

Messunsicherheit berechnen



Warum geht's – Motto:

„Alles was messbar ist, messen und was nicht messbar ist, **messbar machen**";
Galileo Galilei (1564-1642)

Was wird vom Messresultat erwartet:

Ein Messresultat nach **GUM** [1] sollte drei Zahlenwerte enthalten:

10.00 V ± 0.01V Überdeckungsbereich 95%

Sie beschreiben neben dem besten Schätzwert, den Bereich der Messunsicherheit, in dem sich der Messwert mit der angegebenen Wahrscheinlichkeit befinden soll.

GUM ist seit einem Vierteljahrhundert der internationale Industriestandard.

Wie wird's gemacht?

Die Methode wie diese drei Zahlen zu ermitteln sind, mit der Aufteilung in Typ A und Typ B Unsicherheit, davon handelt dieses Skript. Der Begriff Messfehler ist nur noch in älteren Lehrbüchern zu finden, die Industrie arbeitet heute ausschliesslich mit dem Begriff der *Messunsicherheit (Uncertainty)*.

Diese Anleitung wird im Selbststudium durchgearbeitet. Nach einer kurzen praktischen Diskussion der Notwendigkeit der Behandlung der Messunsicherheit, bzw. kurzen theoretischen Einführung liegt der Fokus auf der selbständigen praktischen Anwendung. Die Berechnung der Messunsicherheit und Anwendung der Methode wird in Kapitel 7 bzw. zusammengefasst für einen einfachen Fall auf Seite 12 als erstes Beispiel behandelt. Die Details/Funktionalität der Messgeräte spielt hier eine untergeordnete Rolle. Es werden in den Rechenbeispielen die Angaben des Herstellers laut Datenblatt verwendet. In der Praxis kann eine aktuelle Referenzmessung mit einem genaueren Messgerät oder Normal jedoch viel genauere Werte liefern, verglichen mit den ursprünglichen Angaben im Datenblatt die ja stets befristet sind.

Referenzen – Quellenangaben- Lehrbücher

- [1] **Guide to the expression of Uncertainty in Measurement.**(GUM) International Organization for Standardization, 1995, ISBN 92-67-10188-9.
- [2] Bernd Pesch; **GRUNDLAGEN DER MESSUNGSICHERHEIT 2017**,
https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_8/8.4_mathematische_modellierung/277_PTB_SEMINAR/VORTRAEGE/11_Mieke_-_Berechnung_der_Messunsicherheit_nach_GUM_Kurzfassung_in_20.pdf
- [3] S. Mieke, 2014, PTB Vortrag, GUM in 20 Minuten
https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_8/8.4_mathematische_modellierung/277_PTB_SEMINAR/VORTRAEGE/11_Mieke_-_Berechnung_der_Messunsicherheit_nach_GUM_Kurzfassung_in_20.pdf
- [4] Rientz, PTB; ppt Grundkonzept GUM mit relevanten Formeln und Herleitungen
https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_3/3.1_metrologie_in_der_chemie/mu/mu_rientz_gum-messunsicherheit.pdf
- [5] Testo, 2013, Messunsicherheit aus der Sicht eines Messgeräteherstellers
http://download.testotis.de/files/AT/Fibeln/AT_Messunsicherheitsbestimmung_nach_GUM.pdf
- [6] C. Mester, METAS Bern, 1995, Neue Verordnung Elektrizitätszähler
https://www.metas.ch/dam/data/metasp/GesetzlichesMesswesen/Messmittel/Elektrische_Energie/Praesentation_V_Elektr_Energie_DEn.pdf
https://www.metas.ch/dam/data/metasp/Dokumentation/Rechtliches/rechtliche_Grundlagen/20161201_Weisungen_EMmV_de.pdf

Inhaltsverzeichnis

1. Warum ist der Wert der Messunsicherheit wichtig?	3
1.1. Typische elektrische Unsicherheiten	4
1.2. Vollständigkeit des Resultats einer Messung	8
1.3. Wahrscheinlichkeiten – Gauss bzw. Normalverteilung	10
2. Einfacher Fall der Messunsicherheit nach GUM.....	11
2.1. Typ A – Schwankung des Anzeigewertes.....	14
2.2. Typ B – Datenblattangabe des Messgerätes	15
2.3. Typ C – kombinierter Unsicherheit aus Typ A und B	18
3. Messunsicherheit mit Teilmessungen	20
3.1. Multiplikation und Division der Teilgrössen.....	20
3.2. Addition und Subtraktion der Teilgrössen	20
4. Entwicklung Messwesen – Hierarchien / Pyramide	22
4.1. Gesetzliche Vorgaben Stromzähler Schweiz.....	23
5. Begriffe – Einheiten- Definitionen.....	25
6. Messunsicherheit – Kalibrierung Spannung.....	26
7. Rechenbeispiele zur GUM Analyse	27

1. Warum ist der Wert der Messunsicherheit wichtig?

Im Supermarkt vertrauen wir alle darauf, dass 1kg Äpfel auch wirklich 1kg und nicht 0.9kg sind. Dies ist nicht neu, sondern war schon auf den Märkten des Mittelalters und früher wichtig und hatte mit Vertrauen und geregelten Abläufen zu tun. Auf der Akropolis im alten Griechenland wurde die Organisation der Referenzgewichte für den Märkten, sogar von „Messpriestern“ ausgeführt.

Nach dem sorgfältigen Durcharbeiten dieser Unterlagen haben Sie die erste Stufe zum Amt des „Messpriesters“ geschafft, der in unsere heutige Zeit, Eichmeister oder Prüfmittelbeauftragter eines Unternehmens genannte wird. Allemal zählt dieses grundlegende Verständnis der Zusammenhänge zu den Grundlagen der wirtschaftlich/industriellen Zusammenarbeit. Es gilt daher auch beim Qualitätstest oder Eingangstest in der Wirtschaft/Industrie. Dies können elektrische Messgrößen, wie an einem Stromzähler aber auch für einfache Sensorausgangssignale z.B. für die genaue Temperaturmessung sein. Was das bedeutet, kann am Beispiel der Fertigung „alter“ Automobiltechnologie betrachtet werden, also die noch laufende Produktion der Auslaufmodelle der Verbrennungskraftmotoren. Deren Kolben sollte sehr genau in den Motorblock passen, sonst gibt es einen „Kolbenfresser“, wie es umgangssprachlich heisst. Sind dazu zusätzliche Arbeitsschritte nötig entstehen unnötige Extrakosten.



Quelle: Porsche

Abbildung 1 links: Kolben im Motorblock, rechts: Oberflächenbehandlung wie Honnen erfolgt, um den Durchmesser des Motorblocks bis auf die Rauigkeitstiefe von 4 bis 10µm zu optimieren.

Auf welches Mass muss also der Zulieferer des Kolbens, seine Endkontrolle im Kolbenwerk einstellen. Der Abnehmer des Kolbens hat für das „reibungslose“ Zusammenspiel zwischen Kolben und Motorblock eine interne Toleranz des Durchmessers für den Kolben spezifiziert. Da er aber selbst den Kolben nur mit einer gewissen Unsicherheit messen kann, hat er im Vertrag mit dem Zulieferer eine kleinere Toleranz festgeschrieben. Damit der Kolbenzulieferer dies erreichen kann und die meisten Kolben beim Eingangstest des Autobauers nicht wieder zurückgeschickt werden, muss er seine Freigabetoleranz in der Fertigung noch kleiner als die Vertragstoleranz festlegen.

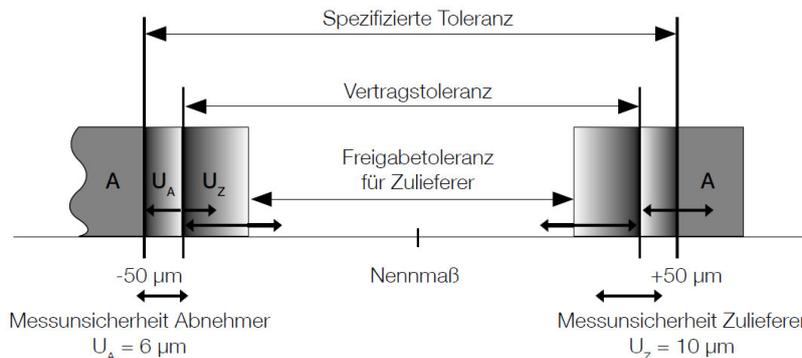


Abbildung 2 Damit Teile in der industriellen Fertigung zusammenpassen, müssen die Messunsicherheiten der Zulieferer und Abnehmer vergleichbar sein und den ausgehandelten Toleranzen genügen. [4]

1.1. Typische elektrische Unsicherheiten

Die einfachsten elektrischen Messgeräte, die Multimeter (Abb. 3) erlauben eine Spannungsmessung mit Abweichungen weit unter einem Zehntel Prozent. Dies beutet in der Praxis, dass mit der Messung ein Spannungsintervall dieser Breite gefunden wird, in dem der Messwert mit einer Wahrscheinlichkeit von z.B. 68% (k=1) liegen wird. Oszilloskope sind schneller aber viel ungenauer was eine Gleichspannungs- oder Effektivwertmessung anlangt. Haushaltstromzähler gehören typisch zur Genauigkeitsklasse 2%. (Tab. 1) Die Schweizer Verordnung für die Elektrizitätszähler umfasst seit 2015 auch digitale Zähler / Smart Meter. [5]

Tabelle 1 Typische Unsicherheiten elektrischer Messgeräte (Begriffe siehe Kap. 5)

	Angabe Unsicherheit	Quelle/Anmerkung
Haushaltsstromzähler Genauigkeitsklasse B Wirkleistung	2% (Garantie)	Bis zu 7 stelliger Anzeige
Multimeter - Gleichspannung	0.1% bis 0.001%	Garantieabweichung
Einfaches Oszilloskop, im Spannungsbereich Zeitbereich bis 200MHz	Resolution 8bit Accuracy +/-3%	TDS2000B Series von www.tektronix.com
Referenzmessung im Eichamt Frequenz 500Hz bis 1kHz Gleichspannung 200mV bis 500V Gleichstrom 10mA bis 2A Gleichstromwiderstand 10mΩ bis 100Ω AC Leistung (50Hz) 3W bis 48kW E-Zähler bis 160A/320V / 50 Hz Wirkleistung Phasenwinkel $\cos\varphi = 0$ bis 1 (50V bis 500V)	$1.0 \cdot 10^{-6}$ (k=2) $1.0 \cdot 10^{-5}$ (k=2) $2.5 \cdot 10^{-4}$ (k=2) $2.0 \cdot 10^{-4}$ (k=2) $2.0 \cdot 10^{-4}$ (k=2) $2.3 \cdot 10^{-3}$ (k=2) 0.2° (k=2)	www.eichamt.de Baden Württemberg Nov 2016
Eichamt in der Schweiz		siehe www.metas.ch

34460A accuracy specifications: \pm (% of reading + % of range) ¹

These specification are compliant to ISO/IEC 17025 for K = 2



Range ² /frequency	24 hour ³ T _{GAL} ± 1 °C	90 day T _{GAL} ± 5 °C	1 year T _{GAL} ± 5 °C	2 year T _{GAL} ± 5 °C	Temperature coefficient/°C ⁴
DC voltage					
100 mV	0.0040 + 0.0060	0.0070 + 0.0065	0.0090 + 0.0065	0.0115 + 0.0065	0.0005 + 0.0005
1 V	0.0030 + 0.0009	0.0060 + 0.0010	0.0080 + 0.0010	0.0105 + 0.0010	0.0005 + 0.0001
10 V	0.0025 + 0.0004	0.0050 + 0.0005	0.0075 + 0.0005	0.0100 + 0.0005	0.0005 + 0.0001
100 V	0.0030 + 0.0006	0.0065 + 0.0006	0.0085 + 0.0006	0.0110 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
1000 V	0.0030 + 0.0006	0.0065 + 0.0010	0.0085 + 0.0010	0.0110 + 0.0010	0.0005 + 0.0001

Abbildung 3 Datenblattangabe eines hochwertigen Tischmultimeters, bei dem oberhalb vom Gerätebild klar angegeben ist, dass die Werte in der Tabelle sich auf die Wahrscheinlichkeit von 95% (k=2) beziehen. Diesem hochwertigen Tischmultimeter mit 6 signifikanten Stellen plus die jeweiligen Vorzeichen, schreibt man als Anzeigeumfang 6 ½ Stellen (Digits) zu. (Ref: www.keysight.com)

Electrical Specifications

DC Voltage Specifications

Specifications are valid for 5½ digit mode and after at least a half-hour warm up.

Characteristic	Description
Maximum Input	1000 V on any range
Common Mode Rejection	120 dB at 50 or 60 Hz 0.1% (1 kΩ unbalance)
Normal Mode Rejection	80 dB at Slow Rate
A/D Nonlinearity	15 ppm of range
Input Bias Current	<30 pA at 25 °C
Settling Considerations	Measurement settling times are affected by source impedance, cable dielectric characteristics, and input signal changes

Input Characteristics

Range	Full Scale (5½ Digits)	Resolution			Input Impedance
		Slow	Medium	Fast	
200 mV	199.999 mV	1 μV	10 μV	10 μV	>10 GΩ*2
2 V	1.99999 V	10 μV	100 μV	100 μV	>10 GΩ*2
20 V	19.9999 V	100 μV	1000 μV	1000 μV	10 MΩ ±1%
200 V	199.999 V	1 mV	10 mV	10 mV	10 MΩ ±1%
1000 V	1000.00 V	10 mV	100 mV	100 mV	10 MΩ ±1%

*2 At some dual-display measurements, the input impedance of 200 mV and 2 V ranges may be changed to 10 MΩ.

Accuracy

Range	Uncertainty*3		Temperature Coefficient/°C Outside 18 - 28 °C
	90 days	1 year	
	23 °C ±5 °C	23 °C ±5 °C	
200 mV	0.01 + 0.003	0.015 + 0.004	0.0015 + 0.0005
2 V	0.01 + 0.002	0.015 + 0.003	0.001 + 0.0005
20 V	0.01 + 0.003	0.015 + 0.004	0.0020 + 0.0005
200 V	0.01 + 0.002	0.015 + 0.003	0.0015 + 0.0005
1000 V	0.01 + 0.002	0.015 + 0.003	0.0015 + 0.0005

*3 Uncertainty given as ±(% of reading + % of range).

