10 Textaufgaben

10.1 Einleitung zum Thema

Feststellung
Viele Lernenden haben Probleme beim Lösen von Textaufgaben. Die Erfahrung zeigt, dass Textaufgaben oft falsch angepackt werden. Wird das Problem unsystematisch angepackt, so erscheint der Lösungsweg vielen Lernenden wie Zauberei. Lösen von Textaufgaben hat jedoch nichts mit Zaubern zu tun. Dieser Abschnitt soll aufzeigen, wie Textaufgaben angepackt und wie am bwz uri Textaufgaben bewertet werden.

Weshalb sind Textaufgaben wichtig?
Problemstellungen werden in der Praxis in «Textform» gestellt. Ein Kunde oder ein Vorgesetzter wird ein mathematisches Problem mit Hilfe der Sprache formulieren. Aus diesem praktischen Problem muss eine Gleichung aufgestellt, die Gleichung gelöst und am Schluss die Lösung überprüft werden.

10.2 Grundschema beim Lösen von Textaufgaben

1. Aufgabe verstehen
2. Genaue Wahl der Unbekannten
3. Aufstellen der Gleichung(en)
4. Lösen der Gleichung(en)
5. Kontrolle der Lösung (die Praxis kennt keine Lösungsbücher…)
6. Antwort

1. Aufgabe verstehen
Bevor Sie eine gestellte Aufgabe wirklich verstanden haben, hat es keinen Sinn, weiter zu arbeiten. Nehmen Sie sich Zeit, den Aufgabentext sorgfältig zu lesen. Eventuell müssen Sie den Text mehrmals lesen. Sie haben die Aufgabe wahrscheinlich dann verstanden, wenn Sie die folgenden Fragen beantworten können:
- Was ist gegeben?
- Was ist gesucht?
- Hilft eine Skizze das Problem zu verstehen?
  Tipp: mit Farben arbeiten (gegeben → grün, gesucht → rot)
- Welche Grössen und Einheiten sind beteiligt?
  (z. B. Weg in m, Zeit in s, Geschwindigkeit in m/s → evtl. in einer Tabelle auflisten)

2. Genaue Wahl der Unbekannten
Dieser wichtige Schritt wird oft vergessen. Es ergibt überhaupt **keinen Sinn**, eine Gleichung (z. B. mit x) aufzustellen, wenn Sie nicht wissen, was mit der Unbekannten x gemeint ist!
- Überlegen Sie gut, welche «Grösse» Sie als Unbekannte wählen.
- Meistens steht die Unbekannte für das, was im Aufgabentext gesucht ist.
- Die Unbekannte muss nicht immer «x» heissen. Manchmal sind andere Namen sinnvoller.

- **Schreiben Sie unbedingt auf, was Ihre Unbekannte bedeutet!**
  Seien Sie dabei so präzis wie möglich, geben Sie die Einheiten für die Unbekannte an.

schlechte Beispiele	*bessere Beispiele*
E = Erwachsene A_M = Alter der Mutter m = Masse	E = Anzahl Erwachsene A_M = Alter der Mutter heute in Jahren m = Masse der Kiste in kg

- Sehr wichtig: **Die Unbekannte bedeutet immer eine Zahl!** Alles andere hätte keinen Sinn. Mit der Unbekannten wird nachher in der Gleichung gerechnet. Rechnen kann man nur mit Zahlen bzw. mit Variablen, welche Zahlen repräsentieren.

3. Aufstellen der Gleichung(en)

Das Aufstellen der Gleichung(en) ist das Hauptproblem. Sind die Gleichung oder die Gleichungen aufgeschrieben, so ist das Problem so gut wie gelöst. Folgende Fragen sollen helfen, um die Gleichung(en) zu finden:
- Welche Formeln kennen sie im Zusammenhang mit der Problemstellung?
- Welche Einheiten kommen vor, mit welchen Einheiten soll gerechnet werden?
- Stimmen die Einheiten überein (linke Seite = rechte Seite)?
- **Anzahl Unbekannte = Anzahl Gleichungen**

4. Lösen der Gleichung(en)

Das Hauptproblem bei Textaufgaben ist das Aufstellen der Gleichung(en). Das Lösen der Gleichung(en) ist meistens kein Problem. Auf das Lösen der Gleichung(en) wird hier nicht weiter eingegangen.

5. Kontrolle der Lösung

Die Praxis kennt keine Lösungsbücher! Das Überprüfen der Lösung wird leider sehr oft vernachlässigt. Es nützt nichts, wenn Sie eine Lösung gefunden haben aber nicht wissen, ob Ihre Lösung korrekt ist! Deshalb ist die Kontrolle enorm wichtig.
- Aufgabe nochmals genau durchlesen und kontrollieren, ob das was gesucht ist auch berechnet wurde.
- Für die Kontrolle wenn immer möglich einen anderen Weg einschlagen, weil sonst beim Nachrechnen mit grosser Wahrscheinlichkeit wieder der gleiche Fehler gemacht wird.
- Stimmen die Einheiten überein?
- Kann die Aufgabe mit einer massstäblichen Skizze kontrolliert werden?

6. Antwort

Die ursprüngliche Aufgabe enthielt eine Frage. Dazu gehört nun auch eine Antwort! Im Normalfall genügen Stichworte. Beachten Sie auch die Einheiten und allfällige Rundungsvorschriften.

Bewertungskriterien

- Übereinstimmung der Variablen (gleiche Variable in Deklaration, Skizze und Lösung)
- saubere Skizze
- Lösungsweg sorgfältig und vollständig dokumentiert, Resultat vereinfacht
- Gleichung aufstellen, Werte inkl. Einheiten einsetzen, Lösung berechnen

Eingescannt aus «Mathematik für die Fachschule Technik» von Heinz Rapp.

10.3 Einführung

Aufgaben mit textlich formulierten Zusammenhängen lassen sich mit Gleichungen lösen. Einen allgemein gültigen Lösungsweg in Form einer Regel gibt es für diese Art von Aufgaben im Allgemeinen nicht.

Vom vorgegebenen Sachverhalt her lassen sich jedoch bestimmte Gruppen von Aufgaben (Mischungsaufgaben, Bewegungsaufgaben, Behälteraufgaben, Arbeitsaufgaben usw.) zusammenstellen, für die gemeinsame Gesichtspunkte für das Aufstellen von Bestimmungsgleichungen gelten.

