# Errata zu "Numerische Mathematik" von Michael Knorrenschild

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag 2005 (2. Aufl.),
ISBN 3-446-40440-6

Die Änderungen sind rot hervorgehoben. Dank an Johannes Jaeschke, Prof. Dr. Helmut Paster (München), Theodor Lorch (München), Kristina Bretschneider, Thomas Kisel, Tim Guske, Eva Rieger (alle Stuttgart), Tobias Heilmannseder (München), Sebastian Kraatz (Wilhelmshaven), Peter Proske (Augsburg), Marc Finkenzeller (Offenburg), Dr. Karl-Heinz Brakhage (Aachen), Prof. Dr. Stefan Glasauer (Augsburg), Dr. Nadine Conza (Windisch), Anton Feist (Bielefeld), Christian Frei (Basel), Andreas Zeh-Marschke (Eggenstein-Leopoldshafen) und León Kreutz (Bochum) für Beiträge zu dieser Liste.

---

S. 17 update 22.07.2019

$$\frac{x\,y - \tilde{x}\,\tilde{y}}{x\,y} = \frac{x-\tilde{x}}{x} + \frac{y-\tilde{y}}{y} - \frac{x-\tilde{x}}{x} \cdot \frac{y-\tilde{y}}{y}.$$

---

S. 28

| $n$ | $x_n$ | $x_n$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| 1 | $-0.7$ | 0.3 | 1.3 |
| 2 | $-0.043$ | 0.327 | 2.497 |

---

S. 31

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0| = \frac{0.75^n}{1-0.75} 0.3 = 1.2 \cdot 0.75^n \overset{!}{\le} 10^{-4} \iff n \ge 32.6\ldots$$

---

S. 32

Siehe Bild 2.2. Das geht natürlich nur, wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist, d. h. wenn die Tangente nicht parallel zur $x$-Achse liegt. Die Stelle $x_1$ sollte dann eine bessere

---

S. 36 neu 05.09.2020

**Aufgaben**

[...]

**2.6** Das Bauer-Ziege-Wiese-Problem: [...]
abgrasen kann (s. Bild 2.5). Wie groß ist $r$?

S. 43

**3.5**

$$A_2\,x = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -4 & -10 & 0 \\ 12 & 34 & 9 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 25 \\ -24 \\ 107 \end{pmatrix} \text{ bzw.} = \begin{pmatrix} 5 \\ -22 \\ 42 \end{pmatrix}$$

S. 43

**3.5** [...]

$$A_4\,x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -10 & 12 & 17 \\ 14 & -20 & -14 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -44 \end{pmatrix} \text{ bzw.} = \begin{pmatrix} 30 \\ -125 \\ 100 \end{pmatrix}$$

S. 45

**Beispiel 3.6**

Das System $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -10^{-4} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[...]

*Lösung*: Ohne Pivotisierung erhält man bei 4-stelliger Rechnung

$$(\,A \mid b) = \begin{pmatrix} -10^{-4} & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2 := z_2 + 20000\, z_1} \begin{pmatrix} -10^{-4} & 1 & | & 1 \\ 0 & 20000 & | & 20000 \end{pmatrix}.$$

[...]

$$\begin{pmatrix} -10^{-4} & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 \longleftrightarrow z_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ -10^{-4} & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2 := z_2 + 5\cdot 10^{-5} z_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

S. 46:

Die exakte Lösung ist $x = (-0.499975\ldots, 0.99995\ldots)^{\mathrm{T}}$, d. h. das mit
[...]
$\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$.

