ABZÄHLBARKEIT

RELATIVE WAHRHEIT UND UNIVERSALANORDNUNG

(Karl-Heinz Wolff)

Kurzfassung: Mathematische Beweise müssen endlich sein. Objekte der Mathematik, wie z.B. reelle Zahlen, müssen in endlicher Form beschrieben werden können. Alles, was in endlicher Form beschrieben werden kann, läßt sich abzählbar anordnen, also auch die in endlicher Form beschreibbaren reellen Zahlen. Wir bilden zunächst eine abzählbare Anordnung aller möglichen endlichen Aussagen und nennen sie ihres universellen Charakters wegen *Universalanordnung.* Aus ihr gewinnen wir weitere abzählbare Anordnungen aller (in endlicher Form beschreibbaren) Objekte unseres Denkens, insbesondere auch der reellen Zahlen.
Die Unvollständigkeit einer Folge von reellen Zahlen wird üblicherweise durch die Einführung einer Cantor'schen Diagonalzahl bewiesen. Diese wird aber selbst in endlicher Form beschrieben und hat damit ihren festen Platz in einer solchen Folge. Durch sie kann daher nicht die Unvollständigkeit dieser Folge bewiesen werden. Vielmehr wird gezeigt, daß bereits die Definition jeder derartigen Cantor'schen Diagonalzahl einen Widerspruch in sich enthält.

Stichworte: Abzählbare Anordnung, Cantor'sches Diagonalverfahren (Kritik), Kontinuumhypothese, Überabzählbare Mengen (Kritik), Universalanordnung, Wahrheit als relativer Begriff, Cantor's diagonal process (critic), continuum hypothesis, countable arrangement, uncountability.

EINFÜHRUNG:

Von wissenschaftlichen Aussagen fordern wir, daß sie schriftlich formuliert werden können. Sie lassen sich dann in einer Fachbibliothek zusammenfassen.

Kurd Laßwitz (1848 - 1910) hat eine *Universalbibliothek* eingeführt, die etwa folgendermaßen aufgebaut ist: Eine Seite bestehe aus 100 Zeilen à 100 Zeichen (Buchstaben, Zahlen, Symbolen, dem Spatium usw.) und ein Band der Bibliothek aus 1000 Seiten. Der erste Band enthalte etwa nur Spatien, sei also leer. Im zweiten Band stehe an der ersten Stelle ein a, im übrigen sei der Band leer. In den folgenden Bänden rücke das einzelne a stellenweise, zeilenweise und seitenweise vor. Da es 100 x 100 x 1000 = 10^7, also 10 Millionen Stellen gibt, steht das a im 10000001$^{\text{ten}}$ Band an der letzten Stelle der letzten Zeile der letzten Seite, während der Band im übrigen leer ist. Jede mögliche Verteilung aller zur Verfügung stehenden Zeichen auf 1000 Seiten mit je 100 Zeilen mit je 100 Stellen bildet einen eigenen Band der Bibliothek.

Diese Bibliothek enthält alles, was jemals geschrieben wurde, aber auch alles, was jemals geschrieben werden kann. Sie umfaßt Goethes Faust ebenso wie die vorliegende Arbeit des Autors. Eine Schrift, deren Umfang einen Band übersteigt, die also aus mehr als 10 Millionen Zeichen besteht, findet sich auf mehrere Bände aufgeteilt. Das Auffinden eines bestimmten Bandes würde sich allerdings äußerst mühsam gestalten. Geht man von einem Zeichenvorrat von 500 Zeichen (Buchstaben in verschiedenen Schriftarten, auf der Zeile geschrieben, höher- oder tiefergestellt, Sonderzeichen usw.) aus, dann gibt es genau $500^{10,000.000}$ verschiedene Bände. Die Bibliothek fände also in unserem Universum bei weitem keinen Platz.

Bei aller Vielfalt, die eine Auswahl aus 500 Zeichen gestattet, wären gewisse Schriftwerke, wie chinesische, japanische oder koreanische, ebenso wie Zeichnungen oder Graphiken nicht in der Universalbibliothek enthalten. Wir ersetzen daher die Bände durch quadratische Bilder, gebildet aus weißen und schwarzen Quadraten der Seitenlänge 1/100$^{\text{tel}}$ mm. Die gewählte Feinheit des Rasters gestattet die Darstellung praktisch aller Schriften und Graphiken. Jedes derartige Bild kann als Mitteilung M für eine Person P in einem Zeitraum ΔT angesehen werden.

Wir zeigen nun, daß alle möglichen Mitteilungen M für alle möglichen Personen P in allen möglichen Zeiträumen ΔT in einer *Universalanordnung aller Aussagen* abzählbar angeordnet werden können. Aus ihr kann man weitere abzählbare Anordnungen gewinnen. Ist etwa eine Person P in einem Zeitraum ΔT bereit zu bejahen, daß eine Mitteilung M für sie ein bestimmtes Denkobjekt, z.B. eine reelle Zahl, eindeutig beschreibt, dann kann diesem Denkobjekt der entsprechende Platz in der Universalanordnung zugeordnet und daraus die neue Anordnung als Folge aller ausgewählten Denkobjekte, z.B. aller reellen Zahlen, gewonnen werden.

Bei einer abzählbaren Anordnung der reellen Zahlen in einer Folge (r_n) wird üblicherweise eine Cantor'sche Diagonalzahl zum Beweis der Unvollständigkeit dieser Folge eingeführt. Der Beweis versagt aber im Falle einer auf der Universalanordnung beruhenden Folge der reellen Zahlen, da auch jede Cantor'sche Diagonalzahl c einen Platz in der Folge hat. Steht sie dort an n^{ter} Stelle, dann wird für sie $c_n \neq c_n$ gefordert. c läßt sich also dann nicht widerspruchsfrei definieren, wenn die Folge (r_n) auf Grund der Universalanordnung gebildet wurde.

1. Wahrheiten sind relativ:

1.1. Begriffe sind grundsätzlich unscharf.

1.1.1. Begriffe werden durch Erfahrung *empirisch* gewonnen bzw. gebildet und enthalten daher Unschärfen der Außenwelt und der Begriffs*bildung.*
1.1.1.1. Die Menschen sind einander in ihrem materiellen Aufbau durch Vererbung ähnlich.
1.1.1.2. Die Außenwelt wird durch Vermittlung von Sinnesorganen auf innere *bewußte* (dem Bewußtsein zugängliche) und auf innere *unbewußte* Speicher abgebildet.
1.1.1.2.1. Es besteht in dieser Hinsicht eine *Analogie* zwischen Mensch und Computer.
1.1.1.2.2. Es entsprechen

a) der Aufnahme, der Verarbeitung und der Speicherung von bewußten und/oder unbewußten Sinneseindrücken durch den Körper die Eingabe, die Verarbeitung und die Speicherung von Daten in einem Computer,
b) dem bewußten Erleben von optischen, akustischen, gedanklichen usw. Eindrücken die Ausgabe von Daten des Computers auf einem Monitor bzw. auf einem sonstigen Datenträger.

