Schrittweiser Aufbau des Kontinuums

"Wenn es möglich gewesen wäre, den Turm von Babel zu erbauen, ohne ihn zu erklettern, es wäre erlaubt worden." Dieser Aphorismus von Franz Kafka entspricht genau dem potentiell Unendlichen der Menge der natürlichen Zahlen.

Die Menge MN der natürlichen Zahlen ist wohl das einfachste Beispiel für einen schrittweisen Aufbau einer potentiell unendlichen Menge. Ein solcher Schritt besteht dabei in der Addition von 1 zu einer beliebigen Zahl n. Mit 1 beginnend kann durch Aneinanderreihen von endlich aber unbegrenzt vielen Schritten die gesamte Menge MN aufgebaut werden. Freilich werden auch nach noch so vielen Schritten immer nur endlich viele natürliche Zahlen erreicht, während stets unendlich viele unerreicht bleiben. Trotzdem sind grundsätzlich alle natürlichen Zahlen der potentiell unendlichen Menge MN erreichbar. Man kann sagen, die gesamte potentiell unendliche Menge MN kann schrittweise aufgebaut werden. Dass man diese Menge abzählbar anordnen kann, ist trivial.

Von den natürlichen Zahlen ausgehend können schrittweise weitere Zahlenklassen eingeführt werden. Wählen wir als nächsten Schritt beispielsweise die Menge MR der rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$, gebildet aus natürlichen Zahlen m und n. Dass auch MR abzählbar angeordnet werden kann, ist zwar nicht trivial aber leicht zu zeigen.

Die Zahlen $\frac{m}{n}$ liegen überall dicht. Trotzdem gibt es ausreichend "Zwischenräume" um neue Zahlenklassen einzuführen. Wählen wir als nächsten Schritt beispielsweise die Menge MA der algebraischen Zahlen. Auch für sie steht in den "Zwischenräumen" der Zahlen aus MR genügend Platz zur Verfügung und auch für sie kann unschwer eine abzählbare Anordnung angegeben werden.

Die Erweiterungen der Zahlenklasse MN durch den Schritt zu MR und den weiteren Schritt zu MA sind nur zwei willkürlich gewählte Erweiterungsschritte. Ebenso gut hätten wir MN durch die einzige Zahl ½ erweitern können. Die Abzählbarkeit bliebe trivialerweise gegeben. Analog wären die Einbeziehung der Zahl $\sqrt{2}$ in MN bzw. in MR Erweiterungsschritte, welche die Abzählbarkeit erhalten. Man bleibt dabei aber immer noch im Zahlenbereich MA.

Den Übergang von MN zu MR haben wir vorhin in einem einzigen Schritt vorgenommen. Genauso gut hätten wir dazu auch abzählbar viele Einzelschritt durch Erweiterung von MN durch jede einzelne rationale Zahl $\frac{m}{n}$ verwenden können. Die Möglichkeiten, von MN zu MR zu gelangen erscheinen schon sehr komplex. Gleiches gilt für den Übergang von MN oder MR zu MA. Wesentlich komplexer gestaltet sich das Erweiterungsproblem, wenn man willkürlich definierte neue Zahlenklassen einbezieht. Ein Beispiel wären reelle Zahlen, nennen wir sie ε-Zahlen r_ε, mit folgender Eigenschaft: Es gilt stets $r_\varepsilon > r$ und für alle reellen Zahlen $r^+ > r$ gilt $r_\varepsilon < r^+$. Durch Erweiterung solcher Zahlenklassen um $\varepsilon\varepsilon$-Zahlen $r_{\varepsilon\varepsilon}$ etc. wird die neue Zahlenklasse schon recht unübersichtlich.

Ein anderes Problem mit den Erweiterungen hätten die Intuitionisten. Dazu ein Beispiel. Im Zusammenhang mit dem "tertium non datur" wurde eine reelle Zahl folgendermaßen definiert: $r = 0{,}a_1a_2a_3.....$ und zur Definition von a_n dient die Folge $\Psi(n) = 2n + 1$ der ungeraden natürlichen Zahlen > 1. Ein bekanntes zahlentheoretisches Problem war die Frage, ob diese Folge nur nichtvollkommene Zahlen enthält oder ob in ihr auch vollkommene Zahlen auftreten. Mit Hilfe dieser Folge wird nun $a_n = 0$ gesetzt, wenn $\Psi(n)$ nichtvollkommen ist und $a_n = 1$ gesetzt, wenn $\Psi(n)$ vollkommen ist. Man weiß nun nicht, ob $r = 0$ oder $r > 0$ ist, auch wenn man praktisch $r < \varepsilon$ für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ zeigen kann. Für den Intuitionisten ist r weder gleich Null noch größer als Null. Das tertium non datur gilt nicht und es bleibt offen, ob r tatsächlich eine reelle Zahl ist.

Von der Menge der algebraischen Zahlen MA ausgehend können schrittweise neue Zahlenklassen aus dem transzendenten Bereich eingeführt werden. Dazu genügt es bereits, eine einzige transzendente Zahl, etwa π, einzubeziehen und in gleicher Weise wie eine natürliche Zahl zur Bildung algebraischer Zahlen zu verwenden. Ganze Klassen neuer Zahlen erhält man z.B. durch Hinzufügen von Grenzwerten mit "$n \to \infty$" wie unendliche Summen $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ oder unendliche Produkte $\prod_{n=1}^{\infty} f(n)$. Damit wird etwa das Produkt von Wallis: $\frac{\pi}{2} = \prod_1^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$ einbezogen. Trotz des "Überall dicht Liegens" der Zahlen aus MA ist stets unbegrenzt Platz für neue Zahlen. Innerhalb jeder neuen Zahlenklasse können die in ihr enthaltenen Zahlen in einer klassenbezogenen Reihenfolge unschwer abzählbar angeordnet werden. Es lässt sich erkennen, dass eine solche klassenbezogene Abzählbarkeit jedenfalls dann gewährleistet ist, wenn ein Erweiterungsschritt jeweils nur eine neue Zahl einbezieht.

Wir betrachten nun alle durch schrittweise Erweiterung von MA erreichbaren Zahlen und behaupten, durch diese werde das Kontinuum vollkommen ausgeschöpft. Um dies zu zeigen, führen wir zunächst eine abzählbare Anordnung aller möglichen Objekte unseres Denkens ein.

Eine der ersten Barrieren, auf die wir bei diesem Vorhaben stoßen, ist die Frage, welchen Zugang zu "allen möglichen Objekten unseres Denkens" wir eigentlich haben. Jeder Mensch kann bestenfalls alle möglichen Objekte seines eigenen Denkens untersuchen. Zu Objekten des Denkens eines anderen Menschen hat er keinen Zugang. Dies führt uns sofort zu der altbekannten Frage, wie übereinstimmende Urteile verschiedener Personen überhaupt zustande kommen können. Der Autor ist überzeugt, dass die Richtigkeit der Aussage: "1 + 1 = 2" vom jeweiligen Leser dieser Arbeit bestätigt würde. Die Frage ist nur: Wie kommt er zu dieser Überzeugung?

Diese Frage führt in die Erkenntnistheorie. Eine ausführlichere Behandlung des Themas würd den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher nur so viel: Wenn wir in der Praxis immer davon ausgehen, es gäbe absolute Wahrheiten, also Urteile, die von allen Menschen stets in gleicher Weise gefällt werden, so hängt das mit der Gleichartigkeit unserer Erfahrungen, unserer Sprachentwicklung und (ganz wesentlich) unserer Sinnesorgane zusammen. Beispiele für letzteres sind etwa die Kant'schen Kategorien oder die zu Widersprüchen führenden anschaulichen Vorstellungen von den Elementarteilchen.

In diesem Sinne erscheint auch die Trennung von Naturwissenschaften und Geisteswissenschaften der Problematik nicht angemessen. Was dem Naturwissenschaftler die Bestätigung oder Widerlegung eines Denkmodells durch ein Experiment ist dem Geisteswissenschaftler die Widerlegung einer Annahme durch die Erzeugung eines Widerspruches. Die Analogie zur "Bestätigung" wird von den Geisteswissenschaftlern immer wieder gesucht, manch einer glaubt sie gefunden zu haben, wenn ihm die Richtigkeit einer Annahme als "evident" erscheint. Aber man ist dabei, wie die Erfahrung etwa in der naiven Mengenlehre zeigt, vor Irrtümern nicht gefeit. Viel Arbeit wurde und wird in Versuche gesteckt, die Widerspruchsfreiheit von Teilbereichen der Mathematik nachzuweisen, vielfach mit keinem anderen Erfolg, als zu zeigen: Wenn der Bereich B_1 widerspruchsfrei ist, dann auch der Bereich B_2. Die Falsifizierung leistet eben doch mehr als die Verifizierung.
Trotz der Problematik jeder Allgemeingültigkeit von "wahr" oder "falsch" wollen wir uns der Behandlung dieser Fragen zuwenden und zwar, um unterschiedlichen Ansichten verschiedener Personen über Richtigkeit oder Unrichtigkeit von Aussagen Rechnung zu tragen, in dem wir selbst uns jedes Urteils enthalten und nur die Meinung jeder jeweils in Frage kommenden Person protokollieren. Damit relativieren wir den Begriff "Wahrheit" und sind selbst nur mehr neutraler Beobachter. Dafür müssen wir aber prüfen, wie ein solches Protokoll aussehen müsste.