Die Lösung solcher Aufgaben erfolgt in der Regel in folgenden Schritten:

1. Feststellung, nach welcher Größe in der Aufgabe gefragt ist.
2. Einführung einer Variablen x für die gesuchte Größe.
3. Aufstellung einer Bestimmungsgleichung entsprechend der Vorgaben. Dabei darf nur Gleiches gleichgesetzt werden.
4. Beim Aufstellen der Gleichung kann zwar am Anfang die Einheit noch mitgeschrieben werden, im Zuge der Lösung ist es jedoch zweckmäßiger, später nur noch mit den Zahlenwerten ohne Einheiten (d. h. mit der Zahlenwertgleichung) zu arbeiten.

10.4 Allgemeine textliche Gleichungen

Beispiel

Das Vierfache einer Zahl, vermindert um 3, ergibt genau so viel, wie wenn das Dreifache dieser Zahl um 8 vermehrt wird. Wie lautet die Zahl?

Lösung

Aus der Fragestellung entnehmen wir, dass eine Zahl gesucht wird. Wir nennen diese Zahl x.	Die gesuchte Zahl sei x
Das Vierfache dieser Zahl (4x) wird um 3 vermindert. Damit haben wir den 1. Teil der Gleichung in eine mathematische Formulierung gebracht.	$4x - 3$
Das Dreifache der Zahl (3x), um 8 vermehrt, soll genau so groß, d. h. gleich sein wie 4x – 3.	$3x + 8$
Damit können wir die beiden Terme gleichsetzen und haben damit eine mathematische Gleichung formuliert, deren Lösung wir durch Termumformung erhalten.	$4x - 3 = 3x + 8$ $x = 11$ ***Ergebnis:*** Die Zahl heißt 11

Probe: Das Vierfache von 11 ist 44. Diese Zahl wird um 3 vermindert, was 41 ergibt. Andererseits ist das Dreifache von 11 gleich 33. Diese Zahl, um 8 vermehrt, ergibt ebenfalls 41. Die Zahl 11 erfüllt also die gestellten Forderungen.

Beispiel

Eine Maschinenfabrik stellte im zweiten Quartal eines Jahres durchschnittlich 7 Maschinen pro Monat mehr her als im Monatsdurchschnitt des ersten Quartals.

Wie viel Maschinen wurden monatlich im ersten Quartal produziert, wenn im ersten Halbjahr insgesamt 357 Maschinen gebaut wurden?

Lösung

Ansatz aus der Fragestellung:	Im 1. Quartal wurden monatlich x Maschinen produziert.
In 3 Monaten ist die Produktion das Dreifache.	3x Maschinen
Im 2. Quartal werden pro Monat 7 Maschinen mehr hergestellt:	(x + 7) Maschinen
In 3 Monaten sind das:	3 (x + 7) Maschinen
Im 1. Halbjahr ist die Gesamtproduktion 357 Maschinen.	$3x + 3(x + 7) = 357$ $6x + 21 = 357$
Damit finden wir die Bestimmungsgleichung, die zum Ergebnis führt.	$6x = 336$ $x = 56$
	Ergebnis: Im 1. Quartal wurden monatlich 56 Maschinen produziert.

Beispiel

Zwei Brüder sind 21 und 29 Jahre alt. Vor wie viel Jahren war der ältere Bruder dreimal so alt wie der jüngere?

Lösung

Aus der Fragestellung folgt der Ansatz:	Der Zeitpunkt sei vor x Jahren gewesen.
Das Alter des älteren Bruders betrug vor x Jahren	(29 – x) Jahre
Das Alter des jüngeren Bruders war	(21 – x) Jahre
Das 3-fache Alter des jüngeren Bruders entspricht zu diesem Zeitpunkt dem Alter des Bruders. Als Gleichung erhalten wir:	$3(21 - x) = 29 - x$ $63 - 3x = 29 - x$
Durch Termumformungen finden wir das Ergebnis.	$-2x = -34$ $x = 17$
	Ergebnis: Vor 17 Jahren war der ältere Bruder 3 mal so alt wie der jüngere.

10.5 Mischungsaufgaben

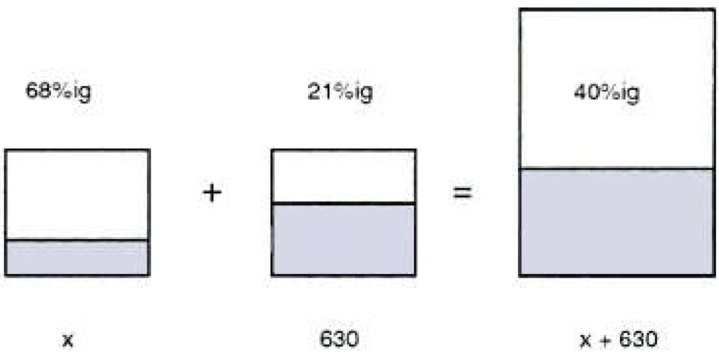
Beispiel

Mit wie viel cm^3 68 %igem Alkohol sind 630 cm^3 mit 21 % Alkoholgehalt zu mischen, damit 40 %iger Alkohol entsteht?

Lösung

Wir gehen bei dieser Rechnung davon aus, dass das Volumen der Bestandteile (z. B. des reinen Alkohols oder des reinen Wassers) vor dem Mischen gleich dem Volumen nach dem Mischen ist[2].

Annahme: Die gesuchte Menge Alkohol sei x cm^3.



Volumen des reinen Alkohols vor dem Mischen = Volumen des reinen Alkohols nach dem Mischen

$$\frac{68}{100} \cdot x\ \text{cm}^3 + \frac{21}{100} \cdot 630\ \text{cm}^3 = \frac{40}{100} \cdot (x + 630)\ \text{cm}^3$$

Zahlenwertgleichung (ohne Einheiten):

$$\boxed{0{,}68 \cdot x + 0{,}21 \cdot 630 = 0{,}4\,(x + 630)}$$

$$68x + 21 \cdot 630 = 40\,(x + 630)$$

$$28x = 11\,970$$

$$x = 427{,}5$$

Ergebnis: Es müssen 427,5 cm^3 68 %iger Alkohol hinzugemischt werden.

Beispiel

Welche Säurekonzentration entsteht, wenn 40 ℓ einer 80 %igen Schwefelsäure mit 50 ℓ einer 40 %igen Schwefelsäure verdünnt werden?

---

[2] Die bei der Mischung von Flüssigkeiten sich ergebende Volumenkontraktion soll hier unberücksichtigt bleiben. Sie kann jedoch rechnerisch ebenfalls erfasst werden.

Lösung

Aus den Volumen-Prozenten lassen sich die Volumen-Anteile der reinen Schwefelsäure vor dem Mischen berechnen.

