nur deshalb nicht, weil ihm das Vorwissen fehlt, dann wird der zur Erlangung des Vorwissens notwendige Lernvorgang gemäß 1.4.2.2 in einer Mitteilung $M(P_1,P_2)$ formuliert, so daß $M(P_1,P_2) + M(P_1) = M(P_2)$

für P_2 verständlich ist und das selbe Denkobjekt eindeutig beschreibt, oder

3.3.2.3 es gibt keine derartige Mitteilung $M(P_1,P_2)$.

3.3.3 Im Falle 3.3.2.3 ist es offenbar P_1 durch keine wie immer geartete Mitteilung möglich, P_2 über das durch $M(P_1)$ eindeutig beschriebene Denkobjekt zu informieren.

3.3.4 In diesem Falle bildet P_2 die Mitteilung
$M(P_2)$: = "Das Denkobjekt, das für P_1 im Zeitpunkt T durch die Mitteilung $M(P_1)$ eindeutig beschrieben wird."

3.3.4.1 In $M(P_2)$ nach 3.3.4 bezeichnet T einen Zeitpunkt, in dem P_1 behauptet, daß durch die Mitteilung $M(P_1)$ ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird.

3.3.4.2 Da das Denkobjekt für P_2 unbeschreibbar ist, bietet die Mitteilung $M(P_2)$ die einzige Möglichkeit, dieses Denkobjekt unter Verwendung des Vorwissens von P_1 eindeutig zu beschreiben.

3.3.4.3 P_2 weiß zwar nicht und kann auch nach Voraussetzung nie wissen, wie das Denkobjekt, das für P_1 durch $M(P_1)$ eindeutig beschrieben wird, beschaffen ist, doch kann er die Mitteilung $M(P_2)$ eindeutig diesem Denkobjekt zuordnen.

3.3.5 Da sich alles Denken in Raum und Zeit abspielen muß, kann die Angabe von P_1 und T in 3.3.4 durch die Angabe eines Raum-Zeit-Elementes (RZE) ersetzt werden.

3.3.5.1 Ein Raum-Zeit-Element sei ein Würfel von der Kantenlänge der Elementarlänge und der Dauer der Elementarzeit.

3.3.5.2 Das Raum-Zeit-Universum kann in RZE unterteilt werden, die abzählbar angeordnet werden können.

3.3.5.3 Da sich Denken in Raum und Zeit abspielt, gibt es zu jedem Gedanken und insbesondere zu jedem Lesen einer schriftlichen Mitteilung mindestens ein RZE, das diesem Denken bzw. dem Lesen der Mitteilung eindeutig zugeordnet werden kann.

3.3.5.4 Durch ein P_1 und T bezeichnendes RZE wird insbesondere das Vorwissen von P_1 im Zeitpunkt T eindeutig bestimmt. Einem RZE ist höchstens ein Vorwissen zugeordnet, jedem Vorwissen ist (mindestens) ein RZE zugeordnet.

3.3.6 Im Falle von 3.3.2.3 leistet die Mitteilung
$M(P_2)$: = "Das Denkobjekt, das durch $M(P_1)$ im RZE Nr.N eindeutig beschrieben wird"
dasselbe wie die Mitteilung $M(P_2)$ aus 3.3.4.

3.3.7 Zu jeder Mitteilung $M(P_1)$ kann P_2 eine Mitteilung $M(P_2)$ nach 3.3.2.1, 3.3.2.2 oder 3.3.6 bilden, durch die P_2 das selbe Denkobjekt wie P_1 eindeutig beschreibt, womit 3.3. bewiesen ist.

3.4 Die Menge aller Denkobjekte aus der Universalanordnung ist vollständig.

3.4.1 Nach 3.3 ist die Menge der in der Universalanordnung enthaltenen Denkobjekte für alle Personen gleich, so daß niemand ein nicht in der Universalanordnung enthaltenes Denkobjekt eindeutig beschreiben kann. In diesem Sinn ist die Vollständigkeit zu verstehen.

3.4.2 Die Anordnung der Denkobjekte in der Universalanordnung ist personenabhängig.

3.4.2.1 Der Platz eines Denkobjektes in der Universalanordnung richtet sich nach dem Platz der dieses Denkobjekt eindeutig beschreibenden Mitteilung in der Anordnung nach 2.3.

3.4.2.2 Nur im Falle von 3.3.2.1 wird für P_1 und P_2 ein Denkobjekt durch die selbe Mitteilung eindeutig beschrieben, während in den übrigen Fällen verschiedene Mitteilungen für die Beschreibung verwendet werden.

3.4.2.3 Verschiedene Mitteilungen haben verschiedene Plätze in der Anordnung nach 2.3 und die ihnen zugeordneten Denkobjekte im allgemeinen verschiedene Plätze in der Universalanordnung, woraus die Personenabhängigkeit der Universalanordnung folgt.

3.5 Als Denkobjekte werden insbesondere Elemente von Mengen betrachtet, deren absolute Überabzählbarkeit behauptet wird.

3.5.1 Da die vorliegende Arbeit eine Kritik an der Einführung überabzählbarer Mengen einschließt, werden für den unanschaulichen Begriff "Denkobjekte" insbesondere "reelle Zahlen", "Funktionen" und "Mengen von natürlichen Zahlen" eingesetzt werden.

3.5.2 Es wird gezeigt werden, daß die üblichen Beweise für die Überabzählbarkeit von Mengen solcher Denkobjekte einen Widerspruch beinhalten.

4. Die Behauptung, ein Denkobjekt sei in der Universalanordnung nicht enthalten, führt zu einem Widerspruch.

4.1 Eine solche Behauptung aufstellen heißt, eine Mitteilung formulieren, die das angeblich nicht enthaltene Denkobjekt eindeutig beschreibt.

4.2 Diese Mitteilung ist in der Universalschrift enthalten.

4.3 Die Behauptung, das Denkobjekt sei in der Universalanordnung nicht enthalten, inkludiert die Behauptung, die Mitteilung nach 4.1 beschreibe ein Denkobjekt eindeutig.

4.4 Nach 3.2 folgt aus 4.3, daß dieses Denkobjekt in der Universalanordnung enthalten ist.

4.5 Zunächst muß vorausgesetzt werden, daß durch 4.1 ein Denkobjekt eindeutig beschrieben wird, damit in einem zweiten Schritt das Fehlen dieses Denkobjektes in der Universalanordnung behauptet werden kann. Diese zweite Behauptung steht aber nun im Widerspruch zu 4.4.

4.6 Als erstes Beispiel wird gezeigt, daß der Beweis der Überabzählbarkeit der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 mit Hilfe des Diagonalverfahrens einen Widerspruch enthält.

4.6.1 Zunächst wird der übliche Beweis nach CANTOR formuliert:

4.6.1.1 Es sei eine abzählbare Anordnung A aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{l} a_1 = 0'a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots\cdots \\ a_2 = 0'a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots\cdots \\ \vdots \\ a_n = 0'a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots\cdots \\ \vdots \end{array}$$

4.6.1.2 Nun bilde die Dezimalzahl

$$b = 0'b_1 b_2 \cdots b_n \cdots \wedge \bigwedge_n b_n = \begin{cases} 1 \text{ für } a_{nn} \neq 1, \\ 2 \text{ für } a_{nn} = 1. \end{cases}$$

4.6.1.3 Aus der Definition von b folgt $\bigwedge_n b_n \neq a_{nn}$ und daraus $\bigwedge_n b \neq a_n$, so daß b in A nicht enthalten ist, woraus die Unvollständigkeit der Anordnung A folgt.

4.6.2 Entsprechend 4.1 bis 4.5 kann gezeigt werden, daß die Beweisführung 4.6.1 einen Widerspruch enthält.

4.6.2.1 Die hier angeschriebene Form der Anordnung A ist unvollständig, da unendliche Dezimalzahlen nicht in dieser Form und auch nicht in unendlicher Anzahl angeschrieben werden können.

4.6.2.2 Soll eine derartige Anordnung Anspruch auf Vollständigkeit erheben können, dann muß das Bildungsgesetz jeder einzelnen Dezimalzahl und die vollständige Anordnung aller Dezimalzahlen explizit angegeben werden.

4.6.2.2.1 Die Dezimalzahl o'333..... kann in der Form $o'\dot{3}$ oder 1/3 angeschrieben werden.

4.6.2.2.2 Die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen, kann in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ geschrieben werden.

4.6.2.2.3 Ein Beispiel einer nicht berechenbaren Zahl ist

$$\alpha = o'\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

mit

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 \text{ wenn } x^n + y^n = z^n \text{ ganzzahlig lösbar,} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

4.6.2.2.4 Auch wenn es sich um unendliche Dezimalzahlen handelt, muß jede einzelne durch eine endliche Mitteilung beschrieben werden können.

4.6.2.2.5 Man bildet nun eine Anordnung A aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 durch Anordnung dieser Dezimalzahlen entsprechend dem Platz der sie beschreibenden Mitteilungen nach 2.3 bzw., was dasselbe ist, durch ihren Platz in der Universalanordnung.

4.6.2.3 Wird die Unvollständigkeit der nach 4.6.2.2.5 angeordneten Menge von Dezimalzahlen mit Hilfe des Diagonalverfahrens gemäß 4.6.1 behauptet, dann bildet man eine Mitteilung M, die die Definition der Anordnung enthält, also etwa die vorangeführten Punkte 1 bis 4.6.2.2.5. Diese Mitteilung ergänze man durch den Satz: "Nun wird eine Zahl b entsprechend 4.6.1.2 unter Zugrundelegung der Anordnung nach 4.6.2.2.5 gebildet."

4.6.2.4 Der mit Hilfe des Diagonalverfahrens geführte Beweis der Unvollständigkeit von A beruht auf der Behauptung, daß durch die Mitteilung M aus 4.6.2.3 eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1, nämlich b, eindeutig beschrieben wird.

4.6.2.5 Nach dieser Behauptung ist b ein durch eine Mitteilung eindeutig beschriebenes Denkobjekt, so daß per definitionem für b ein Platz in der Anordnung A reserviert ist, d.h. es gilt $\bigvee_m b = a_m$.

4.6.2.6 Aus der Definition von b nach 4.6.1.2 und A nach 4.6.2.2.5 folgt $\bigwedge_m b \neq a_m$ und dies steht in Widerspruch zu 4.6.2.5.

4.7 Als nächstes wird gezeigt, daß der Beweis der Überabzählbarkeit der einstelligen ganzzahligen Funktionen natürlicher Zahlen mit Hilfe des Diagonalvefahrens einen Widerspruch enthält.

4.7.1 Zunächst wird der übliche Beweis mit Hilfe des Diagonalverfahrens formuliert:

4.7.1.1 Es sei eine Anordnung A aller einstelligen ganzzahligen Funktionen natürlicher Zahlen gegeben und $f_n(x)$ sei die n^{te} Funktion in dieser Anordnung.

4.7.1.2 Nun bildet man die Funktion F(x) mit $\bigwedge_n F(n) = f_n(n) + 1$.

4.7.1.3 Aus 4.7.1.2 folgt
$\bigwedge_n F(n) \neq f_n(n)$ und daraus
$\bigwedge_n F(x) \neq f_n(x)$,
so daß die einstellige ganzzahlige für alle natürlichen Zahlen definierte Funktion F(x) in A nicht enthalten ist.

4.7.2 Analog zu 4.6.2 kann gezeigt werden, daß die Beweisführung nach 4.7.1 einen Widerspruch enthält.

4.7.2.1 In eine Anordnung A werden alle einstelligen ganzzahligen Funktionen natürlicher Zahlen aus der Universalanordnung aufgenommen und es sei $f_n(x)$ die n^{te} Funktion in dieser Anordnung.

4.7.2.2 Nun bilde eine Mitteilung M bestehend aus der vollständigen Definition der Anordnung A gemäß 4.7.2.1 und aus der Definition von F(x) durch $\bigwedge_n F(n) = f_n(n) + 1$.

4.7.2.3 Die Beweisführung nach 4.7.1 beruht auf der Behauptung, durch die Mitteilung M nach 4.7.2.2 werde eine einstellige ganzzahlige Funktion natürlicher Zahlen beschrieben. In diesem Fall ist diese Funktion in der Universalanordnung und damit in der Anordnung A enthalten, woraus $\bigvee_m F(x) = f_m($ folgt.

4.7.2.4 Die Folgerung aus der Definition aus 4.7.2.2, $\bigwedge_n F(x) \neq f_n(n)$ steht mit $\bigvee_m F(x) = f_m(x)$ in Widerspruch, so daß die Behauptung, durch die Mitteilung M aus 4.7.2.2 werde eine

einstellige ganzzahlige Funktion natürlicher Zahlen beschrieben, zu einem Widerspruch führt.

4.8 Schließlich wird gezeigt, daß der Beweis der Überabzählbarkeit der Mengen natürlicher Zahlen einen Widerspruch enthält.

4.8.1 Zunächst wird der übliche Beweis formuliert:

4.8.1.1 Es seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ Mengen natürlicher Zahlen, also Elemente der Potenzmenge. Wäre die Potenzmenge abzählbar, dann gäbe es eine eineindeutige Zuordnung $\bigwedge_n n \leftrightarrow \mathcal{M}_n$.

4.8.1.2 Nun bilde eine Menge
$\bar{\mathcal{M}} = \{n \mid n \notin \mathcal{M}_n\}$

4.8.1.3 Für $\bar{n} \leftrightarrow \bar{\mathcal{M}}$ gilt nun
$\bar{n} \in \bar{\mathcal{M}} \rightarrow \bar{n} \notin \bar{\mathcal{M}}$,
$\bar{n} \notin \bar{\mathcal{M}} \rightarrow \bar{n} \in \bar{\mathcal{M}}$
und dies ist ein Widerspruch, so daß es kein $\bar{n}$ gibt, dem $\bar{\mathcal{M}}$ zugeordnet wird, woraus die Unvollständigkeit der Zuordnung und damit die Überabzählbarkeit der Potenzmenge folgt.

4.8.2 Entsprechend 4.6.2 kann gezeigt werden, daß die Beweisführung nach 4.8.1 einen Widerspruch enthält.

4.8.2.1 Die Mengen $\mathcal{M}_n$ werden entsprechend ihrem Platz in der Universalanordnung numeriert und angeordnet. Weiters bildet man die eineindeutige Zuordnung $n \leftrightarrow \mathcal{M}_n$.

4.8.2.2 Nun bilde eine Mitteilung M bestehend aus der vollständigen Definition der Anordnung $\mathcal{M}_n$ und aus der Definition von $\bar{\mathcal{M}}$ durch $\bar{\mathcal{M}} = \{n \mid n \notin \mathcal{M}_n\}$.

4.8.2.3 Die Beweisführung nach 4.8.1 beruht auf der Behauptung, durch die Mitteilung M nach 4.8.2.2 werde eine Menge von natürlichen Zahlen beschrieben. In diesem Fall ist diese Menge in der Universalanordnung und damit in der Anordnung nach 4.8.2.1 enthalten, woraus $\bigvee_m \bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_m$ folgt.

4.8.2.4 Aus 4.8.2.1 und 4.8.2.3 folgt $m \leftrightarrow \bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_m$. Wegen der Definition von $\bar{\mathcal{M}}$ nach 4.8.2.2 gilt nun
$m \in \mathcal{M}_m \rightarrow m \notin \bar{\mathcal{M}}_m$,
$m \notin \mathcal{M}_m \rightarrow m \in \mathcal{M}_m$,
so daß die Behauptung, durch die Mitteilung M aus 4.8.2.2 werde eine Menge natürlicher Zahlen beschrieben, zu einem Widerspruch führt.

4.9 Der Widerspruch in den Beweisführungen nach 4.6.1, 4.7.1 und 4.8.1 folgt stets durch den Nachweis, daß bereits die Definition des angeblich in der vollständigen Anordnung nicht enthaltenen Denkobjektes einen Widerspruch enthält.

5. Die Anwendung des Auswahlaxioms auf eine Menge von Denkobjekten, die in der Universalanordnung nicht enthalten sind, führt zu einem Widerspruch.

5.1 Wie bereits gezeigt, sind alle Denkobjekte, die isoliert betrachtet werden können, in der Universalanordnung enthalten, doch können Mengen solcher Denkobjekte widerspruchsfrei eingeführt werden.

5.1.1 Die Behauptung: "Es gibt reelle Zahlen, die nicht in der Universalanordnung enthalten sind" führt für sich allein zu keinem Widerspruch, so daß einer axiomatischen Einführung solcher Zahlen nichts im Wege steht.

5.1.2 Reelle Zahlen nach 5.1.1 können allerdings in keiner Weise durch eine Mitteilung einzeln beschrieben werden, da sie ansonsten in der Universalanordnung enthalten wären.

5.2 Wird das Auswahlaxiom auf eine derartige Menge angewendet, dann muß dies in Raum und Zeit geschehen, so daß der Anwendung des Auswahlaxioms ein RZE, z.B. das RZE Nr.N, zugeordnet werden kann.

5.3 Man bildet nun eine Mitteilung M, die eine Beschreibung der Menge nach 5.1 sowie den Satz: "Betrachte das Denkobjekt, das im RZE Nr.N durch Anwendung des Auswahlaxioms ausgewählt wurde" enthält.

5.4 Die Mitteilung M aus 5.3 ist in der Universalschrift enthalten. Behauptet man, daß durch M ein Denkobjekt beschrieben wurde, dann ist für dieses Denkobjekt ein Platz in der Universalanordnung reserviert, was in Widerspruch zur Definition der Menge nach 5.1 steht, wonach es sich um Denkobjekte handelt, die nicht in der Universalanordnung enthalten sind.

5.5 Da eine Abspaltung einzelner Denkobjekte aus Mengen nach 5.1 somit in keiner Weise möglich ist, erscheint ihre Betrachtung sinnlos; für sie gilt mit WITTGENSTEIN: "Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen."

ÜBER EINE UNIVERSALSCHRIFT

Einleitung

In der Mengenlehre wird eine Voraussetzung stillschweigend als erfüllt angesehen, die für wichtige Aussagen wesentlich ist, aber nicht immer erfüllt sein muß. Es handelt sich um die Annahme, daß es stets möglich ist, zu jeder beliebigen vorgegebenen Menge ein weiteres Element hinzuzufügen. Auf dieser Annahme beruht etwa die Möglichkeit, von Mengen beliebiger Mächtigkeit zu Mengen höherer Mächtigkeit aufzusteigen.

Im folgenden führen wir eine sogenannte Universalschrift ein, deren wichtigste Eigenschaft darin liegt, daß in ihr auch Ort und Zeitpunkt berücksichtigt sind, an und in dem die Schrift gelesen wird. Eine mit Hilfe dieser Universalschrift beschriebene Menge kann nun nicht mehr ohne weiteres stets, also "jederzeit", erweitert werden, da Ort und Zeitpunkt der Erweiterung in der Universalschrift zum Ausdruck gebracht werden müssen. Die Menge aller in der Universalschrift beschreibbaren Objekte kann daher nicht mehr erweitert werden. Da auch gezeigt wird, daß die Menge aller in der Universalschrift beschreibbaren Objekte abzählbar angeordnet werden kann, versagen die Beweise über die Existenz von Mengen überabzählbarer Mächtigkeit. Dies läßt sich insbesondere am Beispiel der Menge der reellen Zahlen zeigen.

1. Die Bildschirmmitteilung

Eine wesentliche Eigenschaft von Aussagen der Geisteswissen-
schaften und der Mathematik ist es, daß sie in schriftlicher Form
dargestellt werden können. Diese Eigenschaft, der ansonsten nur
mehr oder weniger praktische Bedeutung zukommt - wissenschaftliche
Arbeiten werden ja üblicherweise in schriftlicher Form veröffentlicht -
wird in die folgenden Überlegungen wesentlich eingehen. Aus diesem
Grunde wird durch die folgende Einführung einer "Universalschrift"
eine gewisse Ordnung in die Menge der schriftlichen Aussagen gebracht.

Wir beschränken uns auf solche schriftliche Aussagen, die im
Prinzip auf einem ausreichend großen Fernsehbildschirm dargestellt
werden können. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden quadrati-
sche "Bildschirmmitteilungen" betrachtet.

Eine Bildschirmmitteilung ist ein Raster aus nn Elementarquadraten.
Jedes Elementarquadrat hat die Seitenlänge 1/10 mm und ist entweder
weiß oder schwarz. n durchläuft die Menge aller natürlichen Zahlen.

Für n = 1 gibt es offenbar genau zwei Bildschirmmitteilungen.
Da die Mitteilung in diesem Fall aus einem einzigen Elementarquadrat
besteht, kann dieses nämlich entweder weiß oder schwarz sein. Für
n = 2 gibt es 16 solche Bildschirmmitteilungen. In diesem Fall be-
steht die Bildschirmmitteilung aus 4 Quadraten, von denen jedes
weiß oder schwarz sein kann, also insgesamt 2^4 Möglichkeiten.

Es ist leicht einzusehen, daß jede schriftliche Mitteilung in
Form einer derartigen Bildschirmmitteilung dargestellt werden kann,
da solche Mitteilungen aus Buchstaben, Zeichen und sonstigen Symbolen
bestehen, die durch schwarze Elementarquadrate der Seitenlänge 1/10 mm
auf weißem Grund mit genügender Genauigkeit dargestellt werden können.
Die Menge $\{M\}$ aller derartigen Bildschirmmitteilungen M kann nun leicht
abzählbar angeordnet werden, indem man in jeder Mitteilung einem
weißen Elementarquadrat die Ziffer 1 und einem schwarzen Elementar-
quadrat die Ziffer 2 zuordnet und jeder Mitteilung jene Zahl zuordnet,
die man erhält, wenn die Einser und Zweier zeilenweise gelesen werden.
Aus der abzählbaren Anordnung der so erhaltenen Zahlen ergibt sich
eine abzählbare Anordnung der Mitteilungen.

Man kann sich nun jede Mitteilung realisiert denken als ein
quadratisches Stück Papier der Seitenlänge $\frac{n}{10}$ mm, dessen Oberfläche

mit weißen bzw. schwarzen Elementarquadraten der Seitenlänge $\frac{1}{10}$ mm
bedeckt ist. Die Menge dieser Mitteilungen, ein unendlicher
Stoß von immer größer werdenden Papierstücken, enthält in einem
gewissen Sinne "alle" Mitteilungen. Beispielsweise enthält er
sämtliche bereits geschriebenen, aber auch sämtliche in Zukunft
noch zu schreibenden wissenschaftlichen Arbeiten. Auch die vor-
liegende Arbeit kommt in der Menge dieser Mitteilungen vor, und
zwar sogar unendlich oft, denn durch eine Verdoppelung, Verdrei-
fachung usw. der Mitteilungen vom Maße n^2 auf das Maß $(2n)^2$, $(3n)^2$ usw.
bleibt der Sinn der Mitteilung - soferne keine absoluten Maßstäbe
auftreten - unverändert, ebenso wie der Sinn eines Satzes von der
Größe der verwendeten Buchstaben unabhängig ist.

Es erscheint daher von einem gewissen Standpunkt aus berechtigt,
die Menge der Mitteilungen als "Universalschrift" zu bezeichnen.

2. Die Universalschrift

Die Universalschrift eignet sich insbesondere zur Beschreibung
beliebiger Objekte unseres Denkens. Dazu gehören auch alle jene
Objekte, die Gegenstand mathematischer Untersuchungen sind. Wir
wollen uns hier auf reelle Zahlen beschränken, aber gleich an
dieser Stelle anmerken, daß die für reelle Zahlen im folgenden
angestellten Überlegungen prinzipiell für alle Objekte unseres
Denkens gelten.

Reelle Zahlen lassen sich auf verschiedene Weise in der Univer-
salschrift darstellen. So bezeichnet etwa "1", "eins", "$\frac{5}{5}$" usw.
die Zahl 1. Sicher sind alle endlichen natürlichen Zahlen, aber
auch alle endlichen Dezimalzahlen in der Universalschrift dar-
stellbar.

Bleiben wir im Bereich der reellen Zahlen, dann kann die Frage
der Darstellbarkeit einer Zahl in der Universalschrift nur bei un-
endlichen Dezimalzahlen problematisch erscheinen. Die Größe der
Mitteilungen M, also die Seitenlänge $\frac{n}{10}$ mm der quadratischen Mit-
teilung, ist zwar unbegrenzt, aber jedenfalls endlich. Auf einem
derartigen endlichen Quadrat läßt sich aber nur eine endliche Menge
von Schriftzeichen unterbringen. Die Dezimalzahl 0'333....., als
unendliche Dezimalzahl angeschrieben, ist in der Universalschrift
nicht darstellbar. Der Leser dieser Zeilen weiß aber bereits, daß

es sich um die Dezimalzahl $0'\dot{3} = 1/3$ handelt, obwohl ihm nur eine endliche Mitteilung, nämlich der bisherige Teil dieser Arbeit, vorliegt. Dies offenbar deshalb, weil auch unendliche Dezimalzahlen in endlicher Form angeschrieben werden können, wobei wir vorläufig die Frage, ob und in welchem Sinn "alle" Dezimalzahlen in endlicher Form dargestellt werden können, noch offenlassen.

Als weiteres Beispiel führen wir zunächst die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen, an, die etwa in der Form

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

dargestellt werden kann, wobei wir bemerken, daß die Bedeutung des Summenzeichens sowie der Summierung bis ins Unendliche ebenfalls durch eine endliche Mitteilung in der Universalschrift erklärt werden kann.

Aber auch nicht berechenbare Zahlen können in der Universalschrift dargestellt werden, wie etwa die unendliche Dezimalzahl $0'\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\ldots$, wobei $\alpha_n = 0$, wenn die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ eine ganzzahlige Lösung in a, b und c besitzt, und $\alpha_n = 1$ sonst. Obwohl diese Zahl möglicherweise unberechenbar ist, läßt sie sich doch definieren und in der Universalschrift darstellen.

Aber in der Universalschrift lassen sich Zahlen auch noch wesentlich allgemeiner und unbestimmter definieren, ohne daß die Eindeutigkeit dieser Definition darunter leidet. So beginnen etwa mathematische Beweise mit der Formulierung: "Es sei x eine Zahl aus der Menge X .....". Im weiteren Verlauf des Beweises wird mit diesem x so wie mit einer tatsächlichen Zahl gerechnet, ohne daß x näher spezifiziert wird. Trotzdem ist es für jeden Leser dieses Beweises klar, daß es sich bei x um eine feste, für die Dauer der Beweisführung jedenfalls unveränderliche Zahl handelt. Durch die oben erwähnte Beschreibung: "Es sei x eine Zahl aus der Menge X ....." wird für die Dauer der Beweisführung eine Zahl eindeutig ausgewählt, ohne daß sie jedoch näher bestimmt würde.

Allen diesen Darstellungen von Zahlen durch Mitteilungen aus der Universalschrift ist gemeinsam, daß <u>für den Leser der Mitteilung im Zeitpunkt des Lesens</u> (die Bedeutung des Heraushebens des Lesers und des Zeitpunktes des Lesens wird später noch erläutert) dieser Mitteilung eine Zahl eindeutig zugeordnet ist. Um die verschiedenen Ausdrücke

wie Beschreibung, Darstellung, Definition usw. zu vereinheitlichen, wollen wir im folgenden die Sprachregelung treffen, daß eine Zahl durch eine solche Mitteilung eindeutig "beschrieben" wird.

Tatsächlich lesbare Mitteilungen sind nicht nur endlich, sondern auch beschränkt, da es einer Person im Laufe ihres zeitlich beschränkten Lebens nur möglich ist, dem Umfang nach beschränkte Mitteilungen zu lesen. Trotzdem wird man behaupten dürfen, daß etwa die Zahl $10^{10^{10}}$ wenigstens prinzipiell als Dezimalzahl angeschrieben werden kann. Da die Mitteilungen der Universalschrift nur als endlich, nicht aber als beschränkt vorausgesetzt sind, findet sich eine Beschreibung der Zahl $10^{10^{10}}$ nicht nur in der hier verwendeten Form, sondern auch als Dezimalzahl in der Universalschrift, und zwar - wie bereits erwähnt - sogar unendlich oft. Die Universalschrift enthält offenbar sowohl die aktual anschreibbaren Zahlen als auch die nur potentiell anschreibbaren Zahlen, die aus Gründen der Endlichkeit, etwa wegen der auf der Erde zur Verfügung stehenden Masse, nicht tatsächlich angeschrieben werden können.

3. Die erweiterte Universalschrift

Die Bedeutung eines Schriftzeichens bzw. allgemeiner eines Symbols hängt von der verwendeten Schrift, von der verwendeten Sprache ab. Vielleicht bedeutet das Zeichen "1" bzw. das Wort "eins" einmal etwas völlig anderes, so wie für jemanden, der der chinesischen Sprache nicht mächtig ist, die Schriftzeichen dieser Sprache entweder keine Bedeutung haben oder eine andere als für einen Chinesen. Um nun auch die Möglichkeit verschiedener Bedeutungen ein und derselben Mitteilung der Universalschrift zu berücksichtigen, wollen wir uns überlegen, daß eine Mitteilung offenbar nur dann sinnvoll ein Denkobjekt oder im speziellen eine Zahl beschreiben kann, wenn im Zeitpunkt des Lesens dieser Mitteilung der Leser genau eine Zahl der Mitteilung zuordnet. Es ist also ohne weiteres möglich, daß zwei verschiedene Personen ein und derselben Mitteilung zwei verschiedene Zahlen zuordnen bzw. daß ein und dieselbe Person ein und derselben Mitteilung in verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Zahlen zuordnet. Letzteres etwa bei der Mitteilung "Es sei x eine Zahl aus der Menge X...." wenn es sich um verschiedene Mengen bzw. um verschiedene Beweise handelt

Diese mögliche Mehrdeutigkeit prinzipiell aller Mitteilungen der Universalschrift scheint zunächst einen starken Einwand gegen die Brauchbarkeit des Konzeptes der Universalschrift zu bedeuten. Diesem Einwand kann jedoch durch eine Ergänzung des Konzeptes der Universalschrift Rechnung getragen werden. Für die späteren Überlegungen reicht es völlig aus vorauszusetzen, daß es eine bestimmte Person gibt, bzw. daß eine bestimmte Person denkbar ist, für die in einem bestimmten Zeitpunkt durch eine Mitteilung eine Zahl eindeutig beschrieben wird. Mitteilungen, die keinr denkbaren Person in keinem denkbaren Zeitpunkt eine Zahl beschreiben, brauchen nicht betrachtet zu werden. Man überlegt sich allerdings leicht, daß es in keinem Zeitpunkt zulässig wäre, auf Grund dieser Überlegung eine Mitteilung für alle Zeitpunkte auszuschalten. Wohl aber wäre es für den Autor dieser Zeilen im Zeitpunkt der Niederschrift zulässig, die Mitteilung, die nur aus einem weißen Elementarquadrat besteht, auszuschließen, da sie im Zeitpunkt der Niederschrift für ihn keine Zahl beschreibt.

Gegenstand der folgenden Überlegungen wird vor allem die eindeutige Zuordnung von Zahlen zu Mitteilungen sein. Da eine solche eindeutige Zuordnung grundsätzlich nur für eine bestimmte Person und für einen bestimmten Zeitpunkt möglich erscheint, muß das Konzept der Universalschrift so erweitert werden, daß für jede Person und für jeden Zeitpunkt eine eigene komplette Universalschrift zur Verfügung steht. Zur Kennzeichnung einer Mitteilung aus diesem erweiterten Konzept ist daher die Kennzeichnung der Mitteilung aus der ursprünglichen Universalschrift zuzüglich der Kennzeichnung der Person und des Zeitpunktes, in dem diese Person die Mitteilung liest (oder lesen könnte) notwendig.

Um dies zu ermöglichen, führen wir sogenannte Raum-Zeit-Elemente ein. Als Raum-Zeit-Element bezeichnen wir einen Würfel mit der Seitenlänge der Elementarlänge und mit der Dauer der Elementarzeit. Für jede denkbare Person und für jeden denkbaren Zeitpunkt, in dem diese Person eine Mitteilung liest, gibt es dann mindestens ein Raum-Zeit-Element, das dieser Person und der Zeitspanne des Lesens der Mitteilung zugeordnet werden kann. Dies folgt einfach daraus, daß jede Person einen Raum einnimmt, der größer ist als ein Würfel

mit der Seitenlänge der Elementarlänge und jedes Lesen einer Mitteilung eine Zeitspanne benötigt, die größer ist als die Elementarzeit.

Es ist daher stets möglich, zwei verschiedene Personen, die die selbe Mitteilung lesen oder auch einer Person, die die selbe Mitteilung in zwei verschiedenen Zeitpunkten liest, zwei verschiedene Raum-Zeit-Elemente zuzuordnen. Umgekehrt ist durch die Angabe eines Raum-Zeit-Elementes höchstens eine Person und höchstens ein Lesevorgang bestimmt.

Wir bilden nun eine erweitrte Universalschrift, indem wir jedem Raum-Zeit-Element einen kompletten Satz von Mitteilungen der ursprünglichen Universalschrift zuordnen.

Es bedarf keiner weiteren Erörterung, daß sich die Raum-Zeit-Elemente abzählbar anordnen lassen. Die erweiterte Universalschrift enthält zu jedem Raum-Zeit-Element jede Mitteilung genau ein Mal. Es können daher auch die Mitteilungen der erweiterten Universalschrift abzählbar angeordnet werden.

Man kann sich die Mitteilungen aus der erweiterten Universalschrift zusammengesetzt denken aus einer ursprünglichen Bildschirmmitteilung, ergänzt um die Kennziffer des Raum-Zeit-Elementes in der abzählbaren Anordnung dieser Raum-Zeit-Elemente.

In gewissem Sinne ist allerdings auch die erweiterte Universalschrift in der ursprünglichen Universalschrift enthalten. Die ursprüngliche Universalschrift enthält nämlich zu jeder Mitteilung M auch diese Mitteilung, ergänzt um den Satz "Diese Mitteilung ist dem Raum-Zeit-Element Nr. ..... zugeordnet." Beschränkt man sich in der Universalschrift auf jene Mitteilungen, die eine derartige Ergänzung enthalten, wobei an die Stelle der fünf Punkte der Ergänzung der Reihe nach alle natürlichen Zahlen zu setzen sind, dann erhält man nur mehr Mitteilungen, die durch ihren letzten Satz einem Raum-Zeit-Element zugeordnet sind, wie dies in der erweiterten Universalschrift gefordert wird.

4. Die Universalanordnung

Die Universalschrift ermöglicht in ihrer erweiterten Form eine Anordnung von Denkobjekten, insbesondere von reellen Zahlen nach neuartigen Gesichtspunkten. Da die Mitteilungen der erweitrten

Universalschrift abzählbar angeordnet werden können, können alle jene reellen Zahlen, die durch eine Mitteilung der Universalschrift eindeutig beschrieben werden, abzählbar angeordnet werden. Da die Universalschrift aber auch Mitteilungen enthält, deren Bedeutung erst in ferner Zukunft - oder auch in ferner Vergangenheit - und durch völlig unbekannte und gegenwärtig nicht befragbare Personen enthüllt werden könnte, kann eine derartige Anordnung in keinem Zeitpunkt auch nur beliebig weit vervollständigt werden.

Eine Anordnung von reellen Zahlen nach den hier dargelegten Grundsätzen enthält aber jedenfalls alle reellen Zahlen, die sich prinzipiell in irgendeinem Zeitpunkt durch irgendeine Person in Form irgendeiner endlichen, aber beliebig umfangreichen Mitteilung darstellen lassen.

Etwas allgemeiner gilt dies für alle Objekte unseres Denkens. Die abzählbare Anordnung der Mitteilungen der erweiterten Universalschrift ermöglicht es, alle Objekte unseres Denkens, die in irgendeinem Zeitpunkt für irgendeine Person ~~oder~~ dann irgendeine Mitteilung eindeutig beschrieben werden können, abzählbar anzuordnen. Aus diesem Grunde soll jede Anordnung von Objekten auf Grund einer Anordnung der Mitteilungen der erweiterten Universalschrift als Universalanordnung bezeichnet werden.

Etwas formaler kann eine Universalanordnung folgendermaßen beschrieben werden. Es gelte:

$|"...",P,t,M| \Leftrightarrow$ eine Person P ist in einem Zeitpunkt t bereit, auf Grund der Mitteilung M die Aussage "..." als wahr zu bezeichnen.

Beispielsweise kann als Mitteilung M eine Mitteilung der Gestalt: "$x = 0'a_1 \ldots a_n \wedge \bigwedge_m a_m \in (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$", als Person der Autor der vorliegenden Arbeit, als Zeitpunkt ein Zeitpunkt aus dem für das Schreiben dieser Arbeit notwendigen Zeitintervall und als Aussage "..." = "x ist eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1" gewählt werden.

Wir wollen nun eine Universalanordnung von Elementen x einer bestimmten Menge X vornehmen. Beispielsweise sei x eine beliebige Dezimalzahl zwischen 0 und 1 und X die Menge aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Die Aussage "$x \in X$" bedeutet daher, daß x eine in

dieser Universalanordnung enthaltene Dezimalzahl zwischen 0 und 1 ist. Für die Universalanordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, UA(DZ), gilt daher:

$\bigvee_P \bigvee_t \bigvee_M |x \in X,P,t,M| \Leftrightarrow$ x ist eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 aus UA(DZ).

UA(DZ) enthält also auch Elemente x, die von einer Person P irgendeinmal fälschlich (irrtümlich oder absichtlich) als der Menge X zugehörig bezeichnet werden. Es genügt sogar die grundsätzliche Bereitschaft von P, diese Zugehörigkeit als wahr zu bezeichnen. In UA(DZ) können daher auch Elemente auftauchen, deren Definition falsch bzw. sogar in sich widerspruchsvoll ist. Behauptet etwa eine Person P in irgendeinem Zeitpunkt t, daß durch die Mitteilung

$\bar{M}$: = "die größte reelle Zahl kleiner als 1/2 und größer als 3/4" eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben wird, dann wird in UA(DZ) für das durch $\bar{M}$ für P in t beschriebene Objekt ein Platz reserviert, wenn auch weder der Autor dieser Arbeit noch wahrscheinlich je irgendein Leser die Meinung von P in t teilen wird. Die hier definierte Mitteilung $\bar{M}$ muß natürlich in Form einer quadratischen Bildschirmmitteilung vorgestellt werden.

Die Frage, welche in einer Universalanordnung angeordneten Objekte tatsächlich sinnvoll definiert sind, soll und kann hier nicht geprüft werden. Wir halten aber fest, daß jedes für eine konkrete Person P in irgendeinem Zeitpunkt t konkret oder potentiell durch irgendeine Mitteilung M eindeutig beschriebene Objekt jedenfalls in der Universalanordnung enthalten ist.und alle Objekte der Universalanordnung abzählbar angeordnet sind. Es ist aber prinzipiell nicht möglich, in irgendeinem Zeitpunkt allgemein, d.h. für alle Personen P und für alle Zeitpunkte t, zu entscheiden, welche Objekte der Universalanordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 tatsächlich Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 sind. Da die Menge der Objekte dieser Universalanordnung sicher nicht kleiner ist als die Menge der in dieser Universalanordnung enthaltenen Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, folgt daraus, daß die Mächtigkeit der Menge der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 aus der Universalanordnung nicht größer ist als die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen.

5. Die Problematik des Cantor'schen Beweises der Überabzählbarkeit

Wir betrachten nun die Universalanordnung aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Diese Anordnung enthält also genau jene Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, die in irgendeinem Zeitpunkt für irgendeine Person durch irgendeine Mitteilung eindeutig beschrieben werden. Wir heben hervor, daß diese Art der Anordnung Begriffe wie Sprache, Metasprache usw. vermeidet und lediglich auf das Verhalten einer Person beim Lesen einer Mitteilung in einem bestimmten Zeitraum abgestellt ist.

Offenbar sind alle Dezimalzahlen aus dieser Universalanordnung abzählbar angeordnet.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie weit diese Universalanordnun "vollständig" ist, wie weit sie also "alle" Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 enthält.

Um diese Frage zu behandeln, teilen wir die Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 in zwei Klassen. Klasse 1 enthält alle Dezimalzahlen aus der oben beschriebenen Universalanordnung, Klasse 2 alle übrigen Dezimalzahlen. Wir interessieren uns vor allem für diese Klasse 2 und halten fest, daß die Annahme von Dezimalzahlen in Klasse 2 an sich zu keinem Widerspruch führt. Wie weit ist aber eine solche Annahme sinnvoll?

Zunächst enthält Klasse 2 sicher keine "beschreibbaren" Zahlen, wenn man "beschreibbar" als "durch eine Mitteilung der Universalschrif beschreibbar" versteht. Wie steht es aber nun mit der bekannten Diagonalzahl aus dem Beweis der Überabzählbarkeit der Cantor'schen Diagonalzahl aus dem Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nach Cantor ? Dieser Beweis kann bekanntlich folgendermaßen geführt werden:

Es sei

$$a_1 = 0'a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\ldots$$
$$a_2 = 0'a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0'a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, \ldots\ldots$$
$$\vdots$$

eine abzählbare Anordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Nun bilde man eine Dezimalzahl

$$b = 0'b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\ldots$$

mit

$$b_n = 1 \text{ für } a_{nn} \neq 1$$

und

$$b_n = 2 \text{ für } a_{nn} = 1.$$

Offenbar gilt $\bigwedge_n b \neq a_n$ wegen $\bigwedge_n b_n \neq a_{nn}$. Da b eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 ist, folgt daraus die Unvollständigkeit der Anordnung.

Wie weit kann die Cantor'sche Beweisführung bei Zugrundelegung der Universalanordnung noch aufrecht erhalten werden?

Die Cantor'sche Diagonalzahl b ist zweifellos in Form einer endlichen Mitteilung beschreibbar. Legt man eine konkrete Anordnung von Dezimalzahlen $a_1, a_2, \ldots\ldots$, zugrunde, dann ist durch eine Mitteilung, welche diese Anordnung so wie das Konstruktionsprinzip von b beschreibt, eine konkrete Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben. Die konkrete Anordnung ist durch die in dieser Arbeit dargelegte Universalanordnung beschrieben unter der Voraussetzung, daß - was nur der Einfachheit halber nicht vorgenommen wurde - eine konkrete Anordnung der Raum-Zeit-Elemente gewählt wird.

An den Leser dieser Arbeit wird nun die Frage gestellt, ob durch b eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben wird. Verneint er diese Frage, dann ist für ihn im Zeitpunkt des Lesens dieser Arbeit der Cantor'sche Beweis der Überabzählbarkeit bzw. der Beweis der Unvollständigkeit der Universalanordnung gescheitert, denn dann ist eben für ihn im Zeitpunkt des Lesens b keine Dezimalzahl zwischen 0 und 1. Bejaht er hingegen diese Frage, dann gibt es also eine Person, nämlich den Leser, für den in einem bestimmten Zeitpunkt, nämlich einem beliebigen Zeitpunkt aus dem für das Lesen notwendigen Zeitintervall, eine Mitteilung, nämlich die vorliegende Darstellung, eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1, nämlich b, eindeutig bezeichnet. Damit ist aber per definitionem b eine Zahl aus Klasse 1. Die b beschreibende Mitteilung führt zusammen mit dem durch den Leser festgelegten Raum-Zeit-Element zu einem für b reservierten Platz in der Universalanordnung. Dann gibt es aber nach Definition der Anordnung ein n mit $b = a_n$. Nun beruht die Definition von b einerseits auf der Definition der Anordnung und andererseits auf der Definition der einzelnen b_n. Aus diesen beiden Definitionen folgt aber

$$\bigvee_n b_n = a_{nn} \wedge b_n \neq a_{nn}$$

und dies ist ein Widerspruch. Die Behauptung, durch b in der hier definierten Form werde eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben, führt daher zu einem Widerspruch und darf somit vom Leser nicht aufgestellt werden.

Der Widerspruch in der Cantor'schen Beweisführung konnte deshalb herbeigeführt werden, weil in der Universalanordnung grundsätzlich für alle Mitteilungen und für alle Raum-Zeit-Elemente ein Platz reserviert ist, der genau dann besetzt wird, wenn für eine Person in einem Zeitpunkt durch eine Mitteilung ein entsprechendes Denkobjekt, hier eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1, eindeutig beschrieben wird. Der sonst die Unvollständigkeit der Anordnung beweisende Widerspruch führt für die hier gewählte Anordnung zu einem Widerspruch in der Definition der Diagonalzahl. Damit ist der Beweis der Unvollständigkeit der Universalanordnung mißglückt.

In analoger Weise läßt sich zeigen, daß bei Zugrundelegung der Universalanordnung auch für andere Elemente als für Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 der Beweis der Überabzählbarkeit durch Konstruktion eines in der Universalanordnung angeblich nicht enthaltenen Elementes zu einem Widerspruch in der Definition dieses Elementes führt.

6. Die Abzählbarkeit aller Denkobjekte

Mit Hilfe der Universalanordnung kann zwar gezeigt werden, daß die Definition eines angeblich neuen Elementes einen Widerspruch enthält, doch führt die Annahme von Dezimalzahlen der Klasse 2 an sich noch zu keinem Widerspruch. Das gleiche gilt für eine analoge Klasseneinteilung beliebiger Denkobjekte. Alle Objekte unseres Denkens, insbesondere aber Objekte der Mathematik, lassen sich in Klasse 1 oder Klasse 2 einordnen, je nachdem, ob in irgendeinem Zeitpunkt für irgendeine Person irgendeine Mitteilung dieses Denkobjekt eindeutig beschreibt oder nicht. Die Annahme der "Existenz" (in welchem Sinne immer) von Denkobjekten der Klasse 2 führt an sich zu keinem Widerspruch. Sie ist jedoch nicht sehr sinnvoll, wie folgende einfache Überlegung zeigt.

Angenommen, wir sprechen von Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, die in der Universalanordnung nicht enthalten sind, also der Klasse 2 zugehören. Wir haben zur Kenntnis genommen, daß die <u>Konstruktion</u>

einer derartigen Zahl - wie z.B. nach Cantor - nicht möglich ist, aber wir nehmen an, "es gibt" solche Dezimalzahlen aus Klasse 2. Es zeigt sich nun, daß wir von diesen Dezimalzahlen zwar als Menge sprechen können, sie sich jedoch in keiner Weise isolieren lassen. Wollte man mit ihnen Mathematik treiben, dann müßte man Sätze bilden können wie: "Es sei x eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 aus Klasse 2 .... Es muß nun für irgendeine Person in irgendeinem Zeitpunkt sinnvoll sein, diese Zahl x als Dezimalzahl zwischen 0 und 1 zu betrachten. Damit ist sie aber bereits durch diese Mitteilung "beschrieben". Sie kann in diesem Fall sogar für beliebige Personen beschrieben werden, etwa durch einen Satz der Gestalt: "Die Zahl, die die Person ... im Zeitpunkt ... aus Klasse 2 ausgewählt hat."

Es zeigt sich also, daß zwar die Annahme von Zahlen oder allgemeiner von Denkobjekten der Klasse 2 zu keinem Widerspruch führt, hingegen jeder Versuch, ein Element aus Klasse 2 isoliert zu betrachten, es auszuwählen, ja sogar nur an dieses Element als einzelnes Objekt zu denken, zu einem Widerspruch in der Annahme führt, es handle sich um ein Objekt der Klasse 2. Die Unmöglichkeit, dieses Element auch nur gedanklich als Einzelobjekt zu betrachten, folgt unmittelbar aus der Möglichkeit, eine Mitteilung zu bilden: "Das Element, an das die Person ... im Zeitpunkt ... gedacht hat".

Es ist daher nicht sinnvoll, von der "Existenz" von Denkobjekten der Klasse 2 zu sprechen.

Schlußbemerkungen

Man kann sich nun die Frage vorlegen, inwieweit aus den vorstehenden Ausführungen Aussagen über Mathematik gewonnen werden können. Dabei ist vor allem auf die Tatsache Bedacht zu nehmen, daß die Objekte der Universalanordnung abzählbar angeordnet werden können. Wir gehen nun von dem Satz aus, daß die Mächtigkeit des Kontinuums größer ist als die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen. Nun teilen wir die Menge der reellen Zahlen, der offenbar die Mächtigkeit des Kontinuums zukommt, in zwei Klassen. In Klasse 1 fassen wir alle jene reellen Zahlen zusammen, die im Sinne von Ziffer 2 in der Universalschrift "beschrieben" werden können. Dabei berücksichtigen wir, daß im Sinne von Ziffer 3 auch die "erweiterte

Universalschrift" in der Universalschrift enthalten ist. In Klasse 2 fassen wir alle übrigen reellen Zahlen zusammen. Da die durch die Universalschrift beschreibbaren Zahlen abzählbar angeordnet werden können, und zwar in der Universalanordnung nach Ziffer 4, ist die Menge der reellen Zahlen aus Klasse 1 sicher nicht von größerer Mächtigkeit als die Menge der natürlichen Zahlen. Da weiters alle natürlichen Zahlen in Form einer Bildschirmmmitteilung gemäß Ziffer 1 beschrieben werden können, ist die Menge der reellen Zahlen aus Klasse 1 gleich mächtig der Menge der natürlichen Zahlen.

Für den Mathematiker stehen nun die ein Kontinuum bildenden reellen Zahlen grundsätzlich alle in gleicher Weise zur Verfügung, d.h. wenn ein Mathematiker Sätze bildet, die mit den Worten: "Es sei x eine reelle Zahl ..." beginnen, dann kann x grundsätzlich jede beliebige reelle Zahl sein. Es ist also insbesondere gleichgültig, ob x aus Klasse 1 oder aus Klasse 2 ist.

In Ziffer 6 wurde aber dargelegt, daß Zahlen, die an irgendeinem Ort und in irgendeinem Zeitpunkt durch die Worte: "Es sei x eine reelle Zahl ..." beschrieben werden, eben durch diese Beschreibung, also eben dadurch, daß an irgendeinem festen Ort und in irgendeinem festen Zeitpunkt an sie gedacht wird, daß sie also Denkobjekt sind, zu Denkobjekten der Klasse 1 werden, bzw. im Sinne unserer Ausführungen in diesen Schlußbemerkungen zu reellen Zahlen der Klasse 1 werden. Der Mathematiker, der mit reellen Zahlen arbeitet, kann dies also nur, wenn er sich auf reelle Zahlen der Klasse 1 beschränkt, also auf reelle Zahlen aus einer Menge mit der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen.

Die Annahme,"es gibt" reelle Zahlen der Klasse 2, oder anders ausgedrückt, es gibt außer den abzählbar vielen reellen Zahlen der Klasse 1 noch reelle Zahlen aus einer Menge von reellen Zahlen, deren Mächtigkeit größer als die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen ist, führt für sich allein zu keinem Widerspruch. Nur kann mit solchen "Zahlen" eben keine Mathematik betrieben werden, weil sie sich im Sinne von Ziffer 6 einer isolierten gedanklichen Erfassung entziehen und insbesondere für sie Sätze der Gestalt: "Es sei x eine reelle Zahl der Klasse 2 ..." zu einem Widerspruch führen, da gerade durch die Möglichkeit, einen solchen Satz zu bilden, die reelle Zahl per definitionem zu einer reellen Zahl der Klasse 1 wird.

Damit ist gezeigt, wie aus den vorstehenden Ausführungen eine relevante Aussage für die Mathematik gewonnnen werden kann.

Der Gegensatz zur "scholastischen" Mathematik, in der Sätze wie: "Es sei x eine reelle Zahl der Klasse 2 ..." sinnvoll sind, beruht letztlich darauf, daß auch Mathematik nur in Raum und Zeit betrieben werden kann, daß mathematische Sätze nur in Raum und Zeit formuliert und gedacht werden können, eine Voraussetzung, die in die scholastische Mathematik nirgends eingeht.

TELEMATHEMATIK

Es seien Rechenautomaten gegeben, die genügend komplex gestaltet sind, um mathematische Probleme zu lösen und um selbst mathematische Probleme zu formulieren. Es sei zulässig, daß sich diese Rechenautomaten bei der Formulierung mathematischer Probleme, aber gegebenenfalls auch bei der Lösung zufallsgesteuerter Prozesse bedienen.

Die Ein- und Ausgabe von Informationen werde von den Rechenautomaten durch Datenträger vorgenommen, die wir uns etwa als Magnetbänder vorstellen können. Wir bezeichnen die auf einem derartigen Magnetband enthaltene Information als "Aussage". Es seien stets beliebig lange, aber endliche Aussagen möglich. Da sich die Informationen auf den Datenträgern in Informationseinheiten von bits auflösen lassen, können alle möglichen Aussagen abzählbar angeordnet werden.

Im Hinblick auf die Wirkung einer Informationseingabe durch das Lesen eines Magnetbandes in einem Rechenautomaten, kann vom "Sinn" einer Aussage gesprochen werden. Werden etwa einem Rechenautomaten zwei Zahlen zur Multiplikation eingegeben, dann "versteht" der Automat die Aussage nur dann im richtigen "Sinn", wenn er auf Grund der Eingabe die Multiplikation der beiden Zahlen richtig durchführt und ein Magnetband mit dem Ergebnis, nämlich dem Produkt, ausgibt. Der "Sinn" einer Aussage ist somit vom Rechenautomaten abhängig, für den sie bestimmt ist bzw. von dem sie stammt.

Ob ein Rechenautomat eine Aussage "versteht", hängt nun davon ab, ob er eine für den betreffenden Datenträger, also für das Magnetband geeignete Lesevorric htung enthält und ob er so programmiert ist, daß er die durch die Aussage geforderte Reaktion zeigen kann.

Man kann sich nun überlegen, welche Teile der Mathematik von derartigen Rechenautomaten betrieben werden können, wenn man entsprechend komplexe Rechenautomaten mit bestimmten Eigenschaften zulässt.

Wir ersetzen nun in unseren Überlegungen die Rechenautomaten durch Menschen, denen zum Lesen der Magnetbänder Lesegeräte mit Bildschirmen und zur Erzeugung von Datenträgern Datenerfassungsgeräte, etwa mit Magnetbandausgabe, zur Verfügung stehen. Übersteigt der Umfang der

Information auf einem Magnetband die Kapazität des Bildschirmes, dann ist ein solches Magnetband abschnittweise in gleicher Weise zu lesen, in der verschiedene Seiten eines Buches hintereinander nach jeweiligem Umblättern gelesen werden. Man überlegt sich leicht, daß die Einschränkung einer Diskussion zwischen zwei Personen auf solche Aussagen, die auf Magnetbändern festgehalten werden können, für den Bereich der Mathematik aber, wie weitere Überlegungen zeigen, letztlich auch ganz allgemein keine prinzipielle Einschränkung bedeutet.

Ob eine Person eine Aussage versteht, hängt von der Aussage und vom "Wissen" der Person ab. Ungenügendes Wissen kann durch Lernen ergänzt werden, und zwar in ähnlicher Weise wie Rechenautomaten programmiert werden können.

Der Sinn einer Aussage hängt wieder von der auf dem Magnetband festgehaltenen Information und vom Wissen der Person ab. Da dies im Prinzip für alle Personen gilt, ist es eigentlich unzulässig, vom Sinn einer Aussage "an sich" zu sprechen. Wenn dies dennoch üblich ist, dann offenbar deshalb, weil man gleichartiges "Wissen" bei allen Personen voraussetzt ohne dies aber ausdrücklich zu postulieren. Wir möchten auf diese Umstände ausdrücklich hinweisen.

Wir wollen nun die Mächtigkeit der "Menge aller möglichen Bedeutungen" einer Aussage abschätzen. Wir behaupten, daß ihre Mächtigkeit höchstens gleich der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen ist.

Zum Beweis überlegen wir uns, daß zum "Lesen" der Aussage eine gewisse Zeit, mindestens jedenfalls die Elementarzeit notwendig ist und daß die Person während des Lesens einen gewissen Raum, mindestens das Volumen eines Würfels mit der Seitenlänge der Elementarlänge einnehmen muß. Bilden wir nun Raum-Zeit-Elemente aus Würfeln der erwähnten Größe, die jeweils für die Dauer der Elementarzeit existieren, dann muß jedem Lesevorgang durch jede mögliche Person in jedem möglichen Zeitpunkt mindestens ein Raum-Zeit-Element eindeutig zugeordnet werden können. Aus der Abzählbarkeit der Raum-Zeit-Elemente, die trivialerweise gegeben ist, folgt die Abzählbarkeit der möglichen Lesevorgänge durch mögliche Personen und damit die Abzählbarkeit der möglichen Bedeutungen einer Aussage.

Da die in bits auflösbaren Informationen aber offenbar selbst abzählbar angeordnet werden können, folgt nunmehr, daß alle möglichen Bedeutungen aller möglichen Aussagen abzählbar angeordnet werden können.

Wir wollen dies am Beispiel jener Aussagen, die reelle Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 bezeichnen, näher erläutern. Solche Zahlen sind zum Beispiel:

$0'33$

$0'\dot{3}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$

$0'\alpha_1\alpha_2 \ldots$, wobei $\alpha_n = 1$, wenn die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in x, y und z ganzzahlig lösbar ist, und $\alpha_n = 0$ sonst.

Bis auf die letzte Zahl, von der nicht sicher ist, ob sie überhaupt eindeutig ist - es ist unter Umständen unentscheidbar, ob diese Zahl von 0'11 verschieden ist oder nicht - handelt es sich um Zahlen, die uns aus der klassischen Mathematik bekannt sind. Zahlen lassen sich aber auch durch Aussagen anderer Art eindeutig bestimmen, ohne daß ihr Wert im gegenwärtigen Zeitpunkt aber überhaupt bekannt ist, so etwa die Zahl der Elementarteilchen der Erde zur Zeit von Christi Geburt.

Eine weitere Form von Aussagen, durch die eine Zahl eindeutig bezeichnet werden kann, ist etwa: "Die Zahl, an die eine Person P im Zeitpunkt t gedacht hat". Eine derartige Aussage ist gleichwertig mit der Aussage: "Der Denkvorgang, dem das Raum-Zeit-Element Nr.N zugeordnet ist", wobei N den Platz des Raum-Zeit-Elementes in der bereits erwähnten abzählbaren Anordnung aller Raum-Zeit-Elemente bezeichnet.

Bei Aussagen der oben bezeichneten Art wird natürlich in der Regel dem betreffenden Raum-Zeit-Element gar kein Denkvorgang zugeordnet werden können, da nur in wenigen Teilen des Weltalls und nur in verhältnismäßig wenigen Zeitelementen tatsächlich an eine Zahl gedacht wird. Andererseits gibt es aber offenbar sogar unendlich viele Aussagen, die jede Zahl, an die einmal tatsächlich gedacht wurde oder an die einmal tatsächlich gedacht werden wird, eindeutig bezeichnen.

Die zuletzt dargelegte Methode der Bezeichnung von Zahlen ermöglicht es also, diese durch Aussagen zu bezeichnen, ohne dabei eine

Information, etwa über die Größe solcher Zahlen, zu geben. Dies hat z.B. dann eine gewisse Bedeutung, wenn - wie in der Mathematik recht häufig - eine Zahl aus einer Menge für weitere Berechnungen ausgewählt wird, ohne daß man ihre Größe angibt, etwa durch die Worte: "Es sei x eine Zahl aus der Menge M ...". Mit Formulierungen dieser Art beginnen häufig Beweise, mit denen Eigenschaften von Zahlen der Menge M nachgewiesen werden sollen.

Aus der Abzählbarkeit aller Raum-Zeit-Elemente folgt jedenfalls die Abzählbarkeit aller Zahlen, die in der bisher dargelegten Art und Weise durch Aussagen beschrieben werden können. Obwohl die Menge der Raum-Zeit-Elemente und die Menge der durch Aussagen beschreibbaren Zahlen beide unendlich sind, gibt es unendlich viele Aussagen bzw. Raum-Zeit-Elemente, die keine Zahl eindeutig beschreiben. Es wird aber auch niemals möglich sein, für alle Raum-Zeit-Elemente auch nur zu entscheiden, ob sie dem Lesevorgang einer Aussage, durch die eine Zahl eindeutig beschrieben wird, zugeordnet sind. Dies ist leicht einzusehen, da heute etwa nicht entschieden werden kann, ob eine bestimmte, uns vielleicht unsinnig anmutende Aussage im Jahre 10000 für irgendjemand einen Sinn ergibt und sogar vielleicht eine Zahl eindeutig beschreibt.

Wir teilen nun die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in zwei Klassen ein. In Klasse 1 fassen wir alle jene Zahlen zusammen, die durch irgendeine Aussage in irgendeinem Zeitpunkt für irgendeine Person eindeutig beschrieben sind. So wird etwa die Aussage "1/2" für Sie alle und für mich heute und hier die Zahl 1/2 eindeutig beschreiben.

Aus der Abzählbarkeit der Raum-Zeit-Elemente folgt die Abzählbarkeit aller Zahlen der Klasse 1.

Da es nun mehr als abzählbar viele reelle Zahlen zwischen 0 und 1 gibt, fassen wir die nicht in Klasse 1 enthaltenen in einer neuen Klasse 2 zusammen.

Wir wollen nun einige Fragen aufwerfen:

Zahlreiche Beweise der Überabzählbarkeit bestimmter Mengen beruhen darauf, daß man eine beliebige konkrete abzählbare Anordnung aller Elemente einer Menge annimmt und sodann ein neues Element "konstruiert" bzw. "beschreibt", von dem man nachweist, daß es in der abzählbaren Anordnung nicht enthalten ist, obwohl es zur Menge gehört

So geht man etwa vor beim Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 durch die Konstruktion der "Diagonalzahlen" nach Cantor oder beim Beweis der Überabzählbarkeit der Potenzmenge der Menge der natürlichen Zahlen.

Wir bemerken, daß in den hier genannten Fällen jeweils nach vollzogener Anordnung angeblich aller Elemente einer Menge ein neues Element beschrieben, und zwar im Sinne unserer Darstellungen durch eine Aussage beschrieben wird, das in der ursprünglichen Anordnung nicht enthalten ist. Die Frage in diesem Zusammenhang lautet: "Wie lassen sich die entstehenden Widersprüche erklären, wenn, wie etwa bei den reellen Zahlen der Klasse 1, alle durch Aussagen beschreibbaren Zahln schon per definitionem in der Anordnung enthalten sind?"

Eine weitere Frage bezieht sich auf die reellen Zahlen der Klasse 2. Um mit ihnen zu rechnen, muß man sie einzeln betrachten können, man muß einzeln auswählen können, es muß zumindest sinnvoll sein, mit ihnen zu rechnen und Sätze zu bilden, die mit den Worten "Es sei x eine reelle Zahl aus Klasse 2 ..." beginnen. Andererseits aber haben wir festgestellt, daß Zahlen, für welche solche Sätze von irgendjemand in irgendeinem Zeitpunkt gebildet werden können, per definitionem zur Klasse 1 gehören. Auch hier erhebt sich die Frage nach der Ursache des Widerspruches.

Eine andere Frage: "Wie geht in unsere Mathematik die Tatsache ein, daß es unmöglich ist, in endlicher Zeit unendlich viel Information zu übermitteln?" Diese Frage soll am Beispiel der unendlichen Dezimalzahlen erläutert werden. Wann immer wir von konkreten unendlichen Dezimalzahlen sprechen, dann handelt es sich um solche, die als Zahl in endlicher Form beschrieben werden können und nur in der Dezimalzahldarstellung unendlichen Raum bzw. unendliche Zeit in Anspruch nehmen. Da die Voraussetzung, daß nur Zahlen, die eine endliche Darstellung gestatten, (auch wenn sie in der Dezimalzahldarstellung unendlich viele Stellen erfordern) in der Mathematik Verwendung finden, praktisch nie explizit in Axiomensysteme eingeht, müßte doch entschieden werden können, ob die Voraussetzung wenigstens implizit in unserer Mathematik berücksichtigt ist. Wäre dies aber der Fall, dann ergäbe sich z.B. die Abzählbarkeit aller Zahlen in recht trivialer Weise. Ist dies aber nicht der Fall, dann sollte man sich überlegen, wie eine Mathematik mit dieser Voraussetzung aussehen könnte und welche Aussagen zusätzlich möglich sind, wenn man diese Voraussetzungen wegfallen läßt.

Nun noch einige Überlegungen, die auf einer Weiterführung der hier skizzierten Gedankengänge beruhen. Versucht man rein theoretisch ein Weltmodell aufzubauen, bei dem die Dualität zwischen Geist und Materie dadurch aufgehoben wird, daß man die Komponente "Geist" bzw. "Bewußtsein" als grundsätzlich in der Materie vorgebildet erachtet, wie etwa bereits Teilhard de Chardin, dann kann Geist und Bewußtsein, obwohl immanent stets vorhanden, sich erst in genügend komplexen kybernetischen Systemen manifestieren.

Mit dieser Modellvorstellung bleiben aber zahlreiche Fragen mit für uns ganz wesentlichen Komponenten des Geistes unbeantwortet. So die vielleicht wichtigste Frage: "Wie ist Erkenntnis möglich?" bzw. "Wie stellt sich Erkenntnis in unserem Modell dar?"

Der Ausdruck "innere Anschauung" könnte uns einen Hinweis liefern. Er setzt voraus, daß im Inneren etwas angeschaut werden kann. Es muß daher ein Modell des zu Erkennenden "im Inneren" aufgebaut werden. Tatsächlich lassen sich Erkenntnisvorgänge sehr denkökonomisch dadurch erklären, daß man annimmt, das zu Erkennende werde in einem - im allgemeinen vereinfachten - Modell im Inneren abgebildet, also z.B. durch entsprechende Zustände bzw. Vorgänge im Gehirn.

Folgerungen aus der Erkenntnis etwa der Funktionen eines Systems der Außenwelt können nun durch Simulation - ein Ausdruck, der wiederum auf die Analogie zu Rechenautomaten verweisen soll - am inneren Modell gezogen werden, wobei die Ergebnisse dieser Simulation mit den Gegebenheiten der Außenwelt verglichen werden und so die Brauchbarkeit der Modellvorstellungen kontrolliert werden kann.

Daß unabhängig vom Menschen "lebende Systeme" umso eher überleben können, je besser sie das Verhalten ihrer Umwelt "erkennen" bzw. "voraussehen" können, liegt auf der Hand.

Aus der Fülle der Fragen, die sich in diesem Zusammenhang aufdrängen, sei noch die nach dem Platz der Intuition gestellt. Zur Lösung von Problemen der Außenwelt wird man versuchen, geeignet erscheinende Modelle, die dem Problem gerecht zu werden scheinen, zu finden. Dabei kann man entweder auf zur Gänze bekannte Modelle zurückgreifen oder man kann versuchen, neue Modelle zu schaffen. Bei dieser Schaffung neuer Modelle wird es nicht immer möglich sein, nach einem systematischen Verfahren, sozusagen automatisch vorzugehen. Ohne weitere Richtlinie über die Vorgangsweise bleibt dann vielfach nichts anderes übrig als ein Probierverfahren, so wie man versucht, den fehlenden Stein eines Puzzlespiels einzusetzen, indem man eine zufällige Auswahl aus dem vorhandenen Vorrat der Steine trifft. Ein zufälliger Auswahlvorgang kann nun zum Auffinden eines Modells führen, das sich zur Lösung bzw. Behandlung des Problems der Außenwelt eignet. Man kann sagen, die Lösung durch "Intuition" gefunden zu haben.

Derartige zufällige Auswahlvorgänge werden vor allem im Bereich der Forschung immer wieder auftreten.

Wenn von dem Finden bzw. Erfinden passender Modelle gesprochen wird, dann ist es sehr unwahrscheinlich, daß solche Modelle als Ganzes und unabhängig von vorhandener Erkenntnis, also von bereits bekannten Modellen sein sollten. Es ist vielmehr anzunehmen, daß neue Erkenntnisse durch neue Kombinationen bekannter Modellteile entstehen, Modellteile, die ihre Wurzeln bereits in den Uranfängen des Lebens haben mögen. Das kann aber die Bedeutung des Findens neuer Modelle ebenso wenig schmälern wie die Feststellung, daß auch die größten wissenschaftlichen Erkenntnisse der Menschheit letztlich in Worten ausgedrückt werden, die schon lange bekannt waren. Wenn Goethe sagt: "Wer kann was Kluges, wer was Dummes denken, das nicht die Vorwelt schon gedacht", dann mag dies für die Bausteine der Gedanken zutreffen, der wesentliche Inhalt von Erkenntnissen besteht aber gerade in der Kombination solcher bekannter Bausteine.

Zurückkommend auf das Problem der Abzählbarkeit von Zahlen der Klasse 1 überlegen wir uns leicht, daß man nicht nur von Zahlen, sondern ganz allgemein von Denkobjekten der Klasse 1 sprechen kann, während "alle anderen Denkobjekte" in einer Klasse 2 zusammengefaßt werden können. Da jedoch aus den bereits dargelegten Gründen niemals irgendeine Person tatsächlich an ein einzelnes derartiges Objekt "denken" kann, ohne daß es damit per definitionem ein Denkobjekt der Klasse 1 sein müßte, so daß ein Widerspruch entsteht, handelt es sich ganz allgemein bei den Objekten der Klasse 2 um in sich widersprüchliche Gedankenkonstruktionen.

Daß die Menge der Denkobjekte der Klasse 1 oder speziell der Zahlen der Klasse 1 unendlich und nicht endlich ist, rührt daher, daß unendlich viele Raum-Zeit-Elemente, aber auch beliebig lange Magnetbänder zugelassen werden. Betrachtet man aber einen lebenden Menschen und berücksichtigt man, daß seine Lebensdauer endlich und daß er in endlicher Zeit auch nur ein endliches Stück eines Magnetbandes mit Hilfe des Bildschirmgerätes lesen kann und auch nur endliche Vorgänge in seinem Gehirn ablaufen können, dann sieht man, daß für ihn auch nur endlich viele Gedanken möglich sind.

Geistige bzw. Bewußtseinsvorgänge sind zwar nach dieser Modellvorstellung grundsätzlich an ihnen entsprechende materielle Vorgänge geknüpft, doch bietet die ungeheure Komplexität des menschlichen Gehirns und seiner Nervenzellen genügende Gewähr dafür, daß die allseits so geschätzte Individualität der Einzelpersönlichkeit voll gewahrt bleibt.

Andererseits wird durch die Vererbung von Generation zu Generation eine gleichmäßige Entwicklung der "hardware" und zum Teil auch der "software" sichergestellt, wobei durch die Ähnlichkeit der Lernvorgänge im weitesten Sinn die überaus starke Übereinstimmung von Menschen einer Zeit und eines Kulturkreises erklärlich wird. Der Ausdruck "überaus starke Übereinstimmung" gilt natürlich nur im Vergleich mit anderen denkbaren kybernetischen Systemen. Die von einem gewissen Gesichtspunkt aus ebenso überaus starke Verschiedenheit ist eben durch die erwähnte Vielfalt vor allem der Hirnfunktionen zu erklären.

Ein vielleicht zu stark vereinfachtes Gleichnis: Unter allen Spielen weisen die verschiedenen Schachpartien untereinander überaus starke Ähnlichkeit auf, für den einzelnen Schachspieler sind jedoch viele Partien völlig unterschiedlich.

Auf die vielfältigen Konsequenzen dieses Denkmodells kann natürlich auch nicht annähernd eingegangen werden, sicherlich lassen sich aber auch Forschungsergebnisse wie etwa die Archetypen bzw. das Kollektive Unbewußte glatt einfügen.

Zum Abschluß sei noch die Frage nach dem Sinn von "synthetischen Urteilen à priori" die für Kant und dessen Nachfolger Voraussetzung für die Berechtigung, Methaphysik zu treiben, darstellen. Ein synthetisches Urteil à priori wäre in unserer Darstellung eine Mitteilung, die "vor jeder Erfahrung einer Person" von dieser als richtig angesehen werden muß. Solche Urteile müssen also für jede Person und in jenen Zeitpunkten richtig sein. Ein klassisches Beispiel für ein derartiges Urteil war seinerzeit: "Die Gerade ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte". Dieser Satz kann aber nur dann als synthetisches Urteil à priori gelten, wenn die Begriffe "Gerade" und "kürzeste Verbindung zweier Punkte" ebenso wie der Begriff "gleich sein" à priori vorgegeben sind. Abgesehen davon, daß alles dafür spricht, daß diese verhältnismäßig komplexen Begriffe erst durch Erfahrung "erlernt" werden, könnte "à priori" nur bedeuten, dieses Urteil wäre bereits als ein allen Menschen gemeinsamer Komplex vorgegeben. Die Schlußfolgerung, daß dies für alle irgendeinmal existierenden Menschen so sein muß, ist ein Analogieschluß wie er eben durch Erfahrung nahegelegt wird, der aber nicht denknotwendig erscheint. Auf Grund unseres Denkmodells verliert der Begriff "synthetisches Urteil à priori" jeden Inhalt. Wir können also für Reflexionen die bekannte Frage: "Wie sind synthetische Urteile à priori als Mitteilung möglich" stellen.

Zum Abschluß sei noch einmal der Grundgedanke herausgestellt: Aus der Abzählbarkeit aller möglichen Mitteilungen in Form von Datenträgern und aus der Abzählbarkeit aller möglichen Subjekte (Menschen) folgt die Abzählbarkeit aller möglichen Denkobjekte. Spricht man von einzelnen Zahlen aus einer Menge, die nicht in dieser abzählbaren Menge enthalten sind, dann muß per definitionem ein Widerspruch entstehen.

Um im Sinn unseres Denkmodells zu bleiben: Jede Mitteilung ist nur sinnvoll, wenn sie in mindestens einem Zeitpunkt für mindestens eine Person einen Sinn ergibt. Als Mitteilung von einer Person für andere, wie z.B. bei diesem Vortrag, müssen auch andere Personen dazu gebracht werden, die Gedanken nachzuvollziehen. Aus bestimmten Gründen wurde versucht, dies vorwiegend durch Fragen zu erreichen, deren Beantwortung mehr oder weniger selbst durch Reflexion von jedem Einzelnen erarbeitet werden muß.

Über die Relativität alles Existierenden.

Spätestens seit Archimedes kann man sagen, daß wesentliche Erkenntnisse in den Naturwissenschaften durch die Relativierung von bis dahin als absolut geltenden Begriffen erreicht wurden. Dennoch enthält jede Wissenschaft zahlreiche Begriffe, denen absolute Gültigkeit zugeordnet wird. Ein derartiger Begriff ist etwa der Begriff "Wahrheit". Keine Wissenschaft kann darauf verzichten die Existenz "absolut wahrer Sätze" vorauszusetzen.

Diesem Phänomen liegt offenbar die starke Gefühlsbewegung des "Evidenzerlebnisses" zugrunde, das etwa eine logische Schlußfolgerung bzw. einen logischen Widerspruch begleitet. Da ein derartiges Evidenzerlebnis vielfach von allen "vernünftigen" Menschen in gleicher weise empfunden wird schließt man auf dessen Allgemeingültigkeit.

Das Festhalten an der Allgemeingültigkeit bestimmter "wahrer Sätze" durch Raum und Zeit, erscheint vorallem deshalb für die Wissenschaften unbedingt notwendig, weil ansonsten jede Aussage stets in Zweifel gezogen werden könnte und überhaupt keine "allgemein gültigen" Aussagen möglich erscheinen, eine Folge, die, wie man zu meinen geneigt ist, Wissenschaft überhaupt unmöglich machen müßte.

Es soll daher zunächst versucht werden, Aussagen über die "erkennbare Welt" mit möglichst wenig Voraussetzungen zu machen.

Dazu ist es notwendig, soweit als möglich vom "Inhalt der Aussagen" abzusehen. Wenn wir aber vom Inhalt absehen, welche gemeinsamen Eigenschaften können wir dann allen denkmöglichen Aussagen zuordnen? Wie können wir Ordnung in die Vielfalt von sinnlosen und sinnvollen, richtigen oder falschen oder unbeweisbaren Aussagen bringen, ohne auf ihren Inhalt einzugehen?

Um hier eine Lösung aufzuzeigen, wollen wir uns einer Modellvorstellung bedienen. Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Tatsache, daß Wissenschaft jedenfalls mit Erkenntnis zu tun hat und man nur dort von Erkenntnissen reden kann, wo es sich um grundsätzlich Mitteilbares handelt. Um nun darüber zu reden, ohne in irgendeiner Weise auf den Inhalt des Mitteilbaren einzugehen, insbesondere nicht auf die Frage, ob eine Mitteilung richtig oder falsch, sinnvoll oder sinnlos, usw. ist, stellen wir uns vor, irgendeine Wissenschaft werde von Computern betrieben, die "Eindrücke" aus ihrer Umwelt durch Meßgeräte, analog den Sinnesorganen, empfangen und die Informationen im Wege von Datenträgern, etwa von Lochkarten, austauschen können.