Jedes Protokoll muss Informationen enthalten, die in einer "Sprache" abgefasst sind. Um den Schwierigkeiten zu entgehen, die der Begriff einer allgemeingültigen Sprache mit sich bringen muss, wollen wir für jede Sprache verwendbare "Mitteilungen M" einführen, die wir folgendermaßen definieren: Eine Mitteilung M vom Umfang n ist ein quadratischer Raster, bestehend aus n^2 "Elementarquadraten" der Seitenlänge 0,01 mm, von denen jedes entweder weiß oder schwarz ist. Ein solcher Raster kann z.B. ein Blatt Papier, eine Wandtafel, ein Monitor etc. sein, auf dem sichtbare Zeichen angebracht sind. Die Beschränkung auf schriftlich formulierte Mitteilungen stellt bei dieser Definition der zugelassenen Informationen keine Beschränkung der Allgemeinheit dar. Wir erinnern daran, dass von allen mathematischen Sätzen, Beweisen, Theorien etc. stets eine schriftliche Darstellung verlangt wird.

Wir wollen nun alle möglichen Mitteilungen M abzählbar anordnen. Jede Mitteilung vom Umfang n besteht aus n^2 Elementarquadraten, die in n Zeilen zu je n Stellen angeordnet sind. Jedes dieser Elementarquadrate ist entweder weiß oder schwarz.

Einem weißen Elementarquadrat ordnen wir die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 2 zu. Jenes Elementarquadrat, das in der Zeile j an der Stelle k steht, bezeichnen wir mit EQ_{jk} und die zugeordnete Ziffer (1 oder 2) mit a_{jk}. Jede Mitteilung M vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl $a(M) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}...a_{jk}...a_{nn}$ eindeutig dargestellt. Alle möglichen Mitteilungen M ordnen wir nun zunächst in Gruppen nach ihrem Umfang n und anschließend innerhalb jeder Gruppe nach der Größe von a(M) in einer Anordnung AO(M) abzählbar an.

Eine solche Mitteilung M ist für sich allein genommen "sinnlos". Sie ist ein physikalisches Objekt, ein Blatt Papier, eine Wandtafel, ein Monitor etc. Eine Seite Chinesischer Schriftzeichen ist etwa für den Autor ohne Sinn, da er dieser Sprache bzw. dieser Schrift nicht mächtig ist. Nur durch eine Person P, welche eine Mitteilung M liest und versteht, kann M einen "Sinn" gewinnen und zwar gerade und nur für diese Person P. Ein solcher durch einen Lesevorgang entstandene Sinn ist dann offenbar ein Objekt des Denkens von P. Wir können ihn als von P und M abhängiges Denkobjekt ansehen und mit DO(P,M) bezeichnen.

Wir setzen daher zunächst fort mit einer abzählbaren Anordnung aller möglichen Lesevorgänge. Dabei gehen wir davon aus, dass jede mögliche Person im Zeitpunkt jedes möglichen Lesevorganges L(P) ein gewisses Mindestvolumen im Raum einnimmt und für den Lesevorgang eine gewisse Mindestzeit benötigt. Die Einbeziehung der Zeit ist deshalb notwendig, weil eine Mitteilung M für P in verschiedenen Zeitpunkten unterschiedlichen Sinn haben kann. P kann in einem Zeitpunkt über Wissen verfügen, das ihm in einem anderen Zeitpunkt nicht zur Verfügung steht. Daher muss auch der Zeitpunkt einer möglichen Aussage von P über den Sinn von M in die Überlegungen einfließen.

Nun wählen wir ein Koordinatensystem im Raum-Zeit-Universum (drei Raumkoordinaten und eine Zeitkoordinate) und zerlegen es in Raum-Zeit-Elemente RZE. Ein Raum-Zeit-Element RZE sei ein (vierdimensionaler) Elementarwürfel EW der Seitenlänge 0,01 mm (drei Raumkoordinaten) und der Dauer 0,01 Sek. (eine Zeitkoordinate). Mit dem vorhin gewählten Koordinatensystems im Raum-Zeit-Universum lassen sich alle Elementarwürfel EW in einer Anordnung AO(EW) abzählbar anordnen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass in jenem Raum-Zeit-Volumen, das irgendeine mögliche Person P währen irgendeines möglichen Lesevorganges L(P) einnimmt, mindestens ein Elementarwürfel EW[L(P)] zur Gänze liegt. Dieser Elementarwürfel kennzeichnet daher den Lesevorgang L(P) eindeutig. Mit Hilfe der abzählbaren Anordnung AO(EW) aller Elementarwürfel lassen sich alle möglichen Lesevorgänge L(P), die ja jeweils durch mindestens einen EW eindeutig gekennzeichnet sind, abzählbar anordnen. Wir bezeichnen diese abzählbare Anordnung aller möglichen Lesevorgänge mit AO[L(P)].

Wir beenden unsere Ordnungsstruktur mit der abzählbaren Anordnung aller möglichen Denkobjekte DO. Als "Denkobjekt" haben wir den "Sinn" bezeichnet, den eine

"Mitteilung M" für eine "Person P" hat, welche diese Mitteilung liest. Jedes mögliche Denkobjekt DO hat daher eine mögliche Mitteilung M und einen möglichen Lesevorgang L(P) zur Voraussetzung, die zusammen dieses Denkobjekt eindeutig kennzeichnen. Alle möglichen Mitteilungen M sind in AO(M) abzählbar angeordnet, alle möglichen Lesevorgänge L(P) in AO[L(P)]. Aus AO(M) und AO[L(P)] erhält man daher eine abzählbare Anordnung AO[DO(P,M)] aller möglichen Denkobjekte. Wegen ihrer Personenbezogenheit nennen wir sie "Individualanordnung".

Tatsächlich handelt es sich hier um eine abzählbare Anordnung alles Denkbaren. Ist aber alles Denkbare abzählbar, dann gilt dies auch für beliebige Mengen beliebig definierter Elemente. Als Beispiel dienen etwa die reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Diese Zahlenmeng wird üblicherweise als "überabzählbar" angesehen. Als bekannte Begründung dafür wird oft das zweite Diagonal-Argument von Cantor angeführt. Im Folgenden eine Darstellung: Es sei r_1, r_2, ... r_n, ... eine beliebige Anordnung reeller Zahlen zwischen 0 und 1. Man stellt nun jede dieser Zahlen als Dezimalzahl $r_n = 0{,}r_{n1}r_{n2}...r_{nn}.....$ dar und bildet das folgende Schema:

$$\begin{array}{l} r_1 = 0{,}r_{11}r_{12}...r_{1n}.... \\ r_2 = 0{,}r_{21}r_{22}...r_{2n}.... \\ \;\,.\qquad\;\; . \\ r_n = 0{,}r_{n1}r_{n2}...r_{nn}.... \\ \;\,.\qquad\;\; . \\ \;\,.\qquad\;\; . \end{array}$$

Nun bildet man eine Zahl $d = 0{,}d_1d_2...d_n....$ mit $\forall m$: $d_m \neq r_{mm}$. Diese "Diagonalzahl von Cantor" ist offenbar eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 und sie ist ungleich allen reellen Zahlen aus dem Schema denn sie unterscheidet sich jeweils an der n^{ten} Dezimalstelle von r_n. Dies sind die im Schema in der Diagonale stehenden Stellen, daher der Name. Es gilt also $\forall n$: $d \neq r_n$ womit die Unvollständigkeit des Schemas bewiesen scheint.

Wir werden nun aus der Menge RZ(0,1), den reellen Zahlen zwischen 0 und 1, mit Hilfe der Anordnung AO[DO(P,M)] aller möglichen Denkobjekte - wie jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 zweifellos eines ist - eine Anordnung bilden, bei der das zweite Diagonal-Argument von Cantor versagt. Dazu gehen wir schrittweise alle Denkobjekte aus der Anordnung AO[DO(P,M)] durch. Die erste reelle Zahl zwischen 0 und 1 auf die wir dabei stoßen setzen wir an die erste Stelle unserer Anordnung AO[RZ(0,1)]. Es handelt sich also um das erste Denkobjekt aus der Anordnung AO[DO(P,M)], das eine reelle Zahl zwischen 0 und 1widerspruchsfrei darstellt. Es gibt daher eine Person P, die in irgend einem Zeitpunkt aussagt, die Mitteilung M stelle für sie eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei dar.

Unser Problem dabei ist, dass wir gar keinen Zugang zu "allen möglichen Personen P" haben. Wir wissen lediglich, es sind nur abzählbar viele. Grundsätzlich kann keine der eben erwähnten Aussagen einer Person P auf ihre Richtigkeit überprüft werden. Es handelt sich dabei ja um eine von anderen Personen als P selbst per definitionem unüberprüfbare Meinungsäußerung von P.

Wir gehen nun die Denkobjekte aus AO[DO(P,M)] schrittweise weiter durch. Die zweite reelle Zahl zwischen 0 und 1, von der eine Person P aussagt, sie stelle eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei dar, setzen wir an die zweite Stelle von AO[RZ(0,1)]. So bauen wir schrittweise die Anordnung AO[RZ(0,1)] auf. Dabei bewegen wir uns stets im endlichen aber unbegrenzten Bereich sowohl was die möglichen Mitteilungen M als auch was die möglichen Personen P und die möglichen Zeitpunkte der Lesevorgänge L(P) anlangt. Wir sind stets im Bereich des nur potentiell Unendlichen.

Nun werden wir zeigen, dass der Versuch, die Unvollständigkeit unserer Anordnung AO[RZ(0,1)] durch das zweite Diagonal-Argument von Cantor zu beweisen, zu einem Widerspruch führt. Ein solcher Unvollständigkeitsbeweis müsste von irgend einer Person P in irgendeinem Zeitpunkt geführt werden. Es sei PK die Person des Kritikers der Vollständigkeit unserer Anordnung AO[RZ(0,1)] und MK die Mitteilung, mit der PK die Unvollständigkeit durch die Anwendung des zweiten Diagonal-Argumentes von Cantor behauptet. Eine solche Mitteilung MK muss es geben, weil wir eine schriftliche Widerlegung unserer Behauptung über die Vollständigkeit von AO[RZ(0,1)] verlangen.

Für PK stellt MK also im Zeitpunkt der Kritik eine reelle Zahl ZK, eine Diagonalzahl von Cantor, zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei dar, die seiner Meinung nach in unserer Anordnung AO[RZ(0,1)] nicht enthalten ist. Der Kritiker PK behauptet also: ZK $\notin$ AO[RZ(0,1)]. Nun handelt es sich aber bei ZK offenbar um ein Denkobjekt DO(PK,MK) von dem PK behauptet, es stelle eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei dar, denn mit seiner Hilfe soll ja gerade die Unvollständigkeit der von uns vorgenommenen Anordnung AO[RZ(0,1)] gezeigt werden. Damit behauptet PK aber ZK $\in$ AO[RZ(0,1)] im Widerspruch zu seiner früheren Behauptung. Damit ist sein Beweis der Unvollständigkeit von AO[RZ(0,1)] misslungen und der oben vorausgesagte Widerspruch hergeleitet.

In gleicher Weise lassen sich alle Beweise der Überabzählbarkeit von Mengen widerlegen, die darin bestehen, dass ein Kritiker PK zu einer auf AO[DO(P,M)] beruhenden abzählbaren Anordnung AO(E) von Elementen E einer beliebig definierten Menge ein kritisches Element EK angibt, das in AO(E) angeblich nicht enthalten ist.