1.1.1.3. Die selbe Außenwelt, der gleichartige Aufbau der Menschen (1.1.1.1) und die gleichartigen Abbildungen (1.1.1.2) führen zu gleichartigen Speicherinhalten und Speicherausgaben auch für verschiedene Menschen.
1.1.2. Die Gleichartigkeit der Begriffsbildung für Sprache und Denken erweist sich als Zweckmäßig für das Überleben des Einzelnen und der Menschheit.
1.1.2.1. Auf Gefahren kann durch vererbtes und/oder erlerntes Verhalten zweckmäßig reagiert werden.
1.1.3. Verbleibende Unschärfen der Begriffsbildung stehen dem nicht entgegen.
1.1.3.1. Begriffe wie „Tier“ oder „Pflanze“ bewähren sich im täglichen Leben, auch ohne daß sie genau definiert bzw. gegeneinander genau abgegrenzt werden müssen.
1.1.3.2. Begriffe aus Sätzen wie „Gott ist die Liebe“ können auch ohne genaue Abstimmung der Begriffsinhalte verwendet werden (und werden dies auch).
1.1.4. Begriffsinhalte können trotz 1.1.1.3 wegen 1.1.1 von verschiedenen Personen oder von ein und der selben Person in verschiedenen Zeiträumen (!) unterschiedlich interpretiert bzw. verstanden werden.

1.2. Der „Inhalt einer Mitteilung“ hängt von der Interpretation der in ihr verwendeten Begriffe durch den jeweiligen Leser dieser Mitteilung ab.

1.2.1. Mitteilungen werden im allgemeinen von einer Person an eine andere Person gemacht.
1.2.2. Mitteilungen können von einer Person für sie selbst (zur Erinnerung) gemacht werden.
1.2.3. Wegen 1.1.4 kann ein und die selbe Mitteilung von zwei verschiedenen Personen oder von ein und der selben Person in zwei verschiedenen Zeiträumen unterschiedlich interpretiert werden.
1.2.3.1. Die Mitteilung „ACHT“ kann z.B. als Zahl, als Wort aus dem Satz „IN ACHT UND BANN TUN“ oder als Teil einer Mitteilung wie „ACHTUNG“ oder „PACHT“ verstanden werden.

1.2.3.2. Welche Interpretation der Leser der Mitteilung „ACHT“ tatsächlich wählt, hängt davon ab, in welchem Zusammenhang er sie liest. Anders ausgedrückt, ist die Interpretation vom *Zustand* des Lesers im Zeitraum des Lesens abhängig, analog dem *Zustand* eines Computers im Zeitraum der Eingabe von Daten.

1.3. Die Wahrheit einer Mitteilung wollen wir nur relativ zu der die Mitteilung lesenden Person und zum Zeitraum des Lesens beurteilen.

1.3.1. Die Wahrheit einer Mitteilung für deren Leser im Zeitraum des Lesens hängt von der Interpretation der Mitteilung durch den Leser ab.
1.3.2. Wegen 1.2.3 kann die Wahrheit einer Mitteilung von zwei Personen oder von einer Person in zwei verschiedenen Zeiträumen unterschiedlich beurteilt werden.
1.3.3. Eine Person kann die Wahrheit einer Mitteilung *irrtümlich* oder auch *absichtlich (!)* falsch beurteilen denn unsere Welt beinhaltet auch *Irrtümer* und *Unwahrheiten (Lügen)*, so daß sich ein Begriff „relative Wahrheit“ im Sinne von 1.3 als zweckmäßig für die Beschreibung der Welt anbietet.
1.3.4. Um nicht als *arbiter mundi* zu agieren, bezeichnen wir auch irrtümliche oder lügnerische Beurteilungen als *relative Wahrheiten für den Beurteilenden.*
1.3.5. Dem Leser dieser Arbeit bleibt es unbenommen, die Existenz *absolut wahrer,* also für alle Personen jederzeit wahrer Mitteilungen zu postulieren. Dieser Standpunkt steht nicht im Widerspruch zur vorliegenden Arbeit, in der lediglich der Begriff *relative Wahrheit* in bestimmtem Sinn definiert wird, und hat auch keine Bedeutung für die vom Autor beabsichtigten Aussagen.

2. Aussagen sind Mitteilungen einer bestimmten Person in einem bestimmten Zeitraum:

2.1. Die Mitteilung M, bezogen auf eine Person P in einem Zeitraum ΔT, bezeichnen wir als Aussage $A(M,P,\Delta T)$.

2.1.1. Diese Definition von $A(M,P,\Delta T)$ erfordert nicht, daß die Person P die Mitteilung M im Zeitraum ΔT tatsächlich liest.
2.1.2. Der Zeitraum ΔT kann sowohl in der für ein *tatsächliches* Lesen als auch in einer für ein *potentielles* Lesen erforderlichen Zeit liegen.

2.2. Durch die Bezugnahme auf einen bestimmten Leser P und einen bestimmten Zeitraum ΔT werden Interpretation und allfällige Wahrheit einer Mitteilung eindeutig.

2.3. Als wahre Aussagen bezeichnen wir solche, bei denen der Leser P *bereit* ist, die Mitteilung M im Zeitraum ΔT des Lesens als *wahr* zu bezeichnen.

2.3.1. Diese Definition einer wahren Aussage berücksichtigt die Relativität des Wahrheitsbegriffes nach 1.3.4 und deckt sich nicht mit dem Wahrheitsbegriff der Alltagssprache, die diesen Begriff als absolut begreift.
2.3.2. Die Wahrheit einer Aussage nach 2.3 ist daher unabhängig von Meinung und Wissen des Autors und unabhängig von Meinung und Wissen des Lesers dieser Arbeit definiert.

2.4. Beweise von Aussagen bezeichnet der Autor dann als relativ zu einer Person P im Zeitraum ΔT mißlungen, wenn P die Beweisführung im Zeitraum ΔT nicht anerkennt.

2.4.1. Eine Beweisführung setzt voraus, daß vorher zwischen Beweisführendem und Beweisannehmendem Übereinstimmung über die verwendeten Begriffe, Schlußmethoden usw. hergestellt wurde.
2.4.2. Der Beweisannehmende kann den Beweis wegen Verwendung von *in seinen Augen* widersprüchlichen Begriffen, falscher Schlußfolgerungen, aber auch ohne Angabe von Gründen und sogar wider besseres Wissen ablehnen.
2.4.3. Der Autor läßt Widersprüche in Beweisen dort zu, wo der Widerspruch (in seinen Augen) notwendiges Element der Schlußfolgerung ist (z.B. argumentum e contrario), er bezeichnet aber Beweise als mißlungen (natürlich nur relativ zu seiner Person), die in sich widersprüchliche Begriffe (wie z.B. die kleinste natürliche Zahl, größer als vier und kleiner als drei) als widerspruchsfrei verwenden. *Er wendet sich im weiteren nur an jene Leser, die Beweisführungen aufgrund in sich widersprüchlicher Begriffe ebenfalls ablehnen.*

3. Alle möglichen Aussagen (2) können abzählbar angeordnet werden. Wir bezeichnen diese Anordnung als *UNIVERSALANORDNUNG:*

3.1. Alle Mitteilungen, die Gegenstand einer Aussage sind, können schriftlich festgehalten werden.

3.1.1. Im üblichen Sprachgebrauch sind Mitteilungen mündliche oder schriftliche Aussagen.
3.1.2. Allgemeiner können alle durch Sinnesorgane aufnehmbare Reize als Mitteilungen gelten.
3.1.2.1. Schriftliche Mitteilungen werden in Form optisch lesbarer Datenträger gemacht, wie beispielsweise die vorliegende Arbeit.
3.1.2.2. Mitteilungen sind auch in anderer Form, etwa akustisch durch Sprache, in Blindenschrift usw. möglich.
3.1.2.3. Die von uns verwendete Beschreibung der Welt im allgemeinen und der möglichen Sinneseindrücke im besonderen gestattet die Übersetzung jeder möglichen Mitteilung in eine schriftliche, woraus 3.1 folgt.

