Kreisbewegung, Schwingung und Welle

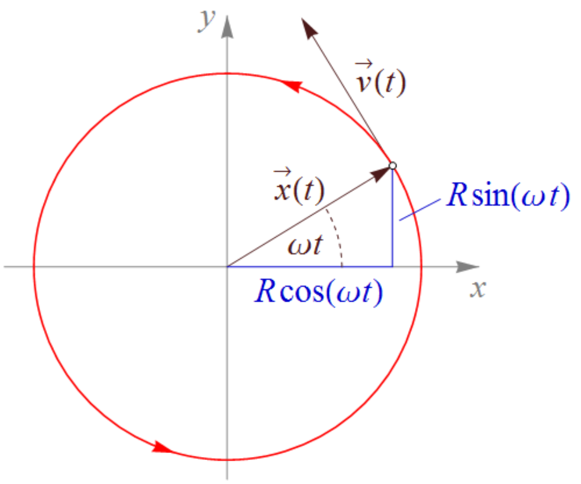
Franz Embacher
http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/
Fakultät für Physik der Universität Wien

Februar 2011

Die **gleichmäßige Bewegung eines Punktes auf einer Kreislinie**, die **harmonische Schwingung** und die **ebene Welle** zählen zu den wichtigsten **Modellkonzepten** der Physik. Sie sind in formaler Hinsicht miteinander verwandt und können daher aufbauend behandelt werden. Im Physikstudium wird dabei von der Parameterdarstellung des Kreises ausgegangen und als rechnerische Methode bei der Analyse der gleichmäßigen Kreisbewegung und der harmonischen Schwingung das Differenzieren verwendet. Im Physikunterricht der Oberstufe lassen sich die nötigen Argumentationsschritte – in einer weitgehenden Entsprechung, aber ohne Zuhilfenahme von Techniken der Analysis – graphisch und durch elementare Berechnungen durchführen. Darauf aufbauend, kann das Verhalten ebener Wellen mit Hilfe der im Mathematikunterricht behandelten Normalvektorform der Ebenengleichung erschlossen werden.

Gleichmäßige Kreisbewegung

Die größte Herausforderung bei der Behandlung der gleichmäßigen Kreisbewegung im Physik-unterricht der Oberstufe besteht darin, zum Begriff der Zentripetalbeschleunigung zu gelangen.

Argumentation im Physikstudium	Argumentation im Physikunterricht
Halten wir die bei der Beschreibung der gleichmäßigen Kreisbewegung eines Massenpunktes auftretenden Größen zunächst in einer Skizze fest:  Das Zentrum der Bewegung legen wir der Bequemlichkeit halber in den Ursprung des	Bewegt sich ein Massenpunkt gleichmäßig auf einer Kreislinie, so wächst der Winkel, der vom seinem Ortsvektor (d.h. dem Verbindungspfeil vom Zentrum der Bewegung zum Massenpunkt) überstrichen wird, proportional zur Zeit. Nach der Zeit t hat er einen Winkel ωt überstrichen, wobei die Proportionalitätskonstante ω angibt, wie schnell der überstrichene Winkel mit der Zeit anwächst: $$\omega = \frac{\text{überstrichener Winkel}}{\text{dafür benötigte Zeit}}. \qquad \text{(a)}$$ Sie heißt **Winkelgeschwindigkeit**. Der Winkel wird dabei im Bogenmaß angegeben, d.h. eine volle Umdrehung entspricht einem Winkel von 2π . Die Geschwindigkeit ist ein zur Kreislinie

Koordinatensystems. Eine Kreisbewegung ist gleichmäßig, wenn der während eines gegebenen Zeitintervalls vom Ortsvektor des Massenpunktes (d.h. vom Verbindungspfeil vom Ursprung zum Massenpunkt) überstrichene Winkel stets proportional zur Dauer des Zeitintervalls ist. Befindet sich der Massenpunkt zur Zeit 0 auf der positiven x-Achse, und bewegt er sich im Gegenuhrzeigersinn, so schließt sein Ortsvektor zur Zeit t mit der positiven x-Achse den (im mathematisch positiven Umlaufssinn bestimmten) Winkel ωt ein, wobei die positive Konstante ω die **Winkelgeschwindigkeit** ist. Die Koordinaten des Massenpunkts zur Zeit t sind daher durch

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(\omega t) \\ y(t) &= R\sin(\omega t) \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

gegeben, wobei R der Radius der Kreisbahn ist. Der Ortsvektor (dessen Betrag gleich R ist) hat daher die Form

$$\vec{x}(t) = R\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}. \qquad \text{(B)}$$

(A) bzw. (B) können als Parameterdarstellung der Kreislinie verstanden werden. Die Geschwindigkeit erhalten wir durch Differenzieren nach der Zeit:

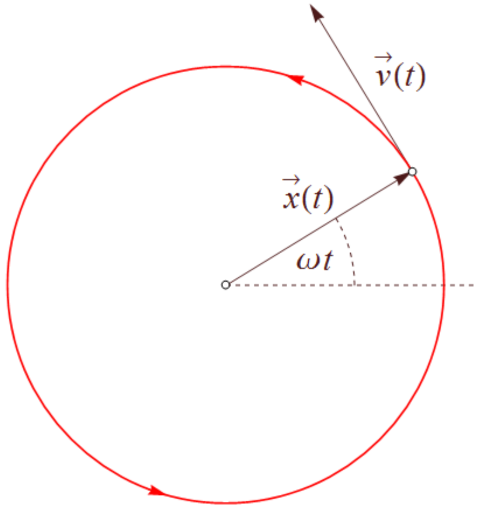
$$\dot{\vec{x}}(t) = \omega R\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \qquad \text{(C)}$$

Da die Geschwindigkeit zu jeder Zeit tangential zur Kreislinie ist, steht sie normal auf den Ortsvektor. Das können wir auch ganz leicht rechnerisch überprüfen:

$$\begin{aligned} &\dot{\vec{x}}(t)\cdot\vec{x}(t) = \\ &= \omega R^2\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \\ &= \omega R^2\big(-\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \\ &\quad \cos(\omega t)\sin(\omega t)\big) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

Die Beschleunigung ergibt sich nach einer weiteren Differentiation zu

tangentialer Vektor (Pfeil). Den Ortsvektor zur Zeit t bezeichnen wir mit $\vec{x}(t)$. Sein Betrag stimmt mit dem Radius R der Kreislinie überein. Den Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t bezeichnen wir mit $\vec{v}(t)$. Die wichtigsten Größen, die die gleichmäßige Kreisbewegung beschreiben, sind in der folgenden Skizze dargestellt.



Der Geschwindigkeitsvektor steht in jedem Zeitpunkt normal auf den Ortsvektor.

Um eine solche Bewegung mit der Kraft, die sie verursacht, in Beziehung setzen zu können, müssen wir die **Beschleunigung** kennen, die der Massenpunkt erfährt. Sie ist definiert als die Änderungsrate der Geschwindigkeit (ganz ähnlich wie die Geschwindigkeit die Änderungsrate des Ortes ist). Wir schreiben sie in der Form

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \text{(b)}$$

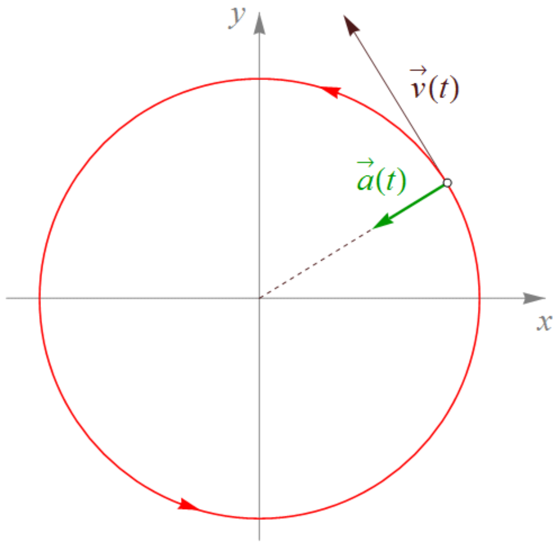
an. Dabei ist $\Delta\vec{v}$ die Änderung der Geschwindigkeit während eines (kleinen) Zeitintervalls Δt. Wie diese Beziehung zeigt, ist die Beschleunigung ein Vektor – sie hat nicht nur einen Betrag, sondern auch eine Richtung. Um sie zu ermitteln, zeichnen wir den Ortsvektor und den Geschwindigkeitsvektor zu zwei Zeitpunkten, zwischen denen ein Zeitintervall Δt liegt:

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\omega^2 R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}. \qquad \text{(E)}$$

Der Vergleich mit (B) zeigt, dass

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\omega^2 \vec{x}(t) \qquad \text{(F)}$$

gilt, d.h. dass die Beschleunigung parallel und entgegengesetzt orientiert zum Ortsvektor ist. Sie heißt **Zentripetalbeschleunigung**. In der folgenden Skizze sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zur Zeit t mit $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ bezeichnet:



Der Betrag der Beschleunigung ist mit (F) durch

$$a = \omega^2 R \qquad \text{(G)}$$

gegeben. Aus (C) lesen wir den Betrag der Geschwindigkeit zu

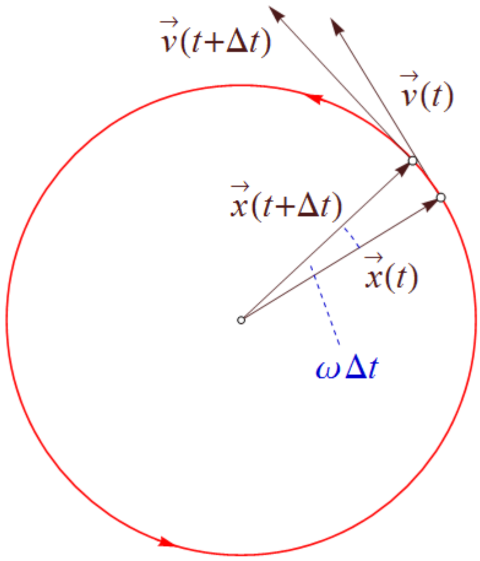
$$v = \omega R \qquad \text{(H)}$$

ab. Damit kann ω in (G) eliminiert werden, woraus sich

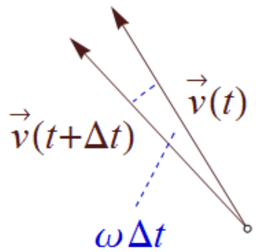
$$a = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(I)}$$

als weitere Formel für den Betrag der Zentripetalbeschleunigung ergibt.

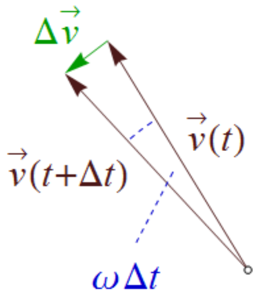
Die **Umlaufszeit** ergibt sich aus der Überlegung, dass die Anfangsposition zum ersten Mal nach dem Start genau dann wieder erreicht ist, wenn $\omega t = 2\pi$ ist. Um das formal zu überprüfen,



Der während dieses kleinen Zeitintervalls überstrichene Winkel ist $\omega\Delta t$. Um die beiden Geschwindigkeitsvektoren vergleichen zu können, verschieben wir sie unter Beibehaltung ihrer Richtungen so, dass sie vom selben Punkt ausgehen:



Der Winkel zwischen ihnen ist gleich dem Winkel $\omega\Delta t$ zwischen den Ortsvektoren. Der Verbindungsvektor ihrer Pfeilspitzen ist nichts anderes als die während des Zeitintervalls Δt erfolgte Änderung der Geschwindigkeit:



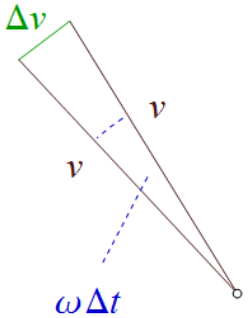
Ist das Zeitintervall Δt sehr klein, so können wir den Vektor $\Delta\vec{v}$ als normal zur Geschwindigkeit ansehen. Daher ist er parallel zum Ortsvektor, aber entgegengesetzt zu diesem orientiert, d.h. er weist vom Massenpunkt zum Zentrum der Bewegung hin.

Um den Betrag Δv des Vektors $\Delta\vec{v}$ zu setzen Sie $\omega t = 2\pi$ in (B) ein! Die Umlaufszeit ist daher durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{J}$$

gegeben. Dass der Rest dieser Spalte leer bleibt, unterstreicht, wie elegant die Analyse der Kreisbewegung mit den Mitteln der Analysis ist.

ermitteln, schreiben wir die Beträge der auftretenden Vektoren in unsere Skizze:



Dabei ist v der Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t)$. Da der Winkel $\omega\Delta t$ als sehr klein angenommen wird, können wir uns anstelle der grünen Strecke einen kleinen Kreisbogen vorstellen. Nun erinnern wir uns an die Definition eines Winkels im Bogenmaß: Er ist gleich der Länge des Kreisbogens dividiert durch den Radius des Kreises, in unserem Fall also

$$\omega\Delta t = \frac{\Delta v}{v}. \tag{c}$$

Wir multiplizieren beide Seiten dieser Gleichung mit v, dividieren durch Δt, vertauschen die beiden Seiten und erhalten

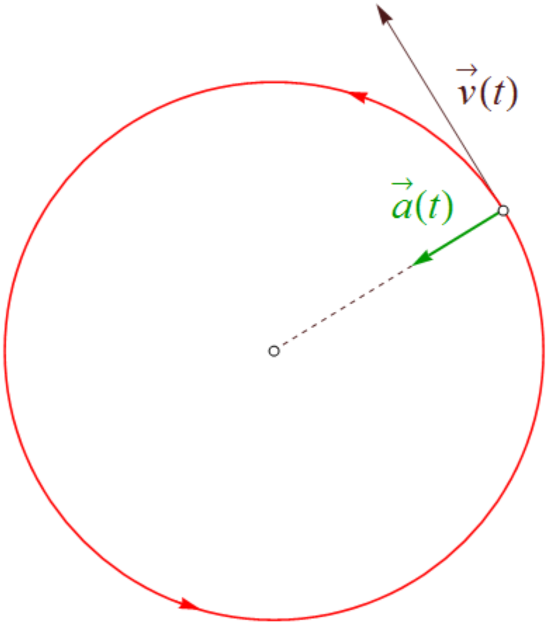
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \omega v\,. \tag{d}$$

Das ist der Betrag der Änderungsrate der Geschