Verfolgungsprobleme

Hundekurven, Käferproblem und Schielwinkelkurve

Caroline Amsüss, Melek Aras, Katharina Grand, Magdalena Schneider

27.Juni 2013

Verfolgungsproblem

- ein verfolgendes Objekt stellt nach einer bestimmten Strategie einem Zielobjekt nach, das sich auf einer gegebenen Linie wie Gerade, Kreis oder logarithmischen Spirale bewegt oder ruht
- Vorgang spielt sich in der Ebene ab
- Bestimmung der Verfolgungskurve
- Modellierung führt zu DG 1. oder 2. Ordnung (mit variablen Koeffizienten)

Die Hauptakteure und ihre Strategien

- Akteure: Achilles & Schildkröte, Herrchen & Dackel, Bauer & Schwein, Hund & Jogger, Spinne & Fliege, Piraten & Schiff
- Fluchtstrategie: Punkt Z (Zielobjekt, Beute) bewegt sich mit konstanter Fluchtgeschwindigkeit u auf einer vorgegebenen Fluchtlinie z (Fluchtgeschwindigkeit kann auch null sein)
- Verfolgungsstrategie: Bahn des Punktes P (Verfolger, Räuber) ist die gesuchte Verfolgungskurve p

Drei Verfolgungsstrategien – # 1

Punkt P bewegt sich mit **konstanter Geschwindigkeit** v so, dass seine Bewegungsrichtung stets auf Z zeigt

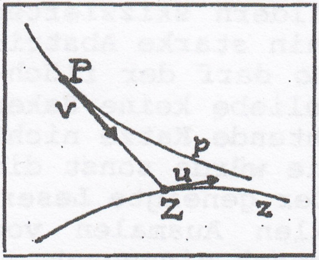


Abb. 1.1

Drei Verfolgungsstrategien – #2

Punkt P bewegt sich bei **konstantem Abstand** a von Z so, dass seine Bewegungsrichtung stets auf Z zeigt

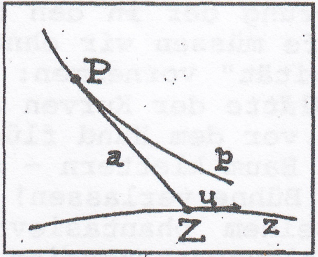


Abb. 1.2

Drei Verfolgungsstrategien – #3

- Abwandlung von #1
- Verfolgerkurs von P bildet mit der jeweiligen Visierlinie $\overline{PZ}$ einen Winkel σ ($\neq 0$), den sogenannten **Schielwinkel**

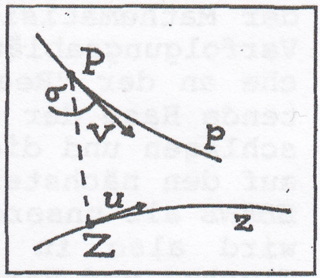


Abb. 1.3

Übersicht

Fluchtlinie	Strategie	σ	Verfolgungskurve
Gerade	1	0	Hundekurve
andere	1	0	allgemeine Hundekurve
Gerade	2	–	Traktrix
andere	2	–	Schleppkurve
frei	3	konstant	Schielwinkelkurve
frei	3	variabel	allgemeine Verfolgungskurve

Diskretisierung einer kontinuierlichen Bewegung

- Bewegungsvorgang durch Diskretisierung der Zeit „mundgerecht“ aufbereiten
- Eulerverfahren als numerische Näherungsmethode
    - Zeit in gleich große Intervalle unterteilen
    - Zustände an Intervallgrenzen berechnen
    - benachbarte Zustände durch Strecken verbinden
    - dadurch die Bewegung stückweise linearisieren

$\rightarrow$ erhalten Näherungsgraphen der exakten Bahnen

Diskretisierung einer kontinuierlichen Bewegung

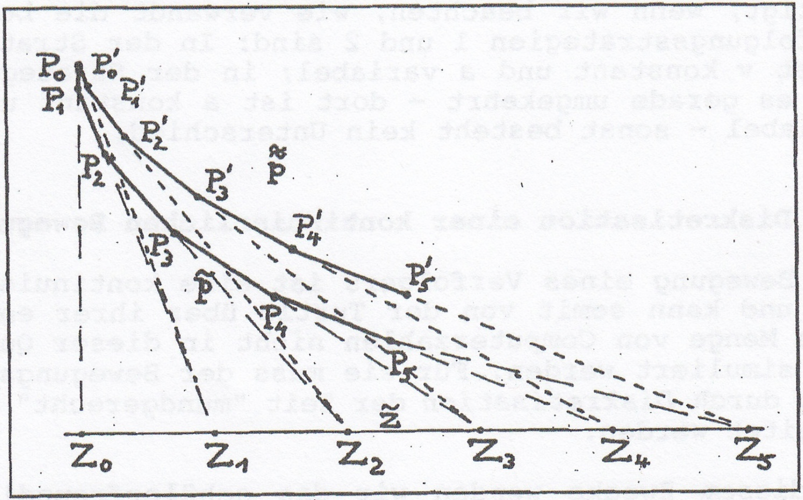


Abb. 1.4

Pierre Bouguer (1698 - 1758)

- franz. Naturforscher
- leitete Expedition nach Ecuador, die durch Gradmessungen die Abweichung der Erde von der genauen Kugelgestalt bestimmen sollte
- beobachtete erstmals die Ablenkung des Lotes durch Gebirgsmassen (Bouguer-Anomalie)
- Professor für Schifffahrtskunde

Bouguers Verfolgungsproblem (1732)

Zwei Schiffe fahren mit konstanten Geschwindigkeiten auf hoher See; das eine hält immer Kurs auf das andere, welches sich auf einer Gerade bewegt. Was für eine Kurve beschreibt das Verfolgerschiff?

- geriet in Vergessenheit
- tauchte 100 Jahre später wieder auf $\rightarrow$ **Hunde**

Gleichungen der Hundekurve

- 2 Schiffe als masselose Punkte
- Z (Flucht), Start in $Z_0 = (0, 0)$ auf x-Achse nach rechts
- P (Verfolger), Start in $P_0 = (0, a)$
- Geschwindigkeiten u bzw v (> 0); Verhältnis der Geschwindigkeiten: $v : u = k$
- x_Z ... Abszisse von Z
- x, y ... Koordinaten von P
- s ... Bogen von P_0 bis P

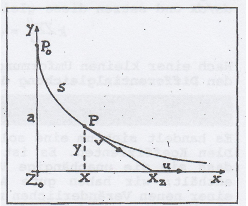


Abb. 2.1

Gleichungen der Hundekurve

- Differentialgleichung der Hundekurve:

$$kyy'' - y'^2\sqrt{(1 + y'^2)} = 0$$

(DGL 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten)

- Gleichung der Hundekurve:

$$x = \frac{ky}{2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1}\left(\frac{y}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}\right] + \frac{ka}{k^2-1} \text{ für } k \neq 1$$

$$x = \frac{1}{4a}\left[y^2 - a^2\left(1 + 2\ln\left(\frac{y}{a}\right)\right)\right] \text{ für } k = 1$$

Eigenschaften der Verfolgung nach Bouguer

1. Treffpunkt von Zielobjekt und Verfolger
2. Treffzeit von Zielobjekt und Verfolger
3. Weglänge von Zielobjekt und Verfolger

zur Erinnerung

Die Hundekurve:

$$x = \frac{ky}{2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1}\left(\frac{y}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}\right] + \frac{ka}{k^2-1} \text{ für } k \neq 1$$

$k = \frac{v}{u}$
v ... Geschwindigkeit Verfolger
u ... Geschwindigkeit Zielobjekt

- $0 < k < 1$ ... Verfolger langsamer als Zielobjekt
- $k = 1$ ... Verfolger genauso schnell wie Zielobjekt
- $k > 1$ ... Verfolger schneller als Zielobjekt

1. Treffpunkt von Zielobjekt und Verfolger

Der Verfolger kommt der Fluchtgeraden beliebig nahe. Wie ist seine Lage im Vergleich zu jener des Zielobjektes?

$$x_T = \lim_{y \to 0} \left[\frac{ky}{2} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1} \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) + \frac{ka}{k^2 - 1} \right]$$

- $k > 1 : x_T = \frac{ka}{k^2-1}$
- $k \leqslant 1$: Divergenz, da $x \to \infty$ für $y \to 0$
  Verfolger holt das Zielobjekt im Endlichen nicht mehr ein

2. Treffzeit von Zielobjekt und Verfolger

$k > 1 : x_T = \frac{ka}{k^2-1}$

d.h. ist $v > u$ so holt der Verfolger das Zielobjekt im Endlichen ein, und für die Treffzeit gilt dann:

$$t_T = \frac{x_T}{u} \to t_T = \frac{av}{v^2 - u^2}$$

3. Weglängen von Zielobjekt und Verfolger

Applet: Bouguers Verfolgerschiff
http://did.mat.uni-bayreuth.de/material/verfolgung/node4.html

- In $Z(x_Z, 0)$ hat **Zielobjekt** den Weg x_Z zurückgelegt.
  Aus $x_Z = \frac{1}{k}s \rightarrow s = kx_Z$
- Bogenlänge s in Abhängigkeit des **Verfolgers** $V = (x, y)$
  Bogenelement: $ds = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{k}} - \left(\frac{y}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}\right] dy$

Bogenlänge s in Abhängigkeit des **Verfolgers** $V = (x, y)$

Bogenelement: $ds = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{k}} - \left(\frac{y}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}\right] dy$
Im Startpunkt ist $y = a$ und $s = 0$

- **Falls** $k \neq 1$:

$$s(y) = \frac{ky}{2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{k-1}\left(\frac{y}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}\right] - \frac{k}{k^2-1}$$

- **Falls** $k = 1$:
  Bogenelement vereinfacht sich zu:

$$ds = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{1} + \left(\frac{y}{a}\right)^{1}\right] dy$$

$$s(y) = \frac{1}{4a}\left[y^2 - a^2\left(2\ln\left(\frac{y}{a}\right) + 1\right)\right]$$

Bogenlänge s in Abhängigkeit des **Verfolgers** $V = (x, y)$

- **Falls** $k \neq 1$:

$$s(y) = \frac{ky}{2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{k-1}\left(\frac{y}{a}\right)^{-\frac{1}{k}}\right] - \frac{k}{k^2-1}$$

- **Falls** $k = 1$:

$$s(y) = \frac{1}{4a}\left[y^2 - a^2\left(2\ln\left(\frac{y}{a}\right) + 1\right)\right]$$

Im Grenzfall liefern die Bogenlängen:

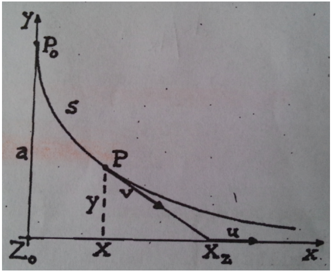
- **Bei** $k > 1$:

$$s = \lim_{y \to 0} s(y) = k\frac{ka}{k^2-1}$$

mit $x_T = \frac{ka}{k^2-1}$
im Einklang mit der Grundeigenschaft $x_Z = \frac{1}{k}s$

- **Bei** $k < 1$: Divergenz, da $x \to \infty$ für $y \to 0$

4. Abstand Verfolger-Zielobjekt d_{vZ}



Es gilt:

$$d_{vZ}^2 = (x_Z - x)^2 + y^2 = y^2 \left[1 + \left(\frac{x - x_Z}{y} \right)^2 \right]$$

Nach Anwenden der Formel $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - x_Z}$ erhalten wir:

$$d_{vZ} = \frac{y}{2} \left[\left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{k}} + \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right]$$