Offenbar lassen sich alle möglichen Aussagen solcher Computer abzählbar anordnen. Infolge der räumlichen Ausdehnung können nämlich zunächst alle Computer abzählbar angeordnet werden. Weiters erfordert der Einlesevorgang einer Lochkarte bzw. eines Paketes von Lochkarten eine endliche Zeit, so daß alle möglichen Einlesevorgänge abzählbar angeordnet werden können, und schließlich können alle möglichen Lochkartenstapel abzählbar angeordnet werden. Da als "Sinninhalt einer Aussage" offenbar nun die Wirkung der Lochkarteneingabe auf den Computer angesehen werden kann und diese vom "Zustand" des Computers (von seiner Konstruktion und seiner Programmierung) abhängt, der wiederum durch die Angabe der Zahl, um den wievielten Computer es sich handelt, und des

Zeitpunktes des Lesevorganges, für den der Zustand dieses Computers eindeutig festliegt, bestimmt ist, lassen sich durch Anordnung der Nummern aller Computer, aller möglichen Einlesevorgänge und aller möglichen Lochkartenstapel alle möglichen Sinninhalte von Aussagen anordnen. Für die Anordnung der Einlesevorgänge ist es ausreichend, eine genügend feine Intervalleinteilung vorzunehmen, so z.B. Intervalle jener Zeitlänge, die für das Einlesen einer Lochkarte mindestens benötigt wird.

In analoger Weise ordnen wir nun alle möglichen Sinninhalte von Aussagen für Menschen an. Jede Aussage besteht darin, daß eine bestimmte Person P in einem bestimmten Zeitintervall (t_1, t_2) eine schriftlich darstellbare Mitteilung M erzeugt. Die Anzahl der möglichen Personen P ist sicher abzählbar, ebenso die Anzahl der zugehörigen Intervalle (t_1, t_2). Da diese Intervalle jedenfalls länger sein müssen als die Elementarzeit, genügt es, alle abzählbaren Zeitpunkte, die von einem fest vorgegebenen Zeitpunkt einen Abstand von einem ganzzahligen Vielfachen der Elementarzeit haben, zu betrachten. Die Menge der möglichen Intervalle (t_1, t_2) kann dann ebenfalls abzählbar angeordnet werden. Was nun die schriftlichen Mitteilungen betrifft so können diese stets aus genügend kleinen weißen und schwarzen Quadraten zusammengesetzt vorgestellt werden. Wählt man als Seitenlänge eines derartigen Elementarquadrats etwa die Elementarlänge, dann können auf diese weise z.B. alle schwarz auf weiß geschriebenen Mitteilungen aus solchen Elementarquadraten zusammengesetzt werden. Auf einem Bildschirm der Länge a Elementarlängen und der Breite b Elementarlängen gibt es genau $2^{a.b}$ mögliche Anordnungen dieser schwarzen oder weißen Elementarquadrate und offenbar können alle derartigen Bildschirmmitteilungen abzählbar angeordnet werden. Insbesondere ist alles, was je geschrieben wurde, ebenso wie alles, was je geschrieben werden wird, ja was je geschrieben werden kann, in der Menge dieser Bildschirmmitteilungen enthalten.

Zusammenfassend sei hiezu festgehalten: Alles, was irgend einmal von irgend jemand gesagt wurde, gesagt werden wird bzw. gesagt werden kann, läßt sich abzählbar anordnen. Wir bemerken, daß nur von der Möglichkeit irgend etwas zu sagen gesprochen wird, nicht aber davon, ob etwa das Gesprochene "existiert", "wahr" sei usw., also unabhängig von einer "Existenz" bzw. von irgend einem "Sinninhalt" des Gesprochenen.

Damit ist aber auch gleichzeitig eine abzählbare Anordnung "alles Existierenden" möglich.

Um dies zu zeigen überlegen wir, daß es nicht sinnvoll wäre, den Begriff der Existenz, wie weit man ihn auch zu fassen bereit ist, auf "etwas" zu beziehen, "über das nie jemand hat sprechen können, sprechen kann oder sprechen können wird". Insbesondere müssen ja alle Beweise der Überabzählbarkeit von Mengen dazu führen, daß - infolge des Auswahlaxioms - für jede abzählbare Untermenge stets ein Element der Menge ausgewählt werden kann, welches in dieser Untermenge nicht enthalten ist, über das aber gesprochen werden kann. Wählt man nun als abzählbare Untermenge jene, welche aus allen Elementen besteht für die es irgend eine Person P gibt, die in irgend einem Zeitpunkt t bereit ist, durch irgend eine Mitteilung von einem solchen Element zu sprechen, dann können, da dieses Sprechen durch eine Mitteilung M vor sich gehen muß, alle diese Elemente abzählbar angeordnet werden. Es ist dann per definitionem nicht möglich, daß irgend eine Person P in irgend einem Zeitpunkt t über ein angeblich nicht in dieser Untermenge enthaltenes Element spricht. Insbesondere ist kein Beweis für die Existenz von Elementen außerhalb dieser abzählbar anordenbaren Menge möglich.

An dieser Stelle sei eingefügt, daß wir auch der Frage, wann eine Mitteilung ein bestimmtes Objekt bezeichnet, definiert usw. aus dem Wege gehen und uns mit der allgemeinen Feststellung begnügen, daß eine Person in einem Zeitpunkt durch eine Mitteilung behauptet " von einem Objekt zu sprechen ".

Es bleibt insbesondere außer Betracht ob diese Mitteilung der Person richtig oder falsch oder sinnlos ist.

Es wird also die Menge aller (P,t,M) abzählbar angeordnet, wobei P alle m ö g l i c h e n Personen, t alle m ö g l i c h e n Zeitpunkte (ganzzahlige Vielfache der Elementarzeit) in dem die Mitteilung M gemacht (gesprochen oder geschrieben) werden kann und M alle m ö g l i c h e n Bildschirmmitteilungen durchläuft. Die Anordnung beliebiger Objekte wird nun so vorgenommen, daß jedem Objekt jener Platz zugeordnet wird, den in der Anordnung der (P,t,M) eine Mitteilung M einnimmt, für die P in t behauptet oder behaupten könnte, daß er mit ihr von dem in Rede stehenden Objekt spricht. Gibt es mehrere solcher (P,t,M),dann wird jenes mit der kleinsten Ordnungszahl gewählt.

Die Abzählbarkeit aller möglichen Denkobjekte steht offenbar mit der Existenz überabzählbarer Mengen im Widerspruch. Insbesondere führen die üblichen Existenzbeweise überabzählbarer Mengen (man denke etwa an das Cantorsche Diagonalverfahren für die reellen Zahlen oder an die Potenzmenge von unendlichen Mengen) zu Widersprüchen. Da in der von uns gewählten Anordnung Mitteilungen M eine große Rolle spielen, erscheint es zunächst naheliegend zu versuchen, so wie bei bestimmten sprachlichen Antinomien durch die Einführung von Metasprachen den Widerspruch aufzulösen. Man sieht aber sehr leicht, daß ein solcher Versuch scheitern muß, da es sich hier nicht darum handelt, daß "in einer Sprache über die Sprache selbst gesprochen wird" sondern lediglich festgestellt wird, welche Möglichkeiten irgend eine beliebige Person P in einem beliebigen Zeitpunkt t hat, den Sinn einer Mitteilung M zu interpretieren. Insbesondere wird in unserer Anordnung der Begriff "Wahrheit" nicht verwendet. Es bleibt jeder Person P jederzeit völlig freigestellt, jede Mitteilung M zu interpretieren, sie als sinnlos zu bezeichnen, sie zu bejahen oder zu verneinen, zu behaupten, daß sie einen bestimmten Sinn habe, usw.

Jede Strukturierung der Mitteilungen könnte zu einer Verringerung der Zahl der notwendigen (P,t,M) führen. Allein die Behauptung, es gäbe allgemein gültige Aussagen, etwa alle Mitteilungen der Gestalt $\bar{M}$, hätte, wäre sie richtig, zur Folge, daß aus der Menge der (P,t,M) alle (P,t,$\bar{M}$) bis auf alle ($\bar{P}$, $\bar{t}$, $\bar{M}$) für eine bestimmte Person $\bar{P}$ und einen bestimmten Zeitpunkt $\bar{t}$ weggelassen werden könnten, ohne daß für irgend ein Denkobjekt ein Platz verloren ginge. Jede Sprache, jede Metasprache, jede Metametasprache usw. muß sich im Rahmen der Menge (P,t,M) bewegen.

D i e s e   M e n g e   s t e l l t   s e l b s t   k e i n e   S p r a c h e   d a r , da ihre Elemente keiner weiteren Interpretation fähig sind. Lediglich die Mitteilungen M können den Charakter einer Sprache haben, während ihr Sinn jeweils von P und t abhängt.

Die durch (P,t,M) mögliche abzählbare Anordnung aller Denkobjekte beruht also darauf, daß problematische Begriffe wie "Wahrheit" bzw. "Sinn einer Aussage" für die Anordnung gegenstandslos sind. Diese Begriffe werden grundsätzlich relativiert und dürfen nur für jeweils eine bestimmte Person P und jeweils einen bestimmten Zeitpunkt t mit einer Mitteilung M in Verbindung gebracht werden.

Im folgenden sollen zwei verschiedene Anwendungen der vorstehenden Überlegungen dargelegt werden:

Über die Abzählbarkeit alles Existierenden

Die Existenz überabzählbarer Mengen wird für das Beispiel der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 häufig durch Konstruktion der sogenannten Cantor'schen Diagonalzahl bewiesen. Man geht dabei bekanntlich von einer beliebigen Anordnung von Dezimalzahlen der Gestalt

$$a_n = 0'a_{n1}\,a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots$$

aus, wobei n alle natürlichen Zahlen durchläuft und konstruiert die "Dezimalzahl"

$$b = 0'b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$$

mit

$$b_n = 1 \text{ für } a_{nn} \neq 1 \text{ und } b_n = 0 \text{ für } a_{nn} = 1.$$

Offenbar gilt

$$\bigwedge_n a_n \neq b$$

und da b zwischen 0 und 1 liegt, ist damit die Unvollständigkeit der ursprünglichen Anordnung gezeigt.

Läßt sich aber in dieser Weise auch die Unvollständigkeit der Anordnung aller durch die Menge (P,t,M) eingeführten reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zeigen?

Wir haben behauptet, daß in der, der Menge aller (P,t,M) zugeordneten Objekte jedenfalls alles Existierende enthalten ist, demnach auch alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Wenn auch nur "sehr wenige" Elemente (P,t,M) aus der Menge aller (P,t,M) einer reellen Zahl zwischen 0 und 1 entsprechen, so gibt es doch nach unserer Behauptung für jede existierende reelle Zahl zwischen 0 und 1 mindestens eine Person P, die in mindestens einem Zeitpunkt t behaupten könnte, daß durch mindestens eine Mitteilung M von dieser Zahl die Rede ist. Legt eine Person $\bar{P}$ in irgendeinem Zeitpunkt $\bar{t}$ in einer Mitteilung $\bar{M}$ der Konstruktion einer Dezimalzahl b wie oben beschrieben die durch die abzählbar angeordnete Menge aller (P,t,M) sich ergebende Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zugrunde, und behauptet sie, daß ($\bar{P}$, $\bar{t}$, $\bar{M}$) eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, nämlich die Dezimalzahl b zugeordnet ist, dann muß sie sich den Einwand gefallen lassen, daß ihre Definition der Dezimalzahl einen Widerspruch enthält. Die von $\bar{P}$ "dargestellte" Dezimalzahl b hat nämlich nach unserer Definition eine Nummer in der Anordnung aller reellen Zahlen, so daß für sie

$$b_n = 1 \wedge b_n \neq 1$$

gelten müßte, was einen Widerspruch darstellt. Damit ist der Beweis der Unvollständigkeit der Anordnung mißlungen.

Am Beispiel eines gegen diese Ausführungen erhobenen Einwandes sei auf ein Mißverständnis hingewiesen, das offenbar entstehen kann. Eingewendet wurde nämlich, daß die Person $\bar{P}$ zunächst nur jene Mitteilungen M berücksichtigt habe, die aus einer bestimmten Sprache L stammen. Die Konstruktionsvorschrift für die Diagonalzahl b wurde hingegen als Ausdruck einer Metasprache $\bar{L}$ angesehen und daraus die Berechtigung abgeleitet, anzunehmen, daß diese Konstruktionsvorschrift in den ursprünglichen Mitteilungen nicht enthalten sei.

Dieser Einwand übersieht aber, daß Begriffe wie Sprache bzw. Metasprache auf die Menge der Mitteilungen M nicht anwendbar sind, da hier nur die Mitteilungen gemeinsam mit ihrer "Wirkung" auf eine Person P betrachtet werden. Ob eine Mitteilung M einer bestimmten Sprache zugehört bzw. welcher Sprache kommt nur darin zum Ausdruck, wie eine Person P in einem Zeitpunkt t diese Mitteilung M "versteht" bzw. "interpretiert".

Der Einwand übersieht letztlich, daß die Mitteilungen nicht ihrem Sinn nach in unserer Anordnung Berücksichtigung finden, sondern lediglich ihrer äußeren Form nach, ebenso etwa wie Lochkarten die zur Eingabe in einen Computer verwendet werden.

Es erscheint hingegen notwendig, auf einen Widerspruch hinzuweisen, der darin gesehen werden könnte, daß die Aussage, alles Existierende sei abzählbar, in dieser Form ja ebenfalls als absolute Wahrheit angesehen wird. Man könnte mit Recht die Frage aufwerfen, wie sich dieser Anspruch auf absolute Gültigkeit mit der Relativität des Wahrheitsbegriffes verträgt.

Tatsächlich ist es notwendig, einen Konsens über die folgenden Punkte vorauszusetzen:

1) Der "Inhalt" bzw. "Sinn" einer Aussage ist durch die Form der Mitteilung M die diese Aussage enthält und durch die Person P, die diese Aussage macht, sowie durch den Zeitpunkt t, in dem sie diese Aussage macht, bestimmt.

2) Alle möglichen Kombinationen aller möglichen Mitteilungen mit allen möglichen Personen und allen möglichen Zeitpunkten können abzählbar angeordnet werden.

3) Aus 1) und 2) erhält man eine abzählbare Anordnung aller möglichen Inhalte von Aussagen bzw. aller möglichen Sinngehalte von Aussagen.

Für jemanden, der die Möglichkeit des Betreibens von Naturwissenschaften bejaht, sollte ein Konsens zu diesen Punkten keine wesentliche Einschränkung der Relativität des Wahrheitsbegriffes bedeuten.

Daß nicht nur der vorhin erwähnte Einwand, der sich auf eine unzulässige Einschränkung der in der Anordnung verwendeten Mitteilungen auf solche einer Ursprungssprache L stützt, ins Leere geht, sondern, daß jeder Einwand der die Konstruktion einer angeblich in unserer Anordnung nicht enthaltenen reellen Zahl zum Ziele hat, ins Leere gehen muß, kann durch die folgende einfache Überlegung gezeigt werden:

Der Einwand müßte von einer Person P in einem Zeitpunkt t in Form einer Mitteilung M gemacht werden. Ziel dieser Mitteilung müßte es sein, von einer angeblich in der Anordnung nicht enthaltenen reellen Zahl zu sprechen. Gäbe es aber eine solche Mitteilung, dann würde dem Element (P,t,M) gerade jene reelle Zahl zugeordnet werden, von der gesprochen wird. Damit wäre sie per definitionem in der Anordnung enthalten.

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß auch alle anderen Beweise von der Existenz überabzählbarer Mengen ins Leere gehen müssen, da sie durchwegs darauf aufbauen, daß eine Person P in einem Zeitpunkt t von einem Element spricht, und zwar durch eine Mitteilung M, das angeblich in der ursprünglichen Anordnung nicht enthalten ist. Da die Anordnung aber sicher alle Elemente enthält, von denen irgendjemand in irgendeinem Zeitpunkt durch eine beliebige Mitteilung sprechen kann, beruht die Behauptung, die Anordnung sei unvollständig, auf der Annahme, es wäre in irgendeinem Zeitpunkt irgendjemanden möglich von etwas zu sprechen, wovon in keinem Zeitpunkt von irgendjemandem gesprochen werden kann. Es sollte genügen sich in der Diskussion dieser Fragen auf solche Personen zu beschränken, die bereit sind, die Wahrheit der hier zugrunde gelegten Annahmen in jedem Zeitpunkt anzuerkennen.

Ein weiteres Beispiel geben die folgenden Überlegungen:

Über den relativen Wert von Kunstwerken

Gehen wir wieder vom Beispiel der Computer und der Lochkarten aus. So wie die Lochkarte eine vom "Zustand" des Computers abhängige "Wirkung" hat, so hat auch das Kunstwerk eine vom "Zustand" des Konsumenten abhängige "Wirkung". Nach unserer Beschreibungsmethode kann die Wirkung (P,t,K) eindeutig zugeordnet werden. (P,t,K) bedeutet, daß die Person P im Zeitpunkt t das Kunstwerk K "konsumiert", d.h. je nach dem betrachtet, liest, hört usw.

Wir wollen nun einen Aspekt des Kunstkonsums herausheben. Dazu betrachten wir ein "bedeutendes Kunstwerk" z.B. das Bild eines berühmten Malers, wie etwa Rembrandts, und eine geschickte Fälschung dieses Bildes. Die Fälschungstechniken sind heute so "fortgeschritten", daß es sicher möglich ist, eine Fälschung herzustellen, die "mit freiem Auge" nicht als solche erkennbar ist. Sei K das Original und $\bar{K}$ die Fälschung, dann müßte die (P,t,K) zugeordnete "Wirkung" bedeutend höherwertig sein, als die (P,t,$\bar{K}$) zugeordnete, wenn man den Marktwert von K bzw. $\bar{K}$ zugrunde legt. Worin kann nun der starke Unterschied begründet sein? Offenbar nicht im "Eindruck" von K bzw. $\bar{K}$, denn dieser soll ja nach Voraussetzung für P in t nicht unterscheidbar sein. Also muß der Unterschied in P durch das "Wissen" um die Echtheit von K bzw. die Unechtheit von $\bar{K}$ hervorgerufen werden. Wir gelangen also zu der Schlußfolgerung, daß der größte Teil des Wertes von K, wenn man den Unterschied des Marktpreises gegenüber dem von $\bar{K}$ zugrunde legt, lediglich vom Wissen von P über die Echtheit von K abhängt, aber nicht vom Kunstwerk selbst.

Damit aber ist unsere Einstellung zu den Kunstwerken
"berühmter" Künstler offenbar eine andere als zur Zeit,
als diese Künstler noch unbekannt waren. Der Bewertungs-
vorgang ist etwa folgendermaßen zu erklären:
Ein Mensch erstellt Kunstwerke die von seinen Zeitgenossen
oder Nachfahren irgendeinmal anerkannt werden. Offenbar
zu dieser Zeit aber nicht deshalb, weil der Künstler
"berühmt" ist, das muß er ja erst werden, sondern aus-
schließlich weil die Kunstwerke "gefallen". Sobald aber
der Künstler bekannt ist, wird die Bewertungstechnik ge-
ändert. Nun ist plötzlich die vorausgesetzte Berühmtheit
des Künstlers das Entscheidende, nicht mehr der Eindruck
von K ohne Rücksicht auf den Künstler. Eine derartige
Kunstbewertung enthält aber eigentlich unangemessen viele
Elemente, die mit dem Kunstwerk selbst nichts mehr zu tun
haben. Wollte man kritisch sein, müßte man sagen, daß uns
in solchen Fällen die Maßstäbe für Kunstwerke überhaupt
verloren gegangen sind. Es hat irgendwie den Anschein,
als hätten wir mit unserem Kunstverständnis das Niveau von
Autogrammsammlern erreicht.

Anscheinend läßt sich hier wieder einmal das Phänomen
der Umkehrung der Richtung einer Schlußfolgerung be-
merken. Ein Mensch, der Werke von hohem künstlerischem
Gehalt schafft, ist ein großer Künstler. Diese Schluß-
folgerung ist sicherlich zulässig. Ihre Umkehrung aber
ist zumindest bedenklich, wenn man nämlich folgert,
daß ein Werk, das von einem großen Künstler geschaffen
wurde, auch ein großes Kunstwerk ist. Derartige Fehl-
schlüsse werden aber nicht nur etwa in den dem täg-
lichen Leben vielleicht ferner stehenden Gebiet der
Kunst getätigt, sondern auch in sehr erheblichen Maße
im politischen Leben. Aber selbst in die Wissenschaften
finden solche falsche Schlußfolgerungen Eingang. Die
in den Wissenschaften verwendeten Begriffe verdanken
ihre Entstehung der Bezeichnung zunächst konkreter
Umweltgegebenheiten. Darunter sind natürlich auch
gedankliche Abstraktionen, wie etwa Zahlen, zu ver-
stehen. Immer wieder scheinen solche Begriffe ein von

ihrer Wurzel unabhängiges Eigenleben zu erhalten.
Man spricht dann etwa von "allen reellen Zahlen" ohne auf
die Problematik dieses Begriffes, der ja nunmehr keine
Wurzel im Konstruktiven mehr besitzt, näher einzugehen.
Die natürlichen Zahlen werden aus der Anschauung von Mengen
durch Abstraktion gewonnen. Durch Operationen wie Addieren,
Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren gelangt man zum
Bereich der rationalen Zahlen. Im weiteren wird durch die
Einführung algebraischer Funktionen der Bereich der
irrationalen Zahlen erreicht und schließlich können über
Grenzwertbildungen nach und nach weitere Bereiche der
reellen Zahlen erschlossen werden. Stets aber muß man doch
davon ausgehen, daß eine neu zu bildende Zahl in irgendeiner
endlichen Form beschreibbar ist. Eine unendliche Dezimal-
zahl kann niemals als solche definiert werden, sondern
nur durch das Anschreiben ihrer endlichen Definition.
Ein Begriff der reellen Zahlen der über den Bereich der
in endlicher Form beschreibbaren Zahlen hinaus geht
ist offenbar eine unzulässige Erweiterung der Menge der
konstruktiv einzuführenden reellen Zahlen.

Ein anderes Beispiel: Der Begriff der Existenz, ursprüng-
lich abgeleitet von ganz konkreten anschaulichen Dingen,
wie etwa existierende Dinge und existierende Personen,
gewinnt plötzlich ein unserer Ansicht nach unzulässiges
Eigenleben. Die Frage der Eigenschaft der Existenz wird
nicht mehr als eine Frage nach der Erweiterung der
Definition des Begriffes sondern als eine Frage nach einer
Eigenschaft des Denkobjektes verstanden, dem der Begriff
der Existenz zugesprochen oder abgesprochen werden soll.

WAS LEISTET DIE SPRACHE?

(Auszug aus einem Brief)

1. Jede Sprache kann nicht mehr leisten als daß sie die Aufgabe einer "Informationseingabe" in das kybernetische System "Mensch" übernimmt, um dieses System in einen anderen "Zustand" zu versetzen. Dies geschieht völlig analog der Eingabe durch das Informationsmedium "Lochkarte" in ein System "Computer".

   Wenn man - um einer lieben alten Gewohnheit zu huldigen - auf den Gedanken nicht verzichten will, daß den Begriffsinhalten der Sprache "Realität" bzw. "Existenz" unabhängig von der Gesamtheit "Eingabemedium plus kybernetisches System" zukommt, dann ist dadurch nur eine entsprechend extensive Verwendung der Begriffe Realität bzw. Existenz gegeben.

2. Unseren Wissenschaften liegt die durch langjährige Gewohnheit, aber durch nichts anderes begründete Annahme zugrunde, daß die "Wirklichkeit" bzw. "Existenz" erkennbare Gegebenheiten seien, die unabhängig vom Menschen gedacht werden können. Die Unabhängigkeit ist aber nur gegenüber dem einzelnen Menschen gegeben, nicht aber gegenüber "dem Menschen". Der "Sinn" einer Lochkarteneingabe an einen Computer ist nur im Zusammenhang mit einem Computer denkbar, wenn er auch unabhängig vom einzelnen Computer ist. Die Tatsache, daß ich hier von einem solchen Sinn spreche, ohne auf irgendeinen konkreten Computer Bezug zu nehmen, bedeutet keinen Einwand gegen meine Überlegungen, da ja Lochkarte und Computer eingebettet sind in das System Sprache und Mensch, in dem etwa mein Brief an Sie stattfindet und das hier an die Stelle des erstgenannten Systems tritt.

   Will man sich nicht in Spekulationen verlieren, die sich wie Traumgebilde jeder verstandesmäßigen Behandlung entziehen, dann kann man den Ausdruck "Existenz" nur dort verwenden, wo es sich um etwas "Denkbares" handelt und Denken ist nur in

Form von Informationsverarbeitung möglich, insbesondere sind Gedanken im Bereiche der Wissenschaften grundsätzlich schriftlich fixierbare Aussagen, die mindestens einer Person in mindestens einem Zeitpunkt eindeutig zugeordnet werden können.

   Wie man sieht, folgt bereits aus dieser Annahme die Abzählbarkeit alles Existierenden, weil mit der Abzählbarkeit alles Denkbaren identisch. Der Versuch, Mengen von überabzählbarer Mächtigkeit zu erzeugen, gleicht dem Versuch Münchhausens, sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zu ziehen.

   Beschränkt man allerdings etwa die zulässigen Methoden der Anordnung - wie dies letztlich bei allen Beweisen der Überabzählbarkeit der Fall ist, die auf der Konstruktion eines in der ursprünglichen Menge nicht enthaltenen Elementes beruhen - dann darf man sich nicht wundern, wenn man die Menge des Denkbaren bzw. des Existierenden nicht ausschöpft.

3. Wissenschaftliche Fortschritte in den Naturwissenschaften wurden immer wieder durch Relativierung von bisher als absolut angesehenen Begriffen erreicht. Das Abgehen vom geozentrischen und später vom heliozentrischen Weltbild ermöglichte uns ebenso ein besseres Verständnis der Welt wie später die Relativierung von Bezugssystemen durch die spezielle und weiter durch die allgemeine Relativitätstheorie. Dabei möchte ich die Begriffe "richtige" oder "falsche" Systeme der Naturbeschreibung nicht gerne verwenden, sondern es erscheint mir sinnvoller, die Qualität solcher Beschreibungen lediglich an den Anforderungen zu messen, die an sie gestellt werden; in der Naturwissenschaft also zweifellos die Forderung nach der Vorhersage beobachtbarer bzw. meßbarer Ereignisse.

   Die Aufnahme von Eindrücken der Umwelt durch den Menschen, sein Nachdenken über die Umwelt, dient letztlich dem Überleben dieser Spezies. Die Möglichkeit, in einem für den Menschen günstigen Sinne auf die Umwelt Einfluß zu nehmen, beruht vor allem auf dem Erklären von Umweltsvorgängen.

Allen solchen Erklärungen ist aber doch gemeinsam, daß ein gedankliches Modell der Umwelt aufgebaut wird, wobei ich bildhafte Vorstellungen, akustische Vorstellungen usw. einbeziehe. Tatsächlich werden Gegebenheiten der Außenwelt durch das "über sie Nachdenken" in irgendeiner Form im Inneren, u.zw. im unserem Bewußtsein zugänglichen Inneren, abgebildet. Im Rahmen dieser Abbildung haben wir Begriffe der Naturwissenschaften, Begriffe wie Raum, Zeit, Kausalität usw. und letztlich auch Begriffe wie richtig, falsch, Existenz usw. entwickelt.

Es handelt sich dabei, wenn man so will, um Reaktionen des Menschen auf Eindrücke aus der Außenwelt. Und hier liegt wohl der eigentliche Unterschied der eben geschilderten Auffassung zur Auffassung vieler Geisteswissenschaftler, die der Ansicht sind, die Begriffswelt existiere jedenfalls ohne irgendeinen Bezug auf den Menschen an sich, ohne jeden Bezug auf die Möglichkeit des Denkens, und die Menschheit müsse die Begriffswelt ebenso erforschen wie die Umwelt. Dieses Erforschen kann sich aber nur im Rahmen der Denkmöglichkeiten des Menschen abspielen und von einer "Begriffswelt" außerhalb dieses Bereiches zu sprechen, ist ebenso sinnlos wie "über jene Dinge zu sprechen, über die man grundsätzlich nicht sprechen kann".

4. Wir sind also wieder einmal bei der Problematik der Sprache. Unsere Logistiker glauben heute, aus der Tatsache, daß über eine Sprache gesprochen werden kann (Metasprache), schließen zu können, daß uns "alle möglichen Sprachen" zur Verfügung stehen und damit auch deren Begriffsinhalte. Darauf beruht auch die Denkmöglichkeit eines Kontinuums. In meiner Anordnung wird aber über die Universalschrift, die ja im Sinne der Logistiker eine Sprache darstellt, in gleicher Weise gesprochen wie über die Gesamtheit aller möglichen Lochkartenpakete, die zur Eingabe an alle möglichen Computer verwendet werden. Zeigt irgendein Computer auf Grund der Eingabe

irgendeines Lochkartenpaketes in irgendeinem Zeitpunkt in seinem Ausgabemedium, z.B. auf seinem Bildschirm, die Mitteilung:"Es handelt sich um eine reelle Zahl", dann kann ich, ohne zu wissen, ob diese Aussage auch tatsächlich richtig ist, doch alle von irgendeinem Computer jemals bei irgendeiner Lochkarteneingabe gegebenen Antworten, daß es sich um eine reelle Zahl handle, abzählbar anordnen. Was aber wesentlich ist: Mein Sprechen über diese mögliche Anordnung, wie etwa jetzt in diesem Brief an Sie, bedeutet keineswegs eine "Metasprache", da hiedurch nichts über den Begriffsinhalt, also über die Sprachobjekte, der durch die Menge aller Lochkartenpakete gegebenen Sprache ausgesagt wird. Der Begriffsinhalt kann nur durch das Zusammenwirken von Lochkartenpaket und Computer "beschrieben" werden, genauso wie alles Existierende, also alles Denkbare, nur durch das Zusammenwirken von Mitteilung und Mensch beschrieben bzw. gedacht werden kann. Dies umschreibt die Grenzen des Bereiches unseres Denkens.

Schlußbemerkung:

Der Unterschied zwischen der hier betrachteten Auffassung über Erkenntnismöglichkeit und der Auffassung, die etwa dem scholastischen Denken der heutigen Mathematik zugrunde liegt, besteht darin, daß in dieser auch die Tatsache, jede Erkenntnismöglichkeit und jede Denkmöglichkeit erfordert einen endlichen Raum und eine endliche Zeit, nicht Bedacht genommen wird. Da auch der Begriff der Existenz nur dort sinnvoll angewendet werden kann, wo es sich um ein Objekt handelt, über das in endlichem Raum und in endlicher Zeit eine endliche Mitteilung möglich ist, an das also von irgendwem irgendwann gedacht werden könnte, wird der Bereich der möglichen Wissenschaftsobjekte vielfach unzulässig ausgeweitet. Versucht man, von "etwas" außerhalb dieses Bereiches zu sprechen, so erweist sich dieses "Etwas" als in sich widerspruchsvoll.

Der Bereich des Denkmöglichen bleibt auf den Bereich des von irgendeiner Person P in irgendeinem Zeitpunkt t durch irgendeine Mitteilung M Bezeichenbaren beschränkt, also auf dem Bereich einer abzählbaren Menge. Der Bereich des Existierenden muß im Bereich des Denkbaren enthalten sein. Dies bedeutet keine unzulässige Einschränkung der existierenden Welt, sondern nur eine notwendige Abgrenzung des Begriffes Existenz.

UNIVERSALANORDNUNG

Karl-Heinz Wolff

(Fassung XII 2007)

Kurzfassung: Es wird eine abzählbare Anordnung von „Schubladen“ eingeführt. Jedem möglichen Objekt unseres Denkens, über welches gesprochen werden kann, also insbesondere auch jeder reellen Zahl zwischen Null und Eins, wird (mindestens) eine Schublade eindeutig zugeordnet. Es wird gezeigt, daß der Versuch, die Vollständigkeit dieser „Universalanordnung“ durch die Einführung einer Cantor'schen Diagonalzahl zu widerlegen, mißlingt. Die Universalanordnung selbst eignet sich nicht, konkrete Objekte unseres Denkens, insbesondere die reellen Zahlen zwischen Null und Eins, „aufzufinden“. Sie dient lediglich dazu zu zeigen, daß jeder Beweis der Existenz überabzählbarer Mengen, der in der Einführung eines angeblich in der Universalanordnung nicht enthaltenen Elementes, wie etwa eine Cantor'sche Diagonalzahl, besteht, zu einem Widerspruch bereits in der Definition dieses Elementes führt.

Stichworte: Cantor'sches Diagonalverfahren, Abzählbare Anordnung der reellen Zahlen, Kontinuumhypothese, Überabzählbarkeit, Cantor's diagonal process (Critic), continuum hypothesis, countable arrangement, uncountability

((1)) Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Menge alles dessen, **worüber gesprochen werden kann.** Jeder Sprecher will ein Wissen **mit** jemandem **teilen,** er will etwas **mitteilen,** jemandem eine **Mitteilung** zukommen lassen. Bei solchen Mitteilungen beschränken wir uns - wie wir glauben ohne Beschränkung der Allgemeinheit - auf schriftliche Mitteilungen M. Solche können sowohl von einer Person P an eine andere gerichtet werden als auch von P für sich selbst zur Erinnerung gedacht sein.

((2)) Die zentrale Bedeutung der Sprache kommt bereits hier zum Ausdruck. Nur im Rahmen einer **Sprache**, im Rahmen von **Mitteilungen,** können Überlegungen angestellt, kann gedacht werden. Ein Sprechen über etwas außerhalb einer Sprache führt ebenso wie ein Denken außerhalb einer Sprache wie gezeigt werden wird zu einem Widerspruch.

((3)) Mitteilungen dienen zur Übermittlung von **Gedanken.** Der Autor PA möchte in dieser Arbeit mit seinem Leser PL **über alles Denkbare objektiv sprechen,** d.h. unabhängig von der persönlichen Meinung von PA und PL über den Inhalt von Mitteilungen M. Von Bedeutung ist für ihn lediglich, was sich eine Person beim Lesen der Mitteilung M denkt, **welches Objekt seines Denkens M für P beschreibt.**

((4)) Unter dem **Inhalt** einer Mitteilung M verstehen wir ganz allgemein den **Sinn**, den M für einen Leser P von M hat (Im allgemeinen wird P nicht mit PA oder mit PL dem Leser dieser Arbeit, identisch sein). Dieser Sinn hängt unter anderem von der Person P des Lesers und vom Zeitraum ΔT (Lesen ist nicht in einem Zeitpunkt möglich) des Lesens ab. Zunächst sollte P die Sprache, in der M abgefasst ist, verstehen. Von Bedeutung wird auch die Frage sein, ob die Mitteilung M für P in ΔT **eindeutig** ist. So kann etwa π als Buchstabe oder als Zahl, i als Buchstabe, als Zinsrate oder als $\sqrt{-1}$ usw. verstanden werden. Eine Mitteilung M kann aber auch **in sich widersprüchlich** sein, wie z.B. „die größte natürliche Zahl, kleiner als 3 und größer als 5“.

((5)) Welches **Denkobjekt** M für P in ΔT tatsächlich beschreibt, hängt unter anderem vom „Vorwissen“ von P in ΔT ab. Wir sprechen daher von Denkobjekten DO im weiteren **immer in Abhängigkeit von M, P und ΔT,** also von DO = DO(M,P,ΔT).

((6)) Weiters wollen wir uns nicht nur auf tatsächliche Lesevorgänge beschränken. DO = DO(M,P,ΔT) soll für uns auch jenes Denkobjekt bedeuten, welches M für P in ΔT beschrieben hätte, wenn P in ΔT die Mitteilung M tatsächlich gelesen hätte selbst wenn dies nicht der Fall war.. Wir betrachten also potentielle Lesevorgänge und damit **potentielle Denkobjekte DO(M,P,ΔT).** Der Sinn von M für den Autor PA spielt dabei keine Rolle, es sei denn im Falle PA = P. Das Gleiche gilt für den Sinn, den M für den Leser PL dieser Arbeit hat und der nur im Falle PL = P relevant wäre. Der Autor möchte nur aus seiner Sicht festhalten, was beim Lesen von Mitteilungen geschieht bzw. geschehen könnte. Von Interesse für ihn ist ausschließlich das (potentielle) Urteil von P darüber, welches Denkobjekt M in ΔT seiner Meinung nach beschreibt.

((7)) Mit der konsequenten Unterscheidung zwischen dem Autor PA, dem Leser PL und dem potentiellen Leser P soll der Sinn einer Mitteilung seiner ihm oft (nach Meinung von PA ungerechtfertigten) Objektivität entkleidet und auf seine Subjektivität zurechtgerückt werden. Hier seien als Analogon Botenstoffe angeführt, die Lebewesen Nachrichten übermitteln. Geruchsstoffe etwa, die Insekten Informationen übermitteln, können analysiert werden, ihre chemische Zusammensetzung kann ermittelt werden und ebenso ihre Wirkung auf ein Empfängerorgan. Niemals jedoch wird sich uns ein **Sinn** einer solchen Mitteilung in gleicher Weise erschließen wie der einer wie immer gearteten schriftlichen Mitteilung M. Trotzdem können wir ihre **Wirkung** beschreiben. Wenn wir nun annehmen, dass irgendwelche mit wie immer gestalteten Erkenntnisfähigkeiten ausgestatteten Entitäten ET schriftliche Mitteilungen M der obigen Art analysieren, können sie durch Beobachtung von Reaktionen allfälliger Personen P eine Wirkung von M auf P feststellen ohne dass von einem Sinn von M in Bezug auf sich – auf die Entität ET – gesprochen wird. ET gegenüber hat M keinen objektiven Sinn sondern nur einen subjektiven, eben bezogen auf das Subjekt P.

((8)) Die **Wahrheit einer Aussage** der Gestalt: „M beschreibt das Denkobjekt DO“ ist also **relativ** und zwar relativ zur M lesenden Person P und zum (potentiellen) Lesezeitraum ΔT. Auf die Frage, ob M das Denkobjekt DO beschreibt, hat P in ΔT mehrere Möglichkeiten einer Antwort:

- Er antwortet „ja“ und sagt (subjektiv) die Wahrheit.
- Er antwortet „nicht ja“ und sagt (subjektiv) die Wahrheit.
- Er antwortet „ja“ und lügt (subjektiv).
- Er antwortet „nicht ja“ und lügt (subjektiv).
- Er gibt keine dieser Antworten, aus welchen Gründen auch immer.

Gründe für das Fehlen einer Antwort können vielfältiger Natur sein. Etwa wenn P die Sprache, in der M abgefasst ist, nicht versteht, wenn er M mangels sonstigem „Vorwissen“ nicht versteht, wenn er bis zum Ende von ΔT nicht Zeit genug hatte M vollständig zu lesen, wenn er keine Antwort geben will, usw.

((9)) Für den Autor PA und für den Leser PL ergeben sich auch nur genau diese Möglichkeiten der (subjektiven) Beurteilung einer Mitteilung M. Eine **objektive** Beurteilung des Wahrheitsgehaltes solcher subjektiven Meinungen wäre nach Ansicht des Autors nur einem **arbiter mundi** möglich. Diese Feststellung könnte den Eindruck vermitteln, der Autor halte das (Platonische) Denkmodell der Existenz von vom Menschen unabhängigen Wahrheiten, einer vom Menschen unabhängigen Wissenschaft, für entbehrlich. Der Eindruck wäre richtig.

((10)) Die weitgehende Übereinstimmung der Menschen in ihren Urteilen, etwa über wissenschaftliche Aussagen wie mathematische Sätze, lässt sich unschwer **mit übereinstimmenden Erfahrungen bei der Durchführung von Experimenten** auch beim „Experiment“ des Zählens (vgl. Kronecker über die natürlichen Zahlen), erklären. Solche Übereinstimmungen gründen nach Ansicht des Autors vor allem im gleichartigen Aufbau des Menschen, in der Vererbung, usw. Sie sind also empirisch begründet und somit Urteile a posteriori.

((11)) Wir führen nun im Folgenden eine abzählbare Anordnung alles Denkbaren, aller potentiellen Denkobjekte DO, in einer **UNIVERSALANORDNUNG** ein. Dabei werden **alle potentiellen Denkobjekte DO = DO(M,P,ΔT)** aus ((5)) so abzählbar angeordnet, dass jedes DO eine **Ordnungszahl z = z[DO(M,P,ΔT)]** erhält**.** Der Reihe nach betrachten wir nun abzählbare Anordnungen aller möglichen Mitteilungen M, aller möglichen solche Mitteilungen lesenden Personen P und schließlich aller möglichen Lesezeiträume ΔT. Aus der Kombination dieser Anordnungen erhalten wir die gewünschte abzählbare Anordnung aller potentiellen Denkobjekte.

((12)) Zur abzählbaren Anordnung aller möglichen Mitteilungen M aus ((1)) beschränken wir uns - ohne Beschränkung der Allgemeinheit - auf endliche (aber unbegrenzte) quadratische Mitteilungen M, bestehend aus schwarzen Zeichen auf weißem Grund. Diese Mitteilungen setzen wir aus Elementarquadraten der Seitenlänge $\frac{1}{100}$ mm zusammen, die entweder weiß oder schwarz sind. Eine Mitteilung mit der Seitenlänge 10 cm besteht daher aus 10^8 Elementarquadraten. Jede schriftliche Mitteilung, gleichgültig in welcher Sprache sie abgefasst ist, kann in Form einer derartigen quadratischen Mitteilung dargestellt werden. Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir dabei die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Eine Mitteilung M mit der Seitenlänge $\frac{n}{100}$ mm, bestehend aus n^2 Elementarquadraten wird dann durch die **endliche** Dezimalzahl $a(M) = 0,a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}...a_{ik}...a_{nn}$ eindeutig gekennzeichnet, wenn a_{ik} die dem k^{ten} Elementarquadrat in der i^{ten} Zeile zugeordnete Ziffer (1 oder 2) ist. Alle Mitteilungen M werden nun nach der Größe von n in Gruppen und innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) abzählbar angeordnet und es gilt offenbar $0 < a(M) < 1$.In dieser Anordnung stehe die Mitteilung M an μ^{ter} Stelle.

((13)) Zur abzählbaren Anordnung aller möglichen lesenden Personen P gehen wir davon aus, dass jede Person P während des (potentiellen) Lesevorganges ein Volumen im Raum einnehmen muss. Wir bilden nun Elementarwürfel der Seitenlänge $\frac{1}{100}$ mm. Durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems können diese Elementarwürfel, die das ganze Universum überdecken, abzählbar angeordnet werden. In dieser Anordnung stehe der Elementarwürfel EW an ν^{ter} Stelle.

((14)) Zur abzählbaren Anordnung aller möglichen Lesezeiträume ΔT setzen wir – ohne Beschränkung der Allgemeinheit – voraus, dass es einen Zeitraum $\delta = \delta(\Delta T)$ der Länge $\frac{1}{100}$ Sek. am Ende von ΔT gibt, innerhalb dessen P seine Beurteilung von M nicht ändert. Der Lesezeitraum ΔT habe die Länge $\Lambda = \Lambda(\Delta T)$ und wir setzen – ohne Beschränkung der Allgemeinheit – voraus, Λ sei ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{100}$ Sek. Wir bilden nun Lesezeitelemente LZE = LZE[$\delta(\Delta T),\Lambda(\Delta T)$], bestehend aus allen möglichen Kombinationen von (abzählbaren) Zeitpunkten δ mit (abzählbaren) Lesedauern Λ. Alle möglichen LZE werden nun nach der Lage von δ auf der Zeitachse in Gruppen und innerhalb jeder Gruppe nach der Länge von Λ abzählbar angeordnet. In dieser Anordnung stehe das Lesezeitelement LZE an der Stelle λ.

((15)) Weiters ordnen wir alle möglichen Lesevorgänge abzählbar an und zwar durch eine Kombination der Anordnungen aus ((13)) und aus ((14)). Jeder potentielle Lesevorgang erfordert einen potentiellen Leser P und einen potentiellen Lesezeitraum ΔT. Zur abzählbaren Anordnung aller möglichen Lesevorgänge bilden wir daher Raum-Zeit-Elemente RZE als Kombination der Elementarwürfel EW aus ((13)) mit den Lesezeiträumen ΔT aus ((14)). Jedes Raum-Zeit-Element ist also durch einen Elementarwürfel und durch einen zugehörigen Lesezeitraum definiert: RZE = RZE(EW,ΔT). Die abzählbare Anordnung aller EW ermöglicht die abzählbare Anordnung aller potentiellen Leser P und weiter zusammen mit der abzählbaren Anordnung aller möglichen Lesezeiträume ΔT die gewünschte abzählbare Anordnung aller RZE und damit aller potentiellen Lesevorgänge. Der potentielle Lesevorgang RZE stehe in dieser Anordnung an der Stelle N = N(RZE) = = N(EW,ΔT) = N(P,ΔT).

((16)) Die **UNIVERSALANORDNUNG,** also die abzählbare Anordnung alles Denkbaren, aller möglichen Denkobjekte, besteht nun in einer Kombination aller möglichen Mitteilungen M aus ((12)) mit allen möglichen Lesevorgängen RZE aus ((15)). **Ausgangspunkt ist die Frage, welches Denkobjekt DO = DO(M,P,ΔT) für die Person P die Mitteilung M im Lesezeitraum ΔT beschreibt. Diesem Denkobjekt wird die endliche Dezimalzahl z = z(M,P,ΔT) = N(P,ΔT) + a(M) zugeordnet.** Die Frage nach dem beschriebenen Denkobjekt richtet sich allerdings an die Person P und eine allfällige Antwort ist unter Berücksichtigung der Einschränkung aus ((8)) zu beurteilen. Wir sagen: **Dem Denkobjekt DO = DO(M,P,ΔT) wird die Dezimalzahl z = z(M,P,ΔT) als Ordnungszahl genau dann zugeordnet, wenn P am Ende des Lesezeitraumes ΔT bejaht bzw. bejahte, dass die Mitteilung M dieses Denkobjekt eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt.** Im gegenteiligen Fall ordnen wir die Dezimalzahl z der **Negation eines Denkobjektes, NDO,** zu. Damit ist **jede** Dezimalzahl z entweder einem Denkobjekt DO = DO(M,P,ΔT) oder der Negation eines Denkobjektes NDO zugeordnet.

((17)) Die **UNIVERSALANORDNUNG** kann als **SCHUBLADENKASTEN** gedacht werden. Zu jeder Dezimalzahl z = z(M,P,ΔT) aus ((16)), gehört eine Schublade. Diese enthält genau dann ein Denkobjekt DO(M,P,ΔT), wenn P im Zeitraum ΔT bejaht (oder, falls er die Mitteilung vollständig gelesen hätte, bejahte), dass M für ihn DO(M,P,ΔT) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Im gegenteiligen Fall enthält die Schublade NDO als Ersatz für das fehlende Denkobjekt.

((18)) Hierzu noch folgende Bemerkungen: Im Allgemeinen wird der Sinn einer Mitteilung M nicht verändert, wenn M in einem gewissen Rahmen vergrößert oder verkleinert wird bzw. wenn M in eine beliebig große weiße quadratische Fläche eingefügt wird. Es gibt daher unendlich viele Mitteilungen M, die für P in ΔT das selbe Denkobjekt beschreiben können. In analoger Weise gibt es wegen des von P während des Lesevorganges eingenommenen Volumens im allgemeinen endlich viele Elementarwürfel EW für die der selbe mögliche Lesevorgang gemäß ((15)) beschrieben wird. In gleicher Weise gibt es auch verschiedene Lesezeiträume für die der selbe mögliche Lesevorgang gemäß ((15)) beschrieben wird. Jedes mögliche Denkobjekt ist daher in unendlich vielen Schubladen enthalten. Man kann aber unschwer jedem Denkobjekt eine einzige Schublade bevorzugt zuordnen indem man jene Schublade mit der kleinsten Ordnungszahl z auswählt.

((19)) Bisher haben wir stets von Personen P gesprochen, die Mitteilungen beurteilen. Unsere Überlegungen bleiben aber prinzipiell anwendbar, wenn wir die beurteilende Person P durch einen Computer PC ersetzen, der nach Eingabe der Mitteilung M als Ausgabe die Frage nach dem Objekt, das M beschreibt, beantwortet. Der fortschreitenden Verkleinerung des Volumens und Vergrößerung der Rechengeschwindigkeit von Computern könnte nötigenfalls durch entsprechende Verkleinerung der Elementarwürfel aus ((13)) und Verkleinerung des Mindestzeitraumes aus ((14)) Rechnung getragen werden. Ein Gleiches gilt übrigens auch bei der Betrachtung eines Lese- bzw. Beurteilungsvorganges in einem Hyperraum (mit mehr als vier Dimensionen), wie er etwa in einer Superstring-Theorie auftritt. Man wählt dann einfach entsprechende Elementarwürfel aus diesem Hyperraum, die ebenso abzählbar angeordnet werden können.

((20)) **Die UNIVERSALANORDNUNG kann nie vollständig bekannt sein.** Einer Person **P** sind grundsätzlich nur Schubladen mit Denkobjekten DO = DO(M,**P**,ΔT) zugänglich. Andere Schubladen kann **P** nicht öffnen. Zugang zu einem Denkobjekt ist **P** aber auch für „seine" Schubladen nur möglich, wenn er genügend Zeit zur Verfügung hatte, die in Rede stehende Mitteilung M vollständig zu lesen. Dies ist für Mitteilungen ab einer bestimmten Größe schon wegen der beschränkten Lebenszeit von **P** nicht mehr möglich

((21)) Mitteilungen welcher Größe sind überhaupt „lesbar"? Gehen wir von einem Buch mit 1000 Seiten zu je 1000 cm^2 aus, dann ist es durch 10^{12} Elementarquadrate darstellbar. Jenes Buch, in dem nur weiße Elementarquadrate vorkommen, kann sehr rasch durchgeblättert und „gelesen" werden. Ein Buch in sehr kleiner Schrift erfordert überdurchschnittlich viel Lesezeit. Wir können annehmen, dass man im Laufe eines Lebens im Durchschnitt sicher nur weniger als 10.000 solcher Bücher lesen kann. Jedes derartige Buch entspricht einer Mitteilung, bestehend aus 10^{16} Elementarquadraten, also einem Quadrat mit der Seitenlänge von einem Kilometer. Da jedes Elementarquadrat entweder weiß oder schwarz ist, gibt es „nur"

$$2^{10^{16}}$$

verschiedene Mitteilungen dieser Größe. Uns sind aber weit größere natürliche Zahlen zugänglich. Betrachten wir etwa die natürliche Zahl

$$\boldsymbol{Z} = 9\text{hoch}\{9\text{hoch}[9\text{hoch}(9\text{hoch}\{9\text{hoch}[9\text{hoch}(9\text{hoch}9)]\})]\},$$

dann ist ihr gegenüber die Anzahl aller „lesbaren" natürlichen Zahlen verschwindend klein u. zw. auch dann, wenn der Lesevorgang Computern übertragen wird. Der Grund, warum wir dennoch das Gefühl haben, alle natürlichen Zahlen seien uns wenigstens prinzipiell zugänglich, liegt einfach darin, dass ihr Bildungsgesetz leicht überschaubar ist, nämlich der Schritt von n nach n+1. Ähnliches gilt für andere unendliche Zahlenmengen, die abzählbar angeordnet werden können (z.B. die algebraischen Zahlen), deren Bildungsgesetz uns einfach erscheint.

((22)) Komplexer wird die Fragestellung, wenn wir Zahlen mit komplexeren Bildungsgesetzen betrachten. Transzendente Zahlen, wie etwa e oder π (man beachte, dass nahezu alle Leser diese Symbole in dem hier gegebenen Zusammenhang als Zahlen ansehen, obwohl beide in anderem Zusammenhang, z.B. als Buchstaben, andere Bedeutung haben können), lassen sich durch unendliche Summen oder auch verbal durch „Basis der natürlichen Logarithmen" bzw. „Fläche des Einheitskreises" beschreiben. Noch aufwendiger gestaltet sich die Beschreibung unendlicher Diagonalzahlen. Für sie ist eine vorherige abzählbare Anordnung von unendlich vielen Dezimalzahlen Voraussetzung.

((23)) Aber auch auf andere Weise lässt sich der Bereich von „Zahlen" ausweiten. Hierzu zwei Beispiele: Wir führen „ε-Zahlen z_ε" mit $\forall z:\{z_\varepsilon > z \wedge \forall z_1 > z: z_\varepsilon < z_1\}$ und „∞-Zahlen z_∞" mit $\forall z:\{z_\infty > \infty \wedge z_1 > z_2: z_{1\infty} > z_{2\infty}\}$ ein. Jede ε-Zahl z_ε ist also größer als ihre Ausgangszahl z aber kleiner als jede Zahl größer als z, und jede

∞-Zahl z_∞ ist größer als das als Zahl definierte ∞. Im Übrigen sind sowohl die ε-Zahlen als auch die ∞-Zahlen untereinander per Definitionem nach der Größe ihrer jeweiligen Ausgangszahl angeordnet. Mit der Einführung der ε-Zahlen kommt man in fatale Nähe des Begriffes der „unendlich benachbarten" Punkte. Die Differenz zwischen z und z_ε ist offenbar eine „unendlich kleine" Zahl. Auch für die Naturwissenschaften bringen die ε-Zahlen kaum einen Gewinn, sie lassen sich aber ebenso wie die ∞-Zahlen, die zu höheren Mächtigkeiten verwendbar erscheinen, widerspruchsfrei in ein System von Zahlen einfügen.

((24)) Entscheidend ist aber: **Alle diese Zahlen lassen sich deshalb abzählbar anordnen, weil alle möglichen auftretenden Definitionen und Bildungsgesetze durch endliche Mitteilungen beschrieben werden können.** Andernfalls gäbe es keinen endlichen Zeitraum ΔT, in dem eine Person P - abgesehen von Lügen, Irrtümern usw., die wir ja ausdrücklich nicht als unmöglich ausschließen, - feststellen könnte, welches Denkobjekt M für sie bedeutet. Die Universalanordnung enthält aber alle auf endlichen Mitteilungen M beruhenden Denkobjekte. Dies gilt insbesondere für alle Denkobjekte der Mathematik.

((25)) Dennoch ist es eine Tatsache, dass uns das in ((21)) angesprochene Gefühl der prinzipiellen Zugänglichkeit von Denkobjekten bei sehr komplexen Anordnungen, wie die Universalanordnung eine ist, verlässt. Diesem Gefühl zum Trotz formuliert der Autor PA den **Satz: Die Universalanordnung ist vollständig; jede Behauptung, es gäbe Denkobjekte, die in der Universalanordnung nicht enthalten sind, enthält einen Widerspruch.** Der Nachweis beruht darauf, dass jeder Kritiker PK dieses Satzes seine Kritik in Form einer Mitteilung M formulieren und in Raum und Zeit vorbringen muss. Es gibt für PK also ein DO = = DO(M,PK,ΔT), das für ihn durch M in ΔT beschrieben wird. Damit ist seine Kritik gemäß ((11)) ein Denkobjekt aus der Universalanordnung für welches gemäß ((17)) eine Schublade im Schubladenkasten reserviert ist. Seine Behauptung, eine solche Schublade fehle, führt also zu einem Widerspruch. Wir wollen dies an drei bekannten Beweisen für angeblich überabzählbare Mengen zeigen. Und zwar für:

- Die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1
- Die Menge der einstelligen ganzzahligen Funktionen
- Die Potenzmenge der Menge der natürlichen Zahlen

((26)) Ein Gegenbeweis jeder angeblich abzählbaren Anordnung R(01) aller reellen Zahlen r mit 0 < r < 1 wird mit Hilfe einer sogenannten Diagonalzahl nach Cantor geführt. Steht $r_n = 0{,}r_{n1}r_{n2}...r_{nn}$ ..... an der n^{ten} Stelle dieser Anordnung dann ist die reelle Zahl $c = 0{,}c_1c_2...c_k.....$ mit $\forall$**k:** $\mathbf{c_k \neq r_{kk}}$ in R(01) nicht enthalten, weil sie sich von jedem $r_n \in$ R(01) in der n^{ten} Dezimalstelle unterscheidet. Die abweichenden Dezimalstellen liegen in der Matrix (ik) aller Dezimalstellen r_{ik} in der Diagonale. Wählt man jedoch eine Anordnung R(01) mit Hilfe der Universalanordnung dann führt der Versuch eines Gegenbeweises mit Hilfe einer Diagonalzahl c zu einem Widerspruch bereits in der Definition von c. Die den Gegenbeweis führende Person, der Kritiker der Vollständigkeit von R(01), sei PK. Die abzählbare Anordnung R(01) wird mit seiner Hilfe gestaltet. Dazu betrachten wir alle Denkobjekte DO = = DO(M,PK,ΔT) für die PK am Ende von ΔT bejaht bzw, bejahte, dass M eine reelle Zahl mit 0 < r < 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Gemäß ((16))

wird diesen Denkobjekten je eine endliche Dezimalzahl z = z(M,PK,ΔT) zugeordnet. Wir ordnen nun alle diese nach Meinung von PK reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nach der Größe von z(M,PK,ΔT) untereinender zeilenweise an und nennen die Anordnung R(01). Natürlich wird, wie bereits in ((18)) bemerkt, jede reelle Zahl in dieser Anordnung unendlich oft auftreten. Dies beeinflusst aber nicht die Vollständigkeit der Anordnung. Es sei bemerkt, dass der Autor PA sich jeder Einmischung in die von PK getroffene Auswahl der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthält. Der Autor PA bildet nun eine Mitteilung MK, welche das vom Kritiker PK angegebene Bildungsgesetz der angeblich in R(01) nicht enthaltenen reellen Zahl r mit 0 < r < 1, die Diagonalzahl, sie sei d, enthält. Insbesondere also die Forderung $\forall$**k: $d_k \neq r_{kk}$.** Diesem Denkobjekt d ist – wie oben dargelegt – die endliche Dezimalzahl z = z(MK,PK,ΔT) zugeordnet. Da die reellen Zahlen r wie oben dargelegt nach der Größe von z(M,PK,ΔT) zeilenweise anzuordnen sind ist auch für z = z(MK,PK,ΔT) eine Zeile reserviert. Dies sei die Zeile m. Die Diagonalzahl $d = 0,d_1d_2...d_k.....$ steht also in der m^{ten} Zeile und es gilt daher $d = r_m$. Daraus folgt aber **$d_m = r_{mm}$** im Widerspruch zu $\forall$**k: $d_k \neq r_{kk}$.** Der Widerspruch beruht letzten Endes darauf, dass PK für jede Mitteilung, von der er behauptet, sie beschreibe eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei, eine Zeile in R(01) reserviert aber dann für eine Mitteilung MK, von der er ebenfalls behauptet, sie beschreibe eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, keine Zeile zur Verfügung gestellt sieht. Für den Autor PA (und für alle Leser PL, die diesen Widerspruch als solchen erkennen) ist daher der Versuch von PK, durch die Einführung einer Cantor'schen Diagonalzahl die Unvollständigkeit der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 aus R(01) zu beweisen, misslungen.

((27)) Ein Gegenbeweis gegen jede angeblich abzählbaren Anordnung A = $\{F_n(x)\}$, der Menge einstelliger ganzzahliger Funktionen, wird mit Hilfe der einstelligen ganzzahligen Funktion FK(x) mit $\forall$n: FK(n) = $F_n(n)$ + 1 geführt. Das bedeutet $\forall$n: FK(x) $\neq F_n(x)$ woraus für den Kritiker PK die Unvollständigkeit von A folgt. Der Autor PA wählt nun eine auf der Universalanordnung beruhende Anordnung A einstelliger ganzzahliger Funktionen folgendermaßen: Er betrachtet alle Kombinationen (M,PK,ΔT), für die PK am Ende von ΔT bejaht bzw. bejahte, dass M eine einstellige ganzzahlige Funktion eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Für jede dieser Kombinationen ist also das Denkobjekt DO = DO(M,PK,ΔT) eine einstellige ganzzahlige Funktion. Die ihm gemäß ((16)) zugeordnete endliche Dezimalzahl ist z = z(M,PK,ΔT). Wir ordnen nun alle nach Meinung von PK einstelligen ganzzahligen Funktionen nach der Größe von z(M,PK,ΔT) an und nennen die Anordnung A. Wieder wird gemäß ((18)) jede einstellige ganzzahlige Funktion in dieser Anordnung unendlich oft vorkommen. Der Autor PA bildet nun eine Mitteilung MK, welche das vom Kritiker PK angegebene Bildungsgesetz der angeblich in A nicht enthaltenen einstelligen ganzzahligen Funktion, wir nennen sie FK(x), enthält. Insbesondere also die Forderung $\forall$**n: FK(x) $\neq$ F_n(x).** Diesem Denkobjekt FK(x) ist die endliche Dezimalzahl z = z(MK,PK,ΔT) zugeordnet. Da die einstelligen ganzzahligen Funktionen in A nach der Größe von z(M,PK,ΔT) anzuordnen sind ist auch für FK(x) in A ein Platz reserviert. FK(x) stehe in A an m^{ter} Stelle. Nach der von PA gegebenen Definition von A gilt daher **FK(x) = F_m(x) $\in$ A** im Widerspruch zu $\forall$**n: FK(x) $\neq$ F_n(x).** Für den Autor PA (und für alle Leser PL, die diesen Widerspruch als solchen erkennen) ist daher der Versuch von PK, die Unvollständigkeit von A als Menge aller einstelligen ganzzahligen Funktionen zu beweisen, misslungen.

((28)) Ein Gegenbeweis gegen jede angeblich abzählbare Anordnung der Potenzmenge der Menge der natürlichen Zahlen wird folgendermaßen geführt: Der Autor ordnet alle Mengen natürlicher Zahlen entsprechend ihrem Platz als Denkobjekte in der Universalanordnung in einer Folge $\{M_n\}$ an. Um Verwechslungen mit Mitteilungen M vorzubeugen werden Mengen M_n mit kursivem M bezeichnet. Der Kritiker PK wendet ein, die Menge $\mathfrak{M} = \{n \mid n \notin M_n\}$ sei nicht in $\{M_n\}$ enthalten. Es handelt sich bei $\mathfrak{M}$ um die Menge aller jener natürlichen Zahlen n, die nicht in jener Menge M_n der Folge enthalten sind, die an n^{ter} Stelle steht. Laut Kritiker gelte also $\mathfrak{M} \notin \{M_n\}$. Der Autor PA bildet nun eine Mitteilung MK, welche die Vorschrift zur Bildung der Folge $\{M_n\}$ und die Vorschrift zur Bildung der darauf beruhenden, von PK als in $\{M_n\}$ fehlend behaupteten Menge $\mathfrak{M}$ enthält. Es gibt dann sicher einen Zeitraum ΔT, an dessen Ende PK bejaht bzw. bejahte, MK beschreibe die Menge $\mathfrak{M}$ natürlicher Zahlen eindeutig und widerspruchsfrei. Daraus folgt aber, das Denkobjekt DO = DO(MK,PK,ΔT) aus der Universalanordnung beschreibt eine Menge natürlicher Zahlen. In der vom Autor angeordneten Folge $\{M_n\}$ aller Mengen natürliche Zahlen kommt ihr entsprechend ihrem Platz als Denkobjekt in der Universalanordnung eine Stelle zu. Nach der von PA gegebenen Definition von $\{M_n\}$ gilt daher $\mathfrak{M} \in \{M_n\}$ Im Widerspruch zu $\mathfrak{M} \notin \{M_n\}$. Für den Autor PA (und für alle Leser PL, die diesen Widerspruch als solchen erkennen) ist daher der Versuch von PK, die Unvollständigkeit von $\{M_n\}$ als Folge aller Mengen natürlicher Zahlen zu beweisen, misslungen.

((29)) Jeder Versuch, den Bereich der Universalanordnung zu verlassen gleicht dem Versuch Münchhausens, sich selbst an seinem Zopf aus dem Sumpf zu ziehen. Er führt notwendig zu Widersprüchen der Gestalt: “**Ich betrachte die Menge alles dessen, worüber gesprochen werden kann, und spreche dann von etwas außerhalb dieser Menge“.** Das Sprechen über die Existenz von Denkobjekten außerhalb der Universalanordnung enthält stets Widersprüche. Dies legt folgende Beschreibung der „Welt“ nahe: **Die Welt ist alles, worüber gesprochen werden kann.**

((30)) Setzt man mit Plato (nicht aber mit Sokrates!) die **Existenz objektiver Wahrheiten voraus**, wie dies tatsächlich die meisten Personen tun, dann führt dies zu einer starken **Vereinfachung der Universalordnung.** Eine Mitteilung M ist dann in jedem Zeitpunkt entweder **wahr** oder sie ist **nicht wahr** („nicht wahr“ bedeutet aber nicht, dass M falsch sein muss. M kann z.B. auch sinnlos sein). Dann gilt offenbar $\forall$(M,P,ΔT): DO(M,P,ΔT) = DO(M). Zur Anordnung alles Denkbaren genügt die Anordnung aller Mitteilungen M gemäß ((12)). Jedem Denkobjekt DO(M) wird die endliche Dezimalzahl z = a(M) gemäß ((16)) zugeordnet. Die für die Herstellung der Widersprüche herangezogenen „kritischen“ Denkobjekte aus ((26)), ((27)) und ((28)) sind dann nicht nur für PA und für jeden mit ihm übereinstimmenden PL in sich widersprüchlich, sondern der von PK jeweils versuchte Beweis der Unvollständigkeit der jeweiligen Anordnung ist **objektiv misslungen.**

ZAHLEN, SPRACHE, WELTANSCHAUUNG

AND SPEECH CREATED THOUGHT WHICH IS THE MEASURE OF THE UNIVERSE

(SHELLEY: Prometheus unbound)

DIE SPRACHE IST DIE QUELLE DES MISSVERSTÄNDNISSES

(ST. EXUPERY: Der kleine Prinz)

NICHTS DARF UNS ABHALTEN, DIE WENDUNG DER BEOBACHTUNG AUF UNSER EIGENES WESEN UND DIE VERWENDUNG DES DENKENS ZU SEINER EIGENEN KRITIK GUT ZU HEISSEN

(Sigmund Freud: Die Zukunft einer Illusion)

INHALTSVERZEICHNIS:

VORBEMERKUNG

Die folgenden Überlegungen handeln von einer Menge, die wir als "Universalanordnung" bezeichnen, eine Menge, in der "alles" (im weitest denkbaren Sinn) abzählbar angeordnet wird.

Mit der Universalanordnung soll eine äußere Hülle dargestellt werden, die nicht überschritten werden kann und in der alles Denkbare enthalten ist.

Wenn der Mensch das Maß aller Dinge ist, wenn also "alles" nur in Bezug auf den denkenden Menschen Sinn macht, dann steht stets die Frage im Raum, wie ein denkender Mensch hier und heute Aussagen über Urteile, über ein "Messen" eines denkenden Wesens völlig anderer Art, eines anderen Menschen, überhaupt machen kann. Anders ausgedrückt: Wie kann ein denkendes Wesen absolute Wahrheiten erkennen, die nicht nur für ihn hier und heute sondern überall und zu jeder Zeit für alle möglichen denkenden Wesen richtig sein müssen?

Der Anspruch auf solche absolute Wahrheiten wird hier vermieden, einerseits dadurch, dass der Begriff Wahrheit immer nur relativ zu einem denkenden Subjekt verstanden wird (dies gilt natürlich auch für die vom Autor in seinen Überlegungen als wahr angesehenen Aussagen) und andererseits dadurch, dass auch Unwahrheiten und Widersprüche ihren Platz erhalten.

Nur dadurch erscheint es dem Autor möglich, der Vielfalt der "Welt" zu entsprechen, die ja unzweifelhaft Unwahrheiten enthält und für die bisher eine widerspruchsfreie Beschreibung nicht möglich war. Die Möglichkeit einer widerspruchsfreien Beschreibung der Welt bleibt hier jedenfalls dahingestellt.

"An etwas denken" aber auch "über etwas reden" erfordert in unserer Welt jedenfalls Raum und Zeit. Diese stehen für Aussagen nur in endlichem Maße zur Verfügung. Diese zeitliche und räumliche Begrenzung sehen wir als Schranke für die Möglichkeit unserer Erkenntnis. Im folgenden werden wir sehen, wie sich die räumliche und zeitliche Begrenzung unseres Denkens und unseres Sprechens auf die Objekte unseres Denkens auswirkt. Dabei gehen wir insbesondere auf mathematische Objekte wie etwa Zahlen ein. Wir werden sehen, dass eine auf der im vorerwähnten Sinne zu verstehende Endlichkeit unserer Erkenntnismöglichkeit aufgebaute Mathematik in einem gewissen Spannungsverhältnis zur klassischen Mathematik steht.

MEHRZAHL: Die Sprache legt uns nahe anzunehmen, dass vor Einführung eines Zahlbegriffes bereits eine Unterscheidung zwischen eins und viel getroffen wurde. Wir gehen dabei davon aus, dass die Sprache vor allem dazu dient, Information zu vermitteln. Ursprünglich wohl vor allem Information von einer Person an eine andere Person aber durchaus auch als Speicher für ein und die selbe Person. Die durch sprachliche Mittel gekennzeichneten Objekte waren wohl ursprünglich durch Sinnesorgane wahrnehmbare. Neben Objekten unserer Umwelt wie etwa Baum, Stein usw. können wir Eigenschaften wie leicht oder schwer bzw. kalt oder heiß zu jenen Objekten unseres Denkens zählen, für die verhältnismäßig früh ein sprachlicher Ausdruck eingeführt wurde.

Die Tatsache, dass für die Mehrzahl in den meisten Sprachen ein eigenes Wort verwendet wird (z.B. Baum, Bäume), legt die Annahme nahe, dass die Unterscheidung zwischen "ein" und "mehrere" vor Einführung eines Zahlbegriffes, also vor der Entwicklung sprachlicher Mittel für das Abzählen stattgefunden hat. Ansonsten wäre es näherliegend gewesen, die Unterscheidung zwischen Einzahl und Mehrzahl durch "ein Baum" und "mehrere Baum" vorzunehmen.

Die Unterscheidung zwischen Mengen der Mächtigkeit "eins" einerseits und "mehr als eins" andererseits ließ offenbar die Einführung eines eigenen sprachlichen Ausdrucks für jede der beiden Mächtigkeiten als notwendig oder als zweckmäßig erscheinen. Nicht so bei Mengen höherer Mächtigkeit. Im allgemeinen unterscheidet die Sprache nicht zwischen Mengen der Mächtigkeit zwei und Mengen der Mächtigkeit "mehr als zwei". Mit der Unterteilung der Mengen mit einer Mächtigkeit größer als eins nach der Anzahl der in ihnen enthaltenen Elemente begann offenbar das Zählen. Eine Bezeichnung solcher Mengen mit einem jeweils vom Einzelwort abgeleiteten Wort (z.B. Baumeme für 2 Bäume, Steinene für 2 Steine) wurde offenbar zugunsten eines einheitlichen Zahlbegriffes, der für alle Mengen anwendbar ist, vermieden.

Hier sei der Hinweis gestattet, dass für Begriffe, für die eine "Anzahl" nicht in Frage kommt, wie etwa "Wasser" oder "Sand", eine Mehrzahl ursprünglich wohl nicht vorgesehen war. Das Mehrzahlwort "Gewässer" dürfte erst bei einer übertragenen Bedeutung des Begriffes "Wasser" Anwendung gefunden haben.

Von der Unterscheidung zwischen "eins" und "viel" bis zur Unterscheidung der Mengen nach der Anzahl ihrer Elemente war offenbar eine verhältnismäßig lange Zeit erforderlich. Auch heute noch können wir feststellen, dass wir in unserer Erkenntnis der Welt, in unserer Beschreibung der Welt, zu vereinfachenden Ja-nein-Einteilungen, zu Schwarz-weiß-Beschreibungen neigen. Möglicherweise ist dies ein Grund dafür, dass wir komplexe wirtschaftliche oder allgemeiner politische Fragen nicht angemessen stellen, geschweige denn beantworten können. Vereinfachende "Gut-böse"- bzw."Richtig-falsch"-Schemata werden der komplexen Realität offenbar nicht immer gerecht.

Betrachten wir den Menschen, seine Erfahrung, sein Denken, als Messinstrument für die Welt, so ist die Möglichkeit der Erkenntnis offenbar durch die Möglichkeiten des Messinstrumentes begrenzt. Eine für unsere Überlegungen wichtige Begrenzung liegt darin, dass dem Messinstrument das Aktual-Unendliche unzugänglich und nur das Potentiell Unendliche zugänglich ist. Ein Beispiel: Eine unendliche Dezimalzahl kann nur durch ihre endliche Definition bestimmt werden. Über sie kann nur in endlicher Zeit gesprochen werden. Die dem Menschen "mögliche" Mathematik wird dadurch begrenzt. Wäre es dem Messinstrument Mensch etwa möglich, eine unendliche Dezimalzahl durch die Angabe ihrer einzelnen, unendlich vielen Dezimalziffern vollständig wiederzugeben, dann stellte dies eine Erweiterung der möglichen Mathematik dar. Die Cantorsche Diagonalzahl lässt sich aber jeweils in endlicher Form darstellen. Sie gehört daher dem Bereich der auf das potentiell Unendliche beschränkten Mathematik an. Darauf beruht das Spannungsverhältnis zur klassischen Mathematik, auf das wir am Schluss der Vorbemerkung hingewiesen haben.

<u>DIE ANZAHL:</u> Wie schon das Wort sagt, hängt dieser Begriff mit Zählen zusammen. Dieser Vorgang dient dem Vergleich der Mächtigkeiten von Mengen verschiedener Elemente lediglich nach der Anzahl dieser Elemente. Es wäre durchaus denkbar, dass bei der Bezeichnung der Mächtigkeiten ursprünglich ein Vergleich mit der Menge von Fingern der zählenden Person vorgenommen wurde. In vielen Sprachen existieren originäre Worte für die Zahlen 1 bis 10, während darüber hinaus mehr oder weniger direkt auf die bisherigen Worte zurückgegriffen wird. Offensichtlich ist dies bei den Worten dreizehn, vierzehn usw. Aber auch die Worte elf (eilf) ujnd zwölf zeigen eine sprachliche Nähe zu den Worten eins und zwei (ähnlich in anderen Sprachen).

Um größere Zahlen zu benennen bediente man sich dann offenbar der Technik, in der Reihe der Zahlen gewisse Fixpunkte zu benennen wie z.B. 10, 100, 1000 usf., aber auch etwa 10, 50, 100, 500 usw. wie in den römischen Ziffern, um von diesen Fixpunkten ausgehend die Bezeichnung vorzunehmen. Also etwa 3227. Die Sprechweise "siebenundzwanzig" statt "zwanzigsieben" lässt auf eine gewisse Unsicherheit darüber schließen, ob Dezimalzahlen nun von links nach rechts oder von rechts nach links zu lesen sind.

NATÜRLICHE ZAHLEN: Die Menge der natürlichen Zahlen erschloss sich erst, als man begann ihr "Konstruktionsprinzip", nämlich zu einer jeweils bekannten Zahl 1 zu addieren, zu erfassen. Man erkannte, dass es keine Beschränkung der Zahlenmenge gab, keine größte Zahl. Damit fand das Unendliche in die Zahlenmenge Eingang. Aber dieses Unendliche wurde eigentlich durch eine fehlende Eigenschaft gekennzeichnet, nämlich dadurch, dass es keine größte Zahl geben kann. "Potentiell unendlich" erwies sich als brauchbare Bezeichnung.

Es erscheint aber wichtig, darauf hinzuweisen, dass uns beliebig große Zahlen nur scheinbar jederzeit zur Verfügung stehen. Es darf nicht übersehen werden, dass uns für große Zahlen zunächst nur das Konstruktionsprinzip (Addition von 1) zur Verfügung steht. Um große Zahlen verbal oder schriftlich darzustellen ist es daher nötig, ausreichend Zeit bzw. Raum (Schreibpapierfläche) zur Verfügung zu haben.

Um lediglich durch die Addition von 1 zu sehr großen Zahlen zu gelangen, braucht man sehr lange Zeit bzw. sehr viel Schreibfläche. Man hat aber andere Konstruktionsprinzipien eingeführt, die es gestatten, rascher zu großen Zahlen zu kommen. So etwa die Vorgänge des Multiplizierens und des Potenzierens.

Damit werden neben der Addition neue Konstruktionsprinzipien eingeführt. Aber auch durch Multiplizieren bzw. durch Potenzieren bleiben wir im Bereich der natürlichen Zahlen. Um zu besonders großen Zahlen zu gelangen wurden eigene Techniken entwickelt, doch wollen wir diesen Weg hier nicht weiter verfolgen.

Die bisher genannten Konstruktionsprinzipien (addieren, multiplizieren, potenzieren) bilden zunächst aus zwei vorgegebenen natürlichen Zahlen eine dritte. Man kann nun, etwa bei der Addition, den Vorgang umkehren und fragen: Welche natürliche Zahl muss zu einer vorgegebenen natürlichen Zahl addiert werden, um eine zweite vorgegebene natürliche Zahl zu erhalten. Damit gelangt man zur Umkehrfunktion der Addition, zur Subtraktion. Dabei stellt sich heraus, dass die Aufgabe der Subtraktion im Bereich der natürlichen Zahlen nicht immer lösbar ist. Fragt man etwa, welche natürliche Zahl zu 3 hinzugefügt werden muss um 2 zu erhalten, dann erweist sich diese Aufgabe als unlösbar.

Diese Schwierigkeit wird überwunden, indem man neue "Zahlen" einführt. Man definiert sogenannte negative Zahlen. Der begriffliche Hintergrund der negativen Zahlen ist völlig verschieden von dem der natürlichen Zahlen. Die natürlichen Zahlen werden durch den Vorgang des Abzählens gewonnen, also etwa durch die Zuordnung der einzelnen Elemente einer Menge zu den Fingern der zählenden Person. Die negativen Zahlen beruhen ursprünglich wohl auf der Umkehrung eines Konstruktionsprinzips, nämlich des Konstruktionsprinzips der Addition.

Wir wollen diese Überlegungen nicht mehr im Detail weiterentwickeln. Es soll aber darauf hingewiesen werden, dass die sich bei Einführung der negativen Zahlen angekündigte Erweiterung des Zahlenbegriffs mit Hilfe beliebiger anderer Konstruktionsprinzipien fortgesetzt werden kann. Dabei spielt auch die Reihenfolge der Verwendung neuer Konstruktionsprinzipien eine Rolle. Wird etwa die Umkehrfunktion des Potenzierens vor der Umkehrfunktion des Addierens, also vor Erweiterung des Zahlbegriffes auf negative Zahlen verwendet, dann bleibt man im Bereich der reellen Zahlen, also jener Zahlen, die sich auf der sogenannten Zahlengeraden anordnen lassen. Führt man hingegen zuerst die negativen Zahlen ein und wendet dann erst die Umkehrfunktion des Potenzierens an, dann gelangt man zu den komplexen Zahlen, also über den Bereich der reellen Zahlen hinaus.

Will man alle Zahlen "erfassen", dann ist es offenbar notwendig, alle ins Auge gefassten Konstruktionsprinzipien in beliebiger Reihenfolge und beliebig oft anzuwenden um sicher zu sein, zu allen "möglichen" Zahlen Zugang zu erhalten.

<u>WEITERE KONSTRUKTIONSPRINZIPIEN:</u> Das zur Erschließung der Menge der natürlichen Zahlen verwendete Konstruktionsprinzip der Addition von 1, also der einfache Vorgang des Zählens, bedeutet aber auch eine Definition immer neuer Zahlbegriffe. Das soll so verstanden werden: Die beim Vorgang des Abzählens verwendeten Begriffe 1, 2, usw. sind bei ihrer erstmaligen Verwendung Definitionen. Die natürlichen Zahlen werden also durch den Vorgang des Zählens erst definiert. Der Vorgang des Zählens ist uns heute so selbstverständlich geworden, dass uns nicht bewusst wird, wie wir durch ihn erst Zahlen definieren. Wir betrachten daher die natürlichen Zahlen als etwas, das unabhängig von denkenden Wesen, wie es die Menschen sind, existiert. Wir sind daher nicht nur der Überzeugung, dass es sinnvoll ist, etwa von der "Menge aller reellen Zahlen" zu sprechen, sondern dass wir auch zu jeder einzelnen reellen Zahl wenigstens prinzipiell stets Zugang haben.

Der Aufwand dessen es bedarf um "besonders große Zahlen" zu erzeugen sollte uns aber nachdenklich stimmen. Da das Benennen von Zahlen Raum und Zeit erfordert, muss angenommen werden, dass die Größe jener Zahlen, zu denen ein Mensch im Laufe seines Lebens Zugang haben kann, begrenzt ist.

Konstruktionsprinzipien die in der Verknüpfung von mehreren natürlichen Zahlen bestehen erfordern unter Umständen entsprechend größeren Aufwand an Zeit und Raum. Dies gilt etwa für Zahlen aus der Menge der algebraischen Zahlen.

Noch aufwändiger sind Konstruktionsprinzipien wie das "Diagonalverfahren". Dies soll am Beispiel der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 erläutert werden.

Es werden unendlich viele reelle Zahlen zwischen 0 und 1 in Form von Dezimalzahlen untereinander geschrieben. Die Dezimalzahl in der n-ten Zeile laute $a_n = 0,a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots$.. Dabei steht jede Dezimalstelle a_{nm} für eine der Ziffern 0 bis 9. Nun wird eine sogenannte Diagonalzahl b wie folgt gebildet. $b = 0,b_1b_2 \ldots b_n \ldots$.. wobei $b_n = a_{nn} + 1$ wenn a_{nn} kleiner als 9 ist und $b_n = 0$ wenn $a_{nn} = 9$.

Offenbar ist b von allen ursprünglich angeschriebenen Dezimalzahlen a_n verschieden. Auch bei diesem Konstruktionsprinzip werden neue Zahlen durch die Anwendung von Verknüpfungsregeln auf bereits bekannte Zahlen gewonnen. Der Begriff "Konstruktionsprinzip muss im weitesten Sinn verstanden werden. So setzt etwa die Anwendung des Diagonalverfahrens eine genaue Beschreibung der Anordnung der zugrunde gelegten Zahlen voraus. Aber auch andere Beschreibungen sind möglich, für die der Ausdruck "Konstruktions"prinzip eher unangemessen scheint. Fragt man etwa nach der Zahl dr Geburten auf der Erde seit dem Jahre 100.000 vor Christi Geburt bis heute, dann weiß man zwar, dass es sich um eine natürliche Zahl handeln muss, es wird aber kaum jemals möglich sein, sie zu bestimmen. Wir wollen beliebige Zahlbeschreibungen auch als Konstruktionsprinzip bezeichnen.

Man kann neue Zahlen aber auch auf andere Weise einführen. So kann man etwa den Zahlen Farben zuordnen. Neben den bisher verwendeten Zahlen, die man z.B. als schwarze Zahlen bezeichnet, führt man rote Zahlen ein. Die roten Zahlen sollen die Eigenschaft haben, dass ein rotes a stets größer als ein schwarzes a ist, aber stets kleiner als jede schwarze Zahl größer als a. Bei dem Versuch, diese neuen Zahlen auf der Zahlengeraden aufzufinden kommt man in fatale Nähe des Begriffes der "unendlich benachbarten" Punkte. Die Differenz zwischen einem roten und einem schwarzen a ist offenbar eine "unendlich kleine Zahl". Auch für die Naturwissenschaften bringen die roten Zahlen gegenüber den schwarzen kaum einen Gewinn. Sie lassen sich aber widerspruchsfrei in ein System von Zahlen einfügen.

Will man nun von der "Menge aller Zahlen" reden, muss wohl vorher Übereinstimmung über den dieser Menge zugrunde liegenden Zahlbegriff gefunden werden. Wie soll das aber bei den unendlich vielen möglichen Konstruktionsprinzipien überhaupt möglich sein?

Hierzu noch eine weitere Überlegung: Eine Zahl sei dadurch definiert, dass sie vermehrt um 2 genau so groß ist wie vermehrt um 4. Offenbar wird diese Forderung nur durch die "Zahl Unendlich" erfüllt. Noch problematischer erscheint etwa folgende Definition: Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl größer als 5 aber kleiner als 3. Diese Zahl enthält bereits in ihrer Definition einen Widerspruch.

Die Verknüpfung solcher Zahlen mit anderen Zahlen nach den üblichen Rechenregeln wird immer wieder zu Widersprüchen führen. Trotzdem können solche Zahlen hier definiert werden, kann über sie gesprochen werden. Wir lassen im weiteren zu, dass zur "Menge aller Zahlen" auch Zahlen gerechnet werden, deren Definition in sich einen Widerspruch birgt.

Wir wollen nun versuchen über die "Menge aller Zahlen" Aussagen zu treffen, die allgemeine Gültigkeit haben. Dazu reichen aber Urteile über Zahlen hic et nunc nicht aus. Es wäre ja möglich, dass an irgendeinem Ort der Welt zu irgendeinem Zeitpunkt ein denkendes Wesen dem Zahlbegriff einen engeren oder weiteren Inhalt gibt, als wir dies heute tun. Der Zugang zu solch allfälligen Erweiterungen des Zahlbegriffes muss uns heute und hier verschlossen bleiben. Trotzdem erscheint es uns notwendig, die Möglichkeit völlig neuer Zahlbegriffe bei unseren Überlegungen über die "Menge aller Zahlen" zu berücksichtigen. Im Gegensatz zu vielen Autoren werden wir dabei einen Begriff "Menge aller Zahlen" definieren und zwar, wie wir glauben, hinreichend weit.

<u>DIE MENGE ALLER ZAHLEN:</u> Was können wir nun als "Menge aller Zahlen" ansehen? Wer diesen Begriff unkritisch übernimmt setzt sich dem Vorwurf aus "nicht zu wissen, worüber er spricht". Anders ausgedrückt: Um die in diesem Begriff enthaltene Information weiterzugeben, erscheint es dringend geboten, ihn näher zu präzisieren. Dies geschieht üblicherweise nicht!

Ohne diesen Gedanken sofort weiter zu verfolgen, wollen wir uns zunächst der Frage zuwenden, ob es möglich ist, eine gewisse Ordnung in die "Menge alles Zahlen" zu bringen. Um die Frage zu vereinfachen, beschränken wir uns zunächst auf die reellen Zahlen. Hier bietet sich als Ordnung etwa die Anordnung nach ihrer Größe an (Diesem Ordnungsprinzip genügt auch die "unendlich kleine Zahl")

Was den Zugriff zu den reellen Zahlen betrifft, ist mit dieser Anordnung allerdings wenig gewonnen..Bei einer Anordnung der natürlichen Zahlen nach ihrer Größe ist durch das Konstruktionsprinzip der Addition von 1 "der Reihe nach" ein Zugriff auf jede einzelne der natürlichen Zahlen möglich. Ein analoges Zugriffsystem für die reellen Zahlen ist nicht bekannt. Verlangt man den schrittweisen Zugriff zu allen reellen Zahlen, dann ist offenbar die Anordnung der Größe nach keine Hilfe.

Das gleiche gikt übrigens schon für die rationalen Zahlen. Auch hier ist eine abzählbare Anordnung der Größe nach nicht möglich. Es wird ein anderes Ordnungsprinzip angewendet, nämlich zunächst die Anordnung nach der Summe der natürlichen Zahlen im Zähler und im Nenner und innerhalb dieser Anordnung die Ordnung nach der Größe des Zählers. Ebenso lassen sich die Wurzeln algebraischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten unschwer anordnen und daher ebenfalls die Wurzeln algebraischer Gleichungen mir rationalen Koeffizienten. Aber damit sind immer erst Zahlen aus wenigen Konstruktionsprinzipien angeordnet. Wir stellen uns daher die Frage, ob es möglich ist, eine Ordnung in die "menge aller Zahlen" zu bringen, die der Ordnung der natürlichen Zahlen entspricht. Anders ausgedrückt: Wir fragen nach einer abzählbaren Anordnung aller "Zahlen".

Wir haben gesehen, dass bei der abzählbaren Anordnung der natürlichen Zahlen sowie der rationalen Zahlen und der algebraischen Zahlen das jeweilige Konstruktionsprinzip eijne große Rolle gespielt hat. Bedenken wir, dass bei der Einführung neuer Zahlen auch die Reihenfolge der Anwendung neuer Konstruktionsprinzipien eine Rolle spielt, dann wird uns nahe gelegt, dass bei der "Anordnung aller Zahlen" eine "Anordnung aller Konstruktionsprinzipien" hilfreich sein könnte. Wir erinnern daran, dass der Ausgangspunkt unserer Überlegungen die natürlichen Zahlen waren, mit deren Hilfe wir durch die Anwendung von Konstruktionsprinzipien neue Zahlen einführen konnten. Aber auch neue Begriffe, wie z.B. die "Zahl Unendlich" oder die "unendlich kleine Zahl", können bei der Einführung neuer Zahlen Verwendung finden.

Vordringlich erscheint es also , Ordnung in das System der Konstruktionsprinzipien zu bringen. Die hier in Frage kommenden Konstruktionsprinzipien haben eines gemeinsam: Sie lassen sich verbal darstellen (sprachlich formulieren) und sie lassen sich schriftlich, besser gesagt grafisch, darstellen. Das gleiche gilt übrigens auch für die natürlichen Zahlen, die wir ja zumindest bis zu einer gewissen Größe benennen können bzw. die wir grafisch darstellen können. Auch für die erwähnte "Zahl Unendlich" bzw. die "unendlich kleine Zahl" gibt es eine verbale Beschreibung bzw. eine grafische Darstellung.

Wir sehen also, sowohl die netürlichen Zahlen als auch willkürliche Erweiterungen wie die "Zahl Unendlich" oder die "unendlich kleine Zahl" lassen sich verbal bzw. grafisch darstellen. Das gleiche gilt für alle (möglichen) Konstruktionsprizipien, selbst wenn diese, wie weiter oben, einen Widerspruch in sich besitzen. Es sind daher auch alle Zahlen, die in Anwendung beliebiger Konstruktionsprinzipien in beliebiger Reihenfolge auf beliebige vorher bekannte Zahlen beschrieben werden können, grafisch darstellbar.

Wir wollen also den Weg zur Anordnung "aller Zahlen" über eine Anordnung aller Konstruktionsprinzipien bzw. aller verbalen Beschreibungen und grafischen Darstellungen finden. Dazu stellen wir noch einige Überlegungen an.

<u>DIE BILDSCHIRMMITTEILUNG:</u> Unter einer Bildschirmmitteilung wollen wir einen quadratischen Raster aus n^2 Elementarquadraten verstehen. Ein Elementarquadrat habe die Seitenlänge 1/100 mm und sei entweder weiß oder schwarz. Die Bildschirmmitteilungen können abzählbar angeordnet werden und alle möglichen grafischen Darstellungen lassen sich in Form einer Bildschirmmitteilung darstellen.

Eine abzählbare Anordnung ist leicht gefunden. Man ordne etwa jedem weißen Elementarquadrat die Zahl 0 und jedem schwarzen Elementarquadrat die Zahl 1 zu. Jeder Bildschirmmitteilung wird nun eine $(n^2 + 1)$-stellige Zahl zugeordnet deren erste Stelle 1 und deren $(m + 1)$-te Stelle 0 oder 1 ist, je nachdem, ob das m-te Elementarquadrat (zeilenweise gelesen) weiß oder schwarz ist. Die Bildschirmmitteilungen werden nun nach der Größe der ihnen so zugeordneten Zahlen angeordnet.

Die Bildschirmmitteilungen bieten für den Betrachter ein gleiches Bild wie etwa ein beschriebenes Blatt Papier oder ein Fernsehbildschirm. Es ist offensichtlich, dass alle möglichen grafischen Darstellungen - etwa alles, was mit Bleistift auf Papier geschrieben und gezeichnet werden kann - in Form solcher Bildschirmmitteilungen darstellbar sind. Die Tatsache, dass es sich bei diesen Bildschirmmitteilungen um schwarz-weiß Bilder handelt, schränkt die Allgemeinheit nicht entscheidend ein. Man überlegt sich leicht, dass auch farbige Bildschirmmitteilungen abzählbar angeordnet werden können. Dazu reicht es ja aus, jedem Elementarquadrat eine z.B. fünfstellige Zahl zuzuordnen, die der Farbe dieses Elementarquadrates entspricht.

Die physikalische Realisierbarkeit derartiger grafischer Darstellungen spielt, wie wir sehen werden, bei den weiteren Schlussfolgerungen keine Rolle.

Die Menge der so definierten Bildschirmmitteilungen beinhaltet nicht nur eine grafische Darstellung aller natürlicher Zahlen (und zwar beliebiger Größe), sondern sie beinhaltet auch alle möglichen Konstruktionsprinzipien (in beliebiger Reihenfolge) bzw. alle möglichen verbalen Beschreibungen und grafischen Darstellungen. Es müsste also möglich sein, jeder denkbaren Zahl eine Bildschirmmitteilung zuzuordnen, welche diese Zahl und nur diese Zahl eindeutig beschreibt. Gelänge dies, dann wäre aus der abzählbaren Anordnung der Bildschirmmitteilungen eine abzählbare Anordnung aller Zahlen gewonnen.

Bevor wir diesen Gedankengang weiter fortsetzen, noch eine Bemerkung zu den Bildschirmmitteilungen: Verdoppeln wir einfach das durch eine Bildschirmmitteilung dargestellte Bild, dann erhalten wir ein quadratisches Bild der Seitenlänge 2n statt n. Sofern nun die absolute Größe der grafischen Darstellung keine Rolle spielt, wie dies etwa in der Regel für alle schriftlichen Arbeiten und Aufsätze gilt, ist die Bedeutung der Bildschirmmitteilung doppelter Größe genau die selbe wie die Bedeutung der Bildschirmmitteilung einfacher Größe. Insbesondere würde etwa durch beide Bildschirmmitteilungen die selbe Zahl beschrieben werden. Im Regelfall - wenn also die absolute Größe der grafischen Darstellung keine Rolle spielt - wird jede Zahl in der Anordnung aller Bildschirmmitteilungen unendlich oft eine Bildschirmmitteilung finden, die sie eindeutig beschreibt. Für unsere Überlegungen entscheidend erscheint uns aber, dass zu jeder Zahl *mindestens* eine Bildschirmmitteilung gefunden werden kann, die dieser Zahl eindeutig zugeordnet ist. Mit anderen Worten: In unserer Anordnung der Bildschirmmitteilungen ist für jede grafisch darstellbare Zahl mindestens ein Platz reserviert, der nur dieser Zahl zukommt.

<u>DAS RAUM-ZEIT-ELEMENT:</u> Wir haben von allen grafisch darstellbaren Zahlen gesprochen und wir haben diesen Zahlen Bildschirmmitteilungen zugeordnet. Dabei haben wir offenbar davon abgesehen, dass Bildschirmmitteilungen grundsätzlich Mitteilungen an denkende Subjekte sind. Sehen wir von der Einschränkung der durch Bildschirmmitteilungen darzustellenden Dinge auf Zahlen ab, dann können wir die Zuordnung von Bildschirmmitteilungen auf eine Zuordnung zu allen möglichen Denkobjekten eines denkenden Subjektes erweitern.

Der Sinn einer Mitteilung, etwa welche Zahl durch eine Mitteilung beschrieben wird, wurde bisher als eindeutig betrachtet. Dies erscheint aber nicht zulässig. Zum einen hängt der Sinn einer schriftlichen Mitteilung sicher von der verwendeten Sprache ab. Je nachdem, welche Sprache eine die Bildschirmmitteilung betrachtende Person spricht, kann diese Mitteilung verschiedene Bedeutung für den Betrachter haben. Aber auch der Wissensstand des Betrachters kann eine Rolle spielen. Der Sinn einer schriftlichen Mitteilung wird sichr vom sogenannten Vorwissen des Betrachters abhängen. Ein und die selbe Bildschirmmitteilung kann daher nicht nur für verschiedene Personen unterschiedliche Bedeutung haben, sondern auch für ein und die selbe Person, wenn diese die Bildschirmmitteilung in verschiedenen Zeitpunkten zu Gesicht bekommt.

Wir erinnern daran, dass die Sprache ursprünglich zur Informationsübermittlung von einer Person zu einer anderen diente, vielleicht auch von einer Person zur Erinnerung für sich selbst. Jedenfalls erscheint es uns unzulässig, vom Sinn einer Mitteilung losgelöst von einem Betrachter bzw. Leser dieser Mitteilung zu sprechen. Dazu noch folgende Überlegung: Definitionen, Erklärungen setzen ebenso wie Urteile a priori im Kantschen Sinn Übereinstimmung hinsichtlich der verwendeten Worte, der verwendeten Sprache voraus. Diese aber sind für jedes Denksubjekt irgendeinmal Gegenstand der Erfahrung gewesen, deren Sinn, deren Bedeutung "erlernt" werden musste. Worte und Sprache sind also nur für mögliche Denksubjekte sinnvoll. Die weitgehende Übereinstimmung über Worte bzw. Sprache, eine Folge der gleichartigen Lernvorgänge für verschiedene Denksubjekte hat dazu geführt, dass wir uns angewöhnt haben, vom Sinn von Worten und Sprache unabhängig von konkreten Denksubjekten zu reden. Übereinstimmende Meinung über den Sinn wird unausgesprochen vorausgesetzt.

Wir haben eine Zuordnung zwischen den Elementen der Menge aller Bildschirmmitteilungen und der Menge aller grafisch darstellbaren Zahlen betrachtet. Etwas allgemeiner erhalten wir eine Zuordnung zwischen der Menge aller Bildschirmmitteilungen und der Menge aller Denkobjekte. Eine solche Zuordnung von Bildschirmmitteilungen zu Denkobjekten darf aber nicht ohne Bezugnahme auf ein diese Zuordnung vornehmendes Denksubjekt vorgenommen werden. Wir müssen daher neben allen möglichen Mildschirmmitteilungen und allen möglichen Denkobjekten auch alle möglichen Denksubjekte in die Überlegungen einbeziehen.

Ein Ziel unserer Überlegungen war es, Ordnung in die Menge aller Zahlen zu bringen. Dies sollte mit Hilfe der Anordnung der Bildschirmmitteilungen gelingen. Auf

Grund der weiteren Überlegungen müssen wir die Aufgabe erweitern und Ordnung in die Menge aller Denkobjekte bringen.

Um nun die erforderliche Beziehung zu den Denkobjekten herzustellen, erscheint es notwendig auch alle möglichen Denksubjekte in eine Anordnung zu bringen. Dies ist aber unschwer möglich. Zunächst überlegen wir , dass jedes Denksubjekt für den Vorgang des Denkens eine bestimmte Zeit benötigt. Außerdem erfordert der Vorgang des Denkens einen bestimmten Raum, den der Körper des Denksubjektes einnimmt. Wählen wir nun ein Raumelement aus dem Körper des Denksubjektes und ein Zeitelement aus dem Zeitraum, in dem das Denken stattfindet, dann wird durch eine Kombination des Raumelementes mit dem Zeitelement der Denkvorgang eindeutig erfasst.

Diese Raumelemente und diese Zeitelemente fassen wir nun in "Raum-Zeit-Elemente" zusammen. Diese lassen sich leicht abzählbar anordnen. Man wählt etwa ein räumliches dreidimensionales Koordinatensystem in unserem Weltall und teilt dieses Weltall in Würfel von der Seitenlänge 1/100 mm. Diese Raumelemente sind offenbar abzählbar anzuordnen. Weiters teilen wir die Zeitachse in Zeitabschnitte von der Länge 1/100 sek. und beginnen etwa mit dem Urknall. Diese Zeitelemente können nach ihrer Lage auf der Zeitachse abzählbar angeordnet werden. Eine Kombination der so angeordneten Raumelemente mit den so angeordneten Zeitelementen führt nun wie gewünscht zu einer abzählbaren Anordnung aller Raum-Zeit-Elemente entsprechend sie eindeutig kennzeichnenden Ordnungszahlen.

<u>DIE UNIVERSALANORDNUNG:</u> Was bedeutet nun eine Kombination einer Bildschirmmitteilung mit einem Raum-Zeit-Element? Diese Kombination soll jenen Sinn symbolisieren, den die in Rede stehende Bildschirmmitteilung für ein durch das Raumelement gekennzeichnete Denksubjekt in dem durch das Zeitelement bestimmten Zeitintervall bedeutet. Dabei handelt es sich natürlich nicht um aktuelle sondern stets um potentielle Denkvorgänge. Es geht also darum, welche Aussage ein bestimmtes Denksubjekt in einem bestimmten Zeitpunkt über eine bestimmte Bildschirmmitteilung macht oder machen würde.

Kehren wir zu unseren Zahlen zurück. Das Denksubjekt hat oder hatte also zu entscheiden, ob in einem bestimmten Zeitpunkt durch eine Bildschirmmitteilung eine Zahl eindeutig beschrieben wird. Allgemeiner lautet die Frage, ob für ein bestimmtes

Denksubjekt in einem bestimmten Zeitpunkt durch eine bestimmte Bildschirmmitteilung ein bestimmtes Denkobjekt eindeutig beschrieben wird.

Wir weisen darauf hin, dass in unseren Überlegungen die Frage ob die Aussage des Denksubjektes richtig oder falsch ist, keine Rolle spielt. Es sind also durchaus auch widersprüchliche Aussagen zulässig. "Verantwortlich" für die Aussagen ist lediglich das jeweilige Denksubjekt. Darüber hinaus kann grundsätzlich eine Klasse von in sich widersprüchlichen Denkobjekten gebildet werden.

Wir wollen nun eine Zuordnung der Kombination der Menge aller Bildschirmmitteilungen und der Menge aller Raum-Zeit-Elemente zur Menge aller Bildschirmmitteilungen allein vornehmen. Dazu betrachten wir nur Bildschirmmitteilungen mit geradzahliger Seitenlänge n, deren obere Hälfte eine Bildschirmmitteilung im bisherigen Sinn enthält, also eine Bildschirmmitteilung, deren Sinn für ein Denksubjekt zur Diskussion steht und deren untere Hälfte jene Ordnungszahl enthält, die das Raum-Zeit-Element, also den möglichen Denkvorgang, eindeutig beschreibt.

Die abzählbare Anordnung der Menge dieser Bildschirmmiteilungen bezeichnen wir als UNIVERSALANORDNUNG.

Wir ordnen nun einem Element dieser Menge genau dann ein Denkobjekt zu, wenn ein dem Raum-Zeit-Element entsprechendes Denksubjekt im entsprechenden Zeitraum bereit ist - oder für den Fall, dass er die Bildschirmmitteilung tatsächlich liest, bereit wäre - festzustellen, dass durch die betreffende Bildschirmmitteilung dieses Denkobjekt eindeutig beschrieben wird.

Der Ausdruck "Universalanordnung" lässt sich damit begründen, dass durch sie wirklich alle möglichen Denkobjekte abzählbar angeordnet werden können. Tatsächlich ist es ja unmöglich, an Denkobjekte außerhalb dieser Anordnung widerspruchsfrei zu denken. Dass es sich hierbei stets um durch Bildschirmmitteilungen beschriebene Denkobjekte handelt, stellt keinen Einschränkung dar. Stellt irgendeine Person etwa fest, sie denke in einem bestimmten Zeitpunkt T an ein Objekt, das für sie durch keine Bildschirmmitteilung beschreibbar ist, so genügt es, zunächst folgende Bildschirmmitteilung zu bilden: "Das Objekt, an welches ich im Zeitpunkt T gedacht habe". Diese Bildschirmmitteilung, ergänzt durch die Nummer eines Raum-Zeit-Elementes, welches die betreffende Person in einem Zeitpunkt T + t beschreibt, ist nun offenbar dem in Rede stehenden Denkobjekt zugeordnet. Im Zeitpunkt T + t muss ja die betreffende Person zugeben, dass sie im Zeitpunkt T an das betreffende Denkobjekt gedacht hat, wie dies in der Bildschirmmitteilung zum Ausdruck kommt, oder sie widerspricht sich selbst.

Dass jedem einzelnen Denksubjekt der Zugang grundsätzlich nicht zu allen Denkobjekte möglich ist, kann leicht eingesehen werden. Zum einen bringt es die endliche Lebensdauer von Denksubjekten mit sich, dass Bildschirmmitteilungen nur bis zu einer gewissen Größe vollständig erfasst werden können. Potentielle Denkobjekte, zu deren Beschreibung zu große Bildschirmmitteilungen nötig wären, entziehen sich dem tatsächlichen Zugriff. Zum anderen ist es einem Denksubjekt heute und hier nicht möglich festzustellen, wie andere Denksubjekte zu irgendeiner Zeit bestimmte Bildschirmmitteilungen beurteilen bzw. beurteilen würden. Die Leistung der Universalanordnung besteht also darin, dass sie für alles - worüber gesprochen werden kann, woran gedacht werden kann - mindestens einen Platz reserviert.

Die Universalanordnung reserviert also zwar für alle möglichen Denkobjekte aller möglichen Denksubjekte Plätze (im Regelfall sogar unendlich viele für jedes einzelne Denkobjekt), sie kann aber zu keinem Zeitpunkt von irgend einem Denksubjekt zur Gänze "gelesen" werden. Sie gleicht einer Anordnung von unendlich vielen Schubladen, von denen im Laufe eines Lebens eines Denksubjektes nur endlich viele geöffnet werden können.

NOCHMALS DIE MENGE ALLER ZAHLEN: Denkobjekte können zu Mengen zusammengefasst werden. Damit jemand, der von einer Menge spricht, weiß wovon er spricht, müssen natürlich Kriterien angegeben werden, wonach die Zugehörigkeit zu dieser Menge zu beurteilen ist. Es ist aber nicht sehr sinnvoll zu fordern, dass ein Zugang zu den einzelnen Elementen auch tatsächlich möglich ist. Wir erinnern daran, dass Denkobjekte existieren können, deren zugeordnete Bildschirmmitteilungen sich ihrer Größe wegen der tatsächlichen Beurteilung durch ein Denkobjekt entziehen.

Wir definieren nun den Begriff "Menge aller Zahlen". Die Menge bestehe aus allen Denkobjekten, die irgendein Denksubjekt in irgendeinem Zeitpunkt durch irgendeine Bildschirmmitteilung als Zahl eindeutig beschrieben bezeichnet bzw. zu bezeichnen bereit wäre. Manchen Denksubjekten wird diese Definition als zu weit erscheinen doch uns kommt es nur darauf an, dass sie nicht zu eng ist.

In dieser Definition haben wir die beliebigen Denksubjekte und die beliebigen Zeitpunkte aus den weiter oben angeführten Gründen einbezogen. Sie führt natürlich dazu, dass alle etwa irrtümlich oder absichtlich fehlerhaft als Zahl bezeichneten Denkobjekte in die hier definierte Menge einbezogen werden. Ist ein Leser der Auffassung, dass durch von ihm gelesene Bildschirmmitteilungen allein alle möglichen Denkobjekte, also auch alle möglichen Denkobjekte anderer Denksubjekte, eindeutig beschrieben werden können, dann könnte er auf die Einführung der Raum-Zeit-Elemente verzichten. Da für uns aber die Frage der Anordenbarkeit der Denkobjekte im Vordergrund steht, stört die Einbeziehung der Raum-Zeit-Elemente nicht.

Es sei nochmals darauf verwiesen, dass infolge der Unbeschränktheit der zugrundegelegten Bildschirmmitteilungen eine Entscheidung darüber, ob durch eine bestimmte Bildschirmmitteilung eine Zahl eindeutig beschrieben wird, nicht immer getroffen werden kann, auch ohne dass das Urteil anderer Denksubjekte dabei eine Rolle spielt.

Die von uns hier definierte Menge aller Zahlen ist offenbar eine Untermenge der Menge jener Denkobjekte, die Gegenstand der Universalanordnung sind. Durch die abzählbare Universalanordnung werden die von ihr erfassten Denkobjekte abzählbar angeordnet. Daraus folgt, dass sich auch die von uns definierte Menge aller Zahlen abzählbar anordnen lässt.

Es liegt nahe, dieses Ergebnis einem der bekannte Beweise der Überabzählbarkeit des Kontinuums gegenüberzustellen.

Wir gehen dabei von der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 un 1 und dem Beweis der Überabzählbarkeit nach Cantor aus. Die Cantorsche Diagonalzahl heben wir im Abschnitt "Weitere Konstruktionsprinzipien" weiter oben beschrieben. Wir behaupten nun, auch für jede Cantorsche Diagonalzahl ist in unserer Universalanordnung ein Platz reserviert. Wir können diesen Beweis allerdings nur dann führen, wenn es irgendeine Person gibt (gegeben hat, geben wird), die behauptet, mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 beweisen zu können (z.B. Cantor selbst). Dazu beschreiben wir durch eine Bildschirmmitteilung zunächst die Universalanordnung und anschließend eine mit Hilfe dieser Anordnung konstruierte Cantorsche Diagonalzahl. Diese Bildschirmmitteilung legen wir der Person, welche die Überabzählbarkeit behauptet, vor. Die Person muss die Frage, ob durch diese Cantorsche Diagonalzahl eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 definiert ist, bejahen. Damit erhält diese Zahl aber einen Platz in der Anordnung aller Zahlen, wie wir sie oben definiert haben.

Da nach Meinung des Kritikers durch die unter Zugrundelegung der Universalanordnung gebildete Diagonalzahl tatsächlich eine Zahl zwischen 0 und 1 definiert ist,

ist für sie auch ein Platz in der Universalanordnung reserviert. Sie stehe dort an n-ter Stelle und ihre n-te Dezimalstelle müsste ihrer Definition nach ungleich ihrer n-ten Dezimalstelle sein. Die Diagonalzahl des Kritikers gehört zur Klasse der in sich widersprüchlichen Denkobjekte (Seite 15), aber sie hat ihren sicheren Platz (ihre sicheren Plätze) in der Universalanordnung.

Grundsätzlich unterscheidet sich hier die Cantorsche Diagonalzahl nicht von anderen Zahlen, in deren Definition ein Widerspruch steckt, wie z.B. die kleinste natürliche Zahl, größer als 5, aber kleiner als 3 (vgl. S. 9).

In gleicher Weise verfährt man bei anderen Überabzählbarkeitsbeweisen, die in der Konstruktion eines angeblich in der bisher abzählbar angeordneten Menge von Elementen nicht enthaltenen Elementes bestehen. Immer zeigt sich, dass in der Anordnung genügend Platz - genügend Schubladen - vorhanden sind. Auch für jenes Element, für welches in der abzählbaren Anordnung angeblich kein Platz vorhanden ist, gibt es eine Definition und ein Denksubjekt (den Kritiker), das irgendeinmal behauptet, durch diese schriftlich darstellbare Definition werde ein Element der Menge eindeutig beschrieben. Damit gibt es einen Platz in der Anordnung.

Wir wollen auf diese Gegenüberstellung der abzählbaren Universalanordnung und der Überabzählbarkeit des Kontinuums noch einmal näher eingehen. Dazu führen wir eine "Summe zweier BSM" ein. Gegeben seien die beiden Bildschirmmitteilungen BSM_1 und BSM_2. Unter der BSM_{1+2} wollen wir jene Bildschirmmitteilung verstehen, die aus den hintereinandergeschriebenen Bildschirmmitteilungen BSM_1 und BSM_2 besteht. Die beiden Bildschirmmitteilungen sollen dabei so hintereinandergeschrieben werden, dass zuerst die BSM_1 und dann die BSM_2 gelesen wird.

Weiters erinnern wir daran, dass eine Bildschirmmitteilung für sich allein gelesen in der Universalanordnung nicht vorkommt. In dieser Universalanordnung scheinen nur Bildschirmmitteilungen auf, die neben einer grafischen Darstellung im der oberen Hälfte ein genau bezeichnetes Raum-Zeit-Element in der unteren Hälfte besitzen.

Will man eine Diagonalzahl in einer Bildschirmmitteilung ausdrücken, dann muss man zunächst die Regeln für die Anordnung der zeilenweise geschriebenen Zahlen vollständig angeben und anschließend das Bildungsgesetz der Diagonalzahl auf Grund dieser zeilenweisen Anordnung.

Wir wählen nun als Regel für die Anordnung der zeilenweise geschriebenen Zahlen die aus der Universalanordnung gewonnene Anordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Diese Regel kann in einer Bildschirmmitteilung, nennen wir sie

BSM_1, ausgedrückt werden. Das von uns gewählte Bildungsgesetz der Diagonalzahl (Seite 8) schreiben wir in Form einer Bildschirmmitteilung, die wir BSM_2 nennen, an. Die Bildschirmmitteilung BSM_{1+2} beschreibt nun unsere Diagonalzahl, wie wir sie auf Seite 8 nach Cantor gebildet haben. Setzen wir nun diese BSM_{1+2} in die obere Hälfte einer Bildschirmmitteilung und ein Raum-Zeit-Element, das den Kritiker der Abzählbarkeit in einem Zeitpunkt, in dem er diese Kritik aufrecht hält, bezeichnet, in die untere Hälfte dieser Bildschirmmitteilung und bezeichnen sie mit $\underline{\underline{\text{BSM}}}$, dann muss der Kritiker die Frage, ob die obere Hälfte von $\underline{\underline{\text{BSM}}}$ eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 eindeutig beschreibt, in dem betreffenden Zeitpunkt bejahen.

Damit hat die Bildschirmmitteilung $\underline{\underline{\text{BSM}}}$ einen Platz in der Universalanordnung. Dieser Platz liege an der n-ten Stelle. Man überlegt sich nun leicht, dass für die n-te Dezimalstelle b_n der Diagonalzahl auf Grund ihrer Definition sowohl $b_n = a_{nn}$ als auch $b_n \neq a_{nn}$ gelten muss. Die vom Kritiker angestrebte Beweisführung ist daher inkonsistent und wir bezeichnen den von ihm angestrebten Beweis der Überabzählbarkeit als misslungen.

<u>EXISTENZ:</u> In der Mathematik wird oft die Frage gestellt, ob eine Zahl mit bestimmten Eigenschaften existiert oder nicht. Vielfach werden Existenzbeweise früher als die entsprechende Zahl selbst gefunden. Die Frage nach der Existenz ist aber nicht nur auf den Bereich der Mathematik beschränkt. Oft wird der Begriff "Existenz" so gebraucht, als gäbe es über seinen Inhalt allgemeine Übereinstimmung. In den Naturwissenschaften ist man manchmal zufrieden, wenn das Ergebnis einer Theorie mit den Experimenten, mit der Beobachtung übereinstimmt. Inwieweit die dabei verwendeten Denkobjekte tatsächlich existieren, ist dabei von sekundärer Bedeutung.

So wie wir weiter oben die Menge aller Zahlen so definiert haben, dass jedenfalls von keiner in ihr nicht enthaltenen Zahl sinnvoll gesprochen werden kann, wollen wir auch die Menge der existierenden Denkobjekte hinreichend umfangreich definieren.

Wir können uns dabei auf Denkobjekte aus der Universalanordnung beschränken, denn von anderen Denkobjekten kann ja niemals sinnvoll gesprochen werden. Wir bezeichnen nun alle jene Denkobjekte als existent, die von irgendeinem Denksubjekt in irgendeinem Zeitpunkt als durch irgendeine Bildschirmmitteilung eindeutig beschrieben angesehen wurden.

Diese Definition wird sicher für manchen Leser als viel zu weitgehend bezeichnet werden. Es genügt uns aber zu zeigen, dass außerhalb der so definierten existierenden Denkobjekte mit Sicherheit nicht von Existenz widerspruchsfrei gesprochen werden kann. Die Universalanordnung berücksichtigt ja alle Denkobjekte, die überhaupt jemals möglich waren, möglich sind oder möglich sein werden. Ein darüber Hinausgehen wäre ein Widerspruch in sich.

Mit anderen Worten: Es kann in keiner Weise etwas existieren (existiert haben, in Zukunft existieren) dem nicht in der Universalanordnung ein Platz reserviert wäre.

Auf den ersten Blick erscheint durch diese Definition der Existenz ein großer Teil des Innenlebens zu kurz zu kommen. Wie sollte es möglich sein, den zweifellos existierenden emotionalen Teil des Menschen oder gar das Unbewusste in einer auf Bildschirmmitteilungen beschränkten Universalanordnung einzufangen? Hier muss daran erinnert werden, dass in der Universalanordnung lediglich von der für ein Denksubjekt eindeutigen Beschreibung eines Denkobjektes durch eine Bildschirmmitteilung die Rede ist. Natürlich ist es im allgemeinen unmöglich, den gesamten Informationsgehalt etwa einer bestimmten Emotion in einer Bildschirmmitteilung wiederzugeben Dies liegt wohl an der Komplexität und damit auch an der Einmaligkeit der meisten Emotionen. Um eine solche Emotion eindeutig zu beschreiben, ist es aber gar nicht notwendig, ihren Informationsgehalt wiederzugeben. Es genügt ja, di Person, welche die Emotion empfindet, und den Zeitpunkt der Empfindung so wie die Art der Empfindung eindeutig zu beschreiben, und dies ist zweifellos durch eine Bildschirmmitteilung möglich. Man könnte etwa die eine Emotion empfindende Person als eine Art Messgerät für diese Emotion betrachten und die Emotion selbst durch den Zustand dieses Messgerätes beschreiben. Eine Ungenauigkeit dieses Messgerätes muss dabei nicht befürchtet werden, da eine solche Emotion ja nicht mehr als Teil des "Gesamtzustandes" der Person ist. Das Herauslösen dieses Teiles aus dem Gesamtzustand geschieht eben mit Hilfe der Sprache.

Die durch die Universalanordnung erfassten Denkobjekte sind ihrer Definition nach alles Denkbare. Der Versuch, diese Denkobjekte in einer Menge zusammenzufassen und sie dann sozusagen von außen zu betrachten, gleicht dem Versuch Münchhausens, sich selbst an seinem Zopf aus dem Sumpf zu ziehen.

Es ist sinnlos, das Wort vom Sprecher und von dem, an den es gerichtet ist, oder den Gedanken vom Denksubjekt trennen zu wollen.

WAS IST DIE WELT?: Hier handelt es sich offenbar um einen sehr komplexen Begriff. Wir sind gewohnt, Begriffe von uns als Person abzulösen und ihnen Selbständigkeit zuzubilligen. Es wäre nun naheliegend zu fordern, dass nur jenen Begriffen Selbständigkeit zukommt, die zu allen Zeiten und für alle Denksubjekte den gleichen Sinn ergeben. Diese Forderung erscheint dem Autor als zu einschränkend.

Wir wollen so wie weiter oben für die Begriffe "Zahl" und "Existenz" nunmehr eine Definition des Begriffes "Welt" geben, die wir jedenfalls als hinreichend weit erachten.

Als "Welt" bezeichnen wir die Gesamtheit aller Denkobjekte, die durch die Universalanordnung erfasst werden.

Eine so definierte Welt ist natürlich wegen der Unbegrenztheit der in ihre Definition eingehenden Bildschirmmitteilungen und wegen der notwendigen Bezugnahme auf alle möglichen Denksubjekte niemals in allen Einzelheiten erfassbar. So wie bei den Begriffen Zahl und Existenz geht es uns aber auch hier wieder darum, dass kein Teil der Welt vergessen wurde. Dies ist aber leicht zu sehen. Jede Behauptung, die obige Definition der Welt sei zu eng, erfordert ja ein Sprechen über etwas außerhalb dieser Gesamtheit, also ein Sprechen über Denkobjekte, die in der Universalanordnung nicht erfasst sind. Dies ist aber nach Definition der Universalanordnung ein Widerspruch in sich.

Das steht natürlich nicht im Widerspruch damit, dass in der Welt, wie wir sie definiert haben, Denkobjekte auftreten, die in sich widerspruchsvoll sind. So ist die kleinste natürliche Zahl, größer als 5 und kleiner als 3 (vgl. Seite 9), zweifellos ein mögliches Objekt unseres Denkens, obwohl dieses Denkobjekt einen Widerspruch beinhaltet. Desgleichen kann man über Denkobjekte sprechen, die nicht in der von uns definierten Welt enthalten sind. Gerade durch diese Möglichkeit, über sie sprechen zu können, werden sie nach unserer Definition Teil der Welt. Die Behauptung, durch solche Denkobjekte werde die Unvollständigkeit des Begriffes "Welt" nach der obigen Definition *bewiesen*, enthält daher einen Widerspruch.

Halten wir also fest: Unsere Definition der "Welt" schließt Widersprüche ein. Widersprüche sind für uns nur dort von Bedeutung, wo sie in einer Behauptung bzw. in einem Beweis auftreten. Widersprüchliche Behauptungen bezeichnen wir als falsch, und Beweise, in denen Widersprüche auftreten, bezeichnen wir als misslungen. Obwohl wir also etwa der Diagonalzahl, angewendet auf die Universalanordnung, durchaus Existenz zubilligen, müssen wir den Versuch, durch sie die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zu beweisen, als misslungen erachten.

Der wesentlichste Inhalt der vorstehenden Ausführungen kann im folgenden gesehen werden: Die Sprach wurde als Möglichkeit der Informationsübermittlung geschaffen. Eine solche Mitteilung ist nur sinnvoll im Zusammenhang mit einer Person, an die diese Mitteilung gerichtet ist. Eine solche Person muss zumindestpotentiell vorhanden sein. Die Verwendung von Worten in Mitteilungen ist nur insoweit sinnvoll, als sichergestellt ist, dass der Empfänger einer Mitteilung diese Worte im selben Sinn versteht wie der Mitteilende. Ein Personenunabhängiges Kriterium hierfür ist nicht bekannt. Die Verwendung der Sprache folgt gewissen Spielregeln. Nur im Rahmen solcher Spielregeln darf Sprache angewendet werden.

In der Universalanordnung werden auch Denkobjekte beschrieben, die in sich widerspruchsvoll sind. Dies liegt in der Natur unseres Denkens. Es konnte bis jetzt auch kein Nachweis der Widerspruchsfreiheit für alle wissenschaftlichen Systeme erbracht werden. Für den religiösen Bereich ist etwa auf Tertullians "credere quia absurda" hinzuweisen. Widersprüche sind formulierbar und als solche existent. Wir definieren daher

DIE WELT IST ALLES, WORÜBER GESPROCHEN WERDEN KANN

Auch wenn wir in Platons Höhle gefangen nur die Schatten der Wirklichkeit wahrnehmen können, so können wir doch über Denkobjekte außerhalb der Höhle sprechen. Insoweit, aber auch nur insoweit, können Denkobjekte existieren. Hier liegen die Grenzen unserer Welt.

SCHLUSSBEMERKUNGEN: Die Universalanordnung erhebt den Anspruch, die Welt zu umfassen. Sie beansprucht also eine gewisse Gültigkeit nicht nur hier und heute sondern überall und jederzeit, also für alle möglichen Denksubjekte. Warum gründet sie dann so entscheidend auf Bildschirmmitteilungen? Zwar haben wir es vermieden, uns bei den Bildschirmmitteilungen auf hier und heute lesbare und verständliche Schriften zu beschränken, doch bestand die wichtigste Eigenschaft einer Bildschirmmitteilung zweifellos in ihrer optischen Lesbarkeit.

Die zentrale Bedeutung der Bildschirmmitteilungen beruht auf fundamentalen Eigenschaften menschlicher Erkenntnis. Wie kommt es zu Erkenntnissen und wie zu "wahren Aussagen"? Ausgangspunkt sind unsere Sinnesorgane, die ein Abbild der Außenwelt in unser Inneres vermitteln. Dieser Satz ist durchaus auch physikalisch-räumlich zu verstehen. Ein (verhältnismäßig sehr kleiner) Teil dieser Abbildungwird uns "bewusst". Sowohl die bewussten als auch die unbewussten Bilder der Außenwelt in uns können der "Bewältigung des Lebens" dienen. Es hat sich offenbar als zweckmäßig erwiesen, über die Abbildungen der Außenwelt in uns "Aussagen" zu machen, d.h. etwas "aus dem Inneren hinaus" zu sagen uhnd dabei unter anderem zwischen wahren, falschen und sonstigen Aussagen zu unterscheiden.

Wir haben es also zunächst mit einer Abbildung der Außenwelt auf unser Inneres zu tun und anschließend mit einer von uns bewusst gesteuerten Abbildung dieser Abbildung nach außen. Diese Abbildungen nach außen, die Aussagen, können offenbar in Form von Bildschirmmitteilungen formuliert werden.

Analoge Überlegungen können natürlich für gänzlich anders geartete "Denksubjekte" mit gänzlich anders gearteten "Mitteilungen" angestellt werden. Etwa für andersartige Organismen in anderen Sternensystemen. Voraussetzung ist lediglich, dass auch dort "Abbildungen" in beide Richtungen auftreten, die aus (universell gültigen) "physikalischen" Gründen gequantelt und daher abzählbar sind.

Die Universalanordnung enthält alle möglichen Aussagen (aller möglichen Denksubjekte). Da die die Außenwelt in unseren Überlegungen auch das (physische) Denksubjekt selbst als mögliches Objekt enthält, sind natürlich "Aussagen" auch ohne zugrunde liegende "äußere" Sinneseindrücke möglich. Da alle möglichen Aussagen auch alles Denkbare enthalten, wäre es ein Widerspruch, von etwas außerhalb der Universalanordnung zu sprechen. Derartige Aussagen müssen von uns als falsch bezeichnet werden. Es kann daher auch nichts außerhalb der Universalanordnung "existieren". Alle möglichen (auch alle falschen) Aussagen über "Existenz" sind in der Universalanordnung enthalten.

Für unsere Überlegungen hier und heute reicht die Universalanordnung also jedenfalls aus. Man sollte sich aber immer bewusst sein, dass nach Sigmund Freud: "unsere Organisation, d.h. unser seelischer Apparat, eben im Bemühen um die Erkundung der Außenwelt entwickelt worden ist, also ein Stück Zweckmäßigkeit in seiner Struktur realisiert haben muss, dass er selbst ein Bestandteil jener Welt ist, die wir erforschen sollen, und dass er solche Erforschung sehr wohl zulässt, dass die Aufgabe der Wissenschaft voll umschrieben ist, wenn wir sie darauf einschränken zu zeigen, wie uns die Welt infolge der Eigenart unserer Organisation erscheinen muss, dass die endlichen Resultate der Wissenschaft gerade wegen der Art ihrer Erwerbung nicht nur durch unsere Organisation bedingt sind, sondern auch durch das, was auf diese Organisation gewirkt hat, und endlich, dass das Problem einer Weltbeschaffenheit ohne Rücksicht auf unseren wahrnehmenden seelischen Apparat eine leere Abstraktion ist, ohne praktisches Interesse. Nein unsere Wissenschaft ist keine Illusion. Eine Illusion aber wäre es zu glauben, dass wir anderswoher bekommen könnten, was sie uns nicht geben kann":

Dennoch wäre ein Weltbild unangemessen, wenn es auf uns zugängliche absolute Wahrheiten beschränkt bliebe. Es muss zumindest dahingestellt bleiben, ob der Begriff von absoluter Wahrheit, die nicht nur hier und heute für ein Denksubjekt, sondern immer und überall für alle Denksubjekte, eben absolut gilt, sinnvoll ist. Eine RELATIVIERUNG DES WAHRHEITSBEGRIFFES erscheint uns insbesondere dann erforderlich, wenn wir das Problem der Mitteilung einer Wahrheit von einem Denksubjekt an ein anderes betrachten. Nicht nur das unterschiedliche "Vorwissen" an sich erschwert oft die Wahrheitsübermittlung. Oft scheint es "schon schwierig genug, überhaupt zu bemerken, dass der andere eine eigene, von uns selber verschiedene Sprache redet. Wenn *er* von Vater, Mutter, Baum oder Haus, Kirche oder Schule, Bruder oder Schwester, Lehrer oder Meister,, Gott oder Teufel, Madonna oder Engel, Tier oder Pflanze, Stern oder Gebirge, Fluss oder Wald spricht, so glauben wir zunächst von Dingen und Gegebenheiten zu hören, die wir bereits hinlänglich kennen. Irgendwie sind wir überzeugt, dass der andere in den uns bekannten Wörtern ebenfalls nur das uns bekannte sagen und meinen könne. In Wirklichkeit aber verbinden sich mit allen Begriffen im Munde des anderen Erfahrungen, Erinnerungen und Assoziationen, die unvertauschbar *seiner* Biographie zugehören... " (Drewermann, Grimms Märchen, Tiefenpsychologisch gedeutet).

Dennoch haben uns die Wissenschaft "so herrlich weit gebracht". Die Relativität der Wahrheit ist demnach offenbar kein Hindernis für einen wohl definierten Fortschritt.

ANHANG: FRAGEN ZUM NACHDENKEN

- Was ist eine Zahl?

- Gegeben sei ein Setzkasten mit den üblichen Zeichen (Buchstaben, Ziffern, Plus-Minuszeichen usw.) sowie ein Raster mit 35 Zeilen zu 60 Plätzen für je ein Zeichen (etwa eine Schreibmaschinenseite). Welches ist die größte natürliche Zahl, die auf diesem Raster mit Hilfe der Zeichen dargestellt werden kann.

- Was ist Wahrheit? D.h. welche Voraussetzungen müssen gegeben sein, dass auch nur zwei Personen von ein und demselben Satz "zu Recht", also oh ne Missverständnisse (!) sagen können, er sei wahr?

DIE ZITATE AUF SEITE 2 DIENEN EBENSO WIE DIE FRAGEN ZUM NACHDENKEN AUF SEITE 22 DER EINSTIMMUNG AUF DIE HIER BEHANDELTE PROBLEMATIK. SIE SOLLEN DAS VERSTÄNDNIS FÜR DEN UNTERSCHIED ZWISCHEN DER UNIVERSALANORDNUNG UND EINER UNIVERSALBIBLIOTHEK FÖRDERN. ALS UNIVERSALBIBLIOTHEK KÖNNTEN WIR DIE GESAMTHEIT ALLER BILDSCHIRMMITTEILUNGEN ANSEHEN. DURCH SIE WÄRE ABER NICHT VIEL GEWONNEN, DA IN IHR LEDIGLICH ZEICHEN, NICHT ABER DENKOBJEKTE ANGEORDNET WERDEN. IN DER UNIVERSALANORDNUNG WERDEN DEMGEGENÜBER ALLE MÖGLICHEN DENKSUBJEKTE ANGEORDNET. SPRACH SPIELT DABEI NUR INSOWEIT EINE ROLLE, ALS SIE DEM JEWEILIGEN DENKSUBJEKT IM JEWEILIGEN ZEITPUNKT ZUR EINDEUTIGEN BESCHREIBUNG DES JEWEILIGEN DENKOBJEKTES DIENT.

DAZU NOCH ENMAL DAS BEISPIEL DES BEWEISES DER ÜBERABZÄHLBARKEIT DER REELLEN ZAHLEN, MIT HILFE EINER CANTORSCHEN DIAGONALZAHL. DIE WIDERLEGUNG DIESES BEWEISES WIRD NICHT DURCH DIE ANGABE EINES PLATZES AN SICH FÜR DIE DIAGONALZAHL IN DER UNIVERSALANORDNNG GEFÜHRT, SOMDERN DURCH DIE ANGABE VON PLÄTZEN FÜR DIE BEHAUPTUNGEN ALLER MÖGLICHEN DENKOBJEKTE IN ALLEN MÖGLICHEN ZEITPUNKTEN, DASS EINE SOLCHE DIAGONALZAHL EXISTIERE. FÜR JEDE DIESER MÖGLICHEN BEHAUPTUNGEN LÄSST SICH EIN WIDERSPRUCH IN DER DEFINITION DIESER DIAGONALZAHL ANALOG DEM AUF SEITE 19 ANGEGEBENEN ZEIGEN.

Zur Überzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen.

1) Jede reelle Zahl hat die Eigenschaft, daß "in irgendeinem Zeitpunkt" "irgendein denkendes Wesen" "an diese Zahl denken kann".

2) Jede reelle Zahl hat die Eigenschaft, daß es ein denkendes Wesen geben kann, welches in irgendeinem Zeitpunkt diese Zahl durch eine Bildschirmmitteilung (BSM) eindeutig bezeichnen kann.

2.1. Als BSM ist ein quadratischer Raster zu verstehen, der aus einzelnen Quadraten der Seitenlänge 1/10 mm zusammengesetzt ist, wobei die einzelnen Quadrate entweder weiß oder schwarz sein können.

2.2. Eindeutige Bezeichnungen sind beispielsweise:

2.2.1. "Die Zahl 7"

2.2.2. "Die Zahl Sieben"

2.2.3. "Die Zahl π"

2.2.4. "0, α_1 α_2 ..., wobei α_n genau dann 1 ist, wenn die Gleichung $a^n+b^n=c^n$ eine ganzzahlige, nichttriviale Lösung in a,b,c besitzt, ansonsten ist $\alpha_n=0$"

2.2.5. "Die Zahl, an die ich (das Wesen) im Zeitpunkt T gedacht habe (hat)", wobei T in Vielfachen der Elementarzeit angegeben werden kann.

3) Alle BSM sind abzählbar anordenbar.

4) Alle möglichen denkenden Wesen zu allen möglichen (abzählbaren) Zeitpunkten, können abzählbar angeordnet werden.

4.1. Die Raum-Zeit-Welt wird in Elementarteile geteilt. Ein Elementarteil sei ein Würfel mit der Kantenlänge der Elementarlänge und der Dauer der Elementarzeit.

4.2. Diese Raumzeitelemente können abzählbar angeordnet werden.

4.3. Jedes denkende Wesen kann zu jedem Zeitpunkt des Denkens durch mindestens ein Raumzeitelement eindeutig beschrieben werden. Die Behauptung 4) folgt nun aus 4.2.

5) Alle Kombinationen einer beliebigen BSM mit einem beliebigen, denkenden Wesen zu einem beliebigen Zeitpunkt können abzählbar angeordnet werden.

6) Die Menge der reellen Zahlen ist eine Untermenge der abzählbaren Menge aus 5).

6.1. Die Konstruktion einer angeblich in 5) nicht enthaltenen reellen Zahl, wie z.B. eine Kantor'sche Diagonalzahl (KDZ), führt zu einem Widerspruch, denn wenn ein denkendes Wesen in irgendeinem Zeitpunkt behauptet, diese KDZ sei eine reelle Zahl, dann kann diese Behauptung in Form einer BSM nach 2) dargestellt werden. Die Kombination dieser BSM mit dem denkenden Wesen und dem den Zeitpunkt seiner Behauptung bezeichnenden Raumzeitelement, hat nun einen Platz in der Menge 5, woraus der Widerspruch folgt.

Anmerkungen:

a) Wie immer die Menge der reellen Zahlen definiert wird, kann das Kantor'sche Diagonalverfahren, angewendet auf die Menge der in 6) angesprochenen reellen Zahlen, nicht aus der Menge 6) hinausführen.

b) Herbert Pietschmann schreibt in seinem Buch "Die Wahrheit liegt nicht in der Mitte":

> Es genügt nämlich nicht, darüber zu grübeln wie ein Subjekt zu Aussagen über die Realität kommen kann, wir dürfen nie vergessen, daß eine sinnvolle Aussage eines Subjektes über ein Objekt immer für mindestens ein anderes Subjekt getroffen wird. Daß eine Aussage also nur dann beachtenswert ist, wenn das angesprochene Du als Gesprächspartner ernst genommen wird.

Dies kann sogar noch erweitert werden auf Aussagen eines Subjektes für sich selbst. Eine weitere Erweiterung erscheint allerdings sinnlos. Daher:

> Woran man nicht denken kann, daran soll man nicht denken.

DIE WELT IST ABZÄHLBAR

Es wird eine abzählbare Anordnung alles Denkbaren gegeben (Universalanordnung). Jedem Denkobjekt wird mindestens eine natürliche Zahl eindeutig zugeordnet. Im weiteren wird gezeigt, warum jeder Beweis einer Überabzählbarkeit (insbesondere Cantor) bei dieser Anordnung versagt.

Der Begriff abzählbar wird hiebei im Sinne der Mathematik verwendet, d.h. er bezeichnet die Mächtigkeit einer Menge, nicht größer als die der natürlichen Zahlen.

Diskussionswürdig ist zunächst der Begriff Welt, ein ausgesprochen unscharfer Begriff. (Gibt es absolut scharfe Begriffe?) Ich möchte den Begriff Welt hier im Sinne des folgenden Satzes verstehen, der natürlich auch definitorischen Charakter hat:

<u>Satz:</u> DIE WELT IST ALLES, WORÜBER GESPROCHEN WERDEN KANN.

Aber nicht nur hic et nunc. Die Möglichkeit, im Sinne dieses Satzes über etwas sprechen zu können, soll für alle denkenden Subjekte und in jedem möglichen Zeitpunkt gelten.

Diese Erläuterung des Begriffes "worüber gesprochen werden kann" ist deshalb notwendig, weil durchaus denkbar ist, daß irgendwo, z.B. irgendwo im Andromedanebel, irgendeinmal irgendeine Ausdrucksform (Sprache) existiert (existiert hat, existieren wird), über die wir hic et nunc nichts sagen können.

Eine Möglichkeit, die Definition der Welt im Sinne des obigen Satzes auf mich als Autor und auf den Leser dieser Zeilen zu beschränken, wäre natürlich dann gegeben, wenn jede an irgendeinem Ort und zu irgendeinem Zeitpunkt verwendete Sprache in die in diesem Aufsatz verwendete Sprache übersetzt werden könnte und dabei auch das Verständnis für das jeweils Ausgesprochene, z.B. durch entsprechende Erläuterungen, erzielbar wäre. Gerade diese letzte Voraussetzung ist jedoch problematisch. Auch eine noch so gute Übersetzung und eine noch so ausführliche Erläuterung wäre wahrscheinlich außerstande, einem Neandertaler oder einem Javamenschen Sätze über "Superstrings" verständlich zu machen.

Ein Beweis des obigen Satzes erübrigt sich natürlich dann, wenn wir ihn als reine Definition verstehen. In diesem Fall ist es aber notwendig zu fragen, ob diese Definition auch sinnvoll ist.

Zunächst einmal: Ist die Welt kleiner als alles, worüber gesprochen werden kann? Anders ausgedrückt. Ist es sinnvoll alles, worüber gesprochen werden kann, der Welt zuzuordnen?[2] Da alles, worüber gesprochen werden kann ein mögliches Denkobjekt ist, will ich diese Frage bejahen.

Als zweites ist zu fragen, ob es etwas in der Welt gibt, über das nicht gesprochen werden kann. Der Beweis oder besser die Begründung, daß dies nicht der Fall ist, soll indirekt gegeben werden. Behauptet nämlich irgendjemand in irgendeinem Zeitpunkt das Gegenteil, dann bedeutet dies nichts anderes als die Behauptung, es gäbe "etwas" in der Welt, worüber nicht gesprochen werden kann. Damit ist aber diese Behauptung selbst bereits ein Sprechen über dieses "etwas". Sie enthält also einen Widerspruch in sich. Daraus folgt die Vollständigkeit des Begriffes "Welt" aus dem obigen Satz.

Wir kommen nun zur Verbindung der Begriffe "Welt" und "abzählbar". Diese Verbindung stellen wir dadurch her, daß wir zeigen, alles, worüber (von irgendjemandem irgendeinmal) gesprochen werden kann, kann abzählbar angeordnet werden. Haben wir dies gezeigt, dann haben wir die Welt, so wie wir sie im obigen Satz definiert haben, abzählbar angeordnet.

Zunächst zeigen wir, daß alle möglichen sprechenden Subjekte abzählbar angeordnet werden können. Dabei gehen wir von der Tatsache aus, daß sprechende Subjekte eine gewisse Ausdehnung in Raum und Zeit haben müssen. Die Möglichkeit "über etwas sprechen zu können" setzt daher ein Subjekt dieses Sprechens voraus, das durch ein bestimmtes Element räumlicher und zeitlicher Ausdehnung eindeutig definiert werden kann.

Alle solchen möglichen "Raum-Zeitelemente" (RZE) abzählbar anzuordnen ist aber leicht. Man bildet etwa elementare Raum-Zeitelemente als vierdimensionale Volumina bestehend aus einem Würfel der Seitenlänge der Elementarlänge und der Dauer der Elementarzeit. Man kann nun hinsichtlich der Zeitachse vom Urknall angefangen die Elementarzeitintervalle zählen, hinsichtlich der Volumina ein Koordinatensystem z.B. im Erdmittelpunkt beginnend einführen und in diesem die möglichen Elementarwürfel, also Würfel von der Kantenlänge der Elementarlänge, durchnumerieren.

Durch die Kombination der abzählbaren Elementarzeitintervalle mit den abzählbaren Elementarwürfeln läßt sich eine abzählbare Anordnung der RZE bilden. Da jedes mögliche sprechende Subjekt infolge seiner räumlichen Ausdehnung in jedem möglichen Zeitraum (!) des Sprechens mindestens ein RZE enthält, welches das Subjekt und das Sprechen eindeutig kennzeichnet, kann die Menge alles möglichen Sprechens jedes möglichen Subjektes abzählbar angeordnet werden.

Nun ist noch zu zeigen, daß alles, vom dem ein bestimmtes Subjekt in einem bestimmten Zeitpunkt sprechen <u>kann</u>, abzählbar angeordnet werden kann. Um dies zu zeigen definieren wir sogenannte "Bildschirmmitteilungen" (BSM). Darunter verstehen wir quadratische, graphische Darstellungen, bestehend aus schwarzen und weißen Elementarquadraten. Ein solches Elementarquadrat ist ein Quadrat mit der Seitenlänge der Elementarlänge, das entweder weiß oder schwarz ist.

Inwieweit eine Farbgebung bei solchen Elementarquadraten physikalisch möglich ist, soll hier nicht interessieren.

Wesentlich ist, daß alles, was schriftlich mitgeteilt werden kann, also z.B. auch alles, was auf einem schwarz-weiß-Bildschirm eines Fernsehmonitors gezeigt werden kann, durch solche BSM dargestellt werden kann.

Wir wollen nun zeigen, wie durch solche BSM über Teile der

Welt gesprochen werden kann:

Offenbar kann alles, was auf einem Bildschirm darstellbar ist, in Form einer BSM dargestellt werden. Mithin enthält die Menge der BSM z.B. alles, was von Menschen je geschrieben wurde, aber auch alles, was von ihnen je geschrieben wird, ja auch nur je geschrieben werden könnte. Darüber hinaus enthält die Menge der BSM auch Mitteilungen, z.B. Texte, die so lang sind, daß sie allein deshalb nicht geschrieben werden können weil die zur Verfügung stehende Zeit jedes Lebewesens, vielleicht sogar der ganzen existierenden Welt, nicht dazu ausreicht, diese Mitteilung als Ganzes zu erfassen.

Die Menge der BSM enthält aber auch Mitteilungen über ansonsten Unbeschreibbares. So z.B. wird es niemals durch eine Mitteilung möglich sein, ein Gefühl einem anderen Subjekt vollständig mitzuteilen. Wohl aber kann über dieses Gefühl eindeutig gesprochen werden, wenn die Art des Gefühls, der Zeitpunkt und das Subjekt des Gefühls genannt werden. So läßt sich etwa über den Schmerz sprechen, den Cäsar empfand, als ihn der erste Stich der Verschwörer getroffen hat.

Hier führt eine Abzweigung zur Frage der "Existenz". Dazu ein Beispiel: Kommt Gott in dieser Welt vor? Diese Frage kann etwa so beantwortet werden: Gab es je oder wird es je einen Menschen geben der einmal an Gott gedacht hat - und zwar nicht an einen Gott sondern eben an "Gott" -, dann kommt Gott in der hier genannten Welt vor. Besagter Mensch hätte nämlich in gesagtem Zeitpunkt an Gott denken können und damit über Gott sprechen können, so daß es eine Gott entsprechende Kombination von RZE und BSM gibt.

> <u>Anmerkung:</u>
> Man sieht leicht, daß diese Beschränkung auf Bildschirmmitteilungen der Universalität der Abzählbarkeit der Welt keinen Abbruch tut. Mitteilungen werden nun einmal von einem Subjekt zu einem anderen über Medien übertragen, über Materie, Schwingungen, Strahlungen usw., und alle diese Medien sind gequantelt und nur darauf kommt es bei der Abzählbarkeit an.

Wir haben also die Kombination von Raum-Zeitelementen und Bildschirmmitteilungen abzählbar angeordnet. Diese Anordnung bezeichnen wir als Universalanordnung (UA).

Wo ist nun der Platz irgendeines Teiles der Welt oder auch der Welt als Ganzes, denn auch über die Welt als Ganzes kann man sprechen, in der Universalanordnung? Hiezu ein Beispiel: Die folgende BSM bezeichnet für mich im Zeitpunkt der Niederschrift dieses Textes die Zahl 8:

8

Die Zahl 8 kann für mich aber auch folgendermaßen dargestellt werden:

$$2^3;\ 2+2+4;\ \sqrt{64};\ e^{\ln 8};\ \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{3-\nu};\ \text{eight};\ \text{Acht};$$

usw. Das Wort "Acht" kann aber auch im Sinne des Wortes Acht "in Acht und Bann" verstanden werden. Der Sinn einer BSM ist daher relativ (zum Leser und zum Zeitpunkt des Lesens).

Deshalb muß grundsätzlich jede BSM stets mit einem RZE gekoppelt werden. Im bisher üblichen Sprachgebrauch ist ein solches RZE eben teils durch den Autor, teils durch den Leser bestimmt.

Aus der Abzählbarkeit der RZE und der Abzählbarkeit der BSM folgt die Abzählbarkeit der Welt (entsprechend der obigen Definition). Nun sind zweifellos die reellen Zahlen ein Teil der Welt. Wie erklärt sich aber der Widerspruch zwischen der abzählbaren Anordnung der Welt und der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen?

Hier muß folgende Überlegung angestellt werden: Eine abzählbare Anordnung von Elementen einer Menge bedeutet eine eindeutige Zuordnung der Elemente dieser Menge zu den natürlichen Zahlen. Die unendliche Menge der natürlichen Zahlen wird von uns gefühlsmäßig sehr ähnlich behandelt wie eine endliche Menge von Zahlen. Die Menge der natürlichen Zahlen ist uns jedoch nur durch ihr Bildungsgesetz, nämlich, daß jede natürliche Zahl n einen Nachfolger n+1 in der Menge hat, erfaßbar. In den üblichen Beweisen der Überabzählbarkeit von Mengen wird dies vernachlässigt. Wir wollen dies am Beispiel des Cantor'schen Beweises der Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen zeigen:

Cantor geht davon aus, daß bei einer abzählbaren Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 es stets möglch sein muß, jede einzelne reelle Zahl in Form einer unendlichen Dezimalzahl $0,a_1,a_2$ usf. anzugeben. Cantor betrachtet nun die Zahlen a_{ij}, die j-te Dezimalstelle der reellen Zahl aus der i-ten Zeile, und konstruiert eine neue Dezimalzahl $0,b_1,b_2$ usf., für die lediglich gefordert wird, daß b_j ungleich a_{jj} für alle j ist. Offenbar handelt es sich bei dieser Dezimalzahl $0,b_1,b_2$ .... um eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, die von jeder Dezimalzahl der Anordnung $0,a_{i1}$, a_{i2} .... verschieden ist.

Das Entscheidende der Cantor'schen Beweisführung liegt darin, daß diese abzählbare Anordnung als fertiggegeben vorgestellt wird. Wie immer die Bildungsgesetze dieser Anordnung auch sein mögen, sie werden als vollständig angenommen, d.h. weitere Bildungsgesetze sind nicht mehr zulässig. Die Konstruktion einer Cantor'schen Diagonalzahl ist aber gerade ein Bildungsgesetz, das offenbar in den für die ursprüngliche Anordnung herangezogenen Bildungsgesetzen nicht enthalten war.

Man kann das auch folgendermaßen ausdrücken: Wann immer man auf Grund einer vorgegebenen Menge von Bildungsgesetzen eine Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vornimmt, ist es stets möglich, durch das Bildungsgesetz der Cantor'schen Diagonalzahl eine in der Anordnung bisher nicht enthaltene reelle Zahl hinzuzufügen. Ich sehe hier eine Ähnlichkeit mit der Möglichkeit, bei natürlichen Zahlen zu jeder natürlichen Zahl n eine größere Zahl n+1 zu finden.

Der Unvollständigkeitsbeweis mit Hilfe der Cantor'schen Diagonalzahl ist nur dadurch möglich geworden, daß ein neues Konstruktionsprinzip für reelle Zahlen, nämlich das Bildungsgesetz der Cantor'schen Diagonalzahl, hinzugefügt wurde. Gelänge es, alle möglichen Konstruktionsprinzipien ebenfalls abzählbar anzuordnen, dann wäre der Cantor'sche Gegenbeweis nicht mehr möglich.

Genau dies geschieht nun durch die Universalanordnung. Ein Konstruktionsprinzip ist zweifellos etwas, worüber gesprochen werden kann, ja, worüber gesprochen werden muß, um es anzuwenden. Es kann daher in Form einer BSM angeschrieben werden. Insbesondere gilt dies natürlich für das Cantor'sche Diagonalverfahren. Der Widerspruch zwischen der abzählbaren Anordnung im Rahmen der Universalanordnung und dem Gegenbeweis von Cantor klärt sich nun folgendermaßen:

Wird von irgend jemand (etwa vom Leser dieser Zeilen) in irgendeinem Zeitpunkt (etwa im Zeitpunkt des Lesens) bestritten, daß in der Universalanordnung für jede reelle Zahl ein Platz vorhanden wäre, dann wird durch die Person und durch den Zeitpunkt des Einwandes ein RZE definiert. Der Einwand selbst kann in Form einer BSM formuliert werden, etwa eine BSM, welche die Konstruktion einer Cantor'schen Diagonalzahl auf Grund der Universalanordnung zum Inhalt hat. Für die Kombination (RZE, BSM) ist aber ein Platz in der Universalanordnung vorhanden. Entspricht dieser Platz etwa der i-ten Zeile in der Anordnung der für reelle Zahlen vorhandenen Plätze, dann enthält das vom Kritiker aufgestellte Konstruktionsprinzip der Diagonalzahl die Forderung, die i-te Dezimalzahl b_i muß ungleich der i-ten Dezimalzahl der Diagonalzahl gewählt werden. Dies ist ein Widerspruch. Der Widerspruch beruht darauf, daß in der Universalanordnung eben auch alle denkbaren Konstruktionsprinzipien berücksichtigt sind, daher auch das Konstruktionsprinzip der Cantor'schen Diagonalzahl, angewendet auf eine beliebige Anordnung, also auch auf die Universalanordnung.

Die Universalanordnung nimmt keine Rücksicht auf Sinn oder Inhalt oder gar Wahrheit von Bildschirmmitteilungen. Wie weit eine Bildschirmmitteilung als sinnvolle Aussage oder als wahre Aussage angesehen wird, ist ausschließlich dem jeweiligen Denksubjekt überlassen, das durch das RZE gekennzeichnet wird.

Man sieht übrigens leicht, daß es nicht notwendig ist als UA die Kombinationen (RZE, BSM) zu betrachten, sondern daß die Menge aller BSM, allein genügt. Dazu ist es nämlich nur notwendig, überall dort, wo eine BSM mit einem RZE zusammen betrachtet wird, eine verbale Beschreibung dieses RZE an die BSM anzufügen. Es genügt also als UA alle jene BSM zu betrachten, in denen durch eine Anfügung ein mögliches sprechendes Denksubjekt, also ein RZE, beschrieben wird!

In gleicher Weise lassen sich Widersprüche in allen Beweisen der Überabzählbarkeit einer Menge zeigen, in denen ein Element definiert wird (über ein Element gesprochen wird, ein Element durch eine BSM beschrieben wird), für welches in der UA angeblich kein Platz reserviert ist.

Die hier verwendeten Gedanken finden sich schon bei Wittgenstein ("Die Welt ist alles, was der Fall ist", und "Worüber man nicht sprechen kann, darüber soll man schweigen") und bei Gödel (abzählbare Anordnung).

ÜBER EINE UNIVERSALANORDNUNG

I. Hintergrund:

Seit Einführung des Wirkungsquants in die Beschreibung der Natur mußte die ursprüngliche Vorstellung von kontinuierlicher Raum-Zeit überdacht werden. Zwar liegt der formelmässigen Beschreibung vom Teilchen und ihrer Wechselwirkung insoweit nach wie vor eine kontinuierliche Raum-Zeit zugrunde als es sich um Felder handelt. In dem Augenblick jedoch in dem Beobachtungen angestellt werden, in dem Ort und Zeit gemessen werden, kehrt die Natur wiederum ihre gequantelte Seite hervor.

Es ist dem Menschen zutiefst bewußt, daß zwischen seinen Gedanken und der Materie ein prinzipieller Unterschied besteht. Besteht dieses Bewußtsein zu Recht? Die Komplexität des Großhirns läßt die Überlegung durchaus zu, daß jeder Gedanke eines denkenden Subjekts verbunden ist mit einer genau diesem Gedanken entsprechenden materiellen Konfiguration in seinem Großhirn.

Solche Überlegungen könnten es nahe legen, den Begriff des Kontinuums kritisch zu überdenken. Insbesondere soll die Frage untersucht werden, in welchem Sinne überabzählbare Mengen existieren, etwa die überabzählbare Menge der reellen Zahlen, wenn doch in einer gequantelten Welt alles Existierende grundsätzlich abzählbar sein müßte und wenn man auch die Gedanken als einen Teil dieser gequantelten Welt ansehen kann.

II. Die Bildschirmmitteilung:

Es stellt sich sofort die Frage, wie die Welt der inneren Anschauung in einer Form beschrieben werden könnte, welche das Problem der Abzählbarkeit bzw. Überabzählbarkeit zu behandeln gestattet. Es wird daher versucht, eine Beschreibung der Welt der Gedanken zu geben, die eine Behandlung des gestellten Problems ermöglicht.

Hier ist sofort eine weitere Einschränkung notwendig um überhaupt einen ersten Schritt zur Behandlung dieser Frage tun zu können. Diese Einschränkung soll darin bestehen, daß die "innere Welt" zunächst auf jene Gedanken beschränkt wird, die sich im üblichen Sinne "mitteilen" lassen. Was ist solch ein üblicher Sinn? Seit die Menschen Wissenschaft betreiben, haben sie die Ergebnisse ihrer Forschung schriftlich festgehalten und mündlich in Diskussionen behandelt. Wir wollen uns daher zunächst auf jene Gedanken beschränken, die durch eine schriftliche Mitteilung festgehalten werden können.

Damit wird die ganze innere Welt der Gefühle und Emotionen zum größten Teil (zumindest auf den ersten Blick) ausgeschlossen.

Das Problem, Aussagen über "alle möglichen Mitteilungen" zu machen, liegt darin, daß es einem denkenden Subjekt kaum möglich sein dürfte, alle jemals möglichen Gedanken aller möglichen denkenden Subjekte zu verstehen. Es erscheint daher notwendig, sich zunächst vom Begriff der Gedanken zu lösen und auf den Begriff der schriftlich formulierbaren Mitteilungen zurückzugehen.

Durch diese Beschränkung auf schriftliche Mitteilungen, deren Form noch zu erörtern sein wird, kann von der Individualität der Gedanken abstrahiert werden. Bei solchen schriftlichen Mitteilungen handelt es sich ja nicht mehr um Objekte der inneren Anschauung, sondern um Objekte der allgemein mit Methoden der Naturwissenschaften beschreibbaren Umwelt.

Wir wollen zunächst Ordnung in alle möglichen schriftlichen Mitteilungen bringen. Dazu gehen wir von der Überlegung aus, daß es stets möglich ist, jede beliebige schriftliche Mitteilung auf einem Fernsehbildschirm, auf einem Monitor, aufzuzeichnen.

Dabei gehen wir folgendermaßen vor:

- Wir betrachten nur quadratische Bildschirme.
- Als Rasterlänge, durch welche die Schärfe der Bildschirme bestimmt wird, wählen wir die Seitenlänge eines Quadrates von 1/10 mm.
- Wir betrachten zunächst eine Folge von Bildschirmen mit der jeweiligen Seitenlänge 1/10 mm, 2/10 mm usf., wobei die Fläche des Bildschirms, wie bereits erwähnt, quadratisch ist. Ein Bildschirm mit der Seitenlänge n/10 mm setzt sich also aus n^2 Elementarquadraten zusammen.
- Für jeden Bildschirm, der aus n^2 Elementarquadraten besteht, betrachten wir nun alle möglichen Kombinationen von weißen und schwarzen Elementarquadraten. Offenbar gibt es für jede Seitenlänge von n/10 mm genau $2^{n.n}$ verschiedene Bildschirme, die aus einer Kombination von weißen und schwarzen Elementarquadraten zusammengesetzt sind.
- Jeden Bildschirm, bestehend aus einer beliebigen Kombination von weißen und schwarzen Elementarquadraten, bezeichnen wir als eine "Bildschirmmitteilung".
- Offenbar können alle so definierten Bildschirmmitteilungen abzählbar angeordnet werden.
- Diese Anordnung bezeichnen wir als "Universalanordnung".

Es erscheint vielleicht nicht angemessen, jedes beliebige aus schwarzen und weißen Elementarquadraten zusammengesetzte Quadrat als eine Bildschirm<u>mitteilung</u> zu bezeichnen. Allein inwieweit eine solche graphische Darstellung, wie wir eine solche Bildschirmmitteilung allgemein bezeichnen können, tatsächlich eine Mitteilung im üblichen Sinne enthält, kann ja jeweils nur von einem denkenden Subjekt beurteilt werden, das diese Bildschirmmitteilung vor Augen hat. Das Wesen der Universalanordnung soll aber gerade darin liegen, daß ihr Inhalt unabhängig von allfälligen denkenden Subjekten gesehen wird, die derartige Bildschirmmitteilungen vor Augen haben.

III. Eine Anordnung personenbezogener Aussagen:

In diesem Abschnitt soll ein Zusammenhang zwischen der Universalanordnung von Bildschirmmitteilungen und denkenden Subjekten hergestellt werden. Da wir immer das Ziel der Herstellung einer abzählbaren Anordnung vor Augen haben, ist es notwendig, auch für alle möglichen denkenden Subjekte eine abzählbare Anordnung zu finden. Dies kann etwa folgendermaßen geschehen:

Wir unterteilen unsere Raum-Zeit-Welt in vierdimensionale Raum-Zeit-Elemente. Ein solches Raum-Zeit-Element bestehe aus einem Würfel mit der Seitenlänge der Elementarlänge und der Dauer der Elementarzeit. Offenbar können alle möglichen derartigen Raum-Zeit-Elemente abzählbar angeordnet werden.

Wir gehen im weiteren davon aus, daß ein denkendes Subjekt jedenfalls eine gewisse räumliche und zeitliche Ausdehnung haben muß. Wann immer ein derartiges denkendes Subjekt eine Aussage trifft, können Ort und Zeit dieser Aussage durch mindestens ein derartiges Raum-Zeit-Element eindeutig bestimmt werden.

Durch eine Kombination der abzählbaren Bildschirmmitteilungen (Abschnitt II) und der abzählbaren Raum-Zeit-Elemente aus diesem Abschnitt können daher alle möglichen Aussagen (soweit sie für das jeweilige denkende Subjekt in Form einer Bildschirmmitteilung dargestellt werden können) aller möglichen denkenden Subjekte abzählbar angeordnet werden.

IV. Eine Anordnung "aller reellen Zahlen":

Wir wollen nun aus den abzählbar angeordneten personenbezogenen Aussagen jene auswählen, durch welche reelle Zahlen bestimmt werden. Darunter verstehen wir personenbezogene Aussagen, in denen das denkende Subjekt auf Grund der Bildschirmmitteilung die Aussage trifft: "Durch diese Bildschirmmitteilung wird für mich eine reelle Zahl definiert".

Diese personenbezogenen Aussagen dienen also nicht der Beschreibung von reellen Zahlen für den Leser dieser Zeilen, sondern sie dienen der Beschreibung von Kombinationen von Aussagen in Form von Bildschirmmitteilungen in Verbindung mit denkenden Subjekten, für die durch diese Bildschirmmitteilung eine reelle Zahl definiert ist. Die Bedeutung der Bildschirmmitteilung für den Leser dieser Zeilen ist dabei gegenstandslos!

Wir sehen, daß diese Anordnung in keiner Weise darauf bedacht nimmt, ob die Aussage des denkenden Subjektes richtig oder falsch ist. Sie enthält alle richtigen Aussagen ebenso wie alle irrtümlich oder bewußt absichtlich falschen Aussagen. Für unsere Zwecke entscheidend ist aber, daß alle möglichen richtigen Aussagen über reelle Zahlen in dieser Anordnung ebenfalls enthalten sein müssen. Anders ausgedrückt: Für jede reelle Zahl, die in irgendeinem Zeitpunkt von irgendeinem denkenden Subjekt durch irgendeine Mitteilung beschrieben wird, ist in der Anordnung aller Aussagen ein Platz reserviert.

Ein Beweis für die Unvollständigkeit einer abzählbaren Anordnung überabzählbarer Mengen wird meist in der Weise geführt, daß nach Angabe der Anordnung ein Element definiert wird, das in dieser Anordnung nicht enthalten ist. Es gibt also einen Zeitpunkt,in dem ein denkendes Subjekt, nämlich der Kritiker der vollständigen Anordnung aller Elemente einer überabzählbaren Menge, ein Element durch eine Aussage beschreibt, das angeblich in der Anordnung nicht enthalten ist.

Nun haben wir es bisher vermieden, Elemente anzuordnen. Wir haben vielmehr nur Aussagen angeordnet, in denen ein denkendes Subjekt behauptet, daß durch eine bestimmte Bildschirmmitteilung ein Element der zur Diskussion stehenden Menge eindeutig definiert wird,und uns selbst hinsichtlich des Inhaltes der Aussagen eines Urteils entschlagen. Wir haben also in der bisherigen Anordnung nicht reelle Zahlen angeordnet, wohl aber haben wir personenbezogene Aussagen angeordnet, in denen denkende Subjekte über reelle Zahlen Aussagen treffen.

Wir behaupten nun, daß in dieser Anordnung für jede reelle Zahl ein Platz zur Verfügung steht, der keiner anderen reellen Zahl zukommt und daß diese Anordnung abzählbar ist. Ein Kritiker müßte also eine Aussage treffen, wonach eine von ihm zu bestimmende reelle Zahl existiere, für die in der Anordnung aller Aussagen kein Platz reserviert sei.

Für eine solche Aussage eines beliebigen Kritikers in einem beliebigen Zeitpunkt steht aber offenbar in unserer Anordnung ein Platz zur Verfügung (im Hinblick darauf, daß die Bildschirme aus doppelter Entfernung betrachtet bei einer doppelten Kantenlänge der Elementarquadrate das gleiche Bild ergeben, also für das denkende Subjekt die gleiche Aussage beinhalten, kommen sogar unendlich viele Bildschirmmitteilungen für jede einzelne Aussage, also unendlich viele Plätze, in Betracht). Da die Aussage des Kritikers in Form einer Bildschirmmitteilung dargestellt werden kann, für die, kombiniert mit Zeit und Ort dieser Kritik, ein Platz in der Anordnung reserviert ist, führt die Kritik zu einem Widerspruch. Der Kritiker muß ja gleichzeitig behaupten, durch seine Aussage werde eine reelle Zahl definiert, für die in der Anordnung angeblich kein Platz sei, während seine Aussage gerade durch diese Behauptung zu einem Platz in der Anordnung für die von ihm definierte Zahl führt.

In gleicher Weise können alle jene Unvollständigkeitsbeweise einer abzählbaren Anordnung von Elementen von angeblich überabzählbaren Mengen widerlegt werden, bei denen der Kritiker der abzählbaren Anordnung ein in der abzählbaren Anordnung angeblich nicht enthaltenes Element definiert. Eine solche Definition, ausgedrückt in einer Bildschirmmitteilung und verbunden mit Ort und Zeitpunkt der Kritik, führt per definitionem zu einem für dieses Element reservierten Platz in der Anordnung.

V. Das Cantor'sche Diagonalverfahren:

Zum Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen

0 und 1 kann das Cantor'sche Diagonalverfahren etwa in folgender Weise herangezogen werden: Bei gegebener angeblich abzählbaren Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 werden diese Zahlen in Form von unendlichen Dezimalzahlen angeschrieben. Nach vorliegen dieser Anordnung wird eine weitere Dezimalzahl wie folgt gebildet: "Ist die n'te Dezimalstelle der Dezimalzahl in der n'ten Zeile gleich 0, so beträgt die n'te Dezimalstelle der Cantor'schen Diagonalzahl 1. Ist die n'te Dezimalstelle der Dezimalzahl in der n'ten Zeile ungleich 0, so ist die n'te Dezimalstelle der Cantor'schen Diagonalzahl gleich 0". Die Cantor'sche Diagonalzahl ist daher verschieden von jeder Dezimalzahl in der abzählbaren Anordnung, da jeweils die n'te Dezimalstelle der Dezimalzahl in der n'ten Zeile nicht mit der n'ten Dezimalstelle der Cantor'schen Diagonalzahl übereinstimmt.

Angewendet auf die Anordnung von freien Stellen für "jede beliebige reelle Zahl", wie sie im vorigen Abschnitt geboten wurde, versagt jedoch dieses Konzept. Abgesehen davon, daß offenbleiben muß, ob überhaupt im gegenwärtigen Zeitpunkt bzw. im Zeitpunkt der Kritik alle jene Dezimalzahlen, für die in der Anordnung ein Platz reserviert ist, auch tatsächlich definiert werden können - dies muß bezweifelt werden, da dies ja voraussetzen würde, daß die Entscheidung aller möglichen denkenden Subjekte darüber, ob durch eine Aussage eine reelle Zahl definiert ist oder nicht, vorweggenommen werden müßte - führt die Aussage des Kritikers für sich allein schon zu einem Widerspruch. Wie immer er seine Aussage formulieren mag, sie kann in Form einer Bildschirmmitteilung festgehalten werden. Und diese Bildschirmmitteilung findet nun zusammen mit Ort und Zeit der Kritik ihren Platz in der Anordnung. Gerade die Behauptung des Kritikers, die von ihm definierte Diagonalzahl stelle eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 dar, sichert ihr einen Platz in dieser Anordnung. Nach Definition der Cantor'schen Diagonalzahl müßte daher jene Dezimalstelle, die ihrer Zeilenzahl in der Anordnung entspricht von gerade dieser Dezimalstelle verschieden sein. D.h. die Definition der zum Beweis der Unvollständigkeit der Anordnung konstruierten Diagonalzahl enthält in sich einen Widerspruch.

VI. Widersprüche in anderen Überabzählbarkeitsbeweisen:

Analog der Herleitung des Widerspruchs bei der Konstruktion einer die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen beweisenden Diagonalzahl kann ein Widerspruch in den Unvollständigkeitsbeweisen für die abzählbare Anordnung von Elementen aller jener angeblich überabzählbaren Mengen gefunden werden, bei denen der Widerspruch durch die Konstruktion eines angeblich in der abzählbaren Anordnung nicht enthaltenen Elementes dieser Menge herbeigeführt wird.

Ausgangspunkt ist wieder eine abzählbare Anordnung personenbezogener Aussagen, in denen die jeweils in Betracht kommenden denkenden Subjekte in den jeweils in Betracht kommenden Zeitpunkten behaupten, durch die jeweilige Bildschirmmitteilung werde ein Element der in Rede stehenden Menge beschrieben.

Behauptet nun ein Kritiker dieser abzählbaren Anordnung, daß für ein Element der Menge kein Platz reserviert sei, dann trifft er in einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort eine in Form einer Bildschirmmitteilung darstellbare Aussage, von der er selbst behauptet, durch sie werde ein Element der in Rede stehenden Menge beschrieben. Gerade durch diese Behauptung des Kritikers wird aber für die Kombination dieser Bildschirmmitteilung mit dem Raum-Zeit-Element der Kritik ein Platz in der Anordnung reserviert. Der Kritiker trifft also die Aussage: "Für das von mir beschriebene Element ist kein Platz in der Anordnung vorhanden", während gerade durch diese Behauptung des Kritikers ein solcher Platz reserviert ist und dies ist ein Widerspruch.

VII. Noch einmal: Die Universalanordnung

Durch eine Kombination der abzählbaren Bildschirmmitteilungen mit den abzählbaren Raum-Zeit-Elementen haben wir eine abzählbare Anordnung aller möglichen Aussagen beliebiger denkender Subjekte in beliebigen Zeitpunkten getroffen. Offenbar können wir eine gleichmächtige Menge als Untermenge der Universalanordnung definieren.

Dazu wählen wir jene Bildschirmmitteilungen aus, die folgende 3 Teile enthalten:

1. Eine schriftliche Mitteilung beliebiger Art.
2. Die Angabe eines Raum-Zeit-Elementes durch welches ein denkendes Subjekt bestimmt wird.
3. Die Feststellung des denkenden Subjektes, daß durch die oben stehende Mitteilung für ihn ein Element der jeweils in Rede stehenden Menge eindeutig beschrieben wird.

Durch die so definierten Bildschirmmitteilungen wird offenbar für jedes denkbare Element jeder denkbaren Menge ein Platz reserviert. Die so geschaffene Anordnung ermöglicht die abzählbare Anordnung von beliebigen Elementen beliebiger Mengen. Ein Einwand der Unvollständigkeit einer solchen Anordnung, der durch die Behauptung eines fehlenden Platzes für ein bestimmtes zusätzliches Element erhoben wird (etwa für die Cantor'sche Diagonalzahl) führt zu einem Widerspruch, da, wie bereits dargelegt, gerade durch diese Behauptung des Kritikers ein Platz in der Anordnung reserviert wird.

Abschließend: Die hier vorgeschlagenen Anordnungen beinhalten nicht reelle Zahlen oder andere Elemente von in Rede stehenden Mengen. Die für die Plätze in Betracht kommenden Elemente bzw. reellen Zahlen werden jeweils durch die, dem Raum-Zeit-Element entsprechenden denkenden Subjekte bestimmt. Die Richtigkeit der Behauptung des denkenden Subjekts, daß es sich im Falle des Elementes, für das die betreffende Bildschirmmitteilung gedacht ist, tatsächlich um ein solches Element handelt, wird nicht überprüft und spielt bei dieser Form der Anordnung keine Rolle.

VIII. Formalisierung

Es sei $\{BSM\}$ die Menge aller Bildschirmmitteilungen. $\{BSM\}$ kann abzählbar angeordnet werden. Diese Anordnung nennen wir eine Universalanordnung (UA).

Es sei $\{RZE\}$ die Menge aller Raumzeitelemente.

Es sei $\{A\}$ die Menge aller Aussagen A, die durch eine BSM formulierbar sind.

Es sei A $(E \in M)$ die Aussage $E \in M$.

Es sei B $[A, RZE]$ eine Bildschirmmitteilung die besagt, daß eine Person, die durch RZE eindeutig gekennzeichnet ist, in einem Zeitpunkt, der durch RZE eindeutig gekennzeichnet ist, die Aussage A behauptet oder behaupten würde.

Beliebige Elemente E von beliebigen Mengen M, für die eine Aussage $A = A(E \in M)$ formuliert werden kann, können nun folgendermaßen angeordnet werden:
Der Platz jeder BSM der Gestalt $B[A(E \in M), RZE]$ in der UA wird dem Element E zugeordnet. (Offenbar gibt es dann unendlich viele Plätze für jedes E).

$$B\,[A(E \in M), RZE] \rightarrow E$$

Behauptung:
Jedem beliebigen Element E jeder beliebigen Menge $\bar{M}$ kann in der UA mindestens 1 Platz zugeordnet werden, der keinem anderen Element zugeordnet ist.

Folgerung:
Alle Mengen von Elementen für die Aussagen $A(E \in M)$ als BSM formuliert werden können, sind abzählbar.

Beweis (indirekt):
Wir nehmen an, es gäbe ein $\bar{E} \in \bar{M}$, dem kein Platz in der UA zugeordnet wurde.

$$\forall_{RZE} \exists \neg B\,[A(\bar{E} \in \bar{M}),\ RZE] \rightarrow \bar{E} \qquad (*)$$

Es muß dann eine Person geben können, die in irgendeinem Zeitpunkt diese Behauptung aufstellen kann. Diese Person muß also die Aussage $A(\bar{E} \in \bar{M})$ in irgendeinem Zeitpunkt bejahen können. Es gibt somit (mindestens) ein diese Person und diesen Zeitpunkt eindeutig kennzeichnendes $\overline{RZE}$ mit $B[A(\bar{E} \in \bar{M}), \overline{RZE}] \in UA$ und

$$B[A(\bar{E} \in \bar{M}), \overline{RZE}] \rightarrow \bar{E}$$

im Widerspruch zu (*).

IX. Nachwort

Eine kleine Brücke zu Wittgenstein.
Er beschränkt die Möglichkeit der "sinnvollen" Sprache "endgültig". Damit beschreibt er das Mystische bzw. Transzendente "von innen".

Auf die Frage, wo in seinem System eine "wegwerfende Handbewegung" Platz fände, wußte Wittgenstein keine Antwort. Dies führte seinerseits zu weiteren Überlegungen.

Wittgenstein betrachtete die Sprache offenbar als Transportmittel für Information von einer Person zu einer anderen, sodaß neben der logischen Unbedenklichkeit von Sätzen auch die "Spielregeln" für die Verwendung (Bedeutung?) von Begriffen eine Rolle spielte (Sprachspiele).

In der hier vorgestellten UA ist jedoch die Sinnhaftigkeit einer Information für eine zweite Person nicht mehr vorausgesetzt. Die UA enthält somit alle im Sinne Wittgensteins sinnvollen Sätze (worüber man sprechen kann), aber auch "Unsinniges". In der UA wird auch "über Dinge geredet, über die man nicht reden kann", etwa wenn ein Gefühl (wegwerfende Handbewegung) durch Angabe des RZE "beschrieben" wird in dem es stattfindet.

Man könnte vielleicht sagen: Die UA enthält neben den laut Wittgenstein sinnvollen Sätzen auch alle jene Sätze, die nur für den der sie ausspricht, im Zeitpunkt ihres Aussprechens, einen Sinn ergeben. Damit müßte auch das von Wittgenstein als mystisch Gesehene, also das Transzendente, mit sprachlichen Mitteln (im Sinne der UA) eingefangen sein.

ANTI-CANTOR-ANORDNUNG

(Karl-Heinz Wolff, Wien)

Π: = (2, 3, ... π_i , ...) = Folge aller der Größe nach angeordneten Primzahlen.
α_i , (i = 1, 2, ... ω), sind zugelassene Schriftzeichen, beispielsweise Buchstaben, Ziffern, Symbole, das Spatium, usw. in verschiedenen Schriftarten, wie Latein, Griechisch, Gotisch, mager, fett, kursiv usw. auf der Zeile, höher- oder tiefergestellt usw.
Ω: = {α_1, α_2, ... α_Φ} = Menge aller zugelassenen Schriftzeichen. Es kann sich z.B. um alle in einer Druckerei zur Verfügung stehenden Zeichen handeln.
^{L}ZF: = α_{i1}, α_{i2}, ... α_{iL} ist eine Zeichenfolge der Länge L, bestehend aus L angeordneten Schriftzeichen $\alpha_k \in \Omega$ mit k = i_1, i_2, ... i_L.
E(ZF) bedeute, das Element E werde durch die Zeichenfolge ZF eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben.

Abzählbare Anordnung aller Zeichenfolgen in einer Folge *ZFA*:

$$\Pi: = \pi_{k1}^{i1} \bullet \pi_{k2}^{i2} \bullet \ldots \bullet \pi_{kL}^{iL} \wedge (\pi_{ki} \in \Pi) \wedge (k_i < k_{i+1}) \Rightarrow ZF^{(\Pi)}: = \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots \alpha_{iL} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Pi(ZF^{(\Pi)}) = \pi_1^{i1} \bullet \pi_2^{i2} \bullet \ldots \bullet \pi_L^{iL}$$

$$ZFA: = \big(ZF_i \mid \forall ZF: \exists(i|ZF = ZF_i), \Pi(ZF_1) = 2, \forall i: \Pi(ZF_i) < \Pi(ZF_{i+1})\big)$$

Abzählbare Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in einer Folge *RA(0,1):*

$$\Pi(E): = \min_{E(ZF)} \Pi(ZF)$$

$$RA(0,1): = \big(r_n|r_n \in R, 0 < r_n < 1, \forall n(ZF|\ r_n = r_n(ZF)): \exists(i(n)|\ r_n = r_n(ZF_{i(n)})),$$
$$\nu < \mu \Leftrightarrow i(\nu) < i(\mu)\big) \wedge r_n = r_{n1}r_{n2} \ldots r_{nn} \ldots$$

Einwand (EC) nach Cantor:

$$(EC): = \exists c \in \{c|0<c<1, c \in R, c = 0{,}c_1c_2 \ldots c_n \ldots , \forall n: c_n \neq r_{nn}\} \Rightarrow \forall n: c \neq r_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c \notin RA(0,1)$$

Gegeneinwand

$$\exists(EC) \Rightarrow \exists\{k|ZF_k \in ZFA, c = c(ZF_k)\} \neq \{\Theta\} \Rightarrow \exists n: c = r_n \in RA(0,1) \Rightarrow W!$$

Ergänzung Jänner 2013:

Cantor übersieht den Unterschied zwischen *potentiell* Unendlich und *actual* Unendlich. In seiner Argumentation behandelt er nämlich die Diagonalzahl c so, als ob ihre sämtlichen Dezimalstellen bereits *actual* zur Verfügung stünden. Sie stehen aber genauso wie die der Diagonalzahl zugrunde gelegte Anordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 nur *potentiell* in ihrer Gesamtheit zur Verfügung, so dass aus ihnen in keinem Zeitpunkt ein c als reelle Zahl tatsächlich vollständig gebildet werden könnte.

Die Feststellung, eine Menge habe die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen löst auch noch nicht das Problem, eine solche Menge tatsächlich abzählbar anzuordnen. Der Autor verwendet daher statt des widersprüchlichen Begriffes "Überabzählbare Menge" lieber den Begriff "Nicht abzählbar anordenbare Menge".

Nicht zuletzt die immer engere Fokussierung von Forschungsarbeiten lässt es unwahrscheinlich erscheinen, dass je jemand sich ernsthaft mit den hier zugrunde gelegten Überlegungen zum ersten Hilbert-Problem auseinandersetzen wird. Viel wahrscheinlicher ist es, dass dessen Lösung irgend einmal unabhängig von den hier vorgelegten Untersuchungen gefunden werden wird.

Über eine Universalschrift

PHILOSOPHIA NATURALIS

Archiv für Naturphilosophie und die philosophischen Grenzgebiete
der exakten Wissenschaften und Wissenschaftsgeschichte

Begründet von Eduard May †

Herausgegeben von Joseph Meurers

Sonderdruck aus

Band 16, Heft 2

1976

1976

VERLAG ANTON HAIN – MEISENHEIM/GLAN

Über eine Universalschrift

von K.-H. Wolff, Wien

Einleitung

In der Mengenlehre wird eine Voraussetzung stillschweigend als erfüllt angesehen, die für wichtige Aussagen wesentlich ist, aber nicht immer erfüllt sein muß. Es handelt sich um die Annahme, *daß es stets möglich ist, zu jeder beliebigen vorgegebenen Menge ein weiteres Element hinzuzufügen.* Auf dieser Annahme beruht etwa die Möglichkeit, von Mengen beliebiger Mächtigkeit zu Mengen höherer Mächtigkeit aufzusteigen.

Im folgenden führen wir eine sogenannte Universalschrift ein, deren wichtigste Eigenschaft darin liegt, daß in ihr auch Ort und Zeitpunkt berücksichtigt sind, an und in dem die Schrift gelesen wird. Eine mit Hilfe dieser Universalschrift beschriebenen Menge kann nun nicht mehr ohne weiteres stets, also „jederzeit", erweitert werden, da Ort und Zeitpunkt der Erweiterung in der Universalschrift zum Ausdruck gebracht werden müssen. Die Menge aller in der Universalschrift beschreibbaren Objekte kann daher nicht mehr erweitert werden. Da auch gezeigt wird, daß die Menge aller in der Universalschrift beschreibbaren Objekte abzählbar angeordnet werden kann, versagen die Beweise über die Existenz von Mengen überabzählbarer Mächtigkeit. Dies läßt sich insbesondere am Beispiel der Menge der rellen Zahlen zeigen.

1. Die Bildschirmmitteilung

Eine wesentliche Eigenschaft von Aussagen der Geisteswissenschaften und der Mathematik ist es, daß sie in schriftlicher Form dargestellt werden können. Diese Eigenschaft, der ansonsten nur mehr oder weniger praktische Bedeutung zukommt – wissenschaftliche Arbeiten werden ja üblicherweise in schriftlicher Form veröffentlicht – wird in die folgenden Überlegungen wesentlich eingehen. Aus diesem Grunde wird durch die folgende Einführung einer „Universalschrift" eine gewisse Ordnung in die Menge der schriftlichen Aussagen gebracht.

Wir beschränken uns auf solche schriftliche Aussagen, die im Prinzip auf einem ausreichend großen Fernsehbildschirm dargestellt werden können. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden quadratische „Bildschirmmitteilungen" betrachtet.

Eine Bildschirmmitteilung ist ein Raster aus nn Elementarquadraten. Jedes Elementarquadrat hat die Seitenlänge 1/10 mm und ist entweder weiß oder schwarz. n durchläuft die Menge aller natürlichen Zahlen.

Für n = 1 gibt es offenbar genau zwei Bildschirmmitteilungen. Da die Mitteilung in diesem Fall aus einem einzigen Elementarquadrat besteht, kann dieses nämlich entweder weiß oder schwarz sein. Für n = 2 gibt es 16 solche Bildschirmmitteilungen. In diesem Fall besteht die Bildschirmmitteilung aus 4 Quadraten, von denen jedes weiß oder schwarz sein kann, also insgesamt 2^4 Möglichkeiten.

Es ist leicht einzusehen, daß jede schriftliche Mitteilung in Form einer derartigen Bildschirmmitteilung dargestellt werden kann, da solche Mitteilungen aus Buchstaben, Zeichen und sonstigen Symbolen bestehen, die durch schwarze Elementarquadrate der Seitenlänge 1/10 mm auf weißem Grund mit genügender Genauigkeit dargestellt werden können. Die Menge $\{ M \}$ aller derartigen Bildschirmmitteilungen M kann nun leicht abzählbar angeordnet werden, indem man in jeder Mitteilung einem weißen Elementarquadrat die Ziffer 1 und einem schwarzen Elementarquadrat die Ziffer 2 zuordnet und jeder Mitteilung jene Zahl zuordnet, die man erhält, wenn die Einser und Zweier zeilenweise gelesen werden. Aus der abzählbaren Anordnung der so erhaltenen Zahlen ergibt sich eine abzählbare Anordnung der Mitteilungen.

Man kann sich nun jede Mitteilung realisiert denken als ein quadratisches Stück Papier der Seitenlänge $\frac{n}{10}$ mm, dessen Oberfläche mit weißen bzw. schwarzen Elementarquadraten der Seitenlänge $\frac{1}{10}$ mm bedeckt ist. Die Menge dieser Mitteilungen, ein unendlicher Stoß von immer größer werdenden Papierstücken, enthält in einem gewissen Sinne „alle" Mitteilungen. Beispielsweise enthält er sämtliche bereits geschriebenen, aber auch sämtliche in Zukunft noch zu schreibenden wissenschaftlichen Arbeiten. Auch die vorliegende Arbeit kommt in der Menge dieser Mitteilungen vor, und zwar sogar unendlich oft, denn durch eine Verdoppelung, Verdreifachung usw. der Mitteilungen vom Maße n^2 auf das Maß $(2n)^2$, $(3n)^2$ usw. bleibt der Sinn der Mitteilung – soferne keine absoluten Maßstäbe auftreten – unverändert, ebenso wie der Sinn eines Satzes von der Größe der verwendeten Buchstaben unabhängig ist.

Es erscheint daher von einem gewissen Standpunkt aus berechtigt, die Menge der Mitteilungen als „Universalschrift" zu bezeichnen.

2. Die Universalschrift

Die Universalschrift eignet sich insbesondere zur Beschreibung beliebiger Objekte unseres Denkens. Dazu gehören auch alle jene Objekte, die

Gegenstand mathematischer Untersuchungen sind. Wir wollen uns hier auf reelle Zahlen beschränken, aber gleich an dieser Stelle anmerken, daß die für reelle Zahlen im folgenden angestellten Überlegungen prinzipiell für alle Objekte unseres Denkens gelten.

Reelle Zahlen lassen sich auf verschiedene Weise in der Universalschrift darstellen. So bezeichnet etwa „1", „eins", „$\frac{5}{5}$" usw. die Zahl 1. Sicher sind alle endlichen natürlichen Zahlen, aber auch alle endlichen Dezimalzahlen in der Universalschrift darstellbar.

Bleiben wir im Bereich der reellen Zahlen, dann kann die Frage der Darstellbarkeit einer Zahl in der Universalschrift nur bei unendlichen Dezimalzahlen problematisch erscheinen. Die Größe der Mitteilungen M, also die Seitenlänge $\frac{n}{10}$ mm der quadratischen Mitteilung, ist zwar unbegrenzt, aber jedenfalls endlich. Auf einem derartigen endlichen Quadrat läßt sich aber nur eine endliche Menge von Schriftzeichen unterbringen. Die Dezimalzahl 0'333 . . ., als unendliche Dezimalzahl *angeschrieben*, ist in der Universalschrift nicht darstellbar. Der Leser dieser Zeilen weiß aber bereits, daß es sich um die Dezimalzahl $0'\dot{3} = 1/3$ handelt, obwohl ihm nur eine endliche Mitteilung, nämlich der bisherige Teil dieser Arbeit, vorliegt. Dies offenbar deshalb, weil auch unendliche Dezimalzahlen in endlicher Form angeschrieben werden können, wobei wir vorläufig die Frage, ob und in welchem Sinn „alle" Dezimalzahlen in endlicher Form dargestellt werden können, noch offenlassen.

Als weiteres Beispiel führen wir zunächst die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen, an, die etwa in der Form

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

dargestellt werden kann, wobei wir bemerken, daß die Bedeutung des Summenzeichens sowie der Summierung bis ins Unendliche ebenfalls durch eine endliche Mitteilung in der Universalschrift erklärt werden kann.

Aber auch nicht berechenbare Zahlen können in der Universalschrift dargestellt werden, wie etwa die unendliche Dezimalzahl $0'\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$, wobei $\alpha_n = 0$, wenn die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ eine ganzzahlige Lösung in a, b und c besitzt, und $\alpha_n = 1$ sonst. Obwohl diese Zahl möglicherweise unberechenbar ist, läßt sie sich doch definieren und in der Universalschrift darstellen.

Aber in der Universalschrift lassen sich Zahlen auch noch wesentlich allgemeiner und unbestimmter definieren, ohne daß die Eindeutigkeit dieser Definition darunter leidet. So beginnen etwa mathematische Beweise mit der Formulierung: „Es sei x eine Zahl aus der Menge X . . .". Im weiteren Verlauf des Beweises wird mit diesem x so wie mit einer tatsächlichen Zahl gerechnet, ohne daß x näher spezifiziert wird. Trotzdem ist es für jeden Leser dieses Beweises klar, daß es sich bei x um eine feste, für die Dauer der Beweisführung jedenfalls unveränderliche Zahl handelt. Durch die oben erwähnte Beschreibung: „Es sei x eine Zahl aus der Menge X ...“ wird für die Dauer der Beweisführung eine Zahl eindeutig ausgewählt, ohne daß sie jedoch näher bestimmt würde[1].

Allen diesen Darstellungen von Zahlen durch Mitteilungen aus der Universalschrift ist gemeinsam, daß *für den Leser der Mitteilung im Zeitpunkt des Lesens* (die Bedeutung des Heraushebens des Lesers und des Zeitpunktes des Lesens wird später noch erläutert) dieser Mitteilung eine Zahl eindeutig zugeordnet ist. Um die verschiedenen Ausdrücke, wie Beschreibung, Darstellung, Definition usw. zu vereinheitlichen, wollen wir im folgenden die Sprachregelung treffen, daß eine Zahl durch eine solche Mitteilung eindeutig „beschrieben“ wird.

Tatsächlich lesbare Mitteilungen sind nicht nur endlich, sondern auch beschränkt, da es einer Person im Laufe ihres zeitlich beschränkten Lebens nur möglich ist, dem Umfang nach beschränkte Mitteilungen zu lesen. Trotzdem wird man behaupten dürfen, daß etwa die Zahl $10^{10^{10}}$ wenigstens prinzipiell als Dezimalzahl angeschrieben werden kann. Da die Mitteilungen der Universalschrift nur als endlich, nicht aber als beschränkt vorausgesetzt sind, findet sich eine Beschreibung der Zahl $10^{10^{10}}$ nicht nur in der hier verwendeten Form, sondern auch als Dezimalzahl in der Universalschrift, und zwar – wie bereits erwähnt – sogar unendlich oft. Die Universalschrift enthält offenbar sowohl die aktual anschreibbaren Zahlen als auch die nur potentiell anschreibbaren Zahlen, die aus Gründen der Endlichkeit, etwa der auf der Erde zur Verfügung stehenden Masse, nicht tatsächlich angeschrieben werden können.

3. Die erweiterte Universalschrift

Die Bedeutung eines Schriftzeichens bzw. allgemeiner eines Symbols hängt von der verwendeten Schrift, von der verwendeten Sprache ab. Vielleicht bedeutet das Zeichen „1“ bzw. das Wort „eins“ einmal etwas völlig anderes, so wie für jemanden, der der chinesischen Sprache nicht mächtig ist, die Schriftzeichen dieser Sprache entweder keine Bedeutung haben oder eine andere als für einen Chinesen. Um nun auch die Möglichkeit

1 Hier, wie in jedem anderen Fall, in dem von einer „Beschreibung durch eine Mitteilung der Universalschrift“ gesprochen wird, denken wir uns die Beschreibung auf ein quadratisches Papier vom Ausmaß einer Bildschirmmitteilung geschrieben, und zwar entweder schwarze Schrift auf weißem Grund oder weiße Schrift auf schwarzem Grund. Die Schriftzeichen müssen groß genug gewählt werden, um aus Elementarquadraten (Seitenlänge 1/10 mm) zusammengesetzt werden zu können.

verschiedener Bedeutungen ein und derselben Mitteilung der Universalschrift zu berücksichtigen, wollen wir uns überlegen, daß eine Mitteilung offenbar nur dann sinnvoll ein Denkobjekt oder im speziellen eine Zahl beschreiben kann, wenn im Zeitpunkt des Lesens dieser Mitteilung der Leser genau eine Zahl der Mitteilung zuordnet. Es ist also ohne weiteres möglich, daß zwei verschiedene Personen ein und derselben Mitteilung zwei verschiedene Zahlen zuordnen bzw. daß ein und dieselbe Person ein und derselben Mitteilung in verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Zahlen zuordnet. Letzteres etwa bei der Mitteilung „Es sei x eine Zahl aus der Menge X . . .“ wenn es sich um verschiedene Mengen bzw. um verschiedene Beweise handelt.

Diese mögliche Mehrdeutigkeit prinzipiell aller Mitteilungen der Universalschrift scheint zunächst einen starken Einwand gegen die Brauchbarkeit des Konzeptes der Universalschrift zu bedeuten. Diesem Einwand kann jedoch durch eine Ergänzung des Konzeptes der Universalschrift Rechnung getragen werden. Für die späteren Überlegungen reicht es völlig aus vorauszusetzen, daß es eine bestimmte Person gibt, bzw. daß eine bestimmte Person denkbar ist, für die in einem bestimmten Zeitpunkt durch eine Mitteilung eine Zahl eindeutig beschrieben wird. Mitteilungen, die keiner denkbaren Person in keinem denkbaren Zeitpunkt eine Zahl beschreiben, brauchen nicht betrachtet zu werden. Man überlegt sich allerdings leicht, daß es in keinem Zeitpunkt zulässig wäre, aufgrund dieser Überlegung eine Mitteilung für alle Zeitpunkte auszuschalten. Wohl aber wäre es für den Autor dieser Zeilen im Zeitpunkt der Niederschrift zulässig, die Mitteilung, die nur aus einem weißen Elementarquadrat besteht, auszuschließen, da sie im Zeitpunkt der Niederschrift für ihn keine Zahl beschreibt.