Abbildung 4 Datenblattangabe eines anderen hochwertigen Tischmultimeters, bei dem klar die Bereiche als Empfindlichkeits- (% of reading, Anzeigewert) bzw. Nullpunktabweichung (% of range, Messbereich) bezeichnet sind. Da aber in keinem Teil des Datenblattes Informationen zu finden sind ob sich diese Werten in der Tabelle auf die Wahrscheinlichkeit von 95% (k=2) beziehen, muss von einer Garantieabweichung, also 100% Wahrscheinlichkeit für den Bereich ausgegangen werden. (Ref: https://www.cnrood.com/amfilerating/file/download/file_id/843/)

Aus den Tabellen ist ersichtlich, dass mit steigender Betriebsdauer seit der letzten Hersteller Messung (Kalibrierung), die Ungenauigkeiten zunehmen, zusätzlich auch noch wenn die Betriebstemperatur von der Raumtemperatur stärker abweicht.

Diese jeweiligen Datenangaben vom Hersteller des Messgeräts sind zu berücksichtigen, gemeinsam mit den erhaltenen Ablesewerten, um daraus das Messresultat zu berechnen. Die dabei anzuwendende Rechenvorschriften bzw. Methoden werden in Kapitel 2 beschrieben.

Grundsätzlich besteht jede Messung nicht nur aus einem Ablesewert, sondern aus mehreren Ableseungen, die optimal in gleichen Zeitabständen hintereinander und gleichen Bedingungen erfasst werden.

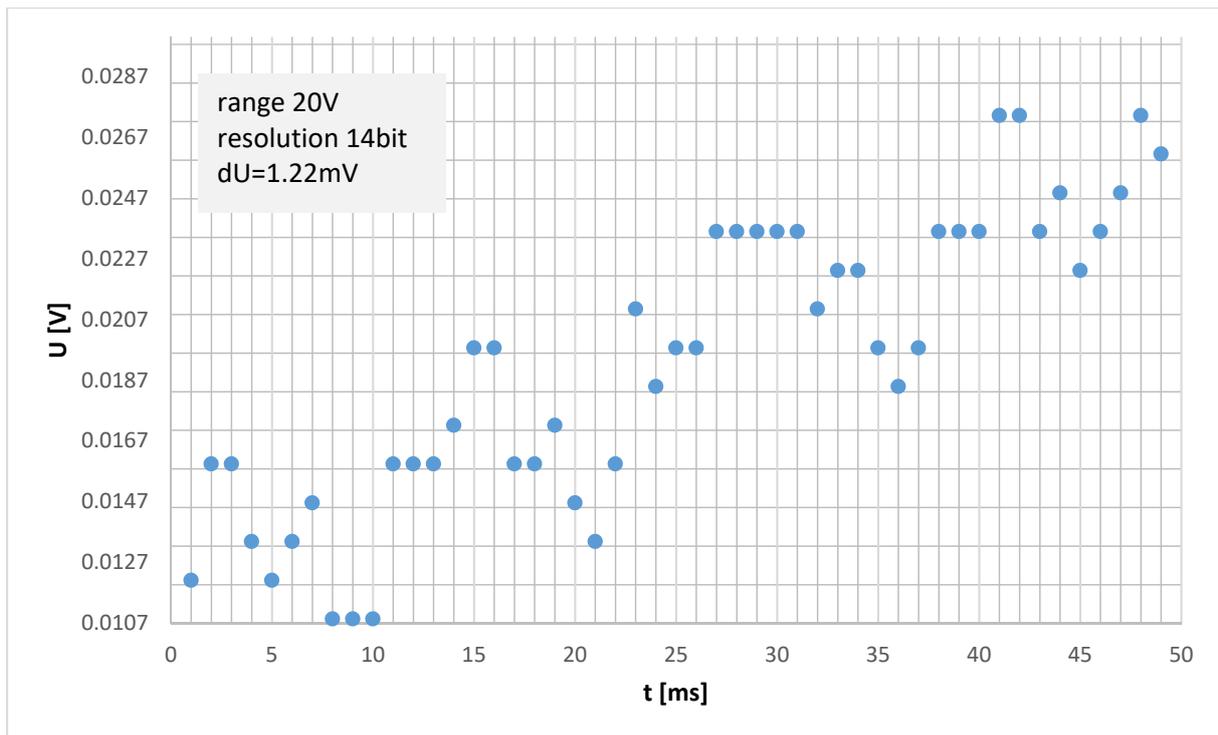


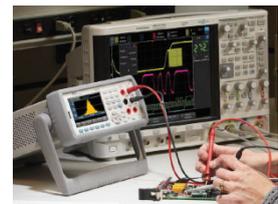
Abbildung 5 Verlauf der Spannungsmesswerte die mit einem Analog Digital Wandler aufgenommen wurden (Messbereich 20V – oder +/-10V mit einer Auflösung von 14bit)

Nachfolgen drei erste Antworten zu oft gestellte Fragen betreffend Genauigkeit beim Messen:

1. Sind die teureren Messgeräte die bessere Wahl und damit auch genauer?

Nein!

Als Beispiel sei hier die Gleichspannungsmessung mit einem kostengünstigen Multimeter genannt, zum Vergleich mit den teureren Oszilloskopen.



Der Blick ins Datenblatt zeigt, dass das Multimeter für dieses Beispiel der Gleichspannungsmessung um den Faktor 3 genauer ist, obwohl das Oszilloskop einen um mindestens den Faktor 10 höheren Listenpreis hat. Die Ursache liegt nicht daran, dass der Händler oder Hersteller einen Wucherpreis veranschlagt, sondern in der Arbeitsweise der beiden Messgeräte. Beide Spannungsmessgeräte wandeln mit einem Analog/Digitalwandler (A/D oder ADC Analog Digital Converter) die analoge Spannung in eine digitale Grösse um. Der ADC im Multimeter hat dazu mehr Zeit, weil nur typisch einmal pro Sekunde einen neuen Anzeigewert liefern muss. Dieser Wert ist dann auch sehr genau, kann also mit vielen signifikanten Stellen angezeigt werden. (Die Auflösung, Resolution gibt den kleinsten Unterschied im Messwert an, der gerade noch angezeigt werden kann.) Hingegen muss der ADC des Oszilloskops viel schneller sein, um viele Millionen bzw. auch Milliarden Einzelwerte pro Sekunde liefern zu können. Man spricht dann von einer hohen Sample Rate (meist auf Anzahl Messwerte pro Sekunde bezogen). Dies geht aber dann auf Kosten der angezeigten Stellen pro einzelnen Messwert.

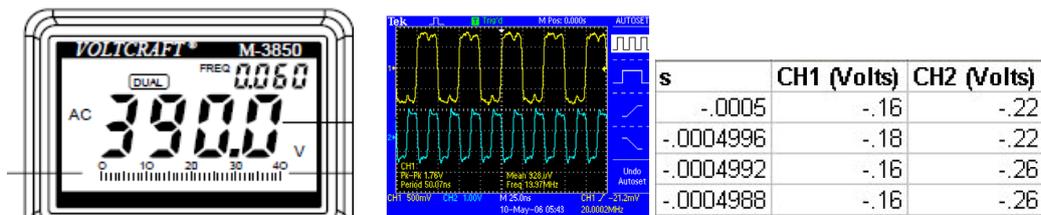


Abbildung 6 Links die Anzeige eines kostengünstigen Tischmultimeters mit 3 3/4-stelliges LCD-Display bis 4000 Ziffern. In der Mitte die Spannungsanzeige eines einfachen Oszilloskops mit nur zwei signifikanten Stellen die im Display angezeigt werden, (Auflösung Oszi nur 8 bit – also 20mV Auflösung bei einem Messbereichsspanne CH1 von 5000mV bei 500mV/Div (500mV Spannungsbreite eines vertikalen Kästchens im Display – Division) mit einer vom Hersteller im Datenblatt gegebenen Genauigkeit von +/-3% also +/-150mV.

Beispielsweise gibt der Hersteller Keysight für das hochwertige Tischmultimeter des Typs 34461A (Abb. 3) die vollen Stellen des Anzeigebereichs von 6 1/2 bei jeweils zehn Anzeigewert pro Sekunde an und nur noch 4 1/2 Stellen wenn 1000 Werte pro Sekunde ausgelesen werden sollen. (Abb. 4) Fazit : Genauigkeit steigt wenn pro Zeiteinheit weniger Anzeigewerte geliefert werden.

2. Was ist der Unterschied zwischen Resolution und Accuracy?

Die **Auflösung (Resolution)** bezeichnet den kleinsten Unterschied, der zwischen zwei benachbarten Messwerten angezeigt werden kann. Sie wird von der **Bit-Zahl** (Erläuterung siehe nachfolgendes Beispiel 1) der maximal möglichen Spannungsstufen des **ADC** bestimmt, der die analogen Spannungswerte in digitale Größen wandelt. Die Auflösung der Anzeige ist im Regelfall grösser als die Auflösung des ADC. Diese Auflösung darf aber nicht mit der Genauigkeit verwechselt werden.

Viele Hersteller von Messgeräten geben die **Accuracy (Genauigkeit)** mit einem Wert an, der um den Faktor typisch 10 oder 20 grösser ist als die Auflösung, entsprechend der Bit-Zahl. Sie bezeichnet den Bereich um den Anzeigewert in dem der tatsächliche Wert erwartet wird. Diese Unsicherheit wird von vielen Faktoren bestimmt wie Temperatur, Stabilität von Bauteilen z.B. Widerständen im Eingangsspannungsteiler, von der Qualität des ADC selbst und weiteren Einflussfaktoren wie Qualität der Spannungsversorgung oder der Abschirmung vor Störungen.

Beispiel 1

Der Hersteller eines Oszilloskops gibt 8 bit Auflösung für die Spannungsmessung an. Wenn also hier ein vertikaler Spannungsbereich von 500mV pro Division eingestellt wird, entspricht dies bei 10 vertikalen Kästchen einem Messbereich von 5000mV. Dieser Bereich kann also maximal in 256 ($=2^8$) Spannungsstufen aufgeteilt werden, was bei diesem Messbereich einer minimalen Stufenhöhe von 20mV zwischen zwei nächsten Messwerten entspricht. In Abb. 3 rechts ist dieses Beispiel als Teil einer Liste der ausgelesenen Messwerte des Oszilloskops ersichtlich, mit diesem minimalen möglichen Unterschied von 20mV.

Beispiel 2

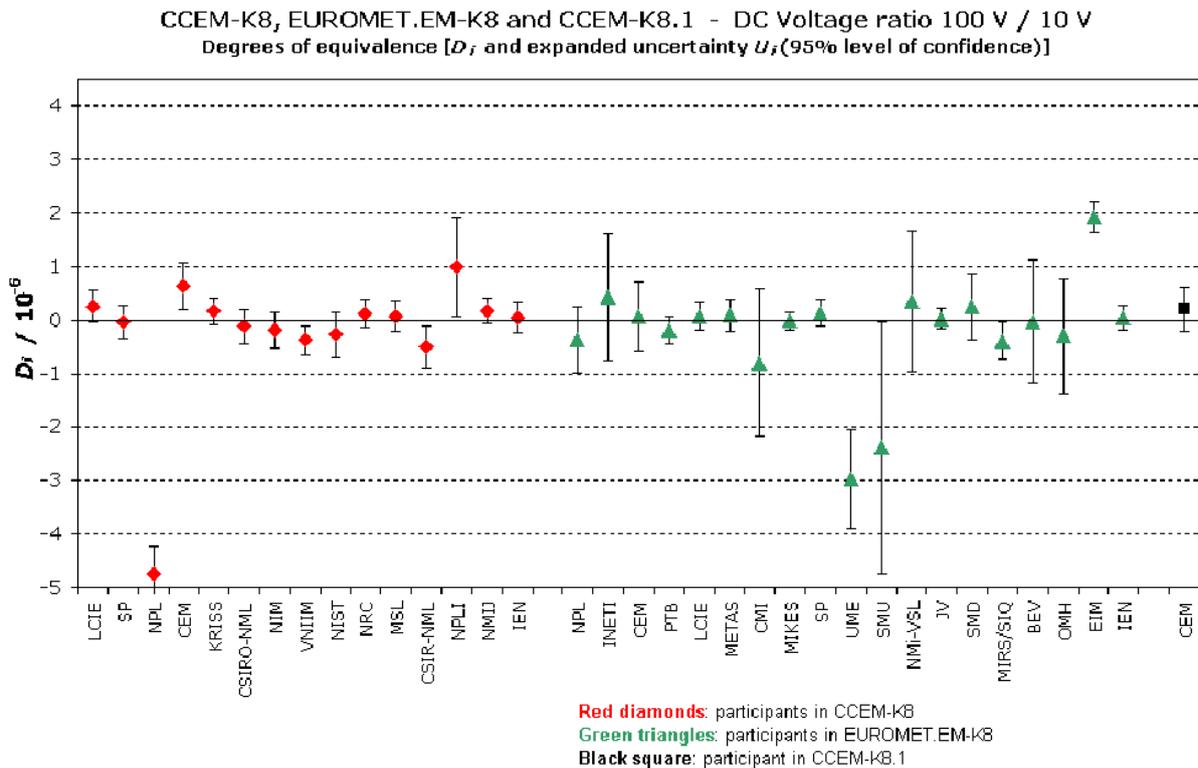
Berechnen Sie die Auflösung (kleinste Stufenhöhe) in μV für einen Messbereich von 2V, wenn ein ADC mit 22 bit eingesetzt wird? (Lösung $0.5\mu\text{V}$) Vergleichen Sie das Ergebnis mit Abb. 4.

3. Warum genügt es nicht einfach einen Messwert abzulesen und fertig?

Weil die einzelnen Messwerte in der Regel auf den letzten Stellen, die oft wichtig sind, schwanken. Auch die Werte der einzeln berechneten Mittelwerte, aus je einer Menge Einzelmesswerte, schwanken (z.B. nach dem Gesetz der Gaussverteilung). Dies hat mit der Messgrösse aber nichts mit den obigen Datenblattangaben des Herstellers Abb. 3 u. 4 zu tun.

4. Wie genau können die besten Labors der Welt die Spannung messen?

Wenn an derselben Spannungsquelle die besten Labors der Welt ihre Genauigkeit der Spannungsmessung überprüfen, ohne vorher den genauen Spannungswert zu kennen, können ihre Angaben zum Unsicherheitsbereich überprüft werden. Wenn sie wie in Abb. 7 dargestellt, die +/- Bereiche um ihren Mittelwert mit einem vertikalen Balken darstellen, so dürften unter 100 Labors nur ca. 5 davon ausserhalb des wahren Wertes – die Waagrechte bei 0 - liegen. Dies aber nur wenn alle 95% Vertrauensbereiche (level of confidence) korrekt ermittelt wurden.



Tagung 17. Nov. 04 /Jk

© METAS - 24

Abbildung 7 Messunsicherheiten in ppm (parts per million) bei einem Vergleich der Gleichspannungsmessung der weltbesten nationalen Messlabors, Metrologie Institute (Stand 2004). Ref. ¹

1.2. Vollständigkeit des Resultats einer Messung

Der exakte Wert der analogen Gleichspannung kann nie genau bestimmt werden, da dazu unendlich viele Stellen nötig wären. Dies ist ja im technischen, wirtschaftlichen Umfeld auch nicht nötig. In der Praxis würde eine zu hohe Stellenzahl nicht helfen, da der Messwert selbst im Regelfall um einen Mittelwert schwankt. Für das Messresultat ist immer dieser dahinter liegende Mittelwert im Zentrum der von einer zufälligen Störung überlagert wird. Wie diese Einzelwerte um einen Mittelwert schwanken, ist in Abb. 8 mit einer Häufigkeitsdarstellung zu sehen. Es gilt, je breiter diese Glockenkurve der Schwankung ist, umso ungenauer kann die exakte Lage des Mittelwerts bestimmt werden. Zudem wird im Messergebnis nicht nur dieser Mittelwert sondern auch ein Bereich anzugeben sein, in dem dieser Mittelwert erwartet wird. Dies ist der Zweck der genauen Messung. Schwankt der Messwert selbst sehr stark, kann mit dem genauesten Messgerät mit höchster Stellenzahl, auch nur ein endliches Intervall für das Auffinden des Mittelwertes im Messresultat angegeben werden. Die Breite ist dann ein Mass für die Schwankung. Ob Störung oder Messwertschwankung kann oft nicht klar gesagt werden.

¹ Dr. Beat Jeckelmann; Tagung IG elektrische Mess- und Prüftechnik; am 17 Nov 2004, METAS, Bern

Tuesday, May 28, 2013 - 16:39

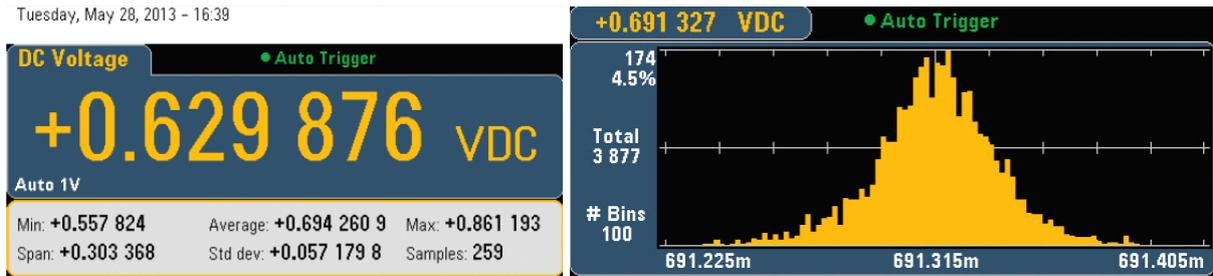


Abbildung 8 Die Anzeige eines Zahlenwertes der Spannung links, liegt dem Mittelwert von vielen Einzelmessungen zugrunde, deren Verteilung in 100 einzelne Spannungsintervalle (#Bins) rechts dargestellt ist. Dies entspricht einem anderen Anzeigemodus dieses hochwertigen Tischmultimeters. (Display des Tischmultimeters 34461A; www.keysight.com)

Daher wird nicht eine einzelne Zahl, sondern für das Messergebnis ein Bereich erwartet, in dem der tatsächliche Mittelwert des Messwertes liegen wird. (siehe Titelseite diese Skripts)

Dies muss so angegeben werden damit es eindeutig ist – z.B.

$(1.00 \pm 0.02) \text{V}$ womit der Bereich von 0.98V bis 1.02V bezeichnet wird oder
 $1.00 \text{V} \pm 0.02 \text{V}$ womit der Bereich von 0.98V bis 1.02V

oder

$1.00 \text{V} \pm 2\%$ womit der gleiche Bereich wie oben beschrieben wird

Falsch wäre es, wenn die signifikanten Stellen von Mittelwert und Breite nicht übereinstimmen würden, wie z.B. bei $2.1 \text{V} \pm 0.0002 \text{V}$ (richtig wäre $2.1000 \text{V} \pm 0.0002 \text{V}$). Falsch wäre auch z.B. $2.1 \text{V} \pm 0.2 \text{mV}$ (richtig wäre $2.1000 \text{V} \pm 0.2 \text{mV}$)

Damit ist aber die Angabe des Messresultats nicht vollständig. Es muss zwingend gesagt werden mit welcher Wahrscheinlichkeit der Wert dort vermutet wird. Dies klingt auf den ersten Blick umständlich. Ist aber klar, wenn bedacht wird, dass ein Hersteller eines Multimeters in sein Datenblatt heute in der Regel die maximal erlaubte Abweichung hineinschreibt (siehe Abb.4 aber nicht Abb. 3).

So beschreibt z.B. die Angabe Klasse 2 bei einem Haushaltsstromzähler, dass der Hersteller garantiert, dass der Wert immer innerhalb von zwei Prozent vom Messbereich um den Anzeigewert liegt. Der Stromkunde ist dankbar für diese Sicherheit, die bei einer Stromrechnung von 1000 Franken, ja bedeutet, dass nicht genau gesagt werden kann, ob der Kunde jährlich 20 Franken zu viel oder zu wenig gezahlt hat! Es gibt in der Praxis wenige Ausnahmefälle bei denen Kunden hunderte Franken zu viel oder zu wenig verrechnet wurden. Aber Vorsicht, wenn ein Kunde eine Kontrollmessung eines Zählers anfordert entstehen meist Gesamtkosten von über 200 Franken für diese Kontrollmessung.

Daraus erkennen wir, dass die Messunsicherheit in den meisten Fällen eine wirtschaftliche Bedeutung hat, also auch im Streitfall auch vor Gericht eingeklagt werden kann.

Für den Richter ist dann wiederum wichtig, dass diese Messunsicherheit nach einem einheitlichen Verfahren berechnet wird. Dies ist das international verbindliche Verfahren nach GUM (Guideline of Expression of Uncertainty in Measurement), das daher weltweit die Industrie aber auch der Handel einzuhalten hat.

Ein vollständiges Messresultat nach GUM lautet z.B.

$10.000 \text{V} \pm 0.002 \text{V}$ bei 68% Überdeckungswahrscheinlichkeit

Die 68% Überdeckungswahrscheinlichkeit (oder auch Vertrauensniveau genannt) basieren auf der Gaussverteilung, der in der Praxis am häufigsten auftretenden Verteilung für die

Schwankung. (Kapitel 1.4) Natürlich ist diese GUM Analyse nicht notwendig, wenn wir bei einem Netzteil im Labor einen Funktionstest machen und kontrollieren wollen ob dort wirklich ungefähr 5V oder etwa 5.5V anliegen.

Wie die vielfältigen Einflüsse verschiedener physikalischer und technischer Grössen auf eine Messung wirken und wie dabei die Messunsicherheitsanalyse ausgeführt werden kann, ist am Beispiel der Gleichspannungsmessung im Anhang Kap. 6 zu finden.

1.3. Wahrscheinlichkeiten – Gauss bzw. Normalverteilung

Kennwert der Wahrscheinlichkeit damit der Wert innerhalb der Standardabweichung liegt.

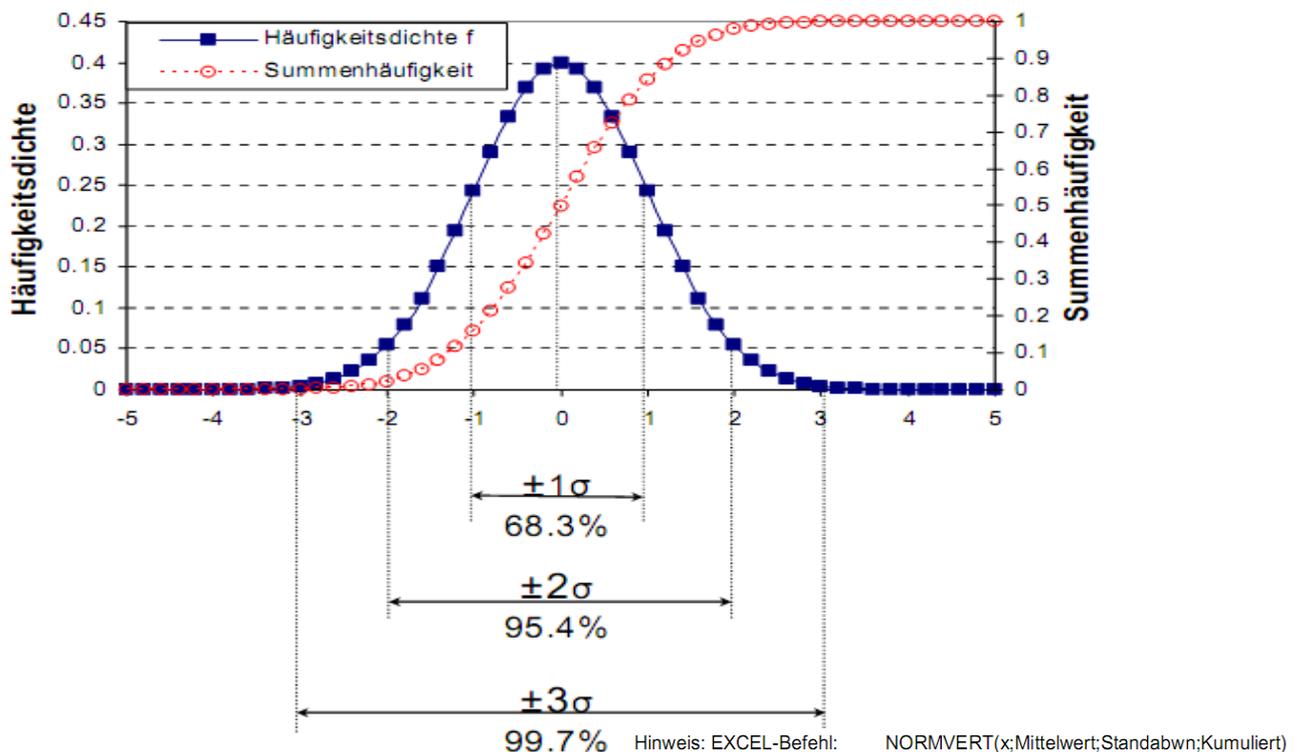


Abbildung 9 Grafische Veranschaulichung des Weges zum vollständigen Messergebnis nach GUM wenn viele Einzelmesswerte n erfasst wurden ($n < 200$ dann ist $t=1$ siehe Kap. 2.1)

Darstellung bzw. Berechnung mit Matlab:

```
x=normrnd(5,2,1,10000); % X-Wert gaussverteilt, Mittelwert=5; s=2, 1000 Werte
n_histogram=HIST(x,50); % Histogramm mit 50 Klassen - bins
PLOT(2,2,1), bar(n_histogram,'rh:');
```

Beispiel:

Es gibt unterschiedliche Konfidenzwerte (confidence levels), Vertrauensniveaus, Dass der Wert grösser als der Mittelwert + der zweifachen Standardabweichung ist, ist 97.72%. z.B. $k=2$ in EXCEL $NORMVERT(2;0;1;wahr)=0.9772$ folgt $2*(1-0.9772)=0.0455$

Vertrauensniveau (Confidence level)		Wieviel liegen ausserhalb ca.
k=1	68.3%	3 von 10
k=2	95.4%	5 von 100
k=3	99.7%	3 von 1000

2. Einfacher Fall der Messunsicherheit nach GUM

Das Vorgehen nach GUM „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“² ist hier an einem einfachen Beispiel der Widerstandsmessung grafische zusammengefasst. [1]

In diesem Beispiel der Messung eines Sensorwiderstandes führt der Leitungswiderstand zu einem höheren Widerstand, wenn die Messwerte des Ohmmeters betrachtet werden. Bleibt dieser Leistungswiderstand stets gleich, so muss er als systematische Unsicherheit e_{sys} vom Mittelwert m , denn das Ohmmeter geliefert hat, abgezogen werden. Dieses Vorgehen wird als Korrektur bezeichnet und ist ein wichtiger Teil der GUM Analyse.

Weiters wird die GUM Analyse aufgeteilt und dabei die beiden Teilgrößen der Unsicherheit u_A (**Typ A**) Schwankung der Messwerte und u_B (**Typ B**) Qualität des Messgeräts bestimmt. Beide Größen sollten bei einer optimal abgestimmten Messung ähnlich gross sein, beim effizienten Einsatz der Messgeräte.