<u>3.2. Alle möglichen schriftlichen Mitteilungen können abzählbar angeordnet werden.</u>

3.2.1. Ein *Elementarquadrat* sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 1/100tel mm, das entweder weiß oder schwarz ist.

3.2.2. Eine quadratische Anordnung von n^2 derartigen Elementarquadraten bezeichnen wir als *schriftliche Mitteilung der Größe* n^2.

3.2.3. Jede mögliche schriftliche Mitteilung nach 3.1 kann in Form einer schriftlichen Mitteilung der Größe n^2 bei genügend großem n dargestellt werden.

3.2.3.1. Jede beliebige graphische Darstellung, also auch jede schriftliche Darstellung im gebräuchlichen Sinn, kann in Form einer schriftlichen Mitteilung der Größe n^2 bei genügend großem n dargestellt werden.

3.2.3.2. Eine schriftliche Mitteilung, etwa schwarz auf weiß, erfährt durch eine Vergrößerung des weißen Untergrunds keine Änderung ihres Inhaltes (ihrer Interpretation durch einen Leser), so daß jede schriftliche Mitteilung durch unendlich viele schriftliche Mitteilungen der Größe n^2 mit beliebig großem n dargestellt werden kann.

3.2.4. Jeder schriftlichen Mitteilung M_n der Größe n^2 wird eine Dezimalzahl $a(M_n) = 0'a_1a_2 \ldots a_{n^2}$ zugeordnet, mit $a_{in+k} = 1$, wenn das k^{te} Elementarquadrat in der $i + 1^{ten}$ Zeile schwarz ist, und $a_{in+k}= 2$, wenn es weiß ist (i = 0,...,n-1; k = 1,...,n).

3.2.5. Alle möglichen schriftlichen Mitteilungen M aus 3.2.2 können nun nach der Größe der ihnen gemäß 3.2.4 zugeordneten Dezimalzahlen a(M) abzählbar angeordnet werden.

<u>3.3. Alle möglichen Kombinationen von *Personen* P mit *Zeiträumen* ΔT aus 2.1 können abzählbar angeordnet werden.</u>

3.3.1. Von einer Aussage gemäß 2 wird gesprochen, wenn eine Person P eine Mitteilung M in einem Zeitraum ΔT *liest* bzw. *lesen könnte.*

3.3.2. Wir führen *Raum-Zeit-Elemente* in Form von vierdimensionalen Würfeln mit der Seitenlänge 1/100tel mm und der Dauer 1/100tel Sekunde ein.

3.3.3. Durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems im Raum-Zeit-Kontinuum können wir dieses in abzählbar viele Raum-Zeit-Elemente (3.3.2) zerlegen.

3.3.4. Ein Raum-Zeit-Element aus dem von einer Person P in einem Zeitraum ΔT, der im Zeitraum eines *tatsächlichen* oder eines *potentiellen* Lesevorganges liegt, eingenommenen Volumens des Raum-Zeit-Kontinuums bezeichnen wir mit RZE (P,ΔT).

3.3.5. Zu jeder *möglichen* Kombination einer Person P mit einem Zeitraum ΔT aus 2.1 kann (mindestens) ein RZE(P,ΔT) gemäß 3.3.4 gefunden werden, welches aus dem Volumen dieser Person und dem Zeitraum ΔT im Raum-Zeit-Kontinuum stammt und daher diesen (potentiellen) Lesevorgang eindeutig kennzeichnet.

3.3.6. Es sei n = n[RZE(P,ΔT)] der Platz des RZE(P,ΔT) in der abzählbaren Anordnung der Raum-Zeit-Elemente nach 3.3.3.

3.3.7. Wir bezeichnen mit $m(P,\Delta T) = \min_{(P,\Delta T)} n[RZE(P,\Delta T)]$ jenen für alle Kombinationen einer Person P mit einem (potentiellen) Lesezeitraum ΔT in Betracht kommenden Platz gemäß 3.3.6 mit dem niedrigsten n = n[RZE(P,ΔT)].

3.3.8. Die Ordnungszahlen m(P,ΔT) liefern, ihrer Größe nach geordnet, eine abzählbare Anordnung aller möglichen Kombinationen von Personen P mit Zeiträumen ΔT aus 2.1.

3.4. Durch Kombination der abzählbaren Anordnungen 3.2 und 3.3 bilden wir eine abzählbare Anordnung aller möglichen Aussagen 2 und bezeichnen sie als *UNIVERSALANORDNUNG.*

3.4.1. Jeder Aussage A(M,P,ΔT) nach 2.1 ordnen wir eine Zahl
z = z[A(M,P,ΔT)] = m(P,ΔT) + a(M) unter Verwendung von 3.3.7 und 3.2.4 zu.
3.4.2. Alle Aussagen nach 2.1 ordnen wir nun nach der Größe von z an, wobei die Aussage A(M,P,ΔT) die Ordnungszahl n = n(M,P,ΔT) erhält.
3.4.3. Wir bezeichnen diese Anordnung als *UNIVERSALANORDNUNG.* Die Aussage A(M,P,ΔT) steht in der Universalanordnung an n(M,P,ΔT)^{ter} Stelle.
3.4.4. In der Universalanordnung ist jede tatsächlich gemachte Aussage enthalten.
3.4.4.1. Eine tatsächlich gemachte Aussage wird von einer konkreten Person P in einem konkreten Zeitraum ΔT gemacht und kann in Form einer schriftlichen Mitteilung M dargestellt werden. Sie steht daher in der Universalanordnung an der Stelle n = n(M,P,ΔT).
3.4.4.2. Wegen der Vielzahl von RZE(P,ΔT) aus dem von P in ΔT gemäß 3.3.4 eingenommenen Volumen im Raum-Zeit-Kontinuum gibt es eine Vielzahl, wegen 3.2.3.2 unendlich viele Aussagen A(M,P,ΔT), die eine tatsächlich gemachte Aussage eindeutig kennzeichnen.
3.4.4.3. In der Universalanordnung gibt es daher unendlich viele Plätze n = n(M,P,ΔT) für jede tatsächlich gemachte Aussage.
3.4.5. In der Universalanordnung ist jede sinnlose Aussage ebenso enthalten wie jede mögliche graphische Darstellung M als „Leseobjekt" jeder möglichen Person P.
3.4.6. In der Universalanordnung sind Aussagen enthalten, deren Mitteilungen so umfangreich sind, daß der zum Lesen erforderliche Zeitraum die Lebensdauer jeder Person P übersteigt, weshalb über die (relative) Wahrheit dieser Aussage keine Angabe möglich ist.
3.4.7. In der Universalanordnung sind Mitteilungen enthalten, die in einer P unbekannten Sprache abgefaßt sind, so daß P über den Inhalt der Mitteilungen nichts sagen kann.
3.4.8. In der Universalanordnung sind alle Aussagen enthalten, die bei der Beurteilung der vorliegenden Arbeit durch irgendeinen Leser gemacht werden können.