Gegenstand der folgenden Überlegungen wird vor allem die eindeutige Zuordnung von Zahlen zu Mitteilungen sein. Da eine solche eindeutige Zuordnung grundsätzlich nur für eine bestimmmte Person und für einen bestimmten Zeitpunkt möglich erscheint, muß das Konzept der Universalschrift so erweitert werden, daß für jede Person und für jeden Zeitpunkt eine eigene komplette Universalschrift zur Verfügung steht. Zur Kennzeichnung einer Mitteilung aus diesem erweiterten Konzept ist daher die Kennzeichnung der Mitteilung aus der ursprünglichen Universalschrift zuzüglich der Kennzeichnung der Person und des Zeitpunktes, in dem diese Person die Mitteilung liest (oder lesen Könnte) notwendig.

Um dies zu ermöglichen, führen wir sogenannte Raum-Zeit-Elemente ein. Als Raum-Zeit-Element bezeichnen wir einen Würfel mit der Seitenlänge der Elementarlänge und mit der Dauer der Elementarzeit. Für jede denkbare Person und für jeden denkbaren Zeitpunkt, in dem diese Person eine Mitteilung liest, gibt es dann mindestens ein Raum-Zeit-Element, das dieser Person und der Zeitspanne des Lesens der Mitteilung zugeordnet werden kann. Dies folgt einfach daraus, daß jede Person einen Raum einnimmt, der größer ist als ein Würfel mit der Seitenlänge der Elementarlänge und jedes Lesen einer Mitteilung eine Zeitspanne benötigt, die größer ist als die Elementarzeit.

Es ist daher stets möglich, zwei verschiedene Personen, die die selbe Mitteilung lesen oder auch einer Person, die die selbe Mitteilung in zwei verschiedenen Zeitpunkten liest, zwei verschiedene Raum-Zeit-Elemente zuzuordnen. Umgekehrt ist durch die Angabe eines Raum-Zeit-Elementes höchstens eine Person und höchstens ein Lesevorgang bestimmt.

Wir bilden nun eine erweiterte Universalschrift, indem wir jedem Raum-Zeit-Element einen kompletten Satz von Mitteilungen der ursprünglichen Universalschrift zuordnen.

Es bedarf keiner weiteren Erörterung, daß sich die Raum-Zeit-Elemente abzählbar anordnen lassen. Die erweiterte Universalschrift enthält zu jedem Raum-Zeit-Element jede Mitteilung genau ein Mal. Es können daher auch die Mitteilungen der erweiterten Universalschrift abzählbar angeordnet werden.

Man kann sich die Mitteilungen aus der erweiterten Universalschrift zusammengesetzt denken aus einer ursprünglichen Bildschirmmitteilung, ergänzt um die Kennziffer des Raum-Zeit-Elementes in der abzählbaren Anordnung dieser Raum-Zeit-Elemente.

In gewissem Sinne ist allerdings auch die erweiterte Universalschrift in der ursprünglichen Universalschrift enthalten. Die ursprüngliche Universalschrift enthält nämlich zu jeder Mitteilung M auch diese Mitteilung, ergänzt um den Satz „Diese Mitteilung ist dem Raum-Zeit-Element Nr. . . . zugeordnet.“ Beschränkt man sich in der Universalschrift auf jene Mitteilungen, die eine derartige Ergänzung enthalten, wobei an die Stelle der vier Punkte der Ergänzung der Reihe nach alle natürlichen Zahlen zu setzen sind, dann erhält man nur mehr Mitteilungen, die durch ihren letzten Satz einem Raum-Zeit-Element zugeordnet sind, wie dies in der erweiterten Universalschrift gefordert wird.

4. Die Universalanordnung

Die Universalschrift ermöglicht in ihrer erweiterten Form eine Anordnung von Denkobjekten, insbesondere von reellen Zahlen, nach neuartigen Gesichtspunkten. Da die Mitteilungen der erweiterten Universalschrift abzählbar angeordnet werden können, können alle jene reellen Zahlen, die durch eine Mitteilung der Universalschrift eindeutig beschrieben werden, abzählbar angeordnet werden. Da die Universalschrift aber auch

Mitteilungen enthält, deren Bedeutung erst in ferner Zukunft – oder auch in ferner Vergangenheit – und durch völlig unbekannte und gegenwärtig nicht befragbare Personen enthüllt werden könnte, kann eine derartige Anordnung in keinem Zeitpunkt auch nur beliebig weit vervollständigt werden.

Eine Anordnung von reellen Zahlen nach den hier dargelegten Grundsätzen enthält aber jedenfalls alle reellen Zahlen, die sich prinzipiell in irgendeinem Zeitpunkt durch irgendeine Person in Form irgendeiner endlichen, aber beliebig umfangreichen Mitteilung darstellen lassen.

Etwas allgemeiner gilt dies für alle Objekte unseres Denkens. Die abzählbare Anordnung der Mitteilungen der erweiterten Universalschrift ermöglicht es, alle Objekte unseres Denkens, die in irgendeinem Zeitpunkt für irgendeine Person durch irgendeine Mitteilung eindeutig beschrieben werden können, abzählbar anzuordnen. Aus diesem Grunde soll jede Anordnung von Objekten aufgrund einer Anordnung der Mitteilungen der erweiteren Universalschrift als Universalanordnung bezeichnet werden.

Etwas formaler kann eine Universalanordnung folgendermaßen beschrieben werden. Es gelte:

$|$„. . . “, P,t,M$|$ $\Leftrightarrow$ eine Person P ist in einem Zeitpunkt t bereit, aufgrund der Mitteilung M die Aussage „. . .“ als wahr zu bezeichnen.

Beispielsweise kann als Mitteilung M eine Mitteilung der Gestalt:
„$x = 0'a_1 \ldots a_n \wedge \bigwedge_m a_m \in (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$“, als Person der Autor der vorliegenden Arbeit, als Zeitpunkt ein Zeitpunkt aus dem für das Schreiben dieser Arbeit notwendigen Zeitintervall und als Aussage „. . .“ = „x ist eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1“ gewählt werden.

Wir wollen nun eine Universalanordnung von Elementen x einer bestimmten Menge X vornehmen. Beispielsweise sei x eine beliebige Dezimalzahl zwischen 0 und 1 und X die Menge aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Die Aussage „$x \in X$“ bedeutet daher, daß x eine in dieser Universalanordnung enthaltene Dezimalzahl zwischen 0 und 1 ist. Für die Universalanordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, UA(DZ), gilt daher:
$\bigvee_P \bigvee_t \bigvee_M |x \in X, P, t, M| \Leftrightarrow$ x ist eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 aus UA(DZ).
UA(DZ) enthält also auch Elemente x, die von einer Person P irgendeinmal fälschlich (irrtümlich oder absichtlich) als der Menge X zugehörig bezeichnet werden. Es genügt sogar die grundsätzliche Bereitschaft von P, diese Zugehörigkeit als wahr zu bezeichnen. In UA(DZ) können daher auch Elemente auftauchen, deren Definition falsch bzw. sogar in sich widerspruchsvoll ist. Behauptet etwa eine Person P in irgendeinem Zeitpunkt t, daß durch die Mitteilung
$\bar{M}$: = „die größte reelle Zahl kleiner als 1/2 und größer als 3/4“

eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben wird, dann wird in UA(DZ) für das durch $\overline{M}$ für P in t beschriebene Objekt ein Platz reserviert, wenn auch weder der Autor dieser Arbeit noch wahrscheinlich je irgendein Leser die Meinung von P in t teilen wird. Die hier definierte Mitteilung $\overline{M}$ muß natürlich in Form einer quadratischen Bildschirmmitteilung vorgestellt werden.

Die Frage, welche in einer Universalanordnung angeordneten Objekte tatsächlich sinnvoll definiert sind, soll und kann hier nicht geprüft werden. Wir halten aber fest, daß jedes für eine konkrete Person in irgendeinem Zeitpunkt t konkret oder potentiell durch irgendeine Mitteilung M eindeutig beschriebene Objekt jedenfalls in der Universalanordnung enthalten ist und alle Objekte der Universalanordnung abzählbar angeordnet sind. Es ist aber prinzipiell nicht möglich, in irgendeinem Zeitpunkt allgemein, d. h. für alle Personen P und für alle Zeitpunkte t, zu entscheiden, welche Objekte der Universalanordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 tatsächlich Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 sind. Da die Menge der Objekte dieser Universalanordnung sicher nicht kleiner ist als die Menge der in dieser Universalanrodnung enthaltenen Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, folgt daraus, daß die Mächtigkeit der Menge der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 aus der Universalanordnung nicht größer ist als die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen.

5. Die Problematik des Cantor'schen Beweises der Überabzählbarkeit

Wir betrachten nun die Universalanordnung aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Diese Anordnung enthält also genau jene Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, die in irgendeinem Zeitpunkt für irgendeine Person durch irgendeine Mitteilung eindeutig beschrieben werden. Wir heben hervor, daß diese Art der Anordnung Begriffe wie Sprache, Metasprache usw. vermeidet und lediglich auf das Verhalten einer Person beim Lesen einer Mitteilung in einem bestimmten Zeitraum abgestellt ist.

Offenbar sind alle Dezimalzahlen aus dieser Universalanordnung abzählbar angeordnet.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie weit diese Universalanordnung „vollständig" ist, wie weit sie also „alle" Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 enthält.

Um diese Frage zu behandeln, teilen wir die Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 in zwei Klassen. Klasse 1 enthält alle Dezimalzahlen aus der oben beschriebenen Universalanordnung, Klasse 2 alle übrigen Dezimalzahlen. Wir interessieren uns vor allem für diese Klasse 2 und halten fest, daß die

Annahme von Dezimalzahlen in Klasse 2 an sich zu keinem Widerspruch führt. Wie weit ist aber eine solche Annahme sinnvoll?

Zunächst enthält Klasse 2 sicher keine „beschreibbaren" Zahlen, wenn man „beschreibbar" als „durch eine Mitteilung der Universalschrift beschreibbar" versteht. Wie steht es aber nun mit der bekannten Cantor'schen Diagonalzahl aus dem Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nach Cantor? Dieser Beweis kann bekanntlich folgendermaßen geführt werden:

Es sei

$$\begin{aligned} a_1 &= 0'a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\ldots \\ a_2 &= 0'a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\ldots \\ &\vdots \\ a_n &= 0'a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, \ldots\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

eine abzählbare Anordnung der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Nun bilde man eine Dezimalzahl

$$b = 0'b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\ldots$$

mit

$$b_n = 1 \text{ für } a_{nn} \neq 1$$

und $\quad b_n = 2 \text{ für } a_{nn} = 1.$

Offenbar gilt $\bigwedge_n b \neq a_n$ wegen $\bigwedge_n b_n \neq a_{nn}$. Da b eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 ist, folgt daraus die Unvollständigkeit der Anordnung.

Wie weit kann die Cantor'sche Beweisführung bei Zugrundelegung der Universalanordnung noch aufrecht erhalten werden?

Die Cantor'sche Diagonalzahl b ist zweifellos in Form einer endlichen Mitteilung beschreibbar. Legt man eine konkrete Anordnung von Dezimalzahlen $a_1, a_2, \ldots,$ zugrunde, dann ist durch eine Mitteilung, welche diese Anordnung so wie das Konstruktionsprinzip von b beschreibt, eine konkrete Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben. Die konkrete Anordnung ist durch die in dieser Arbeit dargelegte Universalanordnung beschrieben unter der Voraussetzung, daß – was nur der Einfachheit halber nicht vorgenommen wurde – eine konkrete Anordnung der Raum-Zeit-Elemente gewählt wird.

An den Leser dieser Arbeit wird nun die Frage gestellt, ob durch b eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben wird. Verneint er diese Frage, dann ist für ihn im Zeitpunkt des Lesens dieser Arbeit der Cantor'sche Beweis der Überabzählbarkeit bzw. der Beweis der Unvollständigkeit der Universalanordnung gescheitert, denn dann ist eben für ihn im Zeitpunkt des Lesens b keine Dezimalzahl zwischen 0 und 1. Bejaht er hingegen diese Frage, dann gibt es also eine Person, nämlich den Leser, für den in einem bestimmten Zeitpunkt, nämlich einem beliebigen Zeitpunkt aus dem für das Lesen notwendigen Zeitintervall, eine Mitteilung, nämlich die vorliegende Darstellung, eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1, nämlich b, eindeutig bezeichnet. Damit ist aber per definitionem b eine Zahl aus Klasse 1. Die b beschreibende Mitteilung führt zusammen mit dem durch den Leser festgelegten Raum-Zeit-Element zu einem für b reservierten Platz in der Universalanordnung. Dann gibt es aber *nach Definition der Anordnung* ein n mit $b = a_n$. Nun beruht die Definition von b einerseits auf der Definition der Anordnung und andererseits auf der Definition der einzelnen b_n. Aus diesen beiden Definitionen folgt aber

$$\bigvee_n b_n = a_{nn} \wedge b_n \neq a_{nn}$$

und dies ist ein Widerspruch. Die Behauptung, durch b in der hier definierten Form werde eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 beschrieben, führt daher zu einem Widerspruch und darf somit vom Leser nicht aufgestellt werden.

Der Widerspruch in der Cantor'schen Beweisführung konnte deshalb herbeigeführt werden, weil in der Universalanordnung grundsätzlich für alle Mitteilungen und für alle Raum-Zeit-Elemente ein Platz reserviert ist, der genau dann besetzt wird, wenn für eine Person in einem Zeitpunkt durch eine Mitteilung ein entsprechendes Denkobjekt, hier eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1, eindeutig beschrieben wird. Der sonst die Unvollständigkeit der Anordnung beweisende Widerspruch führt für die hier gewählte Anordnung zu einem Widerspruch in der Definition der Diagonalzahl. Damit ist der Beweis der Unvollständigkeit der Universalanordnung mißglückt.

In analoger Weise läßt sich zeigen, daß bei Zugrundelegung der Universalanordnung auch für andere Elemente als für Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 der Beweis der Überabzählbarkeit durch Konstruktion eines in der Universalanordnung angeblich nicht enthaltenen Elementes zu einem Widerspruch in der Definition dieses Elementes führt.

6. Die Abzählbarkeit aller Denkobjekte

Mit Hilfe der Universalanordnung kann zwar gezeigt werden, daß die Definition eines angeblich neuen Elementes einen Widerspruch enthält, doch führt die Annahme von Dezimalzahlen der Klasse 2 an sich noch zu keinem Widerspruch. Das gleiche gilt für eine analoge Klasseneinteilung beliebiger Denkobjekte. Alle Objekte unseres Denkens, insbesondere aber Objekte der Mathematik, lassen sich in Klasse 1 oder Klasse 2 einordnen, je nachdem, ob in irgendeinem Zeitpunkt für irgendeine Person irgendeine Mitteilung dieses Denkobjekt eindeutig beschreibt oder nicht. Die Annahme der „Existenz“ (in welchem Sinne immer) von Denkobjekten der Klasse 2 führt an sich zu keinem Widerspruch. Sie ist jedoch nicht sehr sinnvoll, wie folgende einfache Überlegung zeigt.

Angenommen, wir sprechen von Dezimalzahlen zwischen 0 und 1, die in der Universalanordnung nicht enthalten sind, also der Klasse 2 zugehören. Wir haben zur Kenntnis genommen, daß die *Konstruktion* einer derartigen Zahl – wie z. B. nach Cantor – nicht möglich ist, aber wir nehmen an, „es gibt“ solche Dezimalzahlen aus Klasse 2. Es zeigt sich nun, daß wir von diesen Dezimalzahlen zwar als Menge sprechen können, sie sich jedoch in keiner Weise isolieren lassen. Wollte man mit ihnen Mathematik treiben, dann müßte man Sätze bilden können wie: „Es sei x eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 aus Klasse 2 . . .“ Es muß nun für irgendeine Person in irgendeinem Zeitpunkt sinnvoll sein, diese Zahl x als Dezimalzahl zwischen 0 und 1 zu betrachten. Damit ist sie aber bereits durch diese Mitteilung „beschrieben“. Sie kann in diesem Fall sogar für beliebige Personen beschrieben werden, etwa durch einen Satz der Gestalt: „Die Zahl, die die Person . . . im Zeitpunkt . . . aus Klasse 2 ausgewählt hat.“

Es zeigt sich also, daß zwar die Annahme von Zahlen oder allgemeiner von Denkobjekten der Klasse 2 zu keinem Widerspruch führt, hingegen jeder Versuch, ein Element aus Klasse 2 isoliert zu betrachten, es auszuwählen, ja sogar nur an dieses Element als einzelnes Objekt zu denken, zu einem Widerspruch in der Annahme führt, es handle sich um ein Objekt der Klasse 2. Die Unmöglichkeit, dieses Element auch nur gedanklich als Einzelobjekt zu betrachten, folgt unmittelbar aus der Möglichkeit, eine Mitteilung zu bilden: „Das Element, an das die Person . . . im Zeitpunkt . . . gedacht hat“.

Es ist daher nicht sinnvoll, von der „Existenz“ von Denkobjekten der Klasse 2 zu sprechen.

Schlußbemerkungen

Man kann sich nun die Frage vorlegen, inwieweit aus den vorstehenden Ausführungen Aussagen über Mathematik gewonnen werden können. Dabei ist vor allem auf die Tatsache Bedacht zu nehmen, daß die Objekte der Universalanordnung abzählbar angeordnet werden können. Wir gehen nun von dem Satz aus, daß die Mächtigkeit des Kontinuums größer ist als die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen. Nun teilen wir die Menge der reellen Zahlen, der offenbar die Mächtigkeit des Kontinuums zukommt, in zwei Klassen. In Klasse 1 fassen wir alle jene reellen Zahlen zusammen, die im Sinne von Ziffer 2 in der Universalschrift „beschrieben" werden können. Dabei berücksichtigen wir, daß im Sinne von Ziffer 3 auch die „erweiterte Universalschrift" in der Universalschrift enthalten ist. In Klasse 2 fassen wir alle übrigen reellen Zahlen zusammen. Da die durch die Universalschrift beschreibbaren Zahlen abzählbar angeordnet werden können, und zwar in der Universalanordnung nach Ziffer 4, ist die Menge der reellen Zahlen aus Klasse 1 sicher nicht von größerer Mächtigkeit als die Menge der natürlichen Zahlen. Da weiters alle natürlichen Zahlen in Form einer Bildschirmmitteilung gemäß Ziffer 1 beschrieben werden können, ist die Menge der reellen Zahlen aus Klasse 1 gleich mächtig der Menge der natürlichen Zahlen.

Für den Mathematiker stehen nun die ein Kontinuum bildenden reellen Zahlen grundsätzlich alle in gleicher Weise zur Verfügung, d. h. wenn ein Mathematiker Sätze bildet, die mit den Worten: „Es sei x eine reelle Zahl . . ." beginnen, dann kann x grundsätzlich jede beliebige reelle Zahl sein. Es ist also insbesondere gleichgültig, ob x aus Klasse 1 oder aus Klasse 2 ist.

In Ziffer 6 wurde aber dargelegt, daß Zahlen, die an irgendeinem Ort und in irgendeinem Zeitpunkt durch die Worte: „Es sei x eine reelle Zahl . . ." beschrieben werden, eben durch diese Beschreibung, also eben dadurch, daß an irgendeinem festen Ort und in irgendeinem festen Zeitpunkt an sie gedacht wird, daß sie also Denkobjekt sind, zu Denkobjekten der Klasse 1 werden, bzw. im Sinne unserer Ausführungen in diesen Schlußbemerkungen zu reellen Zahlen der Klasse 1 werden. Der Mathematiker, der mit reellen Zahlen arbeitet, kann dies also nur, wenn er sich auf reelle Zahlen der Klasse 1 beschränkt, also auf reelle Zahlen aus einer Menge mit der Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen.

Die Annahme, „es gibt" reelle Zahlen der Klasse 2, oder anders ausgedrückt, es gibt außer den abzählbar vielen reellen Zahlen der Klasse 1 noch reelle Zahlen aus einer Menge von reellen Zahlen, deren Mächtigkeit größer als die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen ist, führt für sich allein zu keinem Widerspruch. Nur kann mit solchen „Zahlen" eben keine Mathematik betrieben werden, weil sie sich im Sinne von Ziffer 6 einer isolierten gedanklichen Erfassung entziehen und insbesondere für sie Sätze der Gestalt: „Es sei x eine reelle Zahl der Klasse 2 . . ." zu einem Widerspruch führen, da gerade durch die Möglichkeit, einen solchen Satz zu bilden, die reelle Zahl per definitionem zu einer reellen Zahl der Klasse 1 wird.

Damit ist gezeigt, wie aus den vorstehenden Ausführungen eine relevante Aussage für die Mathematik gewonnen werden kann.

Der Gegensatz zur „scholastischen" Mathematik, in der Sätze wie: „Es sei x eine reelle Zahl der Klasse 2 . . ." sinnvoll sind, beruht letztlich darauf, daß auch Mathematik nur in Raum und Zeit betrieben werden kann, daß mathematische Sätze nur in Raum und Zeit formuliert und gedacht werden können, eine Voraussetzung, die in die scholastische Mathematik nirgends eingeht.

Prof. Dr. K.-H. Wolff
Leiter des Instituts
für Versicherungsmathematik
der Technischen Universität
Gusshaus-Str. 25–29
A-1040 Wien

Mit den besten Empfehlungen

PHILOSOPHIA NATURALIS

Archiv für Naturphilosophie und die philosophischen Grenzgebiete der exakten Wissenschaften und Wissenschaftsgeschichte

Sonderdruck aus

Band 13, Heft 4
3. Vierteljahr 1972

1972

VERLAG ANTON HAIN – MEISENHEIM/GLAN

Zur Problematik der absoluten Überabzählbarkeit

von KARL H. WOLFF, Wien

Vorbemerkung

Die CANTORsche Mengenlehre enthält auch den Begriff der überabzählbaren Menge. Im Gegensatz hierzu steht etwa der BROUWERsche Intuitionismus. In letzter Zeit hat insbesondere LORENZEN gezeigt, wie wesentliche Bereiche der Mathematik rein konstruktiv, also ohne Anwendung der axiomatischen Mengenlehre, aufgebaut werden können. Im folgenden* soll gezeigt werden, daß es nicht möglich ist, durch konstruierbare Elemente über den Bereich des Konstruierbaren hinauszugelangen, wie dies in klassischen Beweisen der „Existenz" überabzählbarer Mengen geschieht.

—

1. Die reellen Zahlen werden in zwei Klassen geteilt. Klasse 1 enthält alle reellen Zahlen, die sich in einer vorher gewählten Sprache durch eine endliche Folge von Zeichen aus einer abzählbaren Zeichenmenge darstellen lassen, Klasse 2 alle übrigen reellen Zahlen.

1.1 Eine wesentliche Eigenschaft wissenschaftlicher Erkenntnisse ist ihre vollständige Mitteilbarkeit durch Aussagen. Darin unterscheiden sie sich etwa von mystischen Erfahrungen.

1.2 Eine Mitteilung durch Aussagen setzt ein Übereinkommen über die verwendete Sprache voraus.

1.2.1 Eine Mitteilung ist die Übermittlung von Informationen durch eine Aussage.

1.2.2 Für die Übermittlung kommen grundsätzlich beliebige Zeichen in Betracht, wie z.B. geschriebene oder gesprochene Worte. Die Gesamtheit der zur Übermittlung zugelassenen Zeichen heißt Sprache.

1.2.3 Eine Mitteilung muß verstanden werden können. Es ist daher notwendig, sich sowohl über die verwendete Sprache als auch über das als bekannt vorausgesetzte Vorwissen zu einigen.

1.2.3.1 Die formale Kenntnis einer Sprache ist für das Verstehen eine notwendige aber nicht hinreichende Voraussetzung. Zum Verständnis der Aussage etwa: „A ist im Gödel'schen Sinn unbeweisbar" ist mehr vorauszusetzen als die Kenntnis der deutschen Sprache und das Wissen, daß A eine Aussage und Gödel eine Person bezeichnet.

1.2.3.2 Die Gesamtheit der für das Verständnis von Aussagen bereits vorhandenen Information heiße Vorwissen.

* Herrn Professor Dr. P. Lorenzen danke ich für wertvolle, die Formulierung betreffende Anregungen.

1.2.3.3 Fehlendes Vorwissen kann durch zusätzliche Information, also durch Erweiterung von Aussagen, ersetzt werden.

1.2.4 Aussagen können nur endlichen Informationsgehalt haben.

1.2.4.1 Der Informationsgehalt einer Aussage muß in endlicher Zeit übermittelt werden.

1.2.4.2 In endlicher Zeit läßt sich in jeder beliebigen Sprache nur endlich viel Information übermitteln.

1.2.5 Aus 1.2.4 folgt, daß jede Aussage aus endlich vielen Zeichen gemäß 1.2.2. besteht.

1.3. Jede Aussage läßt sich als endliche Zeichenfolge mit Hilfe der beiden Zeichen 0 und 1 formulieren. Die aus diesen Zeichen bestehende Sprache heiße Bit-Sprache.

1.3.1 Wegen 1.2.5 können alle Aussagen in der nach 1.2 verwendeten Sprache eindeutig auf die Zeichenfolgen, die aus den Zeichen 0 und 1 aufgebaut sind, abgebildet werden. Sie können also in die Bit-Sprache übersetzt werden.

1.3.2 Zum Verständnis der Bit-Sprache ist die Kenntnis der Übersetzungsregeln notwendig. Diese Kenntnis kann durch eine Aussage endlicher Information in der Sprache nach 1.2 vermittelt werden.

1.4 In einer Sprache, in der lediglich Dezimalzahlen definiert sind, können die Zahlen 1/3 bzw. e nicht dargestellt werden.

1.4.1 Die sogenannten „unendlichen" Dezimalzahlen sind Grenzwerte von Folgen von Dezimalzahlen. Der Grenzwert einer Folge kann aber als solcher nach Voraussetzung in der verwendeten Sprache nicht dargestellt werden.

1.4.2 Durch eine Erweiterung der Sprache, etwa durch Einführung des Zeichens: „·" für periodische Dezimalbrüche kann 1/3 durch $0,\dot{3}$ dargestellt werden.

1.4.3 Durch eine Erweiterung, welche die Zeichen Σ, n!, Brüche und Grenzwerte einführt, kann e durch $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ dargestellt werden.

1.5 Es sei $\alpha_n = 1$, wenn $a^n + b^n = c^n$, wobei a, b und c natürliche Zahlen sind, eine ganzzahlige Lösung besitzt und $\alpha_n = 0$ sonst. Die Zahl $0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ kann auch in der nach 1.4.2 bzw. 1.4.3 erweiterten Sprache nicht dargestellt werden.

1.5.1 In der Sprache nach 1.4 können die Zahlen 1/3 bzw. e nicht durch Aussagen endlicher Länge dargestellt werden. Die Frage, ob $\alpha_n = 0$ oder $\alpha_n = 1$ gilt, könnte für $n \geqslant 3$ unentscheidbar sein.

1.5.2 Da vorausgesetzt werden kann, daß verstanden wird, was mit $0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ in 1.5 gemeint ist, läßt sich diese Zahl in der in dieser Arbeit verwendeten Sprache darstellen.

1.6 Es zeigt sich also, daß Mitteilungen, die in einer bestimmten Sprache nicht durch Aussagen endlicher Länge ausgedrückt werden können, sich in einer erweiterten Sprache durch Aussagen endlicher Länge ausdrücken lassen.

1.6.1 Unter der Annahme, daß stets in Form einer Sprache „gedacht" wird, kann durch eine Erweiterung der Sprache eine Erweiterung des Denkens erreicht werden.

1.6.2 Es muß allerdings überhaupt offen gelassen werden, ob die hier verwendete Sprache einer solchen Erweiterung fähig ist, daß durch sie Klasse 1 erweitert wird. Zweifel daran sind insoweit gestattet, als in unserer Sprache nicht nur die bereits formulierten Aussagen, sondern alle überhaupt in ihr formulierbaren Aussagen grundsätzlich enthalten sind.

1.7. Die Klasseneinteilung nach 1 ist sprachabhängig.

1.7.1 Die Nennung, Definition oder Darstellung einer reellen Zahl ist eine Mitteilung im Sinne von 1.2.

1.7.2 Diese Mitteilung muß in einer Sprache formuliert werden. Die Möglichkeit, eine Aussage in einer Sprache durch eine Aussage endlicher Länge zu formulieren, ist sprachabhängig.

2. Die reellen Zahlen aus Klasse 1 können abzählbar angeordnet werden.

2.1 Alle Aussagen werden zunächst in die Bit-Sprache nach 1.3 übersetzt.

2.2 Eine Aussage in dieser Sprache besteht in einer endlichen Folge, gebildet aus den Zeichen 0 und 1.

2.3 Jede Aussage kann eineindeutig auf die Menge der n-tupel $i_1 \dots i_n$ abgebildet werden.

2.3.1 Die Aussage wird in aufeinander folgenden Serien gleicher Zeichen dargestellt. Als erste Serie werden die zu Beginn der Aussage stehenden unmittelbar aufeinander folgenden Nullen angesehen, als zweite Serie die darauf folgenden Einser, als dritte Serie die darauf folgenden Nullen usw.

2.3.2 Es sei i_1 die Zahl der zu Beginn stehenden unmittelbar aufeinander folgenden Nullen, i_2 die Zahl der darauf unmittelbar folgenden Einser, i_3 die Zahl der darauf unmittelbar folgenden Nullen usw.

2.3.3 Die Menge der so gebildeten n-tupel $i_1 \dots i_n$ wird entsprechend der Konstruktion ihrer Elemente eineindeutig auf die Menge aller Aussagen abgebildet. Hierbei sind natürlich auch sinnlose Zeichenfolgen als Aussagen im weitesten Sinne zu verstehen.

2.4 Jeder Aussage A kann eineindeutig die Zahl $G(A) = p_1^{i_1} \dots p_n^{i_n}$ zugeordnet werden, wobei p_k die k^{te} ungerade Primzahl ist und $(i_1 \dots i_n)$ das Bild von A gemäß 2.3.

2.5 Aus der abzählbaren Anordnung der Zahl G(A) nach ihrer Größe erhält man eine abzählbare Anordnung dieser Aussagen. Jene Aussagen, durch die reelle Zahlen dargestellt werden, bilden eine Teilmenge und sind daher ebenfalls abzählbar angeordnet.

3. Die Existenz von reellen Zahlen der Klasse 2 ist unbeweisbar. Auch das Zweite Cantorsche Diagonalverfahren liefert keinen solchen Beweis.

3.1 Auf Grund eines Existenzbeweises muß sich eine reelle Zahl aus Klasse 2 beschreiben (nicht aber auch nur beliebig genau berechnen) lassen.

3.2 Eine derartige Beschreibung ist eine Darstellung durch endlich viele Zeichen. Somit gehört die Zahl nicht zu Klasse 2.

3.3 Die Konstruktion einer Diagonalzahl nach Cantor führt bei der Anordnung nach 2.5 zu einem Widerspruch.

3.3.1 Die Frage der Zulässigkeit der Cantorschen Beweisführung werde zwischen den Personen P_1 und P_2 diskutiert. P_1 verteidigt die Cantorsche Beweisführung, P_2 lehnt sie ab. Zunächst einigen sich P_1 und P_2 über die zwischen ihnen verwendete Sprache.

3.3.2 Die Sprache nach 3.3.1 wird gemäß 1.3 in die Bit-Sprache übersetzt. P_2 ordnet nun die Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 in Analogie zur Anordnung gemäß 2.5 an, wobei er für jede Aussage A es P_1 überläßt zu entscheiden, ob durch diese Aussage tatsächlich eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 dargestellt wird oder nicht. Die von P_1 als sinnvolle Darstellung einer Dezimalzahl zwischen 0 und 1 ausgewählten Aussagen A werden nun mit Hilfe von G(A) angeordnet und abgezählt. P_2 definiert eine Funktion $R_{01}(A)$ durch $R_{01}(A) = n$, wenn die Aussage A bei dieser Anordnung an der n^{ten} Stelle steht.

3.3.3 P_2 behauptet die Vollständigkeit der Anordnung nach 3.3.2. P_1 wendet zum Beweis der Unvollständigkeit das 2. Cantorsche Diagonalverfahren ein. Er definiert also eine Dezimalzahl $C = 0{,}a_1 a_2 \dots$ etwa mit $a_n = a_{nn} + 1$ für $a_{nn} < 9$ und $a_n = 0$ für $a_{nn} = 9$, wobei a_{nn} die n^{te} Dezimalstelle der durch A mit $R_{01}(A) = n$ dargestellten Dezimalzahl ist. P_1 behauptet nun, C sei eine neue Dezimalzahl zwischen 0 und 1, die wegen $\wedge_n a_n \neq a_{nn}$ in der von P_2 gewählten Anordnung nicht auftrete. P_2 kann aber einwenden, daß die von P_1 gewählte Aussage A_C, von der P_1 behauptet, daß durch sie die Dezimalzahl C zwischen 0 und 1 dargestellt werde, einen Platz in der Anordnung nach 3.3.2 besitzt. Es sei dies $R_{01}(A_C) = n_C$. Die Aussage enthält daher die Konstruktionsbedingung: „$a_{n_C} \neq a_{nn} \wedge a_{n_C} = a_{nn}$“ und dies ist ein Widerspruch. P_2 kann somit nachweisen, daß durch die von P_1 gewählte Aussage A_C keine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 sinnvoll definiert worden ist. Damit ist P_1 der Beweis der Unvollständigkeit der Anordnung mißlungen.

3.3.4 Die Argumentation würde nur dann zu keinem Widerspruch führen, wenn die von P_1 verwendeten sprachlichen Mittel im Gegensatz zu den Voraussetzungen außerhalb der gemäß 3.3.1 zu vereinbarenden Sprache lägen. Wählt man allerdings als Sprache im Sinne von 1.2.2 alle Buchstaben, Ziffern und sonstige Symbole, die etwa gegenwärtig in schriftlichen Mitteilungen verwendet werden, dann kann auch eine solche nachträgliche Erweiterung der sprachlichen Mittel eingefangen werden, da die zum Verständnis der neuen Sprache notwendigen Kenntnisse durch Aussagen endlicher Länge vermittelbar sein müssen. Man braucht daher nur zu fordern, diese Aussagen allen Aussagen, die in der neuen Sprache abgefaßt sind, voranzustellen.

4. Die Klasseneinteilung nach 1. kann auf alle Objekte von Aussagen ausgedehnt werden.

5. Alle Objekte von Aussagen können abzählbar angeordnet werden.

6. Die Existenz überabzählbarer Mengen kann durch die Bildung der Potenzmengen nicht bewiesen werden.

6.1 Es seien $\overline{x}, x_1, x_2, \ldots$ Elemente einer abzählbaren unendlichen Menge M und $\overline{M}, M(x_1), M(x_2), \ldots$ Elemente der Potenzmenge P(M). Der Beweis von $M \prec P(M)$ wird im allgemeinen folgendermaßen geführt: Wäre $M \sim P(M)$, so gäbe es eine eineindeutige Abbildung von M auf P(M), etwa $x_i \leftrightarrows M(x_i)$. Bildet man nun die Menge $\overline{M} := \{x \mid x \in M \wedge x \notin M(x)\}$, dann müßte für $\overline{x} \notin \overline{M}$ nach Definition $\overline{x} \in \overline{M} \wedge \overline{x} \notin M$ gelten und dies ist ein Widerspruch.

6.2. Die Frage der Zulässigkeit der Beweisführung nach 6.1 wird wieder zwischen P_1 und P_2 diskutiert. P_2 überläßt es P_1 zu entscheiden, durch welche Aussage eine Menge von Elementen aus M dargestellt wird. Diese Aussagen werden mit Hilfe von G(A) angeordnet und abgezählt. P_2 definiert eine Funktion S(A) durch S(A) = n, wenn A in dieser Anordnung an n^{ter} Stelle steht und ordnet die durch A dargestellte Menge M_A dem Element x_n mit $n = S(A)$ zu.

6.3 P_2 behauptet die Vollständigkeit der Anordnung nach 6.2, P_1 wendet 6.1 ein. P_2 stellt fest, daß die Darstellung der Menge $\overline{M}$ aus 6.1 eine Aussage $\overline{A}$ ist, von der P_1 behauptet, es werde durch sie eine Menge von Elementen aus M dargestellt. Es sei $S(\overline{A}) = \overline{n}$. Nun stellt P_2 fest, daß $\overline{A}$ die Bedingung „$x_{\overline{n}} \notin \overline{M} \wedge x_{\overline{n}} \in \overline{M}$" enthält und dies ist ein Widerspruch. P_2 kann somit nachweisen, daß durch die von P_1 gewählte Aussage $\overline{A}$ keine Menge $\overline{M}$ von Elementen aus M sinnvoll definiert wird. Damit ist P_1 der Beweis der Unvollständigkeit der Anordnung mißlungen. Auch hier kann P_1 den Widerspruch nur vermeiden, wenn er sich sprachlicher Mittel bedient, die im Gegensatz zu den Voraussetzungen außerhalb der nach 6.2 zu vereinbarenden Sprache liegen.

7. Objekte – im speziellen Dezimalzahlen – der Klasse 2 lassen sich nur axiomatisch einführen. Da sie sich jedoch einer Beschreibung durch Aussagen entziehen, muß auch ein eigenes Auswahlaxiom eingeführt werden.

7.1 Aus jeder Menge, die Objekte der Klasse 1 enthält, kann jenes mit minimalem G(A) nach 2.4 ausgewählt werden.

7.2 Für den Axiomatiker ist es sinnvoll, die Menge aller Dezimalzahlen der Klasse 2 zwischen 0 und 1 zu bilden, wobei die in den Mathematiklehrbüchern verwendete Sprache zugrunde gelegt wird. Elemente dieser Menge können ebenso wie beliebige Elemente aus Klasse 2 per definitionem nicht

„ausgewählt", d.h. identifiziert, definiert, dargestellt werden. Die Möglichkeit einer Auswahl muß daher so wie die Elemente selbst axiomatisch eingeführt werden.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Karl H. Wolff
A-1040 Wien
Institut für Versicherungsmathematik
der Technischen Hochschule Wien
Argentinierstraße 8