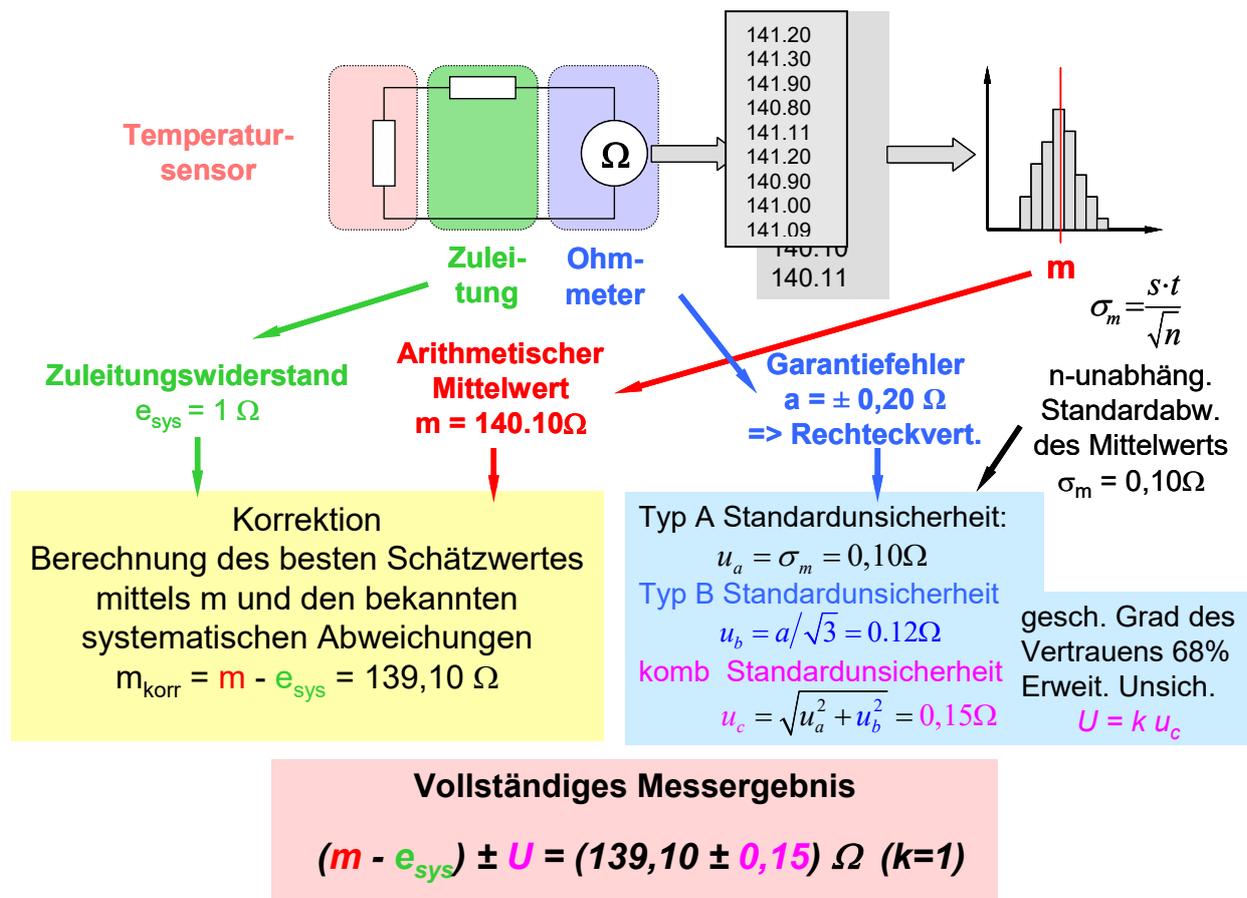
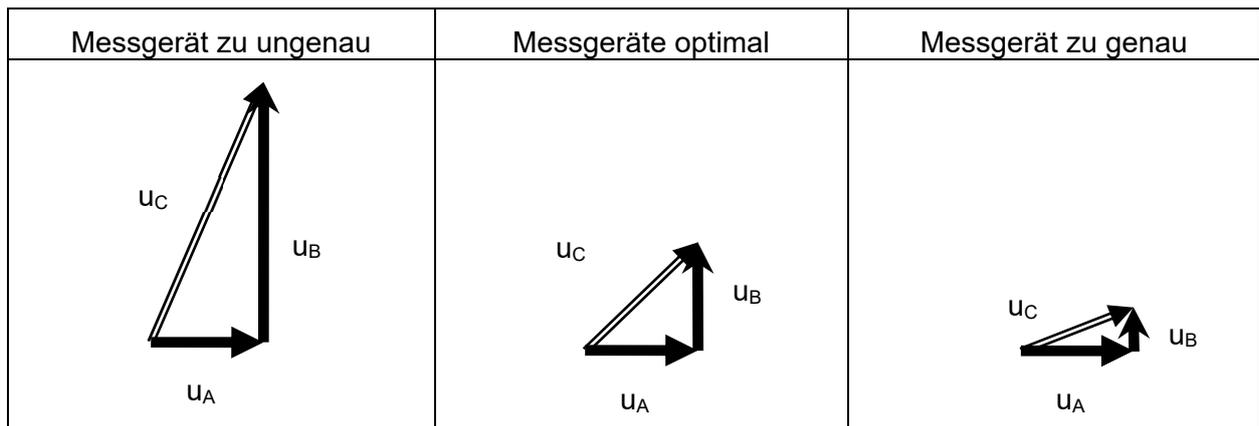


Abbildung 10 Grafische vereinfachte Veranschaulichung des Weges zum vollständigen Messergebnis nach GUM, wenn viele Einzelmesswerte n erfasst wurden ($n < 200$ dann ist $t=1$ Details siehe Kap. 2.1)

Wenn der Typ A Beitrag (Schwankung Anzeigewert) im Vergleich zum Typ B Beitrag (Messgerät-Unsicherheit) klein ist, so führt eine weitere Erhöhung der Anzahl an Messungen n zu keiner merklichen Verbesserung der resultierenden, kombinierten Messunsicherheit u_c . Generell kann eine minimale resultierende Messunsicherheit u_c nur durch die optimale Wahl der Anzahl der Messungen, Minimierung aller bekannten Störquellen und die notwendige Genauigkeit der Messgeräte erzielt werden. Die Aufteilung in u_A und u_B hilft dies zu erkennen.

² Erstmals herausgegeben 1993 von ISO; www.european-accreditation.org Geneva, Switzerland;



Ergänzendes Einführungsbeispiel, um die Rechenmethode kennen zu lernen.

Für die Messung des Wirkungsgrads der Leistungselektronik eines Elektromotorantriebs werden nacheinander zehn Messwerte der Wirkleistung vom Powermeter ausgelesen:

Messreihe der Anzeigewerte der Wirkleistung in W

5020 5040 5003 4998 5043 5017 5016 5027 5033 5011

bester Schätzwert des Messergebnisses

Formel

Mittelwert der Anzeige (n=10)	m=	5020,8	[W]	$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
bekannte systematische Abweichung	e _{sys}	0	[W]	
bester Schätzwert des Messergebnisses (Korrektur um die systematische Abweichung)	m _{korrr}	5020,8	[W]	$m_{korrr} = m - e_{sys}$

Typ A Unsicherheit

Standardabweichung, Schwankungsbreite der Verteilung aller Ablesewerte	s=	15,0	[W]	$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}$
Standardabweichung des Mittelwertes (t=1.06)* (steht für einen Vertrauensniveau von 68%)	u _A =	5,0	[W]	$u_A = t \cdot s / \sqrt{n}$

* für n<200 ist der Faktor der Student-t Verteilung zu verwenden; hier n=10, t=1.06 für das 68% Niveau

Typ B Unsicherheit

Messinstrument, Garantiegrenze (steht für ein Vertrauensniveau von 100%)	Klasse	0.2	%	vom Messbereich MB bei Angabe der Klasse
Messbereich des Powermeters	MB=	10 000	[W]	
halbe Toleranzbreite, Rechteckverteilung	a=	20,0	[W]	$a = MB \cdot 0.2 / 100$
Messunsicherheit, Wurzel der Varianz (steht für einen Vertrauensniveau von 68%)	u _B =	11,5	[W]	$u_B = a \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$

kombinierte Messunsicherheit u_C

Typ A Unsicherheitsbeitrag	$u_A =$	5,0	[W]	
Typ B Unsicherheitsbeitrag	$u_B =$	11,5	[W]	
kombinierte Messunsicherheit	$u_C =$	12,6	[W]	$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$

Erweiterte Unsicherheit

Erweiterungsfaktor k festlegen	$k =$	1	[-]	
Erweiterte Unsicherheit	$U =$	12,6	[W]	$U = k \cdot u_C$

Vollständiges Messergebnis **in W** **5021 ±13 (k=1)** $m_{\text{kor}} \pm U (k=1)$

k=1 bedeutet eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 68% für den Bereich um den Mittelwert. (Abb. 9)

Hier das GUM **Vorgehen im Detail** mit den notwendigen Formeln in den weiteren Kapiteln.

Die Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM erfolgt in den folgenden Schritten:

- a) Systematische (konstante) Abweichungen vom Mittelwert abziehen
- b) Standardunsicherheit Typ A
- c) Standardunsicherheit Typ B
- d) Kombinierte Standardunsicherheit Typ C
- e) Erweiterte Unsicherheit basierend auf dem geforderten Vertrauensniveau angeben und vollständiges Messergebnis angeben

Erläuterung zu a)

Soll eine Widerstandsmessung an einem Sensor ausgeführt werden, so ist beispielsweise der Leitungswiderstand zum Sensor selbst immer gleich, sofern Temperatur und andere Grössen wie Kontaktwiderstände der Anschlüsse unverändert sind. Dann ist der beste Schätzwert zur Berechnung des Widerstandswert des Sensors, indem der Leitungswiderstand abgezogen wird. Der beste Schätzwert des Messergebnisses m_{korr} wird also aus dem Mittelwert m der n Messungen x_i und aus der bekannten systematischen Abweichung e_{sys} (ist hier der Leitungswiderstand) bestimmt mit.

$$m_{\text{korr}} = m - e_{\text{sys}}$$

2.1. Typ A – Schwankung des Anzeigewertes

Die Ermittlung der **Typ A - Standardunsicherheit** basiert auf einer **statistischen Analyse**. Basis zur Ermittlung dieser Unsicherheit u_A ist die empirische Standardabweichung der einzelnen Messwerte x_i die das Messgerät mit insgesamt n Einzelwerten geliefert hat.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}$$

Die Standardunsicherheit Typ A des Mittelwertes wird aus s wie folgt berechnet

$$u_A = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Üblicherweise kann der Faktor $t=1$ gewählt werden, wenn der Stichprobenumfang mehr als 200 gewählt wird und beim GUM Vorgehen das Vertrauensniveau von 68.3% in diesem Rechenschritt gewählt wird.

Ist der Stichprobenumfang $n < 100$, so muss der Vertrauensfaktor t gemäss der Student t -Verteilung (Tab. 2) mit berücksichtigt werden. Ohne Berücksichtigung der Student t -Verteilung ist die Standardabweichung des Einzelwertes vom Stichprobenumfang abhängig, d.h. man würde bei kleinem Stichprobenumfang eine zu kleine Standardabweichung des Einzelwertes erhalten und somit die tatsächliche Schwankungsbreite unterschätzen.

Die Standardunsicherheit Typ A wird für ein Vertrauensniveau von 68,3% berechnet. Damit lässt sich die kombinierte Standardunsicherheit Typ C (siehe unten) leicht ermitteln, da die ebenfalls benötigte Standardunsicherheit Typ B ebenfalls mit einem Vertrauensniveau von 68,3% ermittelt wird.

Tabelle 2 Vertrauensfaktor t der Student t-Verteilung

Anzahl Messungen n in der Messreihe	Student t-Verteilung: Vertrauensfaktor t						
	Vertrauensniveau [%]						
	68.27	90.00	95.00	95.45	99.00	99.727	99.9937
2	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	233.19	10105.08
3	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.10	125.98
4	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.18	32.68
5	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.60	17.47
6	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.49	12.30
7	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.89	9.85
8	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.52	8.47
9	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.27	7.60
10	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09	7.00
20	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.44	5.10
30	1.02	1.70	2.05	2.09	2.76	3.28	4.67
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16	4.38
100	1.01	1.66	1.98	2.03	2.63	3.07	4.18
200	1.00	1.65	1.97	2.01	2.60	3.03	4.09
$n \rightarrow \infty$	1.00	1.65	1.96	2.00	2.58	3.00	4.00

2.2. Typ B – Datenblattangabe des Messgerätes

Das Messgerät selbst ist laut Herstellerangaben mit Unsicherheiten behaftet wie Nullpunkts-, Empfindlichkeitsabweichung, Temperaturdrift und weitere Einflussfaktoren. Der Messaufbau und das Messverfahren bringen nochmals Abweichungen hinzu. Diese Art von Unsicherheiten u_B , die **nicht auf "statistische Weise"** bestimmt wurden, sind unter **Typ B - Standardunsicherheiten** zusammen gefasst. Deren Beiträge stammen in der Regel aus den unbekannt systematischen Abweichungen, deren „Standardabweichungen“ geschätzt werden müssen. Mögliche Quellen zum Schätzen der „Standardabweichungen“ sind:

- Angaben des Herstellers des Messgerätes oder der Messeinrichtung;
- Daten von Kalibrierscheinen und anderen Zertifikaten;
- Daten aus früheren Messungen oder anderen Vergleichsmessungen;
- Erfahrungen oder allgemeine Kenntnisse über Verhalten und Eigenschaften der relevanten Materialien und Messgeräte;
- Unsicherheiten, die Referenzdaten aus Handbüchern zugeordnet sind.

Mathematisch werden die Beiträge so behandelt, als wären es Standardabweichungen bzw. Varianzen, mit einem Vertrauensniveau von jeweils 68%. In der Praxis werden die Unsicherheiten der Messeinrichtung auf unterschiedliche Art und Weise angegeben. Die vier häufigsten Angaben und deren Handhabung sind die Folgenden:

- Wird in den Angaben des Herstellers oder Kalibrierzertifikats die Unsicherheit als ein bestimmtes **Mehrfaches einer Standardabweichung angegeben** (erweiterte Messunsicherheit), so errechnet sich die einfache Standardunsicherheit $u(x_i)$, indem der angegebene Wert durch den Multiplikationsfaktor (Erweiterungsfaktor k) geteilt wird.

Beispiel: $(20 \pm 0,004) \Omega$ (k=2)

$$\text{Standardunsicherheit Typ B: } u_B = \frac{0,004\Omega}{2} = 0,002\Omega$$

- Wird die **Unsicherheit in Form eines Bereichs mit einem Vertrauensniveau** von beispielsweise 90, 95 oder 99 Prozent angegeben und ist nichts anderes angezeigt, darf man davon ausgehen, dass zur Berechnung der Unsicherheit eine Normalverteilung

herangezogen wurde. Die Standardunsicherheit $u(x_i)$ wird mittels Teilung der angegebenen Unsicherheit durch den entsprechenden Faktor der Normalverteilung (siehe Tabelle2; t-Verteilung für $n \rightarrow \infty$) ermittelt. Die Faktoren, die den oben angegebenen Vertrauensniveaus entsprechen, betragen 1,64; 1,96 und 2.58. In der Praxis wird meist das Vertrauensniveau von 95% mit dem Faktor $k=2$ anstatt $k=1,96$ gleichgesetzt.

Beispiel: $\pm 5m\Omega$ Vertrauensniveau 95%

Standardunsicherheit Typ B: $u_B = \frac{5m\Omega}{1,96} = 2,55m\Omega$; (statt 1,96 kann auch 2 gewählt sein)

(erst wenige Hersteller machen diese Angaben vgl. Multimeter Abb. 3 links oben)

- **Garantiebereich**

Vereinfacht gesagt, gibt der Hersteller in seinem Datenblatt einen Bereich $-a$ bis $+a$ an, in dem der Messwert garantiert liegen wird. Dann liegt keine Gaussverteilung vor sondern es wird der Messwert zu 100% in diesem Garantiebereich liegen. Solch eine Verteilung

Wenn es **keine speziellen Kenntnisse** über die möglichen Verteilung innerhalb des Bereiches $-a$ bis $+a$ gibt, lässt sich nur annehmen, dass im gesamten Bereich etwa die gleiche Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Messwertes besteht (quasi Gleich- oder Rechteckverteilung). Sind beispielsweise im Datenblatt des Messinstruments, Messmittels keine weiteren Angaben zur Unsicherheit gemacht, wird stets eine Rechteckverteilung angenommen. Ist die Differenz zwischen den Schranken

$-a$ und $+a$ gleich $2a$, so wird die Standardunsicherheit wie folgt geschätzt: $u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Dies entspricht dem Wert der Standardabweichung einer Rechtecksverteilung. Damit wurde diesem Garantiebereich $-a$ bis $+a$ eine der ähnlichsten Gaussverteilungen zugeordnet (gleiche Standardabweichung). Somit kann jetzt diese gleichwertige Gaussverteilung mit $k=1$ für die weiteren Berechnung für die Typ B Unsicherheit verwendet werden. So ist auch die später Zusammenführung mit der Typ A Unsicherheit vorbereitet.

Beispiel: $\pm 4m\Omega$ (keine weiteren Angaben)

Standardunsicherheit Typ B: $u_B = \frac{4m\Omega}{\sqrt{3}} = 2,3m\Omega$

- Bei Messgeräten mit **digitaler Anzeige** erfolgt die Angabe der Messunsicherheit in der Regel in der Form **$\pm(x \% + y \text{ dgts})$** . Dabei bedeutet die Angabe $x \%$ die Empfindlichkeitsabweichung. Dieser Beitrag bezieht sich deshalb auf den gemessenen Mittelwert (nicht auf den Messbereich). Die Angabe $y \text{ dgts}$ beschreibt die Nullpunktabweichung (d.h. einen Offset), welche für den gesamten Messbereich gültig ist. Mit dgts (digits) ist der Wert auf der letzten Stelle der Digitalanzeige gemeint. Diesem Wert entspricht die im Datenblatt des Messinstruments angegebene Auflösung (= kleinster wahrnehmbarer Unterschied in der Anzeige). Für beide Unsicherheitsbeiträge wird eine Rechtecksverteilung angenommen, sofern keine anderen Verteilungen angegeben werden.

Beispiel: gemessener Mittelwert $3,24 \text{ V}$; Unsicherheit gemäss Datenblatt des Multimeters $\pm(0,5 \% + 2 \text{ dgts})$

Empfindlichkeitsabweichung: $u_E = \frac{0,005 \cdot 3,24 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0,0094 \text{ V}$.

Mit $\sqrt{3}$ wird hier die Rechtecksverteilung berücksichtigt.

Nullpunktabweichung:

$$u_N = \frac{0,01V \cdot 2dgts}{\sqrt{3}} = 0,0115V ; \text{ Das Messgerät zeigt die Spannung auf 0,01 V genau an}$$

(Auflösung). Im Datenblatt sind als Nullpunktabweichung – Garantieangabe zwei Digits 2dgts zu finden. Absolut ist also die Nullpunktabweichung als Garantieangabe wie folgt zu berechnen $0,01V \cdot 2dgts = 0,02V$. Da im Datenblatt mit der Garantieangabe eine Rechteckverteilung vorliegt, muss dieser Wert noch durch $\sqrt{3}$ geteilt werden.

Standardunsicherheit Typ B:

$$u_B = \sqrt{u_E^2 + u_N^2} = \sqrt{\frac{(0,005 \cdot 3,24V)^2 + (0,01V \cdot 2dgts)^2}{3}} = 0,015V$$

Die Varianzen der einzelnen Unsicherheitsbeiträge können addiert werden.

Ist bei der Angabe der Unsicherheit eine von der Normalverteilung (Gaussverteilung) abweichende Verteilung gegeben, so wird die Unsicherheit mit den im untenstehenden Bild 11 angegebenen Korrekturfaktoren berechnet. Mit Abstand am häufigsten kommt da die Rechteckverteilung vor. Die Verteilung rechts ist z.B. bei einer sinusförmigen Grösse gegeben, die dann mit diesem Korrekturfaktor vom Scheitelwert zum Effektivwert der Grösse führt.

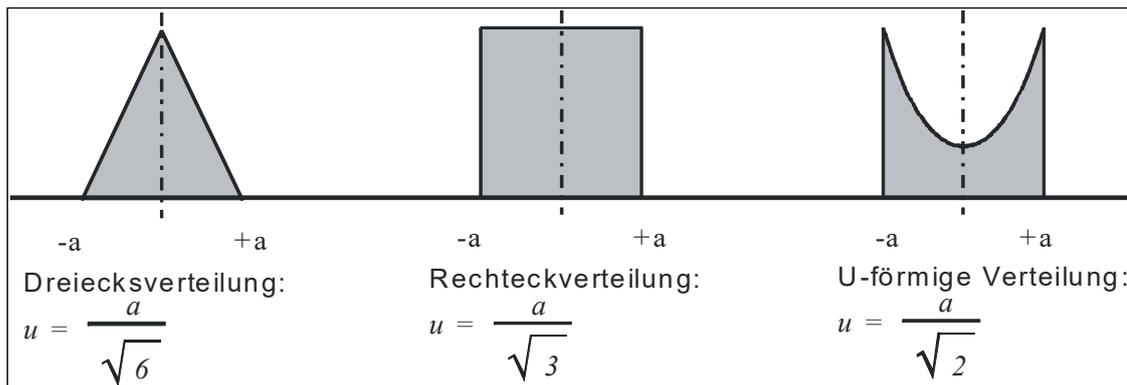


Abbildung 11 Sonderverteilungen bei Unsicherheitsberechnungen und Darstellung Bereich -a bis +a ³

Beispiel für die Berechnung der Messunsicherheit des Typs B ⁴

Im Zuge der Kalibrierung von Digitalmultimeter nach VDI/VDE Norm sollen vier unterschiedliche Messunsicherheitsanteile zusammengefasst werden. Sie repräsentieren die Messunsicherheitsanteile aus der Nullpunktabweichung a_0 , Empfindlichkeitsabweichung a_e , Auflösung der Anzeige a_r und aus Umgebungseinflüssen a_u . Diese Grössen sollen nicht normalverteilt sondern gleichverteilt sein, d.h. Rechteckverteilung. Die Grösse a soll jeweils die halbe Weite (siehe Abb. 11) der Rechteckverteilung sein (\pm Garantiefehler, Toleranz nach Datenblatt). Es folgt die Standard-Messunsicherheit Typ B aller vier Messunsicherheitsanteile:

$$u_B = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot a_0^2 + \frac{1}{3} \cdot a_e^2 + \frac{1}{3} \cdot a_r^2 + \frac{1}{3} \cdot a_u^2}$$

³ W. Dutschke, Fertigungsmesstechnik, B.G. Teubner, Stuttgart 2002

⁴ Norm: DIN1319 und Kalibrierung von Messmittel für elektrische Grössen, Digitalmultimeter VDI/VDE/DGQ/DKD 2622 Blatt 1, 1997

2.3. Typ C – kombinierter Unsicherheit aus Typ A und B

Die Unsicherheitsbeiträge Typ A und Typ B müssen zusammengeführt aber nicht einfach addiert werden. Dies deshalb, weil wir hier nicht den sehr unwahrscheinlichen Fall der maximalen Abweichung bzw. Bereich um den Mittelwert betrachten müssen, der der Garantieabweichung mit 100% entspricht. Für das GUM Messergebnis ist stets ein Bereich auszuweisen in dem der tatsächliche Messwert z.B. mit 68% Wahrscheinlichkeit ($k=1$) oder mit 95% also $k=2$, aber nie mit einer 100%-igen Trefferwahrscheinlichkeit liegt. Dieser 100% Bereich wäre in der Praxis viel zu gross und wirtschaftlich nicht brauchbar.

Daher wird auch hier die kombinierte Unsicherheit Typ C aus dem geometrischen Mittel errechnet und üblich für 68% Wahrscheinlichkeit berechnet.

Beide Quellen der Unsicherheiten u_A und u_B tragen gleichwertig zur resultierenden kombinierten Messunsicherheit u_C bei. Die Typ C Unsicherheit kann auch als geschätzte Standardabweichung des Bereichs um den wahrscheinlichsten Schätzwert des Mittelwertes verstanden werden. Sie wird entsprechend der Fortpflanzung von wahrscheinlichen unabhängigen Zufallsgrössen⁵ aus der Summe der Varianzen (u_A^2, u_B^2) wie folgt berechnet.

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

Erweiterte Unsicherheit basierend auf dem geforderten Vertrauensniveau

Die erweiterte Unsicherheit gibt die Messunsicherheit des Messergebnisses bei einem vorgegebenen Vertrauensniveau an. Je nach Anwendung schwankt das Vertrauensniveau, mit dem das Messergebnis angegeben werden soll, zwischen 68 und 99%. Dies wird mit dem Erweiterungsfaktor k berücksichtigt (z.B. $k=1$ bei 68%, $k=2$ bei 95%). Man erhält die erweiterte Messunsicherheit U mit

$$U = k \cdot u_C$$

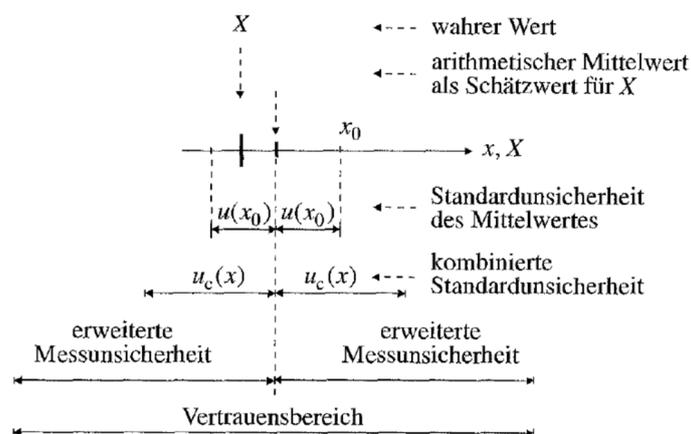


Abbildung 12 Darstellung des erweiterten Messunsicherheitsbereiches ⁶

⁵ W. Gränicher, Messung beendet was nun?; Teubner Verlag Stuttgart, 1996; ISBN 3-519-13659-7; besonders Kapitel 9.2; Diese Fortpflanzung der Zufallsgrössen geht auf den Mathematiker Gauss zurück, der sie erfolgreich schon vor zwei Jahrhunderten bei der Landvermessung einsetzte.

⁶ F. Adunka in J. Hoffmann; Taschenbuch der Messtechnik; 2002; ISBN 3-446-21977-3

Tabelle 3 Empfehlungen für Annahme des Erweiterungsfaktors k (siehe Ref. ⁷)

Grad des Vertrauens	erweiterte Unsicherheit U	Einsatzgebiet
68,26%	$\pm u_C$	- Physik und Vermessungswesen - Physikalische Naturkonstante
95%	$\pm 1,96 \cdot u_C$	- Industrielle Messtechnik - Basis aller ASTM Standards (American Society for Testing and Materials)
99,73%	$\pm 3 \cdot u_C$	- Biologie
99,98%	$\pm 4 \cdot u_C$	- Bremse im Kraftfahrzeug - Luft- und Raumfahrttechnik

Obige Tabelle ergibt einen ersten Eindruck, welcher Wert für den Erweiterungsfaktor k angenommen werden soll. In den einzelnen Branchen und Normen wird darauf näher eingegangen.

Vollständiges Messergebnis angeben

Es wird ein Schlussresultat mit folgendem Inhalt bzw. 3 Zahlen erwartet ⁸:

$$m_{\text{korr}} \pm U \quad (k = \dots)$$

Das Messergebnis und die Messunsicherheit wird auf so viele Kommastellen genau angegeben, wie das Messgerät abgelesen wurde. In der Praxis wird der Unsicherheitsbereich typisch mit zwei signifikanten Stellen angegeben.

Beispiel zur Unsicherheitsangabe entsprechend DKD ⁹

Das mit einer Waage gemessene Gewicht des Gewichtsstücks mit dem Nennwert 10 kg beträgt 10.000'025 kg \pm 59 mg ($k=2$).

Bedeutung:

Bester Schätzwert des Messergebnisses: 10.000'025 kg

Messunsicherheit von \pm 59 mg

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95,45 %. In der Praxis ist die Verteilung keine exakte Gaussverteilung und damit können die obigen Vertrauenswahrscheinlichkeiten nur als Schätzwerte verstanden werden, die aber für die meisten Anwendungen ausreichen. Daher genügt es in der Praxis bei $k=2$ der Einfachheit halber nur die Zahl 95% für den Vertrauensbereich anzugeben.

⁷ M. Bantel, Grundlagen der Messtechnik, Messunsicherheit von Messung und Messgerät; Fachbuchverlag Leipzig 2000

⁸ GUM oder DIN 1319-3: 1996-05 oder DIN V 13005

⁹ siehe Dokument DKD 3 des DKD Deutscher Kalibrierdienst; www.dkd.de bzw. www.ptb.de

3. Messunsicherheit mit Teilmessungen

Soll beispielsweise die Fläche eines Rechtecks genau berechnet werden, so muss in die Berechnung dieser Unsicherheit der Fläche, die Unsicherheit der Messung der jeweiligen Kantenlänge eingehen. Wie ist dabei vorzugehen? Das formale Vorgehen ist gleich wie bei der Berechnung z.B. des elektrischen Widerstandes durch Division von Spannung durch Strom.

Das Messergebnis F soll ganz allgemein eine Funktion von N Teilmesswerten f_i sein

$$F = F(f_1, f_2, \dots, f_N).$$

Beispiel: Es soll der ohmsche Widerstand R aus den Teilmessgrößen Spannung U und Strom I berechnet werden. Gesucht ist die Unsicherheit des Widerstandes $u(R)$.

$$F = R$$

$$f_1 = U$$

$$f_2 = I$$

Der Mittelwert des Widerstandes $m(R)$ wird aus dem Mittelwert $m(U)$ der Teilmessgröße Spannung U und dem Mittelwert $m(I)$ der Teilmessgröße Strom I wie folgt berechnet.

$$m(R) = \frac{m(U)}{m(I)}$$

Allgemein gilt, dass der Mittelwert $m(F)$ aus den einzelnen Mittelwerten $m(f_i)$ mit oft viel komplizierteren Formeln zu berechnen ist.

$$m(F) = F[m(f_1), m(f_2), \dots, m(f_N)].$$

Wir gehen davon aus, dass bei allen Mittelwerten bereits eine Korrektur um die jeweilige bekannte systematische Abweichung durchgeführt wurde. Von den jeweiligen Teilmessung sind die Mittelwerte $m(f_k)$ und Standardabweichungen bzw. resultierenden Unsicherheit der Teilmessungen bekannt $s(f_k) = u(f_k)$. Es liegen die Teilresultate $m(f_k) \pm u(f_k)$ vor.

Nachfolgend sollen nur die einfachen Rechenregeln für die Grundrechnungsarten bei der Fortpflanzung von zwei Teilmessgrößen f_k zur Zielmessgröße F behandelt werden. Herleitung dazu siehe Fachliteratur z.B. Referenzen in Kapitel 2.3.