[...] letzte Zeile:

$$L_4 := L_3\,L_2\,L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \blacksquare$$

S. 47

*Lösung*: Wir haben in Beispiel 3.7 $R$ schon ausgerechnet. Aus $L_4\,A = R$ erhalten wir sofort $A = L_4^{-1}\,R$, wobei $L_4^{-1} = L_1^{-1}\,L_2^{-1}\,L_3^{-1}$. Dabei lassen sich die Matrizen $\boldsymbol{L}_i^{-1}$, $i = 1, 2, 3$ ganz einfach durch Wechseln der Vorzeichen der Unterdiagonalelemente von $\boldsymbol{L}_i$ berechnen. Insbesondere ist auch $\boldsymbol{L}_4^{-1}$ wieder eine links-untere Dreiecksmatrix. Mit $\boldsymbol{L} := \boldsymbol{L}_4^{-1}$ erhalten wir insgesamt:

---

S. 53

Die $\infty$-Norm von $\boldsymbol{A}$ ist also die maximale zeilenweise Summe der Absolutbeträge der Elemente („Zeilensummennorm“) und die 1-Norm von $\boldsymbol{A}$ ist

---

S. 55

**Beispiel 3.12**

[. . .]

*Lösung*: [. . .]

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 12.1,\ \operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) = 732.05,\ \|\boldsymbol{b}\|_\infty = 1.5,\ \|\boldsymbol{\Delta b}\| \leq 0.1$$

[. . .] also $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\dfrac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} = 0.363 < 1$, [...]

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{732.05}{1 - 0.363}\left(\frac{0.006}{12.1} + \frac{0.1}{1.5}\right) \leq 77.2.$$

[. . .]

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 2.003 & 4.003 \\ 3.997 & 8.097 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$

---

S. 58

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{x}^{(i)}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1.25 \\ 2.2 \\ 2.4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1.2 \\ 2.22 \\ 3.03 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1.0475 \\ 2.074 \\ 3.048 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1.0065 \\ 2.0094 \\ 3.0201 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.997325 \\ 1.99858 \\ 3.00246 \end{pmatrix}$ |

---

S. 59, unten:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(n+1)} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(n)} + \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

---

S. 61

[. . .] das sog. *Zeilensummenkriterium*. Matrizen, die diese Bedingung erfüllen, nennt man auch *diagonaldominant*.
Für die 1-Norm erhalten wir analog:

$$\|\boldsymbol{B}\|_1 = \|\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R})\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \qquad \blacksquare$$

Hinreichend für die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens ist auch das *Spaltensummenkriterium*:

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}|, \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n.$$

Einen Nachweis findet man z. B. in [21].

S. 62

Der wirkliche Fehler von $\boldsymbol{x}^{(5)}$ ist:

$$\| \boldsymbol{x}^{(5)} - \bar{\boldsymbol{x}} \|_\infty = \max \{ 0.002675, 0.00142, 0.00246 \} = 0.002675,$$

und ist damit etwa 10mal kleiner als unsere Abschätzung suggeriert.

---

S. 69 neu 08.05.2014

$$\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(0)})\, \boldsymbol{\delta}^{(1)} = \boldsymbol{Df}(4,2)\, \boldsymbol{\delta}^{(1)} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(1)}) = -\boldsymbol{f}(-2.909, 1.455)$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 96 \end{pmatrix} \boldsymbol{\delta}^{(1)} = -\begin{pmatrix} 0.00 \\ -12.98 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\delta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.2951 \\ -0.1475 \end{pmatrix}$$

---

S. 71

**Satz: Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms**

Gegeben sind $n+1$ Wertepaare $(x_i, f_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Dann gibt es genau

---

S. 76

**Algorithmus: Das Neville-Aitken-Schema**

[...]
für $k = 1, \ldots, n$:
　　für $i = 0, \ldots, n-k$:
[...]

S. 77

| $x_i$ | $f_i = p_{i0}(1.5)$ | $p_{i1}(1.5)$ | $p_{i2}(1.5)$ | $p_{i3}(1.5)$ |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 5 | | | |
| | | $-12.5 = p_{01}(1.5)$ | | |
| 0 | -2 | | $21.25 = p_{02}(1.5)$ | |
| | | $14.5 = p_{11}(1.5)$ | | $8.125 = p_{03}(1.5)$ |
| 1 | 9 | | $5.5 = p_{12}(1.5)$ | |
| | | $2.5 = p_{21}(1.5)$ | | |
| 2 | -4 | | | ■ |

---

S. 80

**Beispiel 5.8**

[...]