3.5. Die Möglichkeit, alle möglichen Aussagen in einer Universalanordnung abzählbar anzuordnen, beruht darauf, daß alle möglichen Mitteilungen zwar beliebig groß sein können aber immer endlich sein müssen.

4. Für alles, woran gedacht werden kann, also für jedes mögliche Denkobjekt, gibt es (mindestens) einen Platz in der Universalanordnung, dessen Ordnungszahl das Denkobjekt eindeutig kennzeichnet.

4.1. Ist eine Person P in einem Zeitraum ΔT bereit zu bejahen, daß ein Denkobjekt DO durch eine Mitteilung M eindeutig beschrieben wird, dann ordnen wir diesem Denkobjekt die Aussage A_{DO}(M,P,ΔT) mit der Ordnungszahl n_{DO}(M,P,ΔT) zu. Diese Aussage und ihre Ordnungszahl kennzeichnen das Denkobjekt eindeutig.

4.1.1. Eine Person P kann in einem Zeitraum ΔT etwa bereit sein zu bejahen, daß eine Mitteilung „2“ oder „zwei“ oder „Zwei“ oder „6:3“ oder „two“ oder „deux“ usw. „die natürliche Zahl Zwei“ in dem Sinne, in dem der Autor und/oder der Leser diese letzte Mitteilung interpretieren, eindeutig beschreibt.
4.1.2. Irrtümer und/oder bewußte Verfälschungen bei der Interpretation der jeweiligen Mitteilung durch die Person P bzw. den Autor bzw. den Leser werden nicht ausgeschlossen.
4.1.3. Zur eindeutigen Kennzeichnung eines Denkobjektes DO durch eine Ordnungszahl $n_{DO}(M,P,\Delta T)$ genügt die *Bereitschaft* der Person P, im Zeitraum ΔT zu bejahen, daß die Mitteilung M das Denkobjekt eindeutig beschreibt. Es wird nicht gefordert, daß sich P mit M *tatsächlich* befaßt; vielmehr handelt es sich um eine *potentielle Interpretation* der Mitteilung M durch die Person P im Zeitraum ΔT.
4.1.4. Im Sinne der Analogie 1,1,1,2,1 entspricht die *Bereitschaft* der Person P im Zeitraum ΔT eine Mitteilung M in bestimmter Weise zu interpretieren, unabhängig davon, ob sich P mit M in ΔT tatsächlich befaßt, der *„Bereitschaft“* eines Computers, einen Datensatz in bestimmter Weise zu verarbeiten und entsprechende Daten auszugeben, unabhängig davon, ob der Datensatz tatsächlich eingegeben wird.

4.2. Gibt eine Person P an, im Zeitraum ΔT an ein Denkobjekt DO gedacht zu haben, das für sie durch keine Mitteilung M eindeutig beschrieben werden kann, dann bilden wir die Mitteilung $\mathcal{M}$ mit dem Wortlaut „Das Denkobjekt, an das die Person P im Zeitraum ΔT gedacht hat“ (geschrieben auf einem quadratischen Untergrund). Für diese Person P, aber auch für den Autor PA und für den Leser PL, müssen dann (von Lügen und Irrtümern abgesehen) in jedem nach ΔT gelegenen Zeitraum $\mathit{\Delta T}$ die Ordnungszahlen $n_{DO}(\mathcal{M},P,\mathit{\Delta T})$, $n_{DO}(\mathcal{M},PA,\mathit{\Delta T})$ und $n_{DO}(\mathcal{M},PL,\mathit{\Delta T})$ das Denkobjekt DO eindeutig kennzeichnen.

4.3. Woran man nicht denken kann, daran soll man nicht denken.

4.3.1. Ein „Denkobjekt, an das nicht gedacht werden kann,“ enthält in sich einen Widerspruch.
4.3.2. Wird ein solches Denkobjekt in einem Beweis als widerspruchsfrei verwendet, bezeichnet der Autor den Beweis gemäß 2.4.3 als mißlungen.
4.3.3. Der Autor wendet sich nur an jene Leser, die solche Beweise ebenfalls ablehnen.

4.4. Alles, woran gedacht werden kann (jedes mögliche Denkobjekt DO), kann für (mindestens) eine Person P in (mindestens) einem Zeitraum ΔT durch (mindestens) eine Mitteilung M eindeutig beschrieben werden, so daß $n_{DO}(M,P,\Delta T)$ dieses Denkobjekt eindeutig kennzeichnet.

4.4.1..Der Begriff „Mögliches Denkobjekt“ setzt die Möglichkeit der Existenz einer Person P, die in einem Zeitraum ΔT an das Denkobjekt denken könnte, voraus.
4.4.2. Im Fall 4.1 kennzeichnet die Aussage $A(M,P,\Delta T)$ mit der Ordnungszahl $n_{DO}(M.P.\Delta T)$, im Fall 4.2 die Aussage $A(\mathcal{M},P,\mathit{\Delta T})$ mit der Ordnungszahl $n_{DO}(\mathcal{M},P,\mathit{\Delta T})$ das Denkobjekt DO eindeutig.

4.5. Über alles, woran gedacht werden kann, kann auch gesprochen werden.

4.5.1. Jedes Denkobjekt DO, an welches gedacht werden kann, wird wegen 4.4 durch (mindestens) eine Aussage A(M,P,ΔT) der Universalanordnung eindeutig gekennzeichnet.
4.5.2. Unter Verwendung dieser Aussage kann daher über das Denkobjekt DO gesprochen werden.

5. Die Welt ist abzählbar:

5.1. Eine allgemein anerkannte Definition des Begriffes „Welt“ ist dem Autor nicht bekannt.

5.1.1. Wittgenstein’s „Die Welt ist alles, was der Fall ist“ erscheint dem Autor als Definition deshalb nicht geeignet, weil für ihn der Begriff „der Fall sein“ zumindest ebenso einer Definition bedarf wie der Begriff „Welt“ selber.

5.2. Die Welt ist alles, woran gedacht werden kann.

5.2.1. Diese vom Autor gewählte Definition ist wegen 4.5 gleichbedeutend mit der Definition „Die Welt ist alles, worüber gesprochen werden kann“.
5.2.2. Wollte eine Person P einen Teil der Welt außerhalb der Definition 5.2 postulieren, dann müßte es eine Mitteilung M geben, die für P in irgendeinem Zeitraum ΔT „etwas“ außerhalb der durch 5.2 definierten Welt eindeutig beschreibt. Dieses „Etwas“ ist für P im Zeitraum ΔT ein Objekt DO seines Denkens. n_{DO}(M,P,ΔT) ist die Ordnungszahl dieses Denkobjektes in der Universalanordnung. Die Behauptung, es könne über dieses Denkobjekt nicht gesprochen werden, enthält also einen Widerspruch. Wegen 2.4.3 ist für den Autor daher die Behauptung der Unvollständigkeit der Definition 5.2 falsch.

5.3. Alles, woran gedacht werden kann, also die Welt, kann gemäß 4, entsprechend dem zugeordneten Platz in der Universalanordnung, abzählbar angeordnet werden.

5.3.1. Alles, woran gedacht werden kann, wird durch (mindestens) eine Ordnungszahl n(M,P,ΔT) gemäß 4.4, also durch mindestens einen Platz in der Universalanordnung, eindeutig gekennzeichnet.
5.3.2. Die Welt kann daher nach der Größe der Ordnungszahlen, die alles, woran gedacht werden kann, eindeutig kennzeichnen, abzählbar angeordnet (gödelisiert) werden.