3.1. Multiplikation und Division der Teilgrößen

Merkregel 1: Sowohl bei der **Multiplikation** als auch bei der **Division** von zwei Teilmessgrößen f_1, f_2 errechnet sich die Unsicherheit $u(F)$ im Resultat F , aus dem geometrischen Mittel der Teilunsicherheiten $u(f_k)$ bezogen auf den jeweiligen Mittelwert $m(f_k)$.

$$F = f_1 \cdot f_2 \text{ und } F = \frac{f_1}{f_2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{u(F)}{m(F)} \right)^2 = \left(\frac{u(f_1)}{m(f_1)} \right)^2 + \left(\frac{u(f_2)}{m(f_2)} \right)^2$$

3.2. Addition und Subtraktion der Teilgrößen

Merkregel 2: Die **Addition** bzw. **Subtraktion** von Teilmessgrößen f_1, f_2 führt zur Addition der Varianzen (auch bei der Subtraktion) der Teilmessgrößen für die Gesamtunsicherheit $u(F)$ des Resultats von F .

$$F = f_1 \pm f_2 \quad \Rightarrow \quad u(F)^2 = u(f_1)^2 + u(f_2)^2$$

Rechenbeispiel 1: Widerstandsbestimmung zur Fortpflanzung der Unsicherheiten:

An einem Temperatursensor (PT1000 Platinwiderstand) wurde mit einem Amperemeter nachfolgendes Messergebnis für den Strom und mit einem Voltmeter nachfolgende Spannung ermittelt.

$$I = 90.0 \mu\text{A} \pm 0.2 \mu\text{A} \quad k=1 \quad \text{und} \quad U = 110.0 \text{mV} \pm 0.2 \text{mV} \quad k=1$$

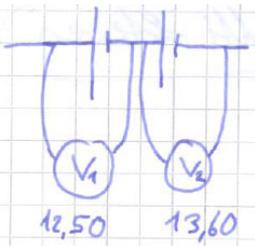
Geben Sie das vollständige Messergebnis für den daraus errechneten Widerstand an.

Lösung berechnet aus den Teilmessgrößen elekt. Strom und elekt. Spannung:

$$m(R) = \frac{m(U)}{m(I)} = \frac{110 \text{mV}}{90 \mu\text{A}} = 1222,2 \Omega$$
$$u(R) = \sqrt{\left(\frac{u(U)}{m(U)}\right)^2 + \left(\frac{u(I)}{m(I)}\right)^2} \cdot m(R) = \sqrt{(0,002)^2 + (0,0018)^2} \cdot 1222,2 \Omega$$
$$u(R) = 3,5 \Omega$$
$$\underline{\underline{(1222,2 \pm 3,5) \Omega \quad (k=1)}}$$

Rechenbeispiel 2: Summenspannung zur Fortpflanzung der Unsicherheiten:

Zwei in Serie geschaltete elektrische Batterien wurden mit zwei baugleichen Voltmetern vermessen. Als beste Schätzwerte wurden 12.50V für die erste und 13.60V für die zweite Batterie erhalten. Beide Messungen waren mit einer relativen GUM Unsicherheit von 0.2% bei $k=1$ verbunden. Geben Sie aus diesen Teilmessgrößen die resultierende Gesamtspannung mit Unsicherheit und korrekter Schreibweise nach GUM an.



relative Unsicherheit 0,2% $\Rightarrow \frac{u(V)}{m(V)} = 0,002$

$$\rightarrow u(V_1) = 0,002 \cdot m(V_1) = 0,025 \text{V}$$
$$u(V_2) = 0,002 \cdot m(V_2) = 0,0272 \text{V}$$
$$u(V) = \sqrt{(u(V_1))^2 + (u(V_2))^2} = 0,037 \text{V}$$
$$m(V) = m(V_1) + m(V_2) = 26,10 \text{V}$$
$$\rightarrow \underline{\underline{(26,10 \pm 0,04) \text{V} \quad (k=1)}}$$

Weitere Rechenbeispiele mit Lösungen im Kapitel 7

4. Entwicklung Messwesen – Hierarchien / Pyramide

Eichen ist das Messen auf Basis gesetzliche Grundlagen. (siehe Definitionen Kap. 5)

In jedem Kanton sind für bestimmte Gebiete Eichmeister ermächtigt um die Aufsicht für das „Gesetzliche Metrologie“ das regionale Eichwesen zu gewährleisten. www.metas.ch/

Die Eichmarke trägt die Angabe der zuständigen Stelle sowie das Ablaufdatum der Gültigkeit der Eichung. Die messmittelspezifischen Verordnungen legen fest, welche Verfahren für welche Messmittel anwendbar sind und regeln die Häufigkeit der Prüfung.



Abbildung 13 Das Messwesen in der Schweiz - Hierarchien der Infrastrukturen [5] Zuoberst steht in der Schweiz das METAS Eidgenössisches Institut für Metrologie.



Abbildung 14 Genügt ein Messmittel den Anforderungen, so wird die Nacheichung durch Anbringen einer Eichmarke bestätigt. www.metas.ch

Das METAS beschreibt seine Aufgaben zur Marktüberwachung so: „Die Marktüberwachung ermöglicht es in der Schweiz und auch international gegen unlautere Wettbewerbspraktiken vorzugehen. Für die Marktüberwachung auf dem Gebiet der Messmittel ist das METAS in Zusammenarbeit mit den Vollzugsorganen des gesetzlichen Messwesens zuständig. Die Marktüberwachungsbehörden prüfen, ob die in den einschlägigen Richtlinien festgehaltenen Bestimmungen von den Herstellern und Inverkehrbringern eingehalten werden. Überwacht werden nicht nur schweizerische Produkte, sondern auch Messmittel, die aus der EU oder Drittstaaten importiert werden.“

vgl. auch Firmenhinweise für Serviceleistungen im Messwesen: <https://www.esz-ag.de/service/faq-reparieren.html> oder www.calplus.de/

4.1. Gesetzliche Vorgaben Stromzähler Schweiz

Dieses Kapitel gilt als optionaler Lehrinhalt und dient nur zum Praxisbezug auf dem Gebiet der elektrischen Messtechnik.

Vgl. auch Ref [6]

<https://www.admin.ch/opc/de/classified-compilation/20142068/index.html#>

941.251

Verordnung des EJPD über Messmittel für elektrische Energie und Leistung (EMmV)

vom 26. August 2015 (Stand am 1. Oktober 2015)

Das Eidgenössische Justiz- und Polizeidepartement (EJPD),

gestützt auf die Artikel 5 Absatz 2, 8 Absatz 2, 11 Absatz 2, 16 Absatz 2, 17 Absatz 2, 24 Absatz 3 und 33 der Messmittelverordnung vom 15. Februar 2006¹ (MessMV),

verordnet:

[2. Abschnitt: Elektrizitätszähler](#)

[Art. 6 Verfahren zur Erhaltung der Messbeständigkeit](#)

¹ Zähler müssen vom Eidgenössischen Institut für Metrologie (METAS) oder von einer ermächtigten Eichstelle wie folgt nach dem Verfahren nach Anhang 7 Ziffer 1 MessMV nachgeeicht werden:

- a. Zähler mit elektronischem Messwerk: **alle 10 Jahre**;
- b. Zähler mit elektromechanischem Messwerk: alle 15 Jahre.

² Das METAS kann die Fristen nach Absatz 1 im Einzelfall verkürzen, wenn der Verdacht besteht, dass die Messbeständigkeit bereits vor Ablauf der Frist nicht mehr gegeben ist. Es kann ergänzende Prüfungen anordnen.

³ Zähler können auf Antrag der Verwenderin dem statistischen Prüfverfahren nach Anhang 4 unterzogen werden. Die dem statistischen Prüfverfahren unterstellten Zähler behalten ihre Eichgültigkeit, solange die Zähler der Stichprobe die Anforderungen nach Anhang 4 Buchstabe F einhalten. Vom statistischen Prüfverfahren ausgeschlossen sind Zähler, die bereits einmal dem statistischen Prüfverfahren unterstellt waren und anschliessend in das Prüfverfahren nach Absatz 1 überführt wurden.

[Art. 7 Genauigkeitsklassen](#)

¹ Für die Messung des Wirkenergieverbrauchs in Privathaushalten dürfen Wirkenergiezähler der Genauigkeitsklassen A, B und C verwendet werden.

² Für die Messung des Wirkenergieverbrauchs im Gewerbe oder in der Leichtindustrie dürfen nur Wirkenergiezähler der Genauigkeitsklassen B und C verwendet werden.

3 Fehlergrenzen

Tabelle 2: Fehlergrenzen in Prozent unter Nennbetriebsbedingungen und bei definiertem Laststrom und definierter Betriebstemperatur

Betriebstemperaturen												
	+5 °C bis +30 °C			-10 °C bis +5 °C oder +30 °C bis +40 °C			-25 °C bis +10 °C oder +40 °C bis +55 °C			-40 °C bis -25 °C oder +55 °C bis +70 °C		
Zählerklasse	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
Einphasenzähler; Mehrphasenzähler bei symmetrischer Last												
$I_{\min} \leq I < I_{tr}$	3,5	2	1	5	2,5	1,3	7	3,5	1,7	9	4	2
$I_{tr} \leq I < I_{\max}$	3,5	2	0,7	4,5	2,5	1	7	3,5	1,3	9	4	1,5
Mehrphasenzähler bei einphasiger Last												
$I_{tr} \leq I < I_{\max}^*$	4	2,5	1	5	3	1,3	7	4	1,7	9	4,5	2
* Ausnahme: Für elektromechanische Mehrphasenzähler ist der Bereich der Stromstärke bei einphasiger Last auf $5 I_{tr} \leq I \leq I_{\max}$ begrenzt.												

I_{\min} = Wert von I , oberhalb dessen die Abweichung innerhalb der für die Klasse spezifizierten Fehlergrenzen liegt (Mehrphasenbetrieb mit symmetrischer Last);

I_{tr} = Wert von I , oberhalb dessen die Abweichung innerhalb der niedrigsten für die Klasse spezifizierten Fehlergrenzen liegt;

I_n = Referenzwert von I , für den Messwandlerzähler ausgelegt sind;

I_{\max} = Höchstwert von I , bei dem die Abweichung innerhalb der Fehlergrenzen liegt;

**Tabelle 6: Wirkenergiezähler (Klassen C, B und A).
Prüfpunkte und Eichfehlergrenzen**

Prüfpunkt	Leistungs- faktor	Zählerart	Belastungsart bei Mehrphasenzählern	Eichfehlergrenzen \pm für die Klassen (%)		
				C	B	A
I	$\cos \varphi$			C	B	A
$0.2 I_{tr}$	1.0	alle	sym.	1.0	—	—
$0.4 I_{tr}$	1.0	alle	sym.	—	1.5	2.5
$1.0 I_{tr}$	1.0	alle	sym.	0.5	1.0	2.0
$1.0 I_{tr}$	0.5 _{ind}	mehrph.	einseitig ¹⁾	1.0	2.0	3.0
$1.0 I_{tr}$	0.8 _{kap}	alle	sym.	0.5	1.0	—
$1.0 I_{tr}$	0.5 _{kap}	alle	sym.	—	—	—
$0.5 I_{\max}$	1.0	alle	sym.	0.5	1.0	2.0
$1.0 I_{\max}$	1.0	alle	einseitig ¹⁾	1.0	2.0	3.0

¹⁾ Die Prüfung ist an allen vorhandenen Strommesskreisen vorzunehmen.

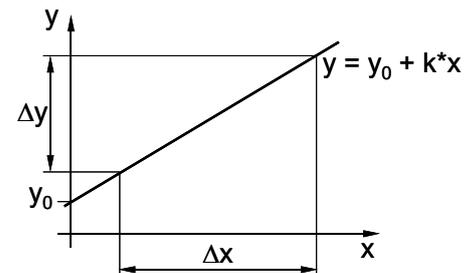
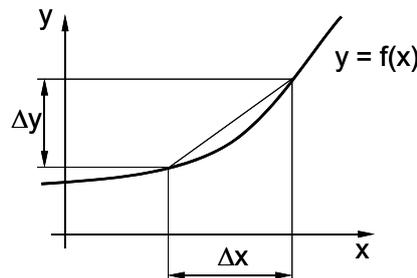
5. Begriffe – Einheiten- Definitionen

Messabweichung Verfälschung des Messergebnisses durch Unvollkommenheiten des Messobjekts, der Messgeräte und -verfahren, sowie durch Einflüsse der Umwelt, wie Temperatur, Fremdfelder u. dgl.

Messbereich: Der Messbereich gibt Auskunft über den zulässigen Einsatzbereich. In der Praxis ist der Messbereich des Sensors nach oben (und ggf. auch nach unten) immer ein paar Prozent grösser zu wählen als der zu erfassende Bereich. So können Messbereichsüberschreitungen detektiert und der Sensor vor Überlast geschützt werden. Im unteren Teil des Messbereichs können sich bei manchen Sensoren Probleme mit der Auflösung und der Linearität ergeben. Deshalb sollten Sensoren in der oberen Hälfte des Messbereichs betrieben werden.

Empfindlichkeit: Die Empfindlichkeit gibt an, wie stark die Ergebnisgrösse von der Messgrösse beeinflusst wird. Liegt ein linearer Zusammenhang vor, ist diese Empfindlichkeit im gesamten Messbereich konstant.

$$E = \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$



Garantiefehlergrenzen: Die Garantiefehlergrenzen eines Messgeräts sind die vom Hersteller garantierten (100%) maximal zulässigen Fehlergrenzen (Grenzen der Messabweichung). Die gesamte Messabweichung umfasst die systematischen und die zufälligen Messabweichungen des Messgeräts sowie die Einflüsseffekte auf das Messgerät. Sie sind auf den Messbereichsendwert bezogen und können zweiseitige (\pm) oder einseitige (+ oder -) Messabweichungen sein.

Eichen/Messen Messen, auf der Basis der gesetzlichen Vorschriften für diesen Sektor bzw. Anwendungsfall (Tankstelle, Waage, Stromzähler...)

In jedem Kanton sind für bestimmte Gebiete Eichmeister ermächtigt, um die Aufsicht für die „Gesetzliche Metrologie“ das regionale Eichwesen zu gewährleisten. www.metas.ch/

Kalibrieren Messen, bei dem nicht ein spezielles Eichgesetz für diesen Sektor bzw. Anwendungsfall zu beachten ist, wie die meisten Fälle in der industriellen Messtechnik bzw. im Gewerbe.

6. Messunsicherheit – Kalibrierung Spannung

Dieses Kapitel gilt als optionaler Lehrinhalt und dient zur Vertiefung des Praxisbezugs.

