ETH zürich

## Algorithmen und Datenstrukturen, Übungsstunde 1

# Vollständige Induktion

François Hublet

# Wozu vollständige Induktion?

Als Informatiker werden wir oft mit mathematischen Aussagen konfrontiert, die es für alle $n \in \mathbb{N}$, für alle natürlichen Zahlen $n \geq K$, für alle $k \leq n \leq K$ usw. zu beweisen gilt.

In solchen Fällen, wo eine Aussage für alle, bzw. viele, natürlichen oder ganzen Zahlen zu beweisen ist, ist **vollständige Induktion** oft hilfreich.

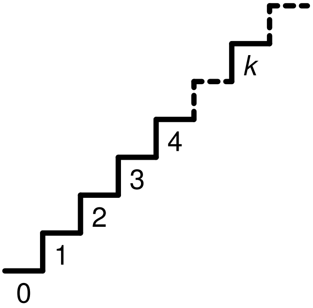
# Was ist vollständige Induktion?

Dies ist Tux:

# Was ist vollständige Induktion?

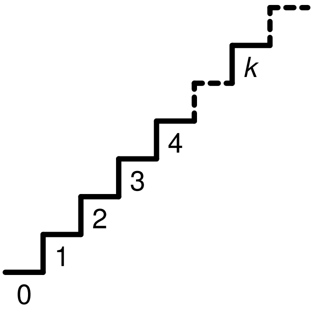
Dies ist Tux:

Dies ist eine Treppe:



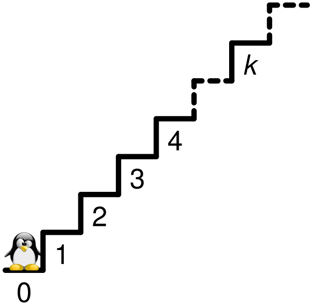
# Was ist vollständige Induktion?

Tux kann auf Stufe 0 stehen...



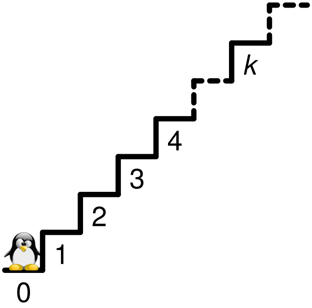
# Was ist vollständige Induktion?

Tux kann auf Stufe 0 stehen...

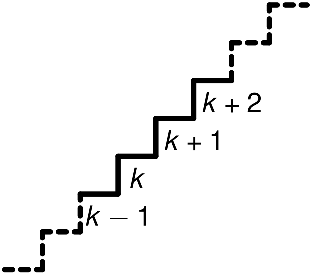


# Was ist vollständige Induktion?

Tux kann auf Stufe 0 stehen...

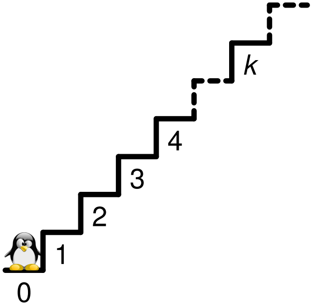



... und wenn er auf Stufe $k$ steht (für alle $k$),

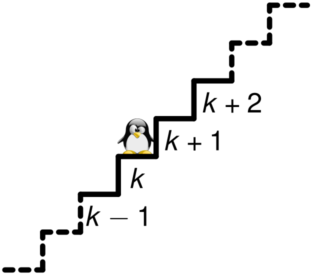


# Was ist vollständige Induktion?

Tux kann auf Stufe 0 stehen...

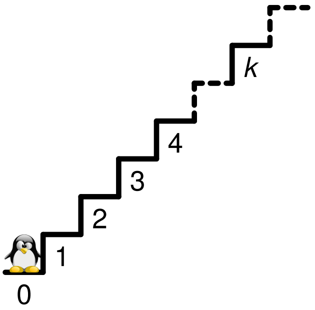



... und wenn er auf Stufe $k$ steht (für alle $k$),

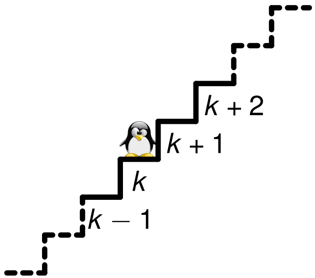


# Was ist vollständige Induktion?

Tux kann auf Stufe 0 stehen...

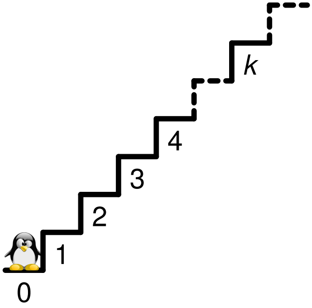



... und wenn er auf Stufe $k$ steht (für alle $k$),

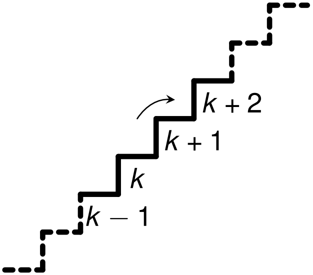


# Was ist vollständige Induktion?

Tux kann auf Stufe 0 stehen...

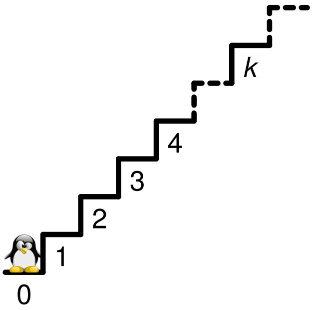



... und wenn er auf Stufe $k$ steht (für alle $k$), kann er immer auf Stufe $k + 1$ hinaufspringen:

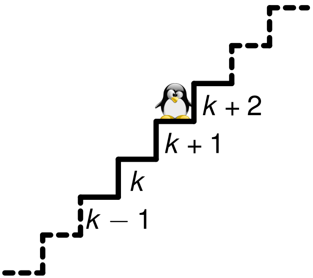


# Was ist vollständige Induktion?

Tux kann auf Stufe 0 stehen...




... und wenn er auf Stufe $k$ steht (für alle $k$), kann er immer auf Stufe $k + 1$ hinaufspringen:



# Was ist vollständige Induktion?

Dann kann Tux alle Stufen $n \in \mathbb{N}$ erreichen!

# Ein mathematisches Beispiel

**Übung 1.2.a)**
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

# Ein mathematisches Beispiel

**Übung 1.2.a)**
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

0. **Induktionsaussage**: Sei $A(n)$ die Aussage „$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$“. Beweisen wir durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \geq 1$ zutrifft.

# Ein mathematisches Beispiel

**Übung 1.2.a)**
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

0. **Induktionsaussage**: Sei $A(n)$ die Aussage „$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$“. Beweisen wir durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \geq 1$ zutrifft.
1. **Induktionsanfang**: Da $2^1 = 2 = 4 - 2 = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 2$, trifft $A(1)$ zu.

# Ein mathematisches Beispiel

**Übung 1.2.a)**
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

0. **Induktionsaussage**: Sei $A(n)$ die Aussage „$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$". Beweisen wir durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \geq 1$ zutrifft.
1. **Induktionsanfang**: Da $2^1 = 2 = 4 - 2 = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 2$, trifft $A(1)$ zu.
2. 2.1 **Induktionsvoraussetzung** Sei $k \in \mathbb{N}$, so dass $A(k)$ gelte, d.h.
   $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2$.

# Ein mathematisches Beispiel

**Übung 1.2.a)**
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

0. **Induktionsaussage**: Sei $A(n)$ die Aussage „$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$". Beweisen wir durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \geq 1$ zutrifft.
1. **Induktionsanfang**: Da $2^1 = 2 = 4 - 2 = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 2$, trifft $A(1)$ zu.
2. 2.1 **Induktionsvoraussetzung** Sei $k \in \mathbb{N}$, so dass $A(k)$ gelte, d.h. $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2$.
   
