Aufgabe 1: Wissensfragen

Beantworten Sie folgende Fragen mit „stimmt“ oder „stimmt nicht“. Geben Sie jeweils eine Begründung an (Hinweis: die Begründungen sind sehr kurz).

(a) Gibt es zwei kontextfreie Sprachen L_1, L_2, sodass $L_1 \cap L_2$ unentscheidbar ist?

2 Punkte

(b) Gilt $H \leq SAT$?

2 Punkte

(c) Sei L eine reguläre Sprache und $L' \subseteq L$ eine beliebige Untermenge davon. Kann L' dann unentscheidbar sein?

2 Punkte

Aufgabe 2: Reduktionen, Halteproblem

(a) Definieren Sie das allgemeine Halteproblem, wie in der Vorlesung.

2 Punkte

(b) Sei $L_{2b} = \{\langle M\rangle\#z \mid M$ ist deterministische Einband-Turingmaschine, die n bestimmt mit $bin(n) = z$ und dann $bin(n^2)$ auf das Band schreibt$\}$.

Beweisen Sie, dass L_{2b} unentscheidbar ist. Benutzen Sie hierfür, dass H unentscheidbar ist.

6 Punkte

Aufgabe 3: Das Pumping-Lemma

(a) Definieren Sie die kontextfreie Pumpeigenschaft.

2 Punkte

(b) Zeigen Sie, dass $\{0^k 1^l \mid k > l > 2\}$ die kontextfreie Pumpeigenschaft besitzt.

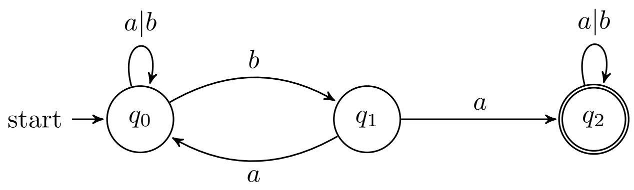
4 Punkte

(c) Zeigen Sie, dass $\{0^k 1^l ☺^m \mid k > l > m > 0\}$ die kontextfreie Pumpeigenschaft nicht besitzt.

3 Punkte

Aufgabe 4: Automaten

Gegeben sei der folgende nichtdeterministische endliche Automat A:



(a) Was ist die von diesem Automaten akzeptierte Sprache?

1 Punkt

(b) Wandeln Sie den NFA A gemäß der Konstruktion aus der Vorlesung (diese muss erkennbar sein!) um in einen deterministischen endlichen Automaten. Schreiben Sie nur die tatsächlich erreichbaren Zustände auf.

4 Punkte

(c) Jemand behauptet, einen deterministischen endlichen Automaten A' mit n Zuständen entworfen zu haben, dessen akzeptierte Sprache $L_{4c} = \{0^k 1^l \mid k > l\}$ ist.

Finden Sie – abhängig von n – ein von A' akzeptiertes Wort w, aus dem Sie ein $\tilde{w}$ generieren können, sodass $\tilde{w}$ von A' akzeptiert wird, aber $\tilde{w} \notin L_{4c}$ ist.

4 Punkte

Aufgabe 5: primitive und μ-Rekursion

(a) Definieren Sie, wie $g := \mu f$ aus $f : \mathbb{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ hervorgeht.

2 Punkte

(b) Es sei $f(x, y) := (9 - 3x)(y + 1)$, $x, y \in \mathbb{N}$. Geben Sie $g := \mu f$ an; achten Sie insbesondere auf die korrekte Argumentanzahl.

1 Punkt

(c) Definieren Sie, wie $f : \mathbb{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ aus $g : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch primitive Rekursion hervorgeht:

$f(\qquad\qquad\qquad) :=$
$f(\qquad\qquad\qquad) :=$

2 Punkte

(d) Es sind $null(x) := 0$ die konstante Nullfunktion und $add(x, y) := x + y$ die Additionsfunktion, beide sind primitiv rekursiv.

Definieren Sie mit deren Hilfe und mithilfe der primitiven Rekursion die Multiplikationsfunktion $mult(x, y) := xy$.

1 Punkt

Aufgabe 6: NP-Vollständigkeit

a) Geben Sie die Definition des Überdeckungsproblems an:
$VC = \{$

2 Punkte

b) Das Cliquenproblem ist $CLIQUE := \{\langle G, k\rangle \mid G$ ist Graph, der einen vollständigen Teilgraphen der Größe k enthält. $\}$. Gegeben sei folgende Sprache:

$$\textsc{EndeRiesig} = \{\text{bin}(a_1)\#\ldots\#\text{bin}(a_n) \mid \sum_{k=1}^{n-1} a_k < a_n\}$$

Zeigen Sie mittels Reduktion: $\textsc{EndeRiesig} \leq_p \textsc{Clique}$ Hinweis: Zum Beweis „$\Leftrightarrow$“ gehört „$\Rightarrow$“ und „$\Leftarrow$“. Denken Sie daran, die Laufzeit Ihrer Reduktionsfunktion anzugeben.

3 Punkte

c) Nehmen Sie an, es sei $P = NP$. Ist dann $\textsc{EndeRiesig}$ NP-Vollständig?

2 Punkte