Beispiel: Der Kalibriergegenstand ist eine hochstabile Fixspannungsquelle für die Prozesstechnik. Diese liefert eine im Regelbereich von 0 V bis 10 V fest einstellbare Spannung

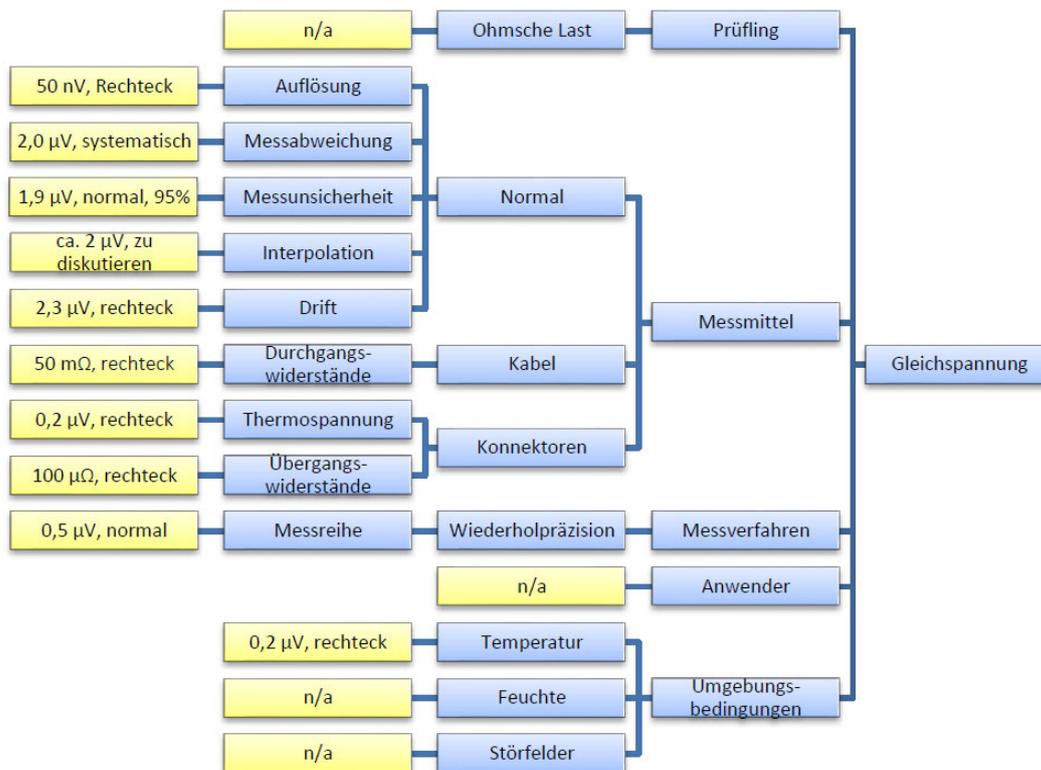


Abbildung 8.2:3: Wirkungsdiagramm zur Direktmessung der Spannung mit Darstellung von Schätzwerten zu den Einflüssen

Kalibrierung einer Gleichspannungsquelle

Varianzen	Einfluss	WDF	G	c	n	u	Gew. Anteil (u^2)
Unsicherheit der Kalibrierung	1,90 E-6 V	N	1,000	0,500	5,00 E+1	9,50 E-7 V	19 %
Linearität der Messmittelkennlinie	2,00 E-6 V	R	0,577	1,000	9,00 E+99	1,15 E-6 V	28 %
Drift	2,30 E-6 V	R	0,577	1,000	9,00 E+99	1,33 E-6 V	37 %
Anzeigenauflösung Normal	2,24 E-9 V	N	1,000	1,000	4,00 E+0	2,24 E-9 V	0 %
Übergangswiderstände	0,00 E+0 V	R	0,577	1,000	9,00 E+99	0,00 E+0 V	0 %
Wiederholpräzision	8,40 E-7 V	N	1,000	1,000	4,00 E+0	8,40 E-7 V	15 %
Thermospannung	2,00 E-7 V	R	0,577	1,000	9,00 E+99	1,15 E-7 V	0 %
Umgebungsbedingungen	2,00 E-7 V	R	0,577	1,000	9,00 E+99	1,15 E-7 V	0 %
Kovarianzen							
			Korr			u	
n/a			0,000			0,00 E+0 V	0 %
Systematische Abweichungen							
	Einfluss	WDF	G	c	n	u	
Messabweichung	2,00 E-6 V	S	1,000	0,000	5,00 E+1	0,00 E+0 V	0 %
Bestimmung der erweiterten Messunsicherheit					n	u	
Messunsicherheit (u) mit systematische Anteile (unkorrigiert)					159	2,18 E-6 V	100 %
Erweiterungsfaktor k, gem. Studententabelle für 95%				2,00			
Erw. Messunsicherheit ($U_{0,95}$) mit systematischen Anteilen					159	4,35 E-6 V	

Tabelle 8.2:3: Messunsicherheitsbilanz Direktmessung der Spannung mit Korrektur systematischer Abweichungen

Obige Inhalte stammen aus Unterlagen von B. Pesch nach Referenz [2]

7. Rechenbeispiele zur GUM Analyse

7.1.1) Messunsicherheit der Leistungsmessung

Die Ablesung eines Wattmeters hat nachfolgende 5 Messwerte in Watt erbracht: 101.0, 102.0, 103.0, 104.0, 105.0.

Das Messgerät hat Klasse 1 mit Messbereich 200W. (Hinweis: t-Vertrauensfaktor=1.14)

- a) Berechnen Sie die resultierende Messunsicherheit Typ A nach GUM
- b) Geben Sie das vollständige Messergebnis für (k = 1) mit korrekter Schreibweise an.

a)	Mittelwert=	103.0 W	101	102	103
	Standardabweichung=	1.58 W			
	Standardabweichung Mittelwert=	0.71 W			
	1.14 t-Wert	Typ A=	0.81 W		
b)	Wattmeter Klasse		1.0% v.MB		200 Watt, Messbereich
	2 Ohm	Typ B=	1.2 W		
		ures=	1.41 W		
		vollständiges Ergebnis	103.0 +/-		1.4 in Watt (k=1)

7.1.2) Widerstandsmessung mit einem DMM als Ohmmeter

Das Ablesen eines DMM hat folgende Messwerte in Ω im 120 Ω -Bereich erbracht: 10.013, 10.002, 9.998, 10.001, 9.986. Die Messung erfolgte als 4-Leiter-Schaltung. Angaben zum DMM, Auflösung: 1 m Ω ; Garantieabweichung $\pm(0.05\%$ v. MW + 8 dgt);

- a) Berechnen Sie die Messunsicherheit Typ A nach GUM
- b) Geben Sie das vollständige Messergebnis für (k = 1) mit korrekter Schreibweise an.

Lösung:

- a) mit $t_{68}(5) = 1.14$; $R = 10.000 \Omega$, Standardabweichung(R) = 9.670 m Ω , $u_A(R) = 4.930 \text{ m}\Omega$
- b) $u_B(R) = 5.45 \text{ m}\Omega$, $u_C(R) = 7.346 \text{ m}\Omega$, $R = 10.000 \Omega \pm 0.008 \Omega$ (k = 1)

7.1.3) Messunsicherheit eines Digitalmultimeters DMM

Ein digitales Amperemeter zeigt am Display den Wert 0.900 A an im Messbereich von 2 A. (Herstellerangaben nach Gerätedatenblatt: 0.1% v. MW., 0.05% v. EW.). Berechnen Sie die Typ B Messunsicherheit (k=1) mit korrekter Schreibweise (achten Sie auch auf die relevanten Stellen)

Empfindlichkeit		0.10%	vom Messwert m unten	
m=		0.900 A		
aE=		0.001		
Nullpunkt:		0.05%	vom Endv	2 A
aN=		0.0010 A		
ub=wurzel(aN^2+aE^2)/3=		0.0008 A		
Ergebnis	(+/-	0.001)A mit k=1

7.1.4) Auswahlkriterien für DMM

Eine Spannung von ca. 10 V soll auf $\pm 0.6\%$ genau mit einem Vertrauensbereich von 95.5% gemessen werden.

- a) Die Unsicherheit vom Typ A wird zu Beginn vernachlässigt. Wie gross darf dann die Typ B Unsicherheit für (k=1) sowie die Garantieabweichung des Voltmeters in Volt maximal sein?
- b) Wie gross wäre die resultierende Unsicherheit, wenn eine Typ A Unsicherheit von der gleichen Grösse wie jene vom Typ B zusätzlich auch auftritt. (2 P)

Lösung:

- a) 60mV für k=2 daraus folgt 30mV für k=1; Garantieabweichung Faktor Wurzel(3) grösser 52mV
- b) Faktor Wurzel(2) grösser da zweimal gleiche Beiträge 43mV (k=1) und 85mV (k=2) oder 0.85%

7.1.4) Strommessung mit einem DMM

Mit einem DMM in Serie zu einem Widerstand R wurden kurz hintereinander die beiden Stromwerte 12.524 mA und 12.516 mA von der digitalen Anzeige abgelesen. DMM-Datenblatt wie folgt

Tabelle 6-1 DC-Auflösung, Full-Scale-Messwert und Genauigkeit [\pm (% des Messwerts + Zahl des niedrigstwertigen Bit)] (Fortsetzung)

Funktion	Rate	Bereich	Auflösung	Maximum Messwert	Genauigkeit (Ein Jahr; 23°C ± 5°C)	Typische Eingangsimpedanz ^[1]	Lastspannung ^[4]
Langsam		12,0000 mA	0,0001 mA	11,9999	0,05% + 15 ^[2]	—	< 0,15 V
		120,000 mA	0,001 mA	119,999	0,05% + 5		< 1,5 V
		1200,00 mA	0,01 mA	1199,99	0,2% + 5		< 0,3 V
		12,0000 A	0,0001 A	11,9999	0,2% + 5		< 0,6 V
Stromstärke	Medium	40,000 mA	0,001 mA	39,999	0,1% + 6	—	< 0,5 V
		120,00 mA	0,01 mA	119,99	0,1% + 3		< 1,5 V
		1200,0 mA	0,1 mA	1199,9	0,2% + 3		< 0,3 V
		12,000 A	0,001 A	11,999	0,2% + 3		< 0,6 V

a) Berechnen Sie die Messunsicherheit Typ A nach GUM für diese zwei Anzeigewerte (2 P)

$$m_I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 I_i = 12,520 \text{ mA}$$

$$s_I = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (I_i - m_I)^2} = 5,6569 \cdot 10^{-3} \text{ mA}$$

mit $t = 1.84$ folgt $u_A(I) = t_{68}(1) \frac{s_I}{\sqrt{2}} = 7,440 \cdot 10^{-3} \text{ mA}$

b) Berechnen Sie dafür die Messunsicherheit Typ B nach GUM. (Datenblatt: Rate/ Medium) (2 P)

$$u_B(I) = \sqrt{\frac{(0.1\% \cdot 12,520 \text{ mA})^2 + (6 \cdot 0,001 \text{ mA})^2}{3}} = 0,0080 \text{ mA}$$

c) Geben Sie das vollständige Messergebnis für ($k = 1$) mit korrekter Schreibweise an. (2 P)

$$u_C(I) = \sqrt{u_A(I)^2 + u_B(I)^2} = 0,0109 \text{ mA}$$

$$I = 12,520 \text{ mA} \pm 0,011 \text{ mA} \quad (k=1)$$

d) Welche Ursache hat der Spannungsabfall an einem typischen DMM bei der Strommessung? (1 P)

Spannungsabfall am internen Shunt Widerstand im Amperemeter

e) Wie klein darf der Widerstand sein, der an den äusseren Anschlüssen des DMM wie oben beschrieben geschaltet ist, damit der Spannungsabfall am DMM (siehe Datenblatt) kleiner als 1‰ (Promille) vom Spannungsabfall am externen Widerstand ist? (1P)

$$R_{DMM} < \frac{0,5 \text{ V}}{0,04 \text{ A}} = 12,5 \Omega \quad (\text{gemäss Datenblatt})$$

$$R > \frac{U_R}{I} = \frac{1000 \cdot U_{DMM}}{I} = 1000 \cdot R_{DMM} = 12,5 \text{ k}\Omega$$

7.1.5) Spannungsmessung mit einem DMM

Mit einem DMM wurden kurz hintereinander die folgenden Anzeigewerte erhalten (Student t-Faktor 1.32)

1	90.0100 mV
2	90.0000 mV
3	89.9950 mV

Das verwendete Voltmeter ist vor einem Monat produziert worden und der Hersteller garantiert die folgenden Spezifikationen:

Genauigkeitsspezifikationen \pm (% des Messwerts + % des Bereichs)¹

Funktion	Bereich ³	Frequenz, etc.	24 Stunden ² 23°C \pm 1°C	90 Tage 23°C \pm 5°C
DC-Spannung	100,0000 mV		0,0030 + 0,0030	0,0040 + 0,0035
	1,000000 V		0,0020 + 0,0006	0,0030 + 0,0007
	10,00000 V		0,0015 + 0,0004	0,0020 + 0,0005
	100,0000 V		0,0020 + 0,0006	0,0035 + 0,0006

a) Berechnen Sie die Messunsicherheit Typ A nach GUM für die Messung mit obigen Anzeigewerten.

$$mU = \underline{90,0017_{mV}}$$

mit der Korrektur berücksichtigen:

$$s_u = \left(\frac{1}{2} \cdot (0,0085^2 + 0,0016^2 + 0,0066^2) \right)^{\frac{1}{2}} = 0,0076_{mV} \quad (1)$$

$$u_{A_u} = s \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{0,0058_{mV}}$$

b) Berechnen Sie dafür die Messunsicherheit Typ B nach GUM.

$$a_0 = 0.004 \quad a_e = 0.00360 \quad u_0 = 0.00202 \quad u_e = 0.00208$$

$$\text{WURZEL}((G16^2 + J16^2)/3)$$

$$u_B = \underline{0.00290 \text{ mV richtig!}}$$

Mit der Nullpunktabweichung nach Datenblatt a_0 und Empfindlichkeitsabweichung a_e

c) Geben Sie das vollständige Messergebnis für 95%-ige Wahrscheinlichkeit korrekt an.

aus geometrischen Mittel aus u_A und u_B folgt $u_C = 0.00650 \text{ mV}$ bei $k=1$

$$\underline{(90.0017 \pm 0.0130) \text{ mV } (k=2)}$$

e) Wie hoch muss die Anzahl Bit, des verwendeten A/D Wandlers mindestens sein, um die Auflösung wie oben im Datenblatt des Digital-Multimeter angegeben, zu erreichen?

$$\text{Auflösung } 100\text{mV auf } 0.0001\text{mV } \text{Bit} = (\ln(100/0.0001))/\ln 2 = 20 \text{ bit}$$

Rechenbeispiele zur Fortpflanzung der Unsicherheiten

7.2.1) Widerstandsmessung mit zwei U/I Digitalmultimeter

Der Widerstand eines relativ hochohmigen Objekts wird durch gleichzeitiges Messen von Spannung und Stromstärke mit zwei DMM ermittelt. Die Mittelwerte der Ablesewerte betragen $U = 34.205 \text{ V}$ und $I = 0.0425 \text{ mA}$. Die Typ A Unsicherheit ist zu vernachlässigen. Angaben zum DMM:

DC Spannungsmessbereich: 120 V; Auflösung: 0.001 V;

Genauigkeit: $\pm(0.012\% \text{ v. Messwert} + 5 \text{ dgt})$; Innenwiderstand: 10.1 M Ω

DC Strommessbereich: 12 mA; Auflösung: 0.0001 mA;

Genauigkeit: $\pm(0.05\% \text{ v. Messwert} + 15 \text{ dgt})$; Widerstand (0.15 V bei 12mA)

- Skizzieren Sie das Messschema und berechnen Sie den Spannungsabfall am Amperemeter
- Geben Sie das resultierende Messergebnis für ($k = 1$) für den Widerstand an (Schreibweise)
- Geben Sie das Messergebnis für ein Vertrauensniveau 95% an, mit korrekterer Schreibweise (1 P)

Lösung:

- stromrichtige Widerstandsschaltung;
absolut: $\Delta R = 0.15 \text{ V}/12 \text{ mA} = 12.5 \text{ } \Omega$ Abfall an diesem Shunt: 0.531mV
- $R = 805 \text{ k}\Omega$ (804.82 k Ω auf 3 signifikante Stellen runden, wegen Stromstärke)
 $u(U) = 34.205 \text{ V} \pm 0.004 \text{ V}$ ($k = 1$) und $u(I) = 0.0425 \text{ mA} \pm 0.0009 \text{ mA}$ ($k = 1$)
geometrisches Mittel der relativen Unsicherheiten: $u_c(R) = 16.40 \text{ k}\Omega$ ($k = 1$)
- $R = 805 \text{ k}\Omega \pm 32 \text{ k}\Omega$ ($k = 1.96$)

7.2.2) Fortpflanzung bei U/I Messung für Widerstand und Leistung an R

An einem elektrischen Widerstand lieferte die Strommessung nachfolgendes Messergebnis: $I = (2.000 \pm 0.002) \text{ A}$ mit $k=1$. Die Spannung am Widerstand wurde mit $(9.000 \pm 0.003) \text{ V}$ mit $k=1$ bestimmt. Berechnen Sie aus diesen Teilmessungen den Widerstandswert und die Leistung mit den zugehörigen Unsicherheitsangaben. Geben Sie die resultierende Messunsicherheit in Ohm für ein Vertrauensniveau von 95,5% an. (achten Sie auf die relevanten Stellen bei der Schreibweise des Ergebnisses)

Mittelwert Widerstand	$m R =$		4.500	Ohm
Mittelwert Leistung	$m P =$		18.000	W
relative Unsicherheiten U	$u U/m U =$		0.00033	
relative Unsicherheiten I	$u I/m I =$		0.001	
relative Unsicherheiten R und P	$((u U/m U)^2 + (u I/m I)^2)^{0.5} =$		0.00105	
Unsicherheit Widerstand		$k=1$	0.005	Ohm
Unsicherheit Leistung		$k=1$	0.019	W
Unsicherheit Widerstand		$k=2$	0.009	Ohm
Unsicherheit Leistung		$k=2$	0.038	W

Messresultate:

Widerstand $(4.500 \pm 0.005) \Omega$ mit 95% Überdeckungswahrscheinlichkeit

Leistung $(18.000 \pm 0.038) \text{ W}$ mit 95% Überdeckungswahrscheinlichkeit

7.2.3) Fortpflanzung – Serieschaltung Spannung

Drei elektrische Widerstände sind in Serie geschaltet. Den einzelnen Teilspannungen zeigen jeweils konstante Anzeigewerte ohne Schwankungen mit 1V, 2V und 20V. Die baugleichen DMM (siehe nachfolgendes Datenblatt) werden für die jeweilige Teilspannung im optimalen Messbereich betrieben. (Rate wird mit „Langsam“ gewählt).

Tabelle 6-1 DC-Auflösung, Full-Scale-Messwert und Genauigkeit [\pm (% des Messwerts + Zahl des niedrigstwertigen Bit)]

Funktion	Rate	Bereich	Auflösung	Maximum Messwert	Genauigkeit (Ein Jahr; 23°C \pm 5°C)	Typische Eingangsimpedanz ^[1]
Langsam		120,000 mV	0,001 mV	119,999	$\pm 0,012\% + 8$ ^[2]	10,0 M Ω
		1,20000 V	0,00001 V	1,19999	$\pm 0,012\% + 5$	10,0 M Ω
		12,0000 V	0,0001 V	11,9999	$\pm 0,012\% + 5$	11,1 M Ω
		120,000 V	0,001 V	119,999	$\pm 0,012\% + 5$	10,1 M Ω
		1000,00 V	0,01 V	1000,00 ^[3]	$\pm 0,012\% + 5$	10,0 M Ω

Geben Sie das resultierende Messresultat der Gesamtspannung als Summe der drei Teilspannungen an für $k=2$ in idealer Schreibweise. (6P)

$$u = \sqrt{(ae^2 + an^2)/3} =$$

$$ae = 0.00012 \cdot 1V = 0.12mV; an = 0.05mV$$

$$ae = 0.00012 \cdot 2V = 0.24mV; an = 0.5mV$$

$$ae = 0.00012 \cdot 20V = 2.4mV; an = 5mV$$

$$ures = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} =$$

u1 /mV=	0.075	(1.5 P)
u2 /mV=	0.320	(1.5 P)
u3 /mV=	3.202	(1.5 P)
ug/mV=	3.219	(0.5 P)
ug(k=2)/mV=	6.438	(0.5 P)
Ures= (23.000	+/-	0.006) V (k=2) (0.5 P)

7.2.4) Fortpflanzung – Parallelschaltung von Widerständen

Zwei elektrische Widerstände wurden mit folgendem Ergebnis jeweils mit ($k = 1$) bestimmt: $R_1 = 100 \Omega \pm 2 \Omega$ und $R_2 = 150 \Omega \pm 3 \Omega$.

- Bestimmen Sie die Leitwerte G_1 und G_2 der Widerstände mit ihrer Messunsicherheit und geben Sie das Ergebnis korrekt für den Vertrauensbereich 68% an.
- Geben Sie den resultierenden Widerstandswert $R = 1/G$ der Parallelschaltung dieser beiden Widerstände mit Messunsicherheit nach GUM an (95% Vertrauensbereich)

Lösung:

$$a) \frac{u(G_1)}{G_1} = \frac{u(R_1)}{R_1} \text{ es gilt, die relativen Unsicherheiten von R und G sind identisch}$$

Hinweis zu Beweis der nicht gefragt war: Hier mit partielle Ableitung der Funktion $1/R$ folgt

$$\Delta G = \left| \frac{d(1/R)}{dR} \right| \Delta R = \frac{1}{R^2} \Delta R = G \frac{\Delta R}{R}$$

$$G_2 = 10,0 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \pm 0,2 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \quad G_2 = 6,66 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \pm 0,13 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \text{ je } k=1$$

$$b) u(G) = \sqrt{u(G_1)^2 + u(G_2)^2} = \boxed{0.240} \Omega^{-1} \text{ entspricht für } k=1 \text{ mit } 0.24/16.66 \text{ etwa } \boxed{1.44\%}$$

$$G = (16.66 \pm 0.48) \text{ mS } (k=2)$$

Mit anderem (komplizierteren) Rechenweg mit $R = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$ und partieller Ableitung folgt

$$u(R) = \sqrt{\left[\frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} u(R_1) \right]^2 + \left[\frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} u(R_2) \right]^2} = \boxed{1.44\%} \cdot R = 0.864 \Omega \quad (k=1)$$

$$\frac{u(R)}{R} = R \cdot \sqrt{\left[\frac{u(R_1)}{R_1^2} \right]^2 + \left[\frac{u(R_2)}{R_2^2} \right]^2} = 1.44\% \quad \text{für 95\% folgt } (60.00 \pm 1.73) \Omega \quad (k=2)$$

7.2.5) Fortpflanzung – Parallelschaltung Fortpflanzung – Gesamtstrom in einem Knoten

Mit drei Amperemetern werden alle in einen Knoten zufließenden Ströme gemessen. Die Messergebnisse dieser Teilmessungen lauten für jeweils $k=1$, $I_1=(1.900\pm 0.011)A$; $I_2=(2.100\pm 0.020)A$; $I_3=(6.600\pm 0.031)A$. Es werden jeweils baugleichen DMM (siehe Datenblatt unten) für die jeweilige Teilströme im Messbereich 12A betrieben. (Messrate wird „Langsam“ gewählt. Geben Sie das resultierende Messresultat des Gesamtstroms der zum Knoten fließt an, mit der resultierenden Unsicherheit.

Datenblatt Messgerät-Garantieabweichung

Tabelle 6-1 DC-Auflösung, Full-Scale-Messwert und Genauigkeit [\pm (% des Messwerts + Zahl des niedrigstwertigen Bit)] (Fortsetzung)

Funktion	Rate	Bereich	Auflösung	Maximum Messwert	Genauigkeit (Ein Jahr; 23°C \pm 5°C)	Typische Eingangsimpedanz ^[1]	Lastspannung ^[4]
Stromstärke	Langsam	12,0000 mA	0,0001 mA	11,9999	0,05% + 15 ^[2]	—	< 0,15 V
		120,000 mA	0,001 mA	119,999	0,05% + 5	—	< 1,5 V
		1200,00 mA	0,01 mA	1199,99	0,2% + 5	—	< 0,3 V
		12,0000 A	0,0001 A	11,9999	0,2% + 5	—	< 0,6 V
	Medium	40,000 mA	0,001 mA	39,999	0,1% + 6	—	< 0,5 V
		120,00 mA	0,01 mA	119,99	0,1% + 3	—	< 1,5 V
		1200,0 mA	0,1 mA	1199,9	0,2% + 3	—	< 0,3 V
		12,000 A	0,001 A	11,999	0,2% + 3	—	< 0,6 V
	Schnell	40,00 mA	0,01 mA	39,99	0,1% + 2	—	< 0,5 V
		120,0 mA	0,1 mA	119,9	0,1% + 2	—	< 1,5 V
		1200 mA	1 mA	1199	0,2% + 2	—	< 0,3 V
		12,00 A	0,01 A	11,99	0,2% + 2	—	< 0,6 V

Lösung

$$I_{res} = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_{res} = 10.6 A$$

$$u_{res} = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2} \approx \pm 0.0385 A \quad \checkmark$$

$$\underline{10.600 A \pm 0.038 A \quad \checkmark \quad (k=1)}$$

Optionale Rechenbeispiele

7.3.1) Widerstandsmessung am Temperatursensor PT100 mit Shunt

Die mittlere Spannung über einem PT100 beträgt $U_{PT} = 97.23 \text{ mV}$. In Serie zum PT100 liegt ein Messwiderstand $R_1 = 1000 \Omega$ (1 ± 0.001) mit $k=1$ über dem die Spannung $U = 0.9028 \text{ V} \pm 0.0012 \text{ V}$ mit $k=1$ gemessen wird. Die Spannung über dem Messwiderstand R_1 dient dazu die Stromstärke im PT100 zu bestimmen. Für den PT100 soll im Bereich 0°C (mit 100Ω) bis 100°C (mit 138.5Ω) die lineare Approximation zur Temperaturbestimmung verwendet werden.

Zur Ermittlung der erlaubten Grenze der Garantieabweichung des PT100 soll gelten:

$$\text{Toleranzklasse B mit: } \pm \left(0,12\Omega + 0,0018 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \cdot |\vartheta| \right)$$

a) Bestimmen Sie den mittleren Widerstandswert R_{PT} des PT100 und geben Sie seine Messunsicherheit in Ohm an, in der vorläufigen Annahme, dass die Messung von U_{PT} exakt ist. (u_C Voltmeter = 0)

$$R_{PT} = \frac{U_{PT}}{I} = \frac{U_{PT}}{U} R = 107,70 \Omega$$

$$u_C(R_{PT}) = R_{PT} \sqrt{\left(\frac{u_C(U_{PT})}{U_{PT}}\right)^2 + \left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(\frac{u(U)}{U}\right)^2} =$$

$$= 107,70 \Omega \sqrt{0 + 0,001^2 + 0,001329^2} = 0,179 \Omega \quad \text{oder } u(I) = 0.0015 \text{ mA}$$

b) Bestimmen Sie die benötigte Messunsicherheit ($k=1$) für die Spannung U_{PT} in mV, wenn der Widerstandswert R_{PT} auf 2 ‰ (Promille) bei $k=1$ genau bestimmt werden soll.

$$u_C(U_{PT}) = U_{PT} \sqrt{\left(\frac{u_C(R_{PT})}{R_{PT}}\right)^2 - \left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 - \left(\frac{u(U)}{U}\right)^2} =$$

$$= 97,23 \text{ mV} \sqrt{0,002^2 - 0,001^2 - 0,001329^2} = 0,108 \text{ mV}$$

c) Welche Unsicherheit weist die Temperatur infolge der Toleranzklasse des PT100 auf? (Sensitivität PT 100 $\alpha_0 R_0 = 0.385 \Omega/^\circ\text{C}$; Formel Garantieabweichung Temp. einsetzen)

$$\vartheta = \frac{R_{PT} - R_0}{\alpha_0 R_0} = 20,00^\circ\text{C}$$

$$u_B(R_{PT}) = U_{PT} \sqrt{\frac{(0,12\Omega)^2 + (0,0018\Omega/^\circ\text{C} \cdot \vartheta)^2}{3}} = 0,0723\Omega$$

d) Geben Sie den Temperaturwert mit seiner Messunsicherheit für den 95.45%-Vertrauensbereich korrekt an. Dabei wird angenommen, dass R_{PT} auf 2‰ genau bestimmt wurde.

$$u_C(R_{PT}) = 0,002 \cdot R_{PT} = 0,2154 \Omega$$

$$u(R_{PT}) = \sqrt{u_B(R_{PT})^2 + u_C(R_{PT})^2} = 0,2272 \Omega$$

$$u(\vartheta) = \left| \frac{d\vartheta}{dR_{PT}} \right| u(R_{PT}) = 0,590 \Omega$$

$$\vartheta = 20,0^\circ\text{C} \pm 1,2^\circ\text{C} \quad (k=2)$$