Mit seinem zweiten Diagonal-Argument will Cantor den Schritt vom potentiell Unendlichen zum aktual Unendlichen vollziehen. Es ist ein Schritt vom Abzählbaren zum Überabzählbaren. Wir wollen diesen Gedanken am Beispiel der natürlichen Zahlen nachvollziehen. Zu jeder noch so großen natürlichen Zahl N kann eine größere N+1 gefunden werden, zu jeder Menge natürlicher Zahlen neue Zahlen. Die Menge der natürlichen Zahlen kann nie ausgeschöpft werden. Da es keine größte natürliche Zahl gibt, wird mit dem Zeichen ∞ eine "Zahl" mit der Eigenschaft $\forall$n: ∞ > n definiert. Der Schritt von den natürlichen Zahlen zu ∞ entspricht dem Schritt vom potentiell

Unendlichen zum aktual Unendlichen. Er entspricht, wie wir noch zeigen werden, dem Schritt ins Kontinuum RZ der reellen Zahlen.

Durch die Einbeziehung von ∞ wird "mit einem Schlag" die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen erfasst. Nun ist unsere Vorstellung von einem Kontinuum eine andere als die von einer Menge natürlicher Zahlen. Untersuchen wir das am Beispiel von Punkten in einem Raum beliebiger Dimension. Ein solcher Punkt wird durch seine Raumkoordinaten festgelegt. Bezeichnen wir seine Umgebung als Kontinuum und betrachten wir einen Weg zum Punkt hin und wieder von ihm weg, dann durchläuft dieser Weg in genügend kleiner Umgebung des Punktes die Orte

Kontinuum → Punkt → Kontinuum.

Das Kontinuum durchdringt jede Punktmenge und schiebt sich stets zwischen zwei beliebige durch Koordinaten festgelegte Punkte. Das selbe leistet aber auch die Menge der durch Koordinaten festlegbaren Punkte nur lautet der Weg zum und vom Punkt hier

andere Punkte → Punkt → andere Punkte

Der entscheidende Schritt ist die Einbeziehung der "Zahl" ∞. Die Menge der durch Koordinaten festlegbaren Punkte wird dadurch unbegrenzt, bleibt aber abzählbar. Alles spielt sich im Bereich der abzählbaren möglichen Denkobjekte aus AO[DO(P,M)] ab. Man muss nur stets im Auge behalten, dass die mit Hilfe dieser Anordnung gewonnene Folge von Punkten mit ihren jeweiligen Koordinaten nicht tatsächlich angegeben werden kann. Dazu wäre es ja - wie bereits erwähnt - notwendig, die persönliche Meinung aller möglichen Personen über den Sinn aller möglichen Mitteilungen zu kennen und das ist grundsätzlich unmöglich. Unsere Aussage über die Mächtigkeit der Punktmengen bleibt aber davon unberührt. Die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen kann nicht überschritten werden.

Abschließend wäre dazu festzustellen: Jeder Versuch, zu Mengen höherer Mächtigkeit aufzusteigen, wie er etwa von Cantor unternommen wurde, führt zu Widersprüchen. Die abzählbare Anordnung AO[DO(P,M)] aller möglichen Denkobjekte setzt solchen Versuchen eine Grenze. Für eine praktische Anordnung von Denkobjekten - etwa der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 - ist AO[DO(P,M)] aber ungeeignet. Was bleibt ist, dass die Menge dessen, woran widerspruchsfrei gedacht werden kann, nur potentiell nicht aber aktual Unendlich ist. Jeder Versuch, durch Angabe angeblich neuer Elemente die Unvollständigkeit einer auf DO[DO(P,M)] beruhenden Anordnung von Elementen einer beliebig definierten Menge nachzuweisen gleicht dem Versuch Münchhausens, sich selbst an seinem Zopf aus dem Sumpf zu ziehen. So wie dem Freiherrn für sein Vorhaben eine Stütze außerhalb des Sumpfes mangelt, so mangelt dem Kritiker der Vollständigkeit ein widerspruchsfreier Nachweis eines in der Anordnung nicht enthaltenen Elementes. Gerade durch seine Kritik hat er ja als Kritiker PK ein solches Element geschaffen. Der erzeugte Widerspruch kann auch kurz in folgende Form gebracht werden: "Es sei M_1 die Menge alles dessen, worüber gesprochen werden kann. Ich spreche jetzt über M_2, das ist die Menge alles dessen, worüber nicht gesprochen werden kann."

Die hier verwendete Methode, die Abzählbarkeit beliebiger Mengen mit Hilfe der Abzählbarkeit aller möglichen Denkobjekte aus AO[DO(P,M)] herzuleiten beruht auf möglichen Aussagen aller möglichen Personen P über den Sinn von Mitteilungen M. Diese Personenbezogenheit bringt etwas Individuelles in die Überlegungen ein. Es ist daher angemessen, die Anordnung AO[DO(P,M)] und alle auf ihr beruhenden Anordnungen - wie etwa die der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 weiter oben - als Individualanordnung zu bezeichnen. Das Heranziehen "aller möglichen Personen P" entspricht dem Grundgedanken dieser Arbeit, nämlich, dass einerseits alles Denkbare in Form von Mitteilungen M beschrieben werden kann und andererseits jede Mitteilung M für sich allein genommen sinnlos ist und erst durch eine sie lesende Person ein Sinn entstehen kann.

Es erscheint jedoch auch wünschenswert, die Kernaussage "Jedes aktual Unendliche führt zu einem Widerspruch" nicht nur mit Hilfe "aller möglichen Personen P" sondern mit Hilfe der Aussagen einer einzigen Person zu beweisen. Eine solche Person muss natürlich der Kritiker PK selbst sein. Es sei also eine beliebig definierte Menge $\mathcal{M}$ von Elementen E gegeben. Wir überlassen es nun PK, für jede mögliche Mitteilung M zu entscheiden, ob durch sie ein Element E der Menge $\mathcal{M}$ eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben wird. Ist dies der Fall, dann gilt "DO(PK,M) = E $\in \mathcal{M}$", ist dies nicht der Fall, dann gilt "DO(PK,M) $\notin \mathcal{M}$". Die Menge der Denkobjekte DO[(PK,M)$\mathcal{M}$], für die PK beim Durchlaufen der abzählbar vielen Mitteilungen M feststellt, sie seien ein Element E der definierten Menge $\mathcal{M}$, ist zweifellos abzählbar. PK muss daher ein "Kritisches Element EK $\notin \mathcal{M}$" angeben, das nicht in dieser abzählbaren Menge enthalten ist. Für dieses Element behauptet PK also: "DO(PK,MK) $\notin$ DO[(PK,M)$\mathcal{M}$]".

Wie in dem weiter oben behandelten Fall der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 muss der Kritiker PK also sowohl DO(PK,MK) = EK $\notin$ DO[(PK,M)$\mathcal{M}$] behaupten, da er ja mit Hilfe von EK die Unvollständigkeit der Anordnung DO(PK,M) zeigen will, gleichzeitig muss er aber auch von DO(PK,MK) = EK $\in$ DO[(PK,M)$\mathcal{M}$] ausgehen, also davon, dass MK für ihn das Denkobjekt DO(PK,MK) = EK eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt. Damit führt seine Argumentation auf den gleichen Widerspruch wie weiter oben das zweite Diagonal-Argument von Cantor bei dessen Versuch, die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mit Hilfe seiner Diagonalzahl zu beweisen.

Unsere oben aufgestellte Behauptung, alle durch schrittweise Erweiterung der Menge MA der algebraischen Zahlen erreichbaren Zahlen schöpfen das Kontinuum zur Gänze aus, kann also von keinem Kritiker widerspruchsfrei widerlegt werden.

Zum Abschluss die versprochene Analogie zwischen der potentiell unendlichen Menge MN der natürlichen Zahlen und dem Kontinuum RZ der reellen Zahlen. Wie große natürliche Zahlen N und wie umfangreiche Mengen natürlicher Zahlen auch immer betrachtet werden, sie sind unbedeutend gegenüber dem Rest der potentiell unendlichen Menge MN. In analoger Weise sind noch so viele Erweiterungsschritte zur Ausschöpfung des Kontinuums der reellen Zahlen unbedeutend gegenüber dem Rest der potentiell unendlichen Menge RZ der reellen Zahlen des Kontinuums. Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem potentiellen Unendlichen von MN und dem von RZ liegt aber darin, dass die schrittweise Erweiterung in MN durch ein einziges Schrittmodell, der Schritt von n zu n+1, vorgenommen werden kann, während wir für die analogen Erweiterungsschritte in RZ den wesentlich komplexeren Weg über alle möglichen Mitteilungen M und alle möglichen Personen P wählen mussten. Der schrittweise Aufbau des Kontinuums RZ entbehrt daher der einfachen Übersichtlichkeit des analogen schrittweisen Aufbaus der Menge MN der natürlichen Zahlen. Die Analogie zwischen dem schrittweisen Aufbau der abzählbaren potentiell unendlichen Menge MN und dem von RZ bleibt aber bestehen.