Volumenanteile der reinen Schwefelsäure vor dem Mischen:

$$\frac{80}{100} \cdot 40\ \ell + \frac{40}{100} \cdot 50\ \ell$$

Diese entsprechen dem Volumenanteil der reinen Schwefelsäure nach dem Mischen.

Die Säurekonzentration nach dem Mischen sei x %.

Volumenanteil der reinen Schwefelsäure nach dem Mischen:

$$\frac{x}{100}\ (40 + 50)\ \ell$$

Damit ergibt sich folgende Bilanzgleichung, aus der die Konzentration x in % errechnet wird.

$$\boxed{\frac{80}{100} \cdot 40 + \frac{40}{100} \cdot 50 = \frac{x}{100}(40+50)}$$

$$80 \cdot 40 + 40 \cdot 50 = x\,(40 + 50)$$

$$90x = 5\,200$$

$$x = 57{,}78$$

Ergebnis: Die Konzentration der verdünnten Schwefelsäure beträgt 57,78 %.

Beispiel

100 g Gold vom Feingehalt 980 sollen durch Zusatz von Kupfer zu Gold mit einem Feingehalt von 750 umgeschmolzen werden.

Wie viel g Kupfer sind dafür erforderlich und wie viel karätig ist die Legierung?

Lösung

Annahme: Es sollen x g Kupfer zugemischt werden.

Die Menge des reinen Goldes vor dem Mischen errechnet sich aus dem Feingehalt (≙ ‰).

Goldmenge vor dem Mischen:

$$\frac{980}{1000} \cdot 100\,\text{g}$$

Sie ist gleich der Menge des reinen Goldes nach dem Mischen.

Goldmenge nach dem Mischen:

$$\frac{750}{1000}(100 + x)\,\text{g}$$

Damit ergibt sich folgende Zahlenwertgleichung, aus der wir die Kupfermenge x in g erhalten.

$$\frac{980}{1000} \cdot 100 = \frac{750}{1000}(100 + x)$$

$$98\,000 = 75\,000 + 750x$$

Damit erhält man x als die gewünschte Kupfermenge in g.

$$750\,x = 23000$$

$$x = 30{,}67$$

Es müssen somit 30,67 g Kupfer zulegiert werden.

Ergebnis:
30,67 g Kupfer sind erforderlich.

Der Goldgehalt kann auch in Karat angegeben werden.

Dabei entspricht 1/24 des Gesamtgewichts 1 Karat. (24 Karat ≙ Feingehalt 1000)

Goldgehalt in Karat:

$$\frac{750}{1000} \cdot 24 = 18$$

Ergebnis:
Die Gold-Legierung vom Feingehalt 750 ist 18-karätig.

Beispiel

Eine Kupfer-Zink-Legierung mit der Dichte $\rho = 8{,}2$ kg/dm^3 soll aus 142 kg Kupfer ($\rho_{Cu} = 8{,}9$ kg/dm^3) und einer noch zu berechnenden Menge Zink ($\rho_{Zn} = 7$ kg/dm^3) hergestellt werden. Wie viel kg Zink werden benötigt?

Lösung

Bei der Berechnung wollen wir von einer Volumenbilanz ausgehen. Zur Vereinfachung wird wiederum von Mischungsverlusten, die sich in Wirklichkeit ergeben, abgesehen.

Zwischen Masse und Volumen besteht die Beziehung

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

Annahme: Es werden x kg Zink benötigt.

Summe der Einzelvolumina vor dem Mischen	=	Gesamtvolumen nach dem Mischen
$V_{Cu} + V_{Zn}$	=	V_{CuZn}

$$\boxed{\frac{142}{8{,}9} + \frac{x}{7} = \frac{142 + x}{8{,}2}}$$

$$8150{,}8 + 72{,}98x = 62{,}3x + 8846{,}6$$

$$x = 65{,}15$$

Ergebnis: Es müssen 65,15 kg Zink mit 142 kg Kupfer legiert werden.

Beispiel

Wie viel kg Wasser sind aus 1000 kg Salzwasser mit 5 % Salzgehalt zu verdampfen, damit eine Salzsole mit 20 % Salzgehalt entsteht?

Wie viel kg Salz müsste man in das Salzwasser geben, um denselben Salzgehalt zu erzielen?

Lösung

Aus den Gewichtsprozenten lässt sich die reine Salzmasse, die vor dem Verdampfen und nach dem Verdampfen als gleichbleibend angenommen wird, berechnen.

Es seien x kg Wasser zu verdampfen.

Salzmasse vor dem Verdampfen: $\frac{5}{100} \cdot 1000\,\text{kg}$

Salzmasse nach dem Verdampfen: $\frac{20}{100} \cdot (1000 - x)\,\text{kg}$

Damit ergibt sich folgende Zahlenwertgleichung:

$$\boxed{\frac{5}{100} \cdot 1000 = \frac{20}{100}(1000 - x)}$$

$$5000 = 20\,000 - 20x$$

$$20x = 15000$$

$$x = 750$$

Ergebnis: Es sind 750 kg Wasser zu verdampfen.

Beim Beimischen von Salz wird wiederum die Salzmasse vor dem Mischen gleich der Salzmasse nach dem Mischen gesetzt.

Die beizumischende Salzmasse sei y kg.

Salzmasse vor dem Mischen:

$$\frac{5}{100} \cdot 1000\,\text{kg} + y\,\text{kg}$$

Salzmasse nach dem Mischen:

$$\frac{20}{100}\cdot(1000+y)\,kg$$

Damit ergibt sich folgende Zahlenwertgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{5}{100}\cdot 1000+y &= \frac{20}{100}(1000+y)\\ 5000 + 100y &= 20000 + 20y\\ 80y &= 15000\\ y &= 187{,}5\end{aligned}$$

Ergebnis: Um eine 20 %ige Salzsole zu erhalten, müssten 187,5 kg Salz beigemischt werden.

10.6 Bewegungsaufgaben

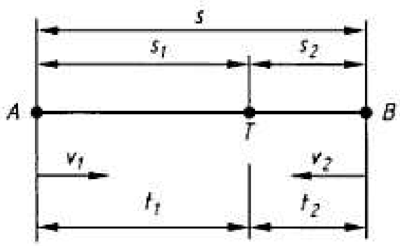
Zwischen Geschwindigkeit v, Weg s und Zeit t besteht bei gleichförmiger Bewegung die Beziehung

$$\textit{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \text{ oder } \textit{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit}$$

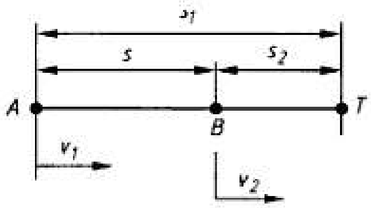
$$\boxed{\mathbf{v = \frac{s}{t} \quad \text{oder} \quad s = v \cdot t}}$$

Diese Beziehungen liegen allen Bewegungsaufgaben zugrunde. Bezüglich der Gleichzeitigkeit und Nichtgleichzeitigkeit von Bewegungsvorgängen lassen sich mehrere Aufgabentypen unterscheiden. Es ist deshalb sinnvoll, die Bewegungsvorgänge an Hand einer Bewegungsskizze darzustellen.

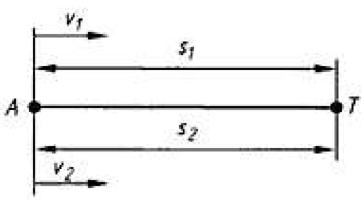
1. Zwei Fahrzeuge fahren von verschiedenen Ausgangspunkten A und B einander entgegen.
   Die Abfahrt kann gleichzeitig oder nacheinander mit verschiedener oder gleicher Geschwindigkeit erfolgen. Dabei gilt stets, dass der Gesamtweg gleich der Summe der Einzelwege ist.



2. Zwei Fahrzeuge fahren von verschiedenen Ausgangspunkten A und B in gleicher Richtung mit verschiedener Geschwindigkeit. Dabei können bei gleichzeitiger oder nicht gleichzeitiger Abfahrt die entsprechenden Wege bis zum Treffpunkt gleichgesetzt werden.



3. Zwei Fahrzeuge fahren vom gleichen Ausgangspunkt in gleicher Richtung mit verschiedener Geschwindigkeit und ungleicher Abfahrtszeit. Dabei sind stets die Wege bis zum Treffpunkt dieselben.



Beispiel

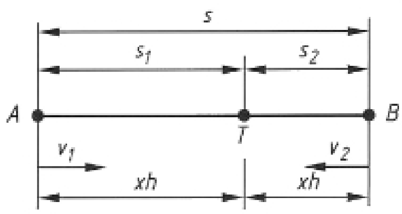
Zwei Fahrzeuge starten gleichzeitig an den Ausgangspunkten A und B, die 180 km voneinander entfernt liegen, um einander entgegenzufahren.

a) Nach welcher Zeit treffen sich die beiden Fahrzeuge (v_1 = 70 km/h, v_2 = 80 km/h)?

b) Wie weit ist der Treffpunkt vom Standort A entfernt?

Lösung

a) Die Fahrzeuge treffen sich nach x Stunden. Nach dem physikalischen Zusammenhang s = v t lassen sich die Teilstrecken s_1 und s_2 berechnen.
Die Gesamtstrecke ist gleich der Summe der Teilstrecken.



Die Teilstrecken sind:

$$s_1 = v_1 \cdot x = 70\ \frac{km}{h} \cdot x\ h$$

$$s_2 = v_2 \cdot x = 80\ \frac{km}{h} \cdot x\ h$$

$$s = s_1 + s_2$$

$$s = v_1 \cdot x + v_2 \cdot x$$

$$\boxed{s = x\,(v_1 + v_2)}$$

$$x = \frac{s}{v_1 + v_2}$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten erhält man:

$$x = \frac{180\,km}{70\,km/h + 80\,km/h}$$

$$x = 1{,}2\ h$$

b) Die Entfernung vom Standort A bis zum Treffpunkt T ergibt sich mit s_1. Mit den vorliegenden Zahlenwerten erhält man:

$$s_1 = x \cdot v_1$$

$$s_1 = 1{,}2\ h \cdot 70\,\frac{km}{h}$$

$$s_1 = 84\ km$$

Ergebnis:

Die Fahrzeuge treffen sich nach 1,2 h. Der Treffpunkt ist 84 km vom Standort A entfernt.

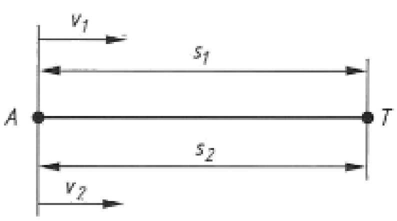
Beispiel

Um 9:30 Uhr fährt ein Lieferwagen von Stuttgart nach München mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h.

Wann und wo kann ein um 10:15 Uhr startender PKW diesen Lieferwagen frühestens einholen, um ein wichtiges Gerät zuzuladen, wenn er durchschnittlich mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h fährt?

Lösung

Fahrzeit des LKWs ... x h
Fahrzeit des PKWs ... (x – 0,75) h
(Der PKW fährt 0,75 h später ab)



Die Wege bis zum Treffpunkt sind für beide Fahrzeuge gleich.

$s_1 = s_2$

$$\boxed{v_1 \cdot x = v_2 \cdot (x - 0{,}75)}$$

Dabei ist $s_1 = v_1x$ und $s_2 = v_2\,(x - 0{,}75)$

$v_1x \;= v_2x - 0{,}75\,v_2$

$x\,(v_2 - v_1) = 0{,}75\,v_2$

Daraus ergibt sich:

$$x = \frac{0{,}75\,v_2}{v_2 - v_1}$$

Mit $v_1 = 60$ km/h und $v_2 = 100$ km/h erhält man die Fahrzeit des LKWs:

$$x = \frac{0{,}75\,\text{h} \cdot 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{100\,\frac{\text{km}}{\text{h}} - 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

$$x = \underline{\underline{1{,}875\,\text{h}}}$$

Entfernung vom Ausgangspunkt A:

$s_1 = v_1 \cdot x$

$$s_1 = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1{,}875\,\text{h}$$

Mit den vorliegenden Zahlenwerten ergibt sich:

$$s_1 = \underline{\underline{112{,}5\,\text{km}}}$$

Ergebnis: Der PKW holt den Lieferwagen frühestens nach 112,5 km um 11:23 Uhr ein.

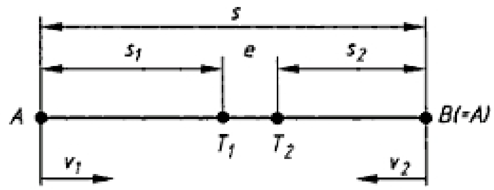
Beispiel

Zwei Greifer bewegen sich in einer Halle auf einer geschlossenen Führungsbahn mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 0{,}75$ m/s bzw. $v_2 = 0{,}5$ m/s jeweils in entgegengesetzter Richtung. Dabei soll die Bewegung so gesteuert werden, dass Greifer G_1 sich 40 s später in Bewegung setzt und beide in einem Abstand von 2 m zum Stehen kommen und beladen werden können.

