Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

Quantenmechanik - Übungsblatt 15 - **Zusatzaufgaben**

Wintersemester 2012/13

Abgabe: Die Aufgaben sollen spätestens bis $15^{\underline{00}}$ am Mittwoch, 06.02., schriftlich bei Dr. D. Scherer (**Brüderstr. 16, Büro 315b**) eingereicht werden.

Termin: Klausur am Freitag, 08.02., $10^{\underline{00}} - 13^{\underline{00}}$, Kleiner Hörsaal

Internet: Übungsblätter und Vorlesungsnotizen sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Quantum_Mechanics.html.

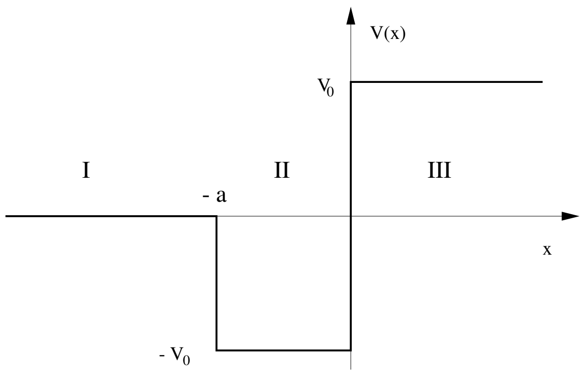
Motivation:
Verschiedene, bereits bekannte Aspekte quantenmechanischer Systeme (harmonischer Oszillator, Zentralpotential, Potentialtopf, ...) sollen noch einmal nachvollzogen und eingeübt werden.

1. Zentralpotential *4 Punkte*

Ein kugelsymmetrisches quantenmechanisches Problem sei beschrieben durch einen Hamilton-Operator $\hat{H}_0$. Die zugehörigen Eigenwerte seien gegeben durch E_{nl}. Berechnen Sie das Energie-Spektrum für das Eigenwert-Problem $(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)\Psi = E\Psi$, wobei

$$\hat{H}_1 = \epsilon \hat{L}_x, \quad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

2. Potentialtopf *3+3 Punkte*



Ein Teilchen bewegt sich in einem Potential wie in obiger Abbildung.

(a) Diskutieren Sie qualitativ die verschiedenen Typen quantenmechanischer Zustände, die für verschiedene Energien auftreten können.

(b) Machen Sie zur Gesamtenergie $-V_0 < E < 0$ einen Ansatz für die Wellenfunktion in den Regionen I und II. Welche Bedingungen muss die Wellenfunktion am Übergang zwischen den Bereichen I und II erfüllen? Leiten Sie damit zwei Bestimmungsgleichungen her, welchen der Ansatz genügen muss.

3. Erwartungswerte für den harmonischen Oszillator *4+1 Punkte*

Ein harmonischer Oszillator mit Masse m und Frequenz ω sei im Zustand

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_0 + \exp(-\mathrm{i}\alpha)\psi_1 \right), \, \alpha \in \mathbb{R}$$

mit ψ_0 and ψ_1 dem Grundzustand bzw. dem ersten angeregten Zustand des harmonischen Oszillators.

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators bezüglich des Zustands Ψ.

(b) Welche Bewegung beschreiben die Erwartungswerte, wenn Sie für $\alpha(t) = \omega t$ annehmen?

Hinweis: $\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ und $\hat{p} = \frac{i\hbar}{x_0\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$, mit der Oszillatorlänge x_0.

4. Energie kohärenter Zustände *5 Punkte*

Ein kohärenter Zustand ist definiert als

$$\psi_\alpha(x) = e^{-|\alpha|^2/2 + \alpha\hat{a}^\dagger} \psi_0(x) \ ,$$

wobei $\psi_0(x)$ der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist. Schreiben Sie $\psi_\alpha(x)$ als Entwicklung nach Energie-Eigenzuständen des harmonischen Oszillators in der Form

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(x) \ ,$$

und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit das System bei einer Messung der Energie im Zustand ψ_k vorzufinden.

Hinweis: $\hat{a}^\dagger \psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$.

5. Zwei-Niveau System *2+3 Punkte*

Der Hamiltonian für ein Zwei-Niveau System sei in der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ gegeben durch $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, mit den entsprechenden Matrixdarstellungen

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \ , \quad \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \ .$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{H}$.

(b) Betrachten Sie $\hat{H}_0$ als den Hamilton-Operator eines ungestörten Systems, und berechnen Sie dann die Energiekorrektur für den Zustand $|+\rangle$, verursacht durch die Störung $\hat{H}_1$ bis zu *zweiter* Ordnung Störungstheorie. Vergleichen Sie mit der exakten Lösung.

Hinweis:

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle n|\hat{H}_1|k\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}.$$