5.4. Die reellen Zahlen zwischen Null und Eins können in einer Folge (r_n) = *RA(0,1)* abzählbar angeordnet werden.

5.4.1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschränken wir uns auf die reellen Zahlen zwischen Null und Eins. Wir betrachten nun alle Aussagen $A_r(M,P,\Delta T)$, in denen eine Person P im Zeitraum ΔT bejaht, daß die Mitteilung M eine reelle Zahl r mit $0 < r < 1$ eindeutig kennzeichnet.

5.4.2. Jeder derartigen Aussage entspricht gemäß 3.4.2 ein Platz $n_r(M,P,\Delta T)$ in der Universalanordnung.

5.4.3. Es sei $m = m(r) = \min\limits_{(r)} n_r(M,P,\Delta T)$ der Platz aus 5.4.2 mit der niedrigsten Ordnungszahl.

5.4.4. Nun ordnen wir die reellen Zahlen r mit $0 < r < 1$ nach der Größe von m in einer Folge (r_n) = *RA(0,1)* abzählbar an. m = m(r) bezeichnet dabei gemäß 5.4.3 den Platz der Aussage $A_r(M,P,\Delta T)$ *in der Universalanordnung*. m dient also nur der *Anordnung* der reellen Zahlen und bezeichnet *nicht* den Platz von r in der Folge *RA(0,1)*.

5.4.5. Der Versuch, durch die Einführung einer Cantor'schen Diagonalzahl die Unvollständigkeit der Folge *RA(0,1)* zu beweisen, mißlingt.

5.4.5.1. Die n^{te} reelle Zahl in der Folge *RA(0,1)* habe die Dezimaldarstellung
$r_n = 0' \, r_{n,1} \, r_{n,2} \ldots \; r_{n,n} \ldots..$

5.4.5.2. Wir nehmen an, ein Kritiker PK der Vollständigkeit der Folge *RA(0,1)* gemäß 5.4.4 bildet eine Dezimalzahl (nach Cantor) der Gestalt $c = 0' \, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots..$ mit $\forall n : c_n \neq r_{n,n}$, folgert daraus $\forall n$: $c \neq r_n$, daher $c \notin$ *RA(0,1)*, und behauptet, damit wegen $0 < c < 1$ die Unvollständigkeit der Folge *RA(0,1)* der Dezimalzahlen zwischen Null und Eins bewiesen zu haben.

5.4.5.3. Wir bilden nun eine Mitteilung MK, welche die Vorschriften zur Bildung der Folge *RA(0,1)* aus 5.4.4 und der Cantor'schen Diagonalzahl c aus 5.4.5.2 enthält.

5.4.5.4. Wird der Einwand des Kritikers PK im Zeitraum ΔTK gemacht, dann ist PK in ΔTK offenbar bereit zu bejahen, daß durch die Aussage $A(MK,PK,\Delta TK)$ die Cantor'sche Diagonalzahl c eindeutig gekennzeichnet wird. Die Ordnungszahl $n_c(MK,PK,\Delta TK)$ bezeichnet dann nach 4.1 einen Platz in der Universalanordnung, der c eindeutig kennzeichnet.

5.4.5.5. Nun ist $m = m(c) = \min\limits_{(c)} n_c(MK,PK,\Delta TK)$ nach 5.4.3 der c zugeordnete Platz in der Universalanordnung mit der niedrigsten Ordnungszahl. c ist offenbar eine reelle Zahl zwischen Null und Eins. Gemäß 5.4.4 gilt daher $c \in$ *RA(0,1)*.

5.4.5.6. In der abzählbaren Anordnung *RA(0,1)* der reellen Zahlen zwischen Null und Eins gemäß 5.4.4 habe c den Platz $n = n(c)$ mit $r_{n(c)} = c$.

5.4.5.7. Aus $c = r_{n(c)}$ folgt für die $n(c)^{te}$ Dezimalstelle $c_{n(c)} = r_{n(c),n(c)}$ im Widerspruch zur Definition von c in 5.4.5.2, die $\forall n$: $c_n \neq r_{n,n}$ fordert,

5.4.5.8. Die Vorschrift zur Konstruktion einer Cantor'schen Diagonalzahl c auf Grund der Folge *RA(0,1)* nach 5.4.5.1 *enthält damit einen Widerspruch.* Der Autor bezeichnet daher den Beweis des Kritikers für die Unvollständigkeit der abzählbaren Anordnung der reellen Zahlen zwischen Null und Eins in der Folge *RA(0,1)* wegen der Verwendung des in sich widersprüchlichen Begriffes der Diagonalzahl c aus 5.4.5.2 gemäß 2.4.3 als mißlungen.

5.5. Beweise der Überabzählbarkeit einer beliebigen Menge $\{E\}$, die in der Definition eines Elementes *E* der Menge bestehen, dem nach Meinung des Kritikers kein Platz in der Universalanordnung eindeutig zugeordnet werden kann, enthalten einen Widerspruch in sich. Der Autor bezeichnet solche Beweise gemäß 2.4.3 als mißlungen.

5.5.1. Um dies zu zeigen, betrachten wir alle Aussagen $A_E(M,P,\Delta T)$, in denen eine Person P in einem Zeitraum ΔT bejaht, daß ein Element E der Menge $\{E\}$ durch die Mitteilung M eindeutig beschrieben wird. Die Aussage $A_E(M,P,\Delta T)$ kennzeichnet dann das Element E eindeutig.

5.5.2. Jeder Aussage $A_E(M,P,\Delta T)$ aus 5.5.1 entspricht gemäß 3.4.2 ein Platz $n_E(M,P,\Delta T)$ in der Universalanordnung, der das Element E eindeutig kennzeichnet.

5.5.3. Wir bezeichnen mit $m = m(E) = \min\limits_{(E)} n_E(M,P,\Delta T)$ den Platz jener das Element E kennzeichnenden Aussage mit der niedrigsten Ordnungszahl.

5.5.4. Nun ordnen wir alle Elemente der Menge $\{E\}$, für die eine Aussage $A_E(M,P,\Delta T)$ vorliegt, nach der Größe von m in einer Folge (E_n) = *EA* abzählbar an. m = m(E) bezeichnet dabei gemäß 5.5.3 den Platz der Aussage $A_E(M,P,\Delta T)$ *in der Universalanordnung* und n den Platz des Elementes E in der Folge *EA*.

5.5.5. Wir nehmen nun an, ein Kritiker PK will in einem Zeitraum ΔTK die Unvollständigkeit von *EA* durch die Definition eines Elementes *E* mit $E \in \{E\}$ und $E \notin EA$ beweisen.

5.5.6. In diesem Fall bilden wir eine Mitteilung MK, welche die vom Kritiker gegebene Definition des Elementes *E* aus 5.5.5 enthält.

5.5.7. Der Kritiker behauptet $E \in \{E\}$, so daß für ihn die Aussage $A_E(MK,PK,\Delta TK)$ das Element *E* eindeutig kennzeichnet.

5.5.8. Wegen des Vorliegens einer Aussage $A_E(MK,PK,\Delta TK)$, welche *E* eindeutig kennzeichnet, ist gemäß 5.5.4 das Element *E* in der Folge *EA* enthalten. Es gilt also $E \in EA$ und dies steht im Widerspruch zur Behauptung des Kritikers, es gelte $E \notin EA$.

5.5.9. Wie in 2.4.3 festgehalten, bezeichnet der Autor den Beweis des Kritikers für die Unvollständigkeit der Folge *EA* wegen des Widerspruchs in 5.5.8 als mißlungen.

5.6. Die abzählbare Anordnung der Welt (5.2) im Rahmen der Universalanordnung (3.4) ist nur eine *potentielle* Anordnung; eine *tatsächliche* Anordnung aller möglichen Denkobjekte, also der Welt, durch eine konkrete Person PK in einem konkreten Zeitraum ΔTK ist prinzipiell nicht möglich.

5.6.1. Eine Aussage $A(M,P,\Delta T)$ kann nur auf Grund der *Interpretation* von M durch P in ΔT einem Denkobjekt eindeutig zugeordnet werden.

5.6.2. Eine einzelne Person PE kann wegen der Beschränktheit der zur Verfügung stehenden (Lebens-) Zeit Mitteilungen M nur in beschränktem Umfang und in beschränkter Anzahl interpretieren.

5.6.3. Eine einzelne Person PE kann auch nicht die Interpretation aller möglichen Mitteilungen M durch alle möglichen Personen P in allen möglichen Zeiträumen ΔT kennen.

5.6.4. Wegen 5.6.2 und 5.6.3 kann die Frage nach dem einem bestimmten Platz in der Universalanordnung zugeordneten Denkobjekt von einer einzelnen Person PE nur für eine beschränkte Anzahl solcher Plätze beantwortet werden..

6. In einer konkreten Schrift können die Welt im allgemeinen und die reellen Zahlen im besonderen *tatsächlich* abzählbar angeordnet werden:

6.1. Eine konkrete Schrift bestehe in der zeilenweisen Anordnung endlich vieler Zeichen.

6.1.1. Solche Zeichen sind etwa Buchstaben, Ziffern, Satzzeichen, das Spatium usw.
6.1.2. Zeichen können in verschiedenen Schriftarten (lateinisch, griechisch, gotisch, kursiv, fett usw.), klein oder groß geschrieben, sowie höher- oder tiefergestellt verwendet werden.
6.1.3. Es können mathematische und logistische Zeichen und Symbole verwendet werden.
6.1.4. Es können bestimmten Zeichen mit fester Bedeutung verwendet werden, wie z.B. die Zahlen „π“ oder „e“ (Basis der natürlichen Logarithmen) usw.
6.1.5. Eine konkrete Schrift kann etwa aus allen einer Buchdruckerei oder in einem Computer zur Verfügung stehenden Lettern und Zeichen bestehen.
6.1.6. Alles jemals schriftlich Festgehaltene, also auch die gesamte mathematische Literatur samt der vorliegenden Arbeit, kann in einer solchen konkreten Schrift dargestellt werden.

6.2. Alles, was in einer konkreten Schrift geschrieben werden kann, läßt sich in einer Folge *ZFA* abzählbar anordnen.

6.2.1. Eine Zeichenfolge ${}^{L}ZF$ der Länge L in einer konkreten Schrift 6.1 bestehe aus L in beliebig vielen Zeilen hintereinander angeordneten Zeichen.
6.2.2. Verwendet man in der konkreten Schrift etwa ω verschiedene Zeichen (einschließlich des Spatiums und unter Berücksichtigung der Schriftart, von höher- oder tiefergestellt, usw.) dann gibt es genau ω^{L} verschiedene Zeichenfolgen ${}^{L}ZF$ der Länge L.
6.2.3. Wir ordnen alle Zeichenfolgen endlicher Länge in einer Folge *ZFA* abzählbar an.
6.2.3.1. Es sei $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\omega\}$ die Menge der zur Verfügung stehenden Zeichen. Eine Zeichenfolge ${}^{L}ZF_n$ der Länge L hat dann die Form „$\alpha_{n1}\,\alpha_{n2}\,...\,\alpha_{nL}$“ mit $\alpha_{nk} \in \Omega$.
6.2.3.2. Wir bilden für jede Zeichenfolge ZF = ${}^{L}ZF_n$ eine Hilfszahl $\Pi(ZF) = \Pi({}^{L}ZF_n) =$
$= 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot ... \cdot \pi_L{}^{n_L}$, wobei π_k die k^{te} Primzahl in der Primzahlenfolge Π: = (2, 3, ... π_i .....) ist. Π(ZF) kennzeichnet dann ZF eindeutig. Wäre etwa α_1 der Buchstabe „a“ und α_2 der Buchstabe „b“, dann entspricht die Hilfszahl $\Pi = 2 = 2^1 = \pi_1{}^1$ der Zeichenfolge „α_1“, also „a“, die Hilfszahl $\Pi = 4 = 2^2 = \pi_1{}^2$ der Zeichenfolge „α_2“, also „b“, die Hilfszahl $\Pi = 6 =$ $= 2^1 \times 3^1 = \pi_1{}^1 \times \pi_2{}^1$ der Zeichenfolge „$\alpha_1\alpha_1$“, also „aa“, die Hilfszahl $\Pi = 18 = 2^1 \times 3^2 =$ $= \pi_1{}^1 \times \pi_2{}^2$ der Zeichenfolge „$\alpha_1\alpha_2$“, also „ab“, usw.
6.2.3.3. Wir können also **alle** endlichen Zeichenfolgen ZF nach der Größe ihrer Hilfszahlen Π(ZF) in einer Folge (ZF_n) = *ZFA* abzählbar anordnen. Dazu setzen wir $\min\limits_{(ZF)} \Pi(ZF) = \Pi(ZF_1) = 2$ und im weiteren $\forall n$: $\Pi(ZF_n) < \Pi(ZF_{n+1})$. Man erhält nun etwa $\Pi(ZF_2) = 4$ mit $ZF_2 = \alpha_2$, $\Pi(ZF_3) = 6$ mit $ZF_3 = \alpha_1\alpha_1$, $\Pi(ZF_4) = 8$ mit $ZF_4 = \alpha_3$, usw.

6.3. Alles, woran der Autor denken kann, läßt sich für ihn durch eine Zeichenfolge gemäß 6.2.1 *in jedem Zeitpunkt* eindeutig beschreiben.

6.3.1. DO(ZF) bedeutet für den Autor, das Denkobjekt DO wird durch die Zeichenfolge ZF jederzeit für ihn eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben.

6.4. Der Autor ordnet nun die Welt (5.2) in jener Reihenfolge der Denkobjekte DO abzählbar an, die der Reihenfolge der sie eindeutig beschreibenden Zeichenfolgen in der Folge *ZFA* gemäß 6.2.3.3 entspricht.

6.5. Der Autor wendet sich im weiteren nur an jene Leser, welche die selbe Schrift und die selben Beschreibungen von Denkobjekten verwenden, wie der Autor.

6.5.1. Eine Person P verwendet genau dann die selbe Schrift und die selben Beschreibungen von Denkobjekten wie der Autor, wenn jede Zeichenfolge ZF für P das selbe Denkobjekt beschreibt wie für den Autor.

6.6. Aus der Folge *ZFA* wird eine abzählbare Anordnung der reellen Zahlen in einer Folge (r_n) = *RA* gewonnen, in der jede reelle Zahl genau einmal vorkommt.

6.6.1. Zunächst werden aus der Folge *ZFA* jene Zeichenfolgen ausgewählt, durch die reelle Zahlen eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden.
6.6.2. Wird eine reelle Zahl r durch mehrere Zeichenfolgen ZF mit r = r(ZF) eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben, wählen wir jene Zeichenfolge mit der kleinsten Hilfszahl $\Pi(r) = \min_{(r(ZF))} \Pi(ZF)$ aus und ordnen die reellen Zahlen r nach der Größe von $\Pi(r)$ in einer Folge *RA* abzählbar an.
6.6.3. Eine durch eine unendliche Dezimalzahl beschriebene reelle Zahl kann nur dann gemäß 6.6.1 ausgewählt werden, wenn sie *auch* durch eine Zeichenfolge endlicher Länge eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden kann. So kann etwa π nicht durch die unendliche Dezimalzahl 3'14159..... beschrieben werden sondern nur durch eine endliche Zeichenfolge wie z.B. „Die Fläche des Einheitskreises“ oder eine der bekannten Definitionen durch Grenzwerte.
6.6.4. Die reelle Zahl r habe als Dezimalzahl die Gestalt $r = R_m R_{m-1} \ldots R_1' \, r_1 r_2 \ldots r_i \ldots\ldots$ In dieser Form der Beschreibung einer reellen Zahl müssen natürlich unendliche Dezimalzahlen zugelassen werden, wie etwa für π oder für 1/3.
6.6.5. Für die Zahl r = 15'24 gilt etwa m = 2, $R_2 = 1$, $R_1 = 5$, $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, und $r_i = 0$ für i > 2.
6.6.6. Die n ^{te} reelle Zahl r_n in der Folge (r_n) habe nach 6.6.4 die Gestalt
$r_n = R_{n,m} \, R_{n,m-1} \ldots \; R_{n,1}' \, r_{n,1} \, r_{n,2} \ldots \; r_{n,i} \ldots\ldots$
6.6.7. Wegen 6.6.2 wird jeder durch eine Zeichenfolge beschreibbaren reellen Zahl r genau *eine* Hilfszahl $\Pi(r)$ zugeordnet, so daß sie genau *einen* Platz in der Folge *RA* hat.

6.7. Der Versuch, durch die Definition einer Cantor'schen Diagonalzahl die Unvollständigkeit der Folge *RA* aller reellen Zahlen zu beweisen, mißlingt.

6.7.1. Wir nehmen an, ein Kritiker der Vollständigkeit der Folge *RA* der reellen Zahlen bildet eine Cantor'sche Diagonalzahl der Gestalt $c = 0' c_1c_2 \ldots c_n \ldots\ldots$ mit $\forall n$: $c_n \neq r_{n,n}$, so daß c in der Folge *RA* nicht enthalten sein kann.

6.7.2. Die Vorschrift zur Konstruktion von c kann in (mindestens) einer Zeichenfolge ZF so dargestellt werden, daß c = c(ZF) eindeutig beschrieben wird. Gemäß 6.6.7 hat c dann entsprechend der Größe der Hilfszahl Π(c) genau einen Platz in der Folge *RA*. Dieser Platz sei n(c).

6.7.3. Gemäß 6.6.6 ist $r_{n(c),i}$ die i ^{te} Dezimalstelle der n(c) ^{ten} reellen Zahl in der Folge *RA*. Nach 6.7.2 ist $r_{n(c)} = c$. Für i = n(c) müßte also $c_{n(c)} = r_{n(c),n(c)}$ und wegen 6.7.1 gleichzeitig $c_{n(c)} \neq r_{n(c),n(c)}$ gelten. Dies ist ein Widerspruch.

6.7.4. Die Cantor'sche Diagonalzahl c ist also in sich selbst widersprüchlich und die c beschreibende Zeichenfolge ZF mit c = c(ZF) aus der Folge *ZFA* beschreibt nicht, wie in 6.6.1 gefordert, eine reelle Zahl widerspruchsfrei. Der Autor bezeichnet daher den vom Kritiker geführten Beweis der Unvollständigkeit der Folge *RA* der reellen Zahlen gemäß 2.4.3 als mißlungen.

6.8. Für eine Zeichenfolge ZF definieren wir ZF - beschreibbare Zahlen.

6.8.1. Wir bezeichnen eine Zahl, die durch eine Zeichenfolge ZF eindeutig beschrieben werden kann, als ZF - beschreibbar.

6.8.2. Welche Zahlen ZF - beschreibbar sind, hängt von der zur Verfügung stehenden Zeichenmenge Ω sowie von den diesen Zeichen zugemessenen Bedeutungen ab.

6.8.2.1. Wird ein Schriftsatz zur Übermittlung einer Information von einer Person P_1 an eine Person P_2 verwendet, müssen sich P_1 und P_2 vorher über die Bedeutungen der Zeichen bzw. Zeichenkombinationen aus Ω einigen.

6.8.3. Mit $\Omega = \{0,1\}$ können Mengen dieser Zeichen gebildet werden, die keine weitere Bedeutung haben. Einigt man sich aber auf das binäre Zahlensystem, sind jede natürliche Zahl und die Null ZF - beschreibbar.

6.8.4. Erweiterungen von Ω, etwa durch Operationszeichen $\{+, -, x, :\}$ oder durch Zeichen fester Bedeutung, wie π, e, usw., erweitern die Menge der ZF - beschreibbaren Zahlen.

6.8.5. Für a^b = a exp b wird die Zahl z = 9exp{9exp[9exp(9exp9)]} durch eine Zeichenfolge ZF = ^{23}ZF der Länge L = 23 beschrieben. Es gibt genau ω^{23} verschiedene Zeichenfolgen ^{23}ZF und es ist $\omega^{23} << z$. Nur ein sehr kleiner Teil der natürlichen Zahlen kleiner als z kann daher ^{23}ZF - beschreibbar sein.

6.8.6. Bezeichnen wir mit $N(^{L}ZF)$ die Anzahl der ^{L}ZF - beschreibbaren natürlichen Zahlen und mit $M(^{L}ZF)$ die größte ^{L}ZF - beschreibbare natürliche Zahl, dann wird für genügend großes L jedenfalls $N(^{L}ZF) \ll M(^{L}ZF)$ sein. Je länger eine Zeichenfolge ^{L}ZF ist, um so größer ist die größte ^{L}ZF - beschreibbare natürliche Zahl $M(^{L}ZF)$ aber um so kleiner ist der Anteil $N(^{L}ZF)\,/\,M(^{L}ZF)$ der ^{L}ZF - beschreibbaren natürlichen Zahlen an der Zahlenmenge $\{0, M(^{L}ZF)\}$.

6.8.7. Bei vorgegebener Zeichenmenge Ω und vorgegebener Bedeutung der Zeichen bzw. der Zeichenkombinationen stellen wir allgemein die ***Frage nach der Verteilung der*** ^{L}***ZF - beschreibbaren natürlichen (bzw. rationalen, bzw. reellen usw.) Zahlen auf der Zahlengeraden für verschiedene Längen L der Zeichenfolgen.*** Insbesondere fragen wir nach der Anzahl $N\,(^{L}ZF)$ der ^{L}ZF - beschreibbaren natürlichen Zahlen und nach der größten solchen Zahl $M(^{L}ZF)$.