Nach welcher Zeit muss die Anlage abgeschaltet werden und an welcher Stelle kommen die Greifer zum Stehen, wenn die gesamte Führungsbahnlänge 80 m beträgt?

Lösung

Greifer G_1 sei nach x s nach dem Einschalten der Anlage noch 2 m von Greifer G_2 entfernt.



Dabei haben die Greifer folgende Wege zurückgelegt:

$s_1 = v_1x = 0{,}75 \cdot x$ m

$s_2 = v_2\,(x + 40) = 0{,}5\,(x + 40)$ m.

Daraus erhält man den Gesamtweg

$s = s_1 + e + s_2$.

Einzelwege:

$s_1 = v_1 \cdot x$ und $s_2 = v_2\,(x + 40)$

Gesamtweg:

$s = s_1 + e + s_2$

$s = v_1x + e + v_2\,(x + 40)$

$s = v_1x + e + v_2x + 40\,v_2$

Daraus lassen sich Einschaltzeit x und Weg s_1 berechnen.

$$x = \frac{s - e - 40 v_2}{v_1 + v_2}$$

$$x = \frac{80m - 2m - 40s \cdot 0{,}5m/s}{(0{,}75 + 0{,}5)m/s}$$

x = 46,4 s

s_1 = 0,75 m/s · 46,4 s

s_1 = 34,8 m

Ergebnis:

Die Anlage ist nach 46,4 s abzuschalten. Greifer G_1 befindet sich dabei 34,8 m vom Ausgangspunkt A entfernt.

10.7 Behälteraufgaben

Beispiel

Ein Behälter wird durch zwei Zuflussrohre gefüllt. Ist Rohr A geschlossen, so ist der Behälter in 20 min voll. Ist Rohr B geschlossen, so ist der Behälter in 25 min gefüllt. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn beide Rohre gleichzeitig geöffnet sind?

Lösung

Da das Behältervolumen nicht bekannt ist, gehen wir von V m^3 aus.

Sind beide Zuflussrohre gleichzeitig geöffnet, so ist der Behälter in x min gefüllt.

Füllvermögen des Rohres B:

In 20 min	V m^3
In 1 min	$\frac{V}{20} m^3$
In x min	$x \cdot \frac{V}{20} m^3$

Füllvolumen des Rohres A:

In 25 min	V m^3
In x min	$x \cdot \frac{V}{25} m^3$

Annahme: Behältervolumen V m^3
x = Füllzeit in min

Füllvolumen:

Füllvermögen des Rohres B:

$$x \cdot \frac{V}{20} m^3$$

Füllvermögen des Rohres A:

$$x \cdot \frac{V}{25} m^3$$

Gesamtvolumen (= Behältervolumen):

$$x \cdot \frac{V}{20} m^3 + x \cdot \frac{V}{25} m^3 = V$$

$$\frac{x}{20} + \frac{x}{25} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{100}{9}$$

Ergebnis:

Der Behälter ist in $11 \frac{1}{9}$ min voll.

Beispiel

Ein Wasser-Rückhaltebecken erhält durch ein Hochwasser einen solchen Wasserzufluss, dass es in 3 h überlaufen würde. Aus diesem Grunde werden sofort die drei Grundablässe geöffnet, durch die das Rückhaltebecken in 4,5 h vollkommen entleert werden kann.

Wie lange kann das Rückhaltebecken das Hochwasser aufnehmen, ohne dass es überläuft, wenn es zu Beginn bereits zu $\frac{1}{3}$ gefüllt war?

Lösung

Das Rückhaltebecken sei in x h gefüllt.

x = Füllzeit in Stunden.

Füllvermögen:

In 3 h $V\ m^3$

In 1 h $\frac{1}{3}V\ m^3$

In x h $x \cdot \frac{1}{3}V\ m^3$

Füllvermögen des Zuflusses:

$$x \cdot \frac{V}{3}$$

Entleerungsvermögen:

In 4,5 h $V\ m^3$

In 1h $\frac{V}{4{,}5}m^3$

in x h $x \cdot \frac{V}{4{,}5}m^3$

Entleerungsvermögen des Abflusses:

$$x \cdot \frac{V}{4{,}5}$$

$$x \cdot \frac{V}{3} - x \cdot \frac{V}{4{,}5} = \frac{2}{3}V$$

$$\boxed{\frac{x}{3} - \frac{x}{4{,}5} = \frac{2}{3}}$$

Ist die Differenz des Zu- und Abflusses gerade $\frac{2}{3}$ V, so ist das Becken voll.

$$4{,}5\,x - 3x = 2 \cdot 4{,}5$$

$$x = 6$$

Ergebnis: Das Rückhaltebecken ist spätestens in 6 h voll.

Beispiel

Infolge eines Rohrbruches strömt in einem Schacht so viel Wasser aus, dass er in 10 h voll wäre und überlaufen würde.

Zunächst wird eine Pumpe eingesetzt, die durch ihr Pumpvermögen den Schacht in 6 h leer zu pumpen vermag. Da dauernd Wasser zuströmt wird nach 1,25 h eine zweite Pumpe mit dem doppelten Pumpvermögen zusätzlich eingesetzt. Nach wie viel Stunden ist der Schacht bei ständigem Zustrom von Leckwasser leer gepumpt?

Lösung

Der Schacht sei in x h leer gepumpt.

Pumpzeit = x Std.

Erste Pumpe: Pumpzeit x h
In 6 h wird das Schachtvolumen V leer gepumpt. In 1 h wird 1/6 des Schachtvolumens, d. h. das Volumen $\frac{V}{6}$ herausgepumpt. In x h wird das x-fache Volumen, d. h. $\frac{x}{6}V$ herausgepumpt.

Pumpvolumen der ersten Pumpe:

$$\frac{x}{6}V$$

Zweite Pumpe: Pumpzeit (x – 1,25) h
In 3 h wird das Schachtvolumen leer gepumpt. In 1 h wird das Volumen $\frac{1}{3}$ gepumpt.

In (x – 1,25) h wird das Volumen $(x - 1{,}25)\ \frac{1}{3}V$ herausgepumpt.

Pumpvolumen der zweiten Pumpe:

$$(x - 1{,}25)\ \frac{1}{3}V$$

Zuströmendes Leckwasser:
In 10 h wäre der Schacht gefüllt.

In 1 h strömt das Volumen $\frac{1}{10}V$ zu.

In x h fließt das Volumen $\frac{x}{10}V$ zu.