4. Abstand Verfolger-Zielobjekt d_{vz} – 3 Fälle

- **Bei** $k < 1$:
  d_{vz} divergiert gegen unendlich für $y \to 0$, Zielobjekt eilt dem Verfolger davon
- **Bei** $k = 1$:

$$d = \lim_{y \to 0} d_{vz}(y) = \lim_{y \to 0} \frac{y}{2} \left[\left(\frac{y}{a} \right) + \left(\frac{y}{a} \right)^{-1} \right] = \lim_{y \to 0} \frac{y^2 + a}{2a}$$

  also $d = \frac{a}{2}$
- **Bei** $k > 1$:

$$\lim_{y \to 0} d_{vz}(y) = 0$$

  Verfolger holt Zielobjekt im Endlichen ein

5. Krümmungsverhalten der Hundekurve

- Krümmungsradius R

$$R(y) = \frac{k}{4}\left[\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{k+2}{k}} + 2y + a^{\frac{2}{k}} y^{\frac{k-2}{k}}\right]$$

- 3 Fälle
  - $k > 2$

    $$R_T = \lim_{y \to 0} R(y) = 0 \Rightarrow K_T = \infty$$

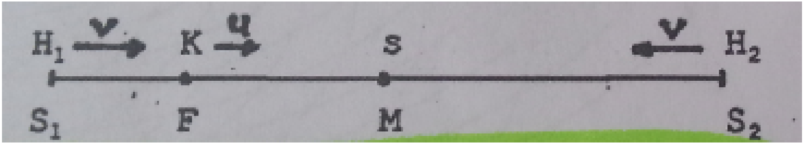
  - $k = 2$

    $$R_T = \lim_{y \to 0} R(y) = \frac{a}{2} \Rightarrow K_T = \frac{2}{a}$$

  - $k < 2$: Krümmungsradius divergiert gegen $\infty \Rightarrow K_T = 0$

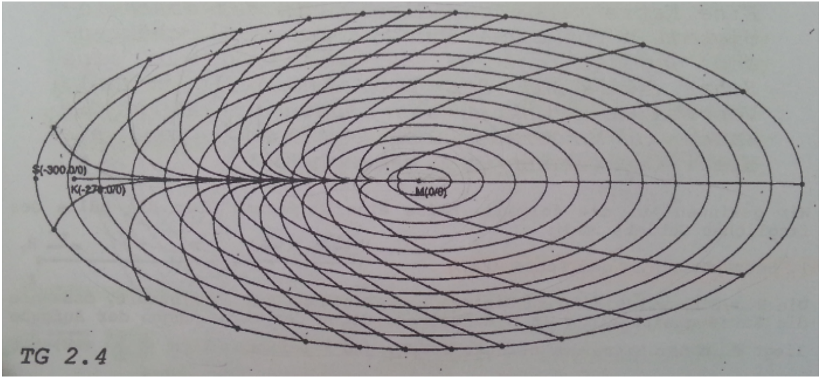
Kegelschnitte als Isochronen

Eine Katze renne geradlinig mit der Geschwindigkeit u von einem Punkt F zu einem schützenden Unterschlupf M. Es verfolgen sie eine Schar Hunde mit der Geschwindigkeit $v > u$). Von welchen Punkten aus können die Hunde die Katze in M gerade noch erwischen, wenn sie diese frühestens in F wahrnehmen?



Kegelschnitte als Isochronen

Die gesuchte Punktmenge wird von der Ellipse mit dem Mittelpunkt M und F als einem ihrer Brennpunkte eingehüllt.



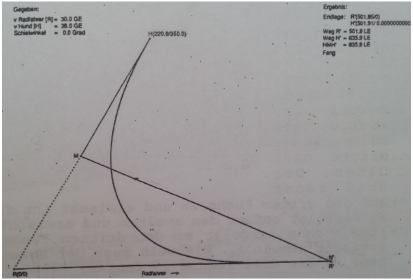
Kegelschnitte als Isochronen – 3 Fälle

- **Bei** $k > 1 \rightarrow$ Ellipsen-Isochronen
- **Bei** $k = 1 \rightarrow$ Parabel-Isochronen
- **Bei** $k < 1 \rightarrow$ Hyperbel-Isochronen

Applet: `http://did.mat.uni-bayreuth.de/~susanne/verfolgung/Isochronen.html`

Isometriesatz

Ein geradeaus Flüchtender starte in R und sein Verfolger gleichzeitig in H ($\neq R$). Die Verfolgerbahn sei eine Hundekurve ($k > 1$), M sei die Mitte des Tangentenabschnitts $\overline{HR}$. Der Treffpunkt liege in H'. Dann gilt



Der Kurvenbogen HH' ist gleich lang wie der aus $\overline{HM}$ und $\overline{MH'}$ zusammengesetzte Streckenzug.

Schwimmender Hund von Saint-Laurent und Sturm

Ein Hund, der an einem gegebenen Punkt am Ufer eines geradlinigen Kanals konstanter Breite lauert, springt ins Wasser, um seinen Meister einzuholen, der sich an einem bestimmten Punkt am anderen Ufer befindet und mit konstanter Geschwindigkeit am Ufer entlanggeht. Der Hund schwimmt mit stets gleicher Kraft auf seinen Herrn zu. Aber die Strömung des ihn mitziehenden Wassers lenkt ihn dauernd und gleichmäßig von der gewollten Richtung ab.
Gefragt wird nach der Kurve, die der Hund bei diesen verschiedenen Bedingungen auf der Oberfläche des Wassers beschreibt.

Applet: `http://did.mat.uni-bayreuth.de/~susanne/verfolgung/SaintLaurent.html`

Fluchtlinie beliebige Kurve

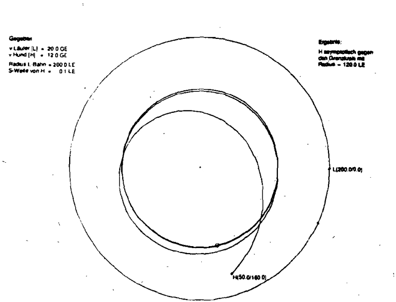
- Flucht des Zielobjekts auf beliebiger Kurve bzw Kegelschnitt $\rightarrow$ Hundekurve nach Bouguer Spezialfall der **allgemeinen Hundekurve** nach Maupertuis
- große mathematische Herausforderung
- einfachster Fall: Kreis als Fluchtlinie $\rightarrow$ Differentialgleichung zweiter Ordnung

Flucht auf dem Kreis

Angenommen, der Läufer läuft auf einer Kreisförmigen Bahn, der Hund verfolgt ihn mit Verfolgungsstrategie #1 (dh. er bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v so, dass seine Bewegungsrichtung stets auf den Läufer zeigt)
2 Fälle:

- Hund beginnt innerhalb des Kreises
- Hund beginnt außerhalb des Kreises

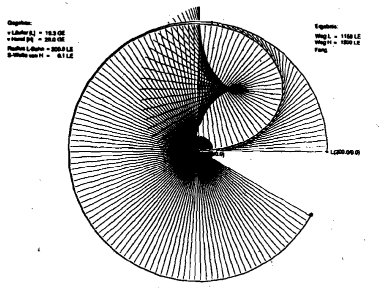
Hund beginnt innerhalb des Kreises



TG 2.15

$v = 20GE, u = 12GE \to k < 1$

Läufer wird nicht eingeholt

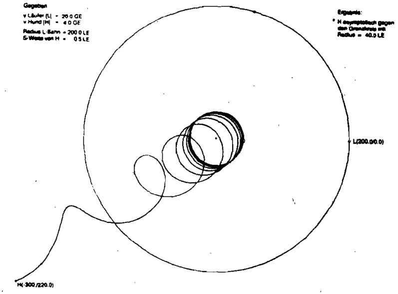


TG 2.17

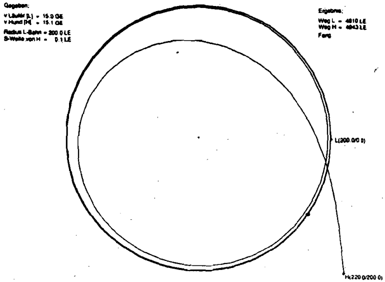
$v = 19.3GE, u = 20GE \to k > 1$

Läufer wird eingeholt

Hund beginnt außerhalb des Kreises



TG 2.14



TG 2.18

$20GE, u = 4GE \rightarrow k < 1$
Läufer wird nicht eingeholt

$v = 15GE, u = 15.1GE \rightarrow k > 1$
Läufer wird eingeholt

$v =$

Das Käferproblem

> *n* **Käfer** *starten in den n Ecken eines regulären Polygons und* **verfolgen einander in zyklischer Reihenfolge** *(im oder gegen den Uhrzeigersinn) mit gleicher konstanten Geschwindigkeit.*
> *Gefragt sind die Form, die Länge und die Krümmung der Verfolgungskurve, der augenblickliche Abstand der Käfer während der Verfolgung usw*

Je nach Lieblingstier des Mathematikers, der sich damit beschäftigte: Käfer, Hunde, „verliebte" Mäuse usw.

Käfer auf logarithmischen Spiralen

Brocard (1854-1922) wies – ohne Rechnung! – nach, dass sich die Käfer auf einer **logarithmischen Kurve** bewegen **Applet**

`http://did.mat.uni-bayreuth.de/material/verfolgung/node6.html#SECTION00051000000000000000` **Applet**

`http://did.mat.uni-bayreuth.de/material/verfolgung/node7.html#kfolg1`

Verallgemeinerung des Käferproblems

- Käfer müssen nicht unbedingt den nächsten im Kreis verfolgen
- können anderen Anweisungen folgen, zB
  - 1 – 3 – 7 – 5 – 8 – 6 – 2 – 4 – 1
  - 1 – 5 – 3 – 7 – 8 – 4 – 6 – 2 – 1

Applet `http://did.mat.uni-bayreuth.de/material/verfolgung/node15.html#SECTION000560000000000000000`

Berechnung der Weglänge der Käfer – 1

- Käfer befinden sich zu jedem Zeitpunkt der Verfolgung in den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks mit gemeisamem Mittelpunkt und Außenwinkel $\phi = \frac{2\pi}{n}$
- s ... Seitenlänge des Startpolygons
- K_i, K_{i+1} und K_{i+2} ... Ecken dreier benachbarter Käfer
- v ... Verfolgungsgeschwindigkeit
- v' ... skalare Komponente in Richtung der Geraden durch K_i und K_{i+1}

Berechnung der Weglänge der Käfer – 2

- Käfer K_i nähert sich Käfer K_{i+1} mit der Geschwindigkeit $v - v'$
- τ ... Treffzeit
- L_n ... Bahnlänge
- dann gilt:

$$s = (v - v')\tau = (v - v\cos\phi)\tau = v\tau(1 - \cos\phi) = L_n(1 - \cos\phi)$$

also

$$L_n = \frac{s}{1 - \cos\frac{2\pi}{n}}$$

$\Rightarrow$ im Fall eines Quadrates: $L_4 = s$ (Applet: http://did.mat.uni-bayreuth.de/material/verfolgung/node12.htmlSECTION00054210000000

Käfer wagen sich in die GAUSS-Ebene

Applet http://did.mat.uni-bayreuth.de/material/verfolgung/node15.html

Schielwinkelkurven – spiraliger Weg zu einer punktförmigen Lichtquelle

- Insekten, welche aufs Licht ($u = 0$) zufliegen
- Es ergeben sich logarithmische Spiralen als Verfolgerbahn (können sich aufgrund von Facettenaugen nur in bestimmten Winkeln annähern)
- Verfolgerbahn schneidet folglich jeden von der Lichtquelle ausgehenden Strahl jeweils unter dem **gleichen Schielwinkel**

Applet: Schielwinkelverfolgung bei ruhendem Ziel
`http://did.mat.uni-bayreuth.de/~wn/hs/geonet/beispiele/verfolgung_za/node17.html#SECTION00061000000000000000`

Schielwinkelkurven – spiraliger Weg zu 2. einem auf einer Geraden fliehenden Ziel

Applet: Schielwinkelverfolgung

http://did.mat.uni-bayreuth.de/~wn/hs/geonet/beispiele/verfolgung_za/node17.html#SECTION00061000000000000000

Herzlichen Dank für eure Aufmerksamkeit!