6.9. Es gibt nur endlich viele einzelne Zahlen.

6.9.1. Die Menge der Zahlen ist unendlich.

6.9.2. Die Menge der durch Zeichenfolgen tatsächlich beschreibbaren Zahlen ist endlich.

6.9.2.1. Um festzustellen, ob eine Zeichenfolge eine Zahl (allgemein ein Element einer Menge) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, muß diese Zeichenfolge zur Gänze gelesen werden.

6.9.2.2. Zeichenfolgen mit einer Länge größer als etwa 10^{20} können ihres Umfanges wegen nie zu Ende gelesen werden.

6.9.2.2.1. Das Lesen eines Bandes der Universalbibliothek (Einführung) erfordert mehr als einen Tag. Zeichenfolgen in einer Länge von 35000 Bänden sind daher nicht mehr lesbar.

6.9.2.2.2. Auch wenn durch den Einsatz von Computern die Größenordnung vielleicht um einen Faktor von 10^{15} vergrößert werden könnte, bleibt eine Länge von ca. 10^{20} Zeichen obere Grenze für die Lesbarkeit.

6.9.2.3. Die Frage, ob eine Zeichenfolge eine Zahl (allgemein ein Element einer Menge) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, wird mit genügend langer Zeichenfolge unentscheidbar. Aus 6.9.2.2 folgt daher 6.9.2.

6.9.3. Wegen 6.9.2 können aus der unendlichen Menge der natürlichen Zahlen nur endlich viele einzeln ausgewählt werden, über die gesprochen werden kann, woraus 6.9 folgt. Diese Feststellung beinhaltet natürlich eine Definition des Begriffes „Einzelne Zahl“.

6.9.4. Bei der in der Universalbibliothek zugrunde gelegten Zeichenmenge von 500 Zeichen gibt es höchstens ca. $500^{10^{20}}$ lesbare Zeichenfolgen. Nur ein verschwindend kleiner Bruchteil davon beschreibt verschiedene (!) Zahlen eindeutig und widerspruchsfrei. Die Anzahl einzelner Zahlen im Sinne von 6.9.3 ist daher um Größenordnungen kleiner.

6.9.5. Der hier sich zeigende Unterschied zwischen potentiell unendlich und aktual unendlich beruht darauf, daß auch Mathematik nur in Raum und Zeit betrieben werden kann.

<u>6.10. Die Welt gemäß 5 ist umfangreicher als die Menge der lesbaren Zeichenfolgen.</u>

6.10.1. In 6.1 wurde eine konkrete Schrift vorausgesetzt. In 6.5 wurde weiters vorausgesetzt, daß der Leser alle Zeichenfolgen im selben Sinne interpretiert, wie der Autor.
6.10.2. Für jede lesbare Zeichenfolge gibt es eine Vielzahl von möglichen Interpretationen. Eine Zeichenfolge kann etwa nur als graphische Darstellung angesehen werden, wobei es auch auf die Form der Schriftzeichen und auf die Zeilenwahl ankommt. Sie kann bei entsprechender Übereinkunft als Darstellung einer akustischen Mitteilung dienen oder als Mitteilung durch andere Sinnesorgane.
6.10.3. Die gewählte Interpretation hängt von der jeweils lesenden Person P und vom Zeitraum ΔT des Lesens ab.
6.10.4. Durch die Einbeziehung von P und ΔT übersteigt der Umfang der Welt gemäß 5 den Umfang der Zeichenfolgen erheblich, bleibt aber natürlich abzählbar.

7. Kann die Unvollständigkeit einer auf der Universalanordnung beruhenden abzählbaren Anordnung der reellen Zahlen zwischen Null und Eins durch eine Diagonalzahl bewiesen werden? Eine Diskussion:

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Universalanordnung (Pkt 3.4 aus „Abzählbarkeit; Relative Wahrheit und Universalanordnung“). **Der Autor A** behauptet, in dieser abzählbaren Anordnung von Denkobjekten sind **alle reellen Zahlen zwischen Null und Eins** als Denkobjekte enthalten. **Ein Kritiker K** will die Unvollständigkeit der Anordnung durch die Einführung einer Diagonalzahl beweisen.

Die Diskussion darüber beginnt A mit folgender Anordnung **RA(0,1)**:

(1) Für alle $A(M,P,\Delta T)$ (vgl. 2.1 aus „Abzählbarkeit; ....“) mit $P \neq K$ wird an die Stelle $n = n(M,P,\Delta T)$ (vgl. 3.4.3) von RA(0,1) die Zahl 0’4999..... gesetzt.

(2) Für alle $A_Z(M,K,\Delta T)$, für welche **K in ΔT bejaht**, daß M eine reelle Zahl Z zwischen Null und Eins eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, wird an die Stelle $n = n(M,K,\Delta T)$ von RA(0,1) diese Zahl Z gesetzt.

(3) Für alle $A(M,K,\Delta T)$, für welche K in ΔT nicht bereit ist zu bejahen, daß M eine reelle Zahl zwischen Null und Eins eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt, wird an die Stelle $n = n(M,K,\Delta T)$ von RA(0,1) die Zahl 0’4999..... gesetzt.

In der so gewonnenen abzählbaren Anordnung RA(0,1) sind **definitionsgemäß nach Meinung von K** alle Zahlen reell und liegen zwischen Null und Eins. A behauptet darüber hinaus, **daß alle reellen Zahlen zwischen Null und Eins ihren Platz in RA(0,1) haben**. Die an der n^{ten} Stelle stehende Zahl sei $r_n = 0'r_{n1}r_{n2}... r_{nn}.....$ mit $r_{ni} \in (0,1, ..., 9) \wedge \neg\forall i: r_{ni} = 0 \wedge \neg\forall i: r_{ni} = 9$.

Der Einwand von K lautet: Auf Grund von RA(0,1) wird eine Diagonalzahl $c = 0'c_1c_2 ... c_n .....$ mit $\forall n: c_n \neq r_{nn}$ gebildet, woraus $\forall n: c \neq r_n$ folgt.

A verlangt eine Konkretisierung von c.

K konkretisiert c z.B. durch $c_n = 1$ für $r_{nn} \neq 1$ und $c_n = 2$ für $r_{nn} = 1$.

A bildet eine Mitteilung MK, welche die Vorschrift zur Bildung von RA(0,1) sowie die von K gegebene Vorschrift zur Bildung von c enthält. Um seine Kritik aufrecht zu erhalten muß K in einem Zeitintervall ΔT bejahen, daß MK die reelle Zahl c zwischen Null und Eins eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Gemäß (2) der Vorschrift zur Bildung von RA(0,1) steht c damit an der Stelle r_n mit $n = n(MK,K,\Delta T)$ in RA(0,1). **Gemäß der von K gegebenen Definition müßte daher $c_n = r_{nn} \neq r_{nn}$ gelten.** Die Diagonalzahl c wird daher nicht wie gefordert widerspruchsfrei beschrieben, so daß an die Stelle $n = n(MK,K,\Delta T)$ gemäß (3) der Vorschrift zur Bildung von RA(0,1) die Zahl 0’4999..... zu setzen ist. Daher bezeichnet A den Versuch, durch die Bildung einer Diagonalzahl die Unvollständigkeit der abzählbaren Anordnung RA(0,1) der reellen Zahlen zwischen Null und Eins zu beweisen, **als misslungen.**