Universität Regensburg WS 2013/14
Fakultät für Mathematik Hyperbolische Geometrie

2. Übungsblatt
Prof. Stefan Friedl PhD

Abgabe spätestens bis *Donnerstag den 31. Oktober* um 12 Uhr.

Aufgabe 1.

(1) Es seien w_1, w_2, w_3 drei verschiedene Punkte in $\overline{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie: es gibt eine Möbiustransformation m mit $m(w_1) = 0, m(w_2) = 1$ und $m(w_3) = \infty$.
(2) Finden Sie alle Möbiustransformationen m mit $\{m(0), m(1), m(\infty)\} = \{0, 1, \infty\}$, d.h. finden Sie alle Möbiustransformationen, welche die drei Punkte $0, 1, \infty$ permutieren.
(3) Es sei K der Einheitskreis in $\overline{C}$. Bestimmen Sie eine Möbiustransformation m mit $m(\overline{R}) = K$.

Aufgabe 2.

(1) Es sei $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ ein Kreis. Wir bezeichnen mit m die Spiegelung in A. Was ist $m(\infty)$?
(2) Es sei $r > 0$. Was ist die Spiegelung im euklidischen Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$?
(3) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Was ist die Spiegelung in $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = a\} \cup \infty$?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 3.

(1) Bestimmen Sie alle Möbiustransformationen m mit $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$.
(2) Es sei $K \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ und $\infty \mapsto \infty$. Zeigen Sie: wenn m eine Möbiustransformation mit $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$ ist, dann gilt $K = m \circ K \circ m^{-1}$.
(D.h. die Spiegelung in $\overline{\mathbb{R}}$ ist wohl-definiert.)
(3) Zeigen Sie, dass die Spiegelung in einem beliebigen Kreis in $\overline{\mathbb{C}}$ wohl-definiert ist.

Aufgabe 4.

(1) Es sei $b = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ and $\varphi \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Richtungswinkel der Gerade
$$\{z \in \mathbb{C} \mid bz + \overline{bz} + 1 = 0\}.$$
(2) Es seien K_1 und K_2 zwei euklidische Kreise, welche sich in zwei Punkten P und Q treffen. Zeigen Sie, dass die Schnittwinkel an den Schnittpunkten gleich sind.
(3) Es seien G_1 und G_2 zwei euklidische nicht-parallele Geraden in $\mathbb{C}$, so dass mindestens eine der beiden Geraden durch den Ursprung geht. Zeigen Sie, dass sich der Schnittwinkel unter der Abbildung $J \colon z \mapsto \frac{1}{z}$ nicht ändert.