Aus der Bilanz des laufend zufließenden und des herausgepumpten Wassers erhalten wir die Bestimmungsgleichung

Zuströmendes Leckwasser:

$$\frac{x}{10}V$$

$$\frac{x}{6}V+(x-1{,}25)\frac{1}{3}V-\frac{x}{10}V=V$$

$$\boxed{\frac{x}{6}+\frac{1}{3}(x-1{,}25)-\frac{x}{10}=1}$$

$$10x + 20x - 25 - 6x = 60$$
$$x = 3{,}54$$

Ergebnis: Der Schacht kann in 3,54 Stunden leer gepumpt werden.

10.8 Arbeitsaufgaben (Leistungsaufgaben)

Beispiel

An einer Baustelle sollen Baggerarbeiten mit zwei verschiedenen Baggern ausgeführt werden. Mit dem kleineren Bagger A kann die Arbeit in zwölf Tagen bewältigt werden. Mit dem leistungsfähigeren größeren Bagger B könnte die Arbeit in neun Tagen erledigt werden. Wie lange dauert die Baggerarbeit, wenn beide Bagger gleichzeitig eingesetzt werden, Bagger B jedoch für 1,5 Tage an einer anderen Arbeitsstelle zum Einsatz kommt?

Lösung

Ansatz: Bagger A benötige x Tage

x = Arbeitszeit von Bagger A in Tagen

Arbeitsvermögen von Bagger A:

In 1 Tag $\frac{1}{12}$ der Arbeit

In x Tagen $\frac{x}{12}$ der Arbeit

Arbeitsvermögen von Bagger A:

$$\frac{x}{12}$$

Arbeitsvermögen von Bagger B:

In 1 Tag $\frac{1}{9}$ der Arbeit

In (x – 1,5) Tagen $\frac{(x-1{,}5)}{9}$ der Arbeit

Arbeitsvermögen von Bagger B:

$$\frac{(x-1{,}5)}{9}$$

Bei gemeinsamen Einsatz wird die gesamte Arbeit bewältigt (z. B. das gesamte Volumen V ausgehoben):

Bei gemeinsamen Einsatz:

$$\boxed{\frac{x}{12}+\frac{(x-1{,}5)}{9}=1}$$

$$7x = 42$$
$$x = 6$$

Ergebnis: Nach 6 Tagen ist die Baggerarbeit durchgeführt.

Aufgaben

zu 10.4 Allgemeine textliche Gleichungen

1. Welche Längen haben die Durchmesser zweier Kreise, wenn die Summe der Umfänge 109,96 cm beträgt und die Durchmesser sich um 5 cm unterscheiden?
2. Verlängert man die kleinere Seite eines Rechtecks um 3 cm und verkürzt man die größere um 2 cm, so entsteht ein Quadrat, dessen Flächeninhalt um 22 cm^2 größer ist als der Flächeninhalt des Rechtecks. Wie lang sind die Rechteckseiten?

3. Die zweite Ziffer einer dreiziffrigen Zahl mit der Quersumme 15 ist das arithmetische Mittel aus der ersten und der dritten Ziffer. Die Summe der beiden ersten Ziffern ergibt das Vierfache der dritten Ziffer. Wie heißt die Zahl?

4. In einer Sitzung wurde ein Antrag mit 2/3-Mehrheit angenommen. Die Stimmenmehrheit betrug 15 Stimmen. Wie viele Stimmen wurden jeweils für und gegen den Antrag abgegeben?

5. Teilt man eine zweiziffrige Zahl durch ihre Einerziffer, so erhält man 12 Rest 2. Vertauscht man die beiden Ziffern der Zahl und teilt die so entstandene Zahl durch ihre Einerziffer, so ergibt sich 9 Rest 8. Wie lautet die Zahl?

zu 10.5 Mischungsaufgaben

6. Wie viel kg CuZn 42 und wie viel kg CuZn 30 werden für 750 kg CuZn 37 benötigt?

7. Wie viel ℓ Wasser sind mit 40 ℓ 70%igem Äthylalkohol zu mischen, damit 20%iger Äthylalkohol entsteht?

8. Welche Schwefelsäurekonzentration entsteht, wenn zu 40 ℓ 80%iger Schwefel-säure 10 ℓ 30%ige Schwefelsäure hinzugemischt werden?

9. In einem Siemens-Martin-Ofen werden 8 t Roheisen mit 3,5 % C-Gehalt mit Stahlschrott mit durchschnittlich 0,5 % C-Gehalt erschmolzen. Wie viel t Stahlschrott sind erforderlich, wenn die Stahlschmelze 0,8 % C-Gehalt haben soll?

10. Magnesium soll durch einen Zusatz von Magnalium (80 % Al, 20 % Mg) zu Elektron (5 % Al, 95 % Mg) umgeschmolzen werden. Wie viel kg Magnesium und wie viel kg Magnalium sind zu mischen, um 1200 kg Elektron herzustellen?

11. 40 g Gold vom Feingehalt 800 sollen mit Kupfer zu Gold mit einem Feingehalt 750 umgeschmolzen werden. Wie viel kg Kupfer sind erforderlich?

12. Wie viel g 12-karätiges Gold müssen zu 50 g 20-karätigem Gold zugemischt werden, damit 18-karätiges Gold entsteht?

zu 10.6 Bewegungsaufgaben

13. Eine Steuerung soll so ausgelegt werden, dass zwei Greifer sich auf zwei parallelen Bahnen in gleicher Richtung von A nach B bewegen. Welche Länge muss die Führungsbahn AB haben, wenn Greifer 1 (v_1 = 0,8 m/s) bei B angekommen 2,5 s stehen bleiben soll und auf dem Rückweg Greifer 2 (v_2 = 0,3 m/s) in 5 m Entfernung von B treffen soll?

14. Ein 60 m langer Eilzug fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h in gleicher Richtung wie ein Personenzug. Welche Geschwindigkeit hat der Personenzug, wenn das Überholen des 80 m langen Personenzuges 14 s dauert?

15. Für eine Weichensteuerung soll berechnet werden, nach welcher Zeit die Bewegung zweier 3,80 m voneinander entfernter Greifgeräte abgeschaltet werden soll, wenn sie sich aufeinander zu bewegend bis auf 1 m genähert haben. An welcher Stelle bleiben die Greifgeräte stehen, wenn sich das eine mit einer Geschwindigkeit von 0,8 m/s, das andere mit 0,6 m/s bewegt?

16. Die Entfernung S – F beträgt 360 km. Ein Güterzug, der um 7:20 Uhr in S abfährt, kommt um 16:20 Uhr in F an. Ein Personenzug, der 1,75 mal so schnell wie der Güterzug fährt, verlässt in gleicher Richtung um 10:15 Uhr den Bahnhof in S. Wann wird der Güterzug eingeholt? Wie weit ist der Treffpunkt von F entfernt?

zu 10.7 Behälteraufgaben

17. Drei Pumpen füllen ein Becken in 2,5 Stunden. Die von der ersten und zweiten Pumpe geförderten Wassermengen verhalten sich wie 2,5 : 3. Wenn diese beiden Pumpen ausfallen, benötigt die dritte Pumpe zum Füllen des Beckens 7 Stunden. Wie lange dauert die Füllzeit des Beckens für jede einzelne Pumpe?

18. Zwei Röhren füllen zusammen einen Behälter in 2,5 Stunden. Die erste Röhre allein würde den Behälter erst in 4,5 Stunden gefüllt haben. Wie viele Stunden würde die zweite Röhre allein benötigen?

19. Zwei Pumpen sollen einen Behälter von 600 m^3 füllen. Die Fördermenge der ersten Pumpe beträgt 60 $\frac{m^3}{h}$, die der zweiten Pumpe 48 $\frac{m^3}{h}$.

a) Wie lange müssen die Pumpen eingeschaltet sein, wenn beide zu gleicher Zeit aus- und eingeschaltet werden?

b) Wie lange dauert die Füllzeit, wenn die zweite Pumpe erst 1 Stunde später eingeschaltet wird?

zu 10.8 Arbeitsaufgaben (Leistungsaufgaben)

20. Eine Arbeit soll von drei Arbeitern gemeinschaftlich ausgeführt werden. A allein würde 10 Tage benötigen, B 12 Tage und C 13 Tage. Wie lange dauert die Ausführung der Arbeit, wenn die gemeinsam begonnene Arbeit von B 2 Tage unterbrochen wird und C für einen Tag an eine andere Arbeitsstelle abgezogen wird?

21. Für einen Straßendamm ist mit drei LKWs Erde anzufahren. Auf Grund der verschiedenen Entfernungen würde der erste LKW allein 8 Tage, der zweite 5 Tage und der dritte 10 Tage benötigen.

a) Wie lange dauert es, wenn alle drei Fahrzeuge gleichzeitig in Einsatz kommen?

b) Wie lange wären die Fahrzeuge gemeinschaftlich im Einsatz, wenn das erste Fahrzeug schon zwei Tage vorher im Einsatz gewesen wäre?

c) Wie viel Zeit wird benötigt, wenn das erste Fahrzeug 1 Tag und das zweite Fahrzeug 3 Tage anderweitig im Einsatz sind?

10.9 Lösungen

1. d_1 = 15 mm; d_2 = 20 mm

2. a = 13 cm; b = 18 cm

3. Die Zahl heißt 753

4. 45 Stimmen wurden abgegeben
30 Stimmen dafür, 15 dagegen,

5. Die Zahl heißt 98.

6. 437,5 kg CuZn42;
312,5kgCuZn30

7. 100 Liter Wasser

8. 70 %ige H_2SO_4

9. 72 t Stahlschrott

10. 75 kg Magnalium
1125 kg Magnesium

11. 2,67 g Kupfer

12. 16,67 g Gold (12 karätig)

13. $\overline{AB}$ = 12,2 m
t = 21,5 s (Bewegungszeit)

14. v = 64 km/h

15. t = 2s

16. 14,09 Uhr
87,776 km von F entfernt

17. Pumpzeiten:
Pumpe 1: 8,56 h
Pumpe 2: 7,13h

18. 5,625h

19. a) 5,56 h; b) 6 h

20. 4,78 Tage

21. a) 2,35 Tage
b) 1,76 Tage
c) 4,06 Tage

Beispiel 1 (Aufgabe 3)

Die zweite Ziffer einer dreiziffrigen Zahl mit der Quersumme 15 ist das arithmetische Mittel aus der ersten und der dritten Ziffer. Die Summe der beiden ersten Ziffern ergibt das Vierfache der dritten Ziffer. Wie heisst die Zahl?

	Hunderter	Zehner	Einer
Ziffer	x	y	z
Wert	x · 100	y · 10	z · 1

Geg: $x + y + z = 15$, $(x + z)/2 = y$, $x + y = 4z$

Ges: $x \cdot 100 + y \cdot 10 + z \cdot 1 = ?$ (x = Anz. Hunderter, y = Anz. Zehner, z = Anz. Einer)

Lösung:

(1) $x + y + z = 15$

(2) $\frac{x+z}{2} = y$

(3) $x + y = 4z$

(3) in (1): $4z + z = 15$

$5z = 15$

$z = \underline{3}$ (4)

(4) in (2): $\frac{x+3}{2} = y$ (2a)

(4 u. 2a) in (3): $x + \frac{x+3}{2} = 12$ $|\cdot 2$

$2x + x + 3 = 24$ |TU

$3x = 21$ $|:3$

$x = \underline{7}$ (5)

(4 u. 5) in (1): $7 + y + 3 = 15$ |TU

$y = \underline{5}$

somit: Die gesuchte Zahl ist $\underline{\underline{753}}$.

Beispiel 2 (Aufgabe 7)

Wie viele Liter Wasser sind mit 40 Litern 70%igem Äthylalkohol zu mischen, damit 20%iger Äthylalkohol entsteht?

	Äthylalkohol	Wasser	Mischung
Volumen in l	40	x	40 + x
Alkohol in Vol.-%	70 %	0 %	20 %
Alkoholvolumen	40 · 70 % = 28	x · 0 % = 0	28 + 0 = (40 + x) · 20 %

Geg: Tabelle

Geg: Tabelle

Ges: x = ? (Anteil Wasser in Litern)

Lösung:

$$\underbrace{40\,\mathrm{l}\cdot\frac{70}{100}}_{\text{Alkoholvolumen beim Äthylalkohol}} + \underbrace{x\cdot\frac{0}{100}}_{\text{Alkoholvolumen bei Wasser}} = \underbrace{(40\,\mathrm{l}+x)\cdot\frac{20}{100}}_{\text{Alkoholvolumen bei der Mischung}}$$

$$28\,\mathrm{l}+0=(40\,\mathrm{l}+x)\cdot 0.2$$

$$28\,\mathrm{l}=8\,\mathrm{l}+0.2x$$

$$20\,\mathrm{l}=0.2x$$

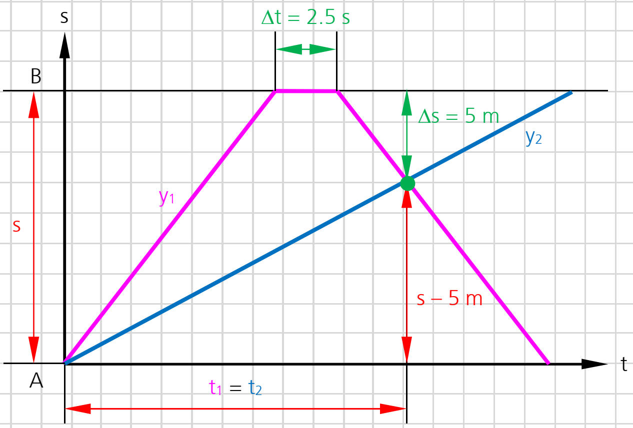
$$x=\underline{\underline{100\,\mathrm{l}}}$$

somit: Es werden 100 Liter Wasser benötigt!