   2.2 **Induktionsbehauptung** Zu beweisen ist, dass $A(k+1)$ auch gilt.

# Ein mathematisches Beispiel

**Übung 1.2.a)**
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

0. **Induktionsaussage**: Sei $A(n)$ die Aussage „$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$“. Beweisen wir durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \geq 1$ zutrifft.
1. **Induktionsanfang**: Da $2^1 = 2 = 4 - 2 = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 2$, trifft $A(1)$ zu.
2. 
   2.1 **Induktionsvoraussetzung** Sei $k \in \mathbb{N}$, so dass $A(k)$ gelte, d.h. $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2$.

   2.2 **Induktionsbehauptung** Zu beweisen ist, dass $A(k+1)$ auch gilt.

   2.3 **Induktionsschritt** Wir bemerken zunächst, dass

   $$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = \left[2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k\right] + 2^{k+1}$$

   ist.

# Ein mathematisches Beispiel

**Übung 1.2.a)**
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

0. **Induktionsaussage**: Sei $A(n)$ die Aussage „$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$“. Beweisen wir durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \geq 1$ zutrifft.
1. **Induktionsanfang**: Da $2^1 = 2 = 4 - 2 = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 2$, trifft $A(1)$ zu.
2. 2.1 **Induktionsvoraussetzung** Sei $k \in \mathbb{N}$, so dass $A(k)$ gelte, d.h. $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2$.

   2.2 **Induktionsbehauptung** Zu beweisen ist, dass $A(k+1)$ auch gilt.

   2.3 **Induktionsschritt** Wir bemerken zunächst, dass

$$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = \left[2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k\right] + 2^{k+1}$$

   ist. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass

$$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = \left[2^{k+1} - 2\right] + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 2 = 2^{k+2} - 2$$

   gilt, also trifft $A(k+1)$ zu.

# Ein mathematisches Beispiel

**Übung 1.2.a)**
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.

0. **Induktionsaussage**: Sei $A(n)$ die Aussage „$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$“. Beweisen wir durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \geq 1$ zutrifft.
1. **Induktionsanfang**: Da $2^1 = 2 = 4 - 2 = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 2$, trifft $A(1)$ zu.
2. 2.1 **Induktionsvoraussetzung** Sei $k \in \mathbb{N}$, so dass $A(k)$ gelte, d.h. $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2$.

   2.2 **Induktionsbehauptung** Zu beweisen ist, dass $A(k+1)$ auch gilt.

   2.3 **Induktionsschritt** Wir bemerken zunächst, dass
   $$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = \left[2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k\right] + 2^{k+1}$$
   ist. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass
   $$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = \left[2^{k+1} - 2\right] + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 2 = 2^{k+2} - 2$$
   gilt, also trifft $A(k+1)$ zu.
3. **Induktionsschluss** Aus dem Induktionsprinzip folgt, dass $A(n)$ für alle $n \geq 1$ gilt.

# Fazit: Induktive Beweise schreiben

Struktur immer gut beachten:

0. **Induktionsaussage**: $A(n)$ definieren.

$\frac{1}{2}$. (fakultativ) „Beweisen wir durch vollständige Induktion…“

1. **Induktionsanfang**: $A(1)$ beweisen.
2. **Induktionsschritt**: $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ beweisen.
   - 2.1 **Induktionsvoraussetzung** formulieren („es gelte $A(k)$“);
   - 2.2 **Induktionsbehauptung** formulieren („zu beweisen ist, dass $A(k+1)$ gilt“);
   - 2.3 Induktionsschritt durchführen: $A(k+1)$ beweisen.
3. (fakultativ) **Induktionsschluss**satz schreiben.