*Lösung*: Wir erhalten $p(x) = -0.01\, x^6 + 0.15\, x^4 - 0.64\, x^2 + 1 \ldots$

---

S. 84

**Satz: Berechnung der Momente**

...

- für den periodischen Spline: $M_0 = M_n$ und

  ...

  wobei $x_{n+1} := x_n + x_1 - x_0,\ f_{n+1} = f_1, \ldots$

---

S. 89, 2. Zeile

... und $D_1 = 0.25,\ D_2 = 1,\ D_3 = 0.25$.

...

$$s(x) = \begin{cases} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{81}{4\,\pi^3}x^3 - \dfrac{189}{4\,\pi^2}x^2 + \dfrac{135}{4\,\pi}x - \dfrac{27}{4} & x \in [\dfrac{2\pi}{3}, \pi] \end{cases}$$

S. 100

### Definition

Gegeben ist eine Funktion $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und das zugehörige Fehlerfunktional $E : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $E(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|_2^2$.
Das Problem einen Vektor $\boldsymbol{x}$ zu finden, für den $E(\boldsymbol{x})$ minimal wird, nennt man **Quadratmittelproblem**.

---

S. 108

Zur Herleitung einer genaueren Differenzenformel lesen wir die Taylorformel (7.1) mit $x = x_0 \pm h$ und $n = 2$ und erhalten:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2}\,h^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}\,h^3 + \frac{f^{(4)}(z_1)}{24}\,h^4$$

---

S. 115

Zu beobachten sind die gleichen Phänomene wie in Beispiel 7.5: Abnehmender Fehler von oben nach unten und links nach rechts im Dreiecksschema.

---

S. 151, 3. Zeile

**8.4** [. . . ]
der Differenzialgleichung berechnet wird, wenn die Bedingung $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$

---

S. 153:

**1.5** Das gibt $2^5 - 1$ verschiedene Exponenten (da die Null doppelt gezählt wurde). Insgesamt gibt es also $2^{20} \cdot (2^5 - 1) = 32505856$ Möglichkeiten. Da wir aber die Zahl 0 noch nicht erfasst haben, sind es insgesamt 32505857 Maschinenzahlen.
Die kleinste positive Maschinenzahl ist dabei $0.1 \cdot 2^{-1111} = 2^{-16}$
$\approx 1.53 \cdot 10^{-5}$, die größte ist $0.11111111111111111111 \cdot 2^{1111}$
$= (1 - 2^{-20}) \cdot 2^{15} = 2^{15} - 2^{-5} = 32767.96875$.

---

S. 161

**3.10**

$$\boldsymbol{R}_5 = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

---

S. 164

**5.6** ...

$$s_2(x) = \begin{cases} -x^3 + 12\,x^2 - 6\,x + 5 & x \in [0,1] \\ -9\,x^3 + 36\,x^2 - 30\,x + 13 & x \in [1,2] \\ 5\,x^3 - 48\,x^2 + 138\,x - 99 & x \in [2,4] \end{cases}$$

---

S. 165/166 update 30.10.2011

**7.2** Diskretisierungsfehler von $D_2 f(x_0, h) \approx \frac{1}{6} \cdot |f'''(x_0)|\, h^2$ s. (7.4)
Gleichsetzen ergibt:

$$10^{-n} \cdot |f(x_0)| \cdot \frac{1}{2\,h} \approx \frac{1}{6} \cdot |f'''(x_0)|\, h^2.$$

Umstellen nach $h$ führt auf:

$$h \approx \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-n} \frac{|f(x_0)|}{|f'''(x_0)|}}.$$

Angewandt auf Aufgabe 7.1 erhält man: $h \approx \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-10} \cdot \tan 1} \approx 7.8 \cdot 10^{-4}$,

---

S. 170

$$\begin{aligned} y_N &= y_{N-1} + \frac{h}{2}\,(f(t_{N-1}) + f(t_N)) \\ &= y_{N-2} + \frac{h}{2}\,(f(t_{N-2}) + 2\,f(t_{N-1}) + f(t_N)) \end{aligned}$$