Beispiel 3 (Aufgabe 13)

Eine Steuerung soll so ausgelegt werden, dass zwei Greifer sich auf zwei parallelen Bahnen in gleicher Richtung von A nach B bewegen. Welche Länge muss die Führungsbahn AB haben, wenn Greifer 1 (v_1 = 0.8 m/s) bei B angekommen 2.5 s stehen bleiben soll und auf dem Rückweg Greifer 2 (v_2 = 0.3 m/s) in 5 m Entfernung von B treffen soll?

Überlegungsskizze:



Geg: v_1 = 0.8 m/s, v_2 = 0.3 m/s, Δt = 2.5 s, Δs = 5 m

Ges: s = ? (Länge der Strecke $\overline{AB}$ in Metern)

Lösung:

$t_1 = t_2$ (siehe Überlegungsskizze)

$$\underbrace{\frac{s_1}{v_1} + \Delta t}_{\text{Zeit, die Greifer 1 benötigt}} = \underbrace{\frac{s_2}{v_2}}_{\text{Zeit, die Greifer 2 benötigt}}$$

eingesetzt:

$$\frac{\overbrace{s+5}^{s_1}}{0.8} + 2.5 = \frac{\overbrace{s-5}^{s_2}}{0.3}$$

$$\frac{s}{0.8} + \frac{5}{0.8} + 2.5 = \frac{s}{0.3} - \frac{5}{0.3}$$

$$\frac{5}{0.8} + 2.5 + \frac{5}{0.3} = \frac{s}{0.3} - \frac{s}{0.8} = s\left(\frac{1}{0.3} - \frac{1}{0.8}\right) = s \cdot 2.08$$

$$s = \frac{25.42}{2.08} = \underline{12.2}$$

somit: Die Führungsbahn muss 12.2 m lang sein.

Beispiel 4 (Aufgabe 18)

Zwei Röhren füllen zusammen einen Behälter in 2.5 Stunden. Die erste Röhre allein würde den Behälter erst in 4.5 Stunden gefüllt haben.
Wie viele Stunden würde die zweite Röhre allein benötigen?

allgemein: $W = P \cdot t$ W: Energie P: Leistung t

	Röhre 1	Röhre 2	zusammen
Arbeit in Litern	W	W	W
Zeit in Stunden	4.5	x	2.5
Leistung in Litern/Stunde	$\frac{W}{4.5}$	$\frac{W}{x}$	$\frac{W}{4.5}+\frac{W}{x}=\frac{W}{2.5}$

Geg: Tabelle

Ges: x = ? (Zeit in Stunden, die Röhre 2 alleine benötigen würde)

Lösung:

$$\frac{W}{4.5}+\frac{W}{x}=\frac{W}{2.5} \qquad |:W$$

$$\frac{1}{4.5}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2.5} \qquad |x \text{ separieren}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2.5}-\frac{1}{4.5}=\frac{2}{5}-\frac{2}{9}=\frac{8}{45} \qquad |\text{nach x umstellen}$$

$$x=\frac{45}{8}=\underline{5.625}$$

somit: Die zweite Röhre würde alleine 5.625 Stunden benötigen.

Beispiel 5 (Aufgabe 20)

Eine Arbeit soll von drei Arbeitern gemeinschaftlich ausgeführt werden. A allein würde 10 Tage benötigen, B 12 Tage und C 13 Tage. Wie lange dauert die Ausführung der Arbeit, wenn die gemeinsam begonnene Arbeit von B 2 Tage unterbrochen wird und C für einen Tag an eine andere Baustelle abgezogen wird?

	A	B	C
Arbeit (unbekannt)	W	W	W
Zeit in Tagen (alleine)	10	12	13
Leistung pro Tag	$\frac{W}{10}$	$\frac{W}{12}$	$\frac{W}{13}$
Einsatzdauer in Tagen	t	$t-2$	$t-1$

Geg: Tabelle

Geg: t = ? (Zeit in Tagen für die Fertigstellung der Arbeit)

Lösung:

$$\underbrace{\frac{W}{10}\cdot t}_{\text{Arbeit von A}}+\underbrace{\frac{W}{12}\cdot(t-2)}_{\text{Arbeit von B}}+\underbrace{\frac{W}{13}\cdot(t-1)}_{\text{Arbeit von C}}=W \qquad |:W$$

$$\underbrace{\frac{1}{10}\cdot t}_{\text{Arbeit von A}}+\underbrace{\frac{1}{12}\cdot(t-2)}_{\text{Arbeit von B}}+\underbrace{\frac{1}{13}\cdot(t-1)}_{\text{Arbeit von C}}=1 \qquad |\text{ausmultiplizieren}$$

$$\frac{t}{10}+\frac{t}{12}-\frac{1}{6}+\frac{t}{13}-\frac{1}{13}=1 \qquad |\text{t isolieren}$$

$$\frac{t}{10}+\frac{t}{12}+\frac{t}{13}=1+\frac{1}{6}+\frac{1}{13} \qquad |\text{faktorisieren}$$

$$t\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right)=\frac{97}{78} \qquad |\text{TU}$$

$$t=\frac{97}{78}\cdot\frac{780}{203}=\underline{4.78}$$

somit: Die Arbeit dauert $\underline{\underline{4.78}}$ Tage.

10.10 Übungen, Frommenwiler

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

Nummer	Seite	Bemerkungen
230 (a und b)	83	
231 (b und c)	84	
233 (a, b und c)	85	
235 (b)	85	ohne GSBM
236 (a und b)	85	
237	86	ohne GSBM
238	86	
252	90	ohne GSBM
253	90	
401	129	ohne GSBM
403	129	
420	133	
432	135	ohne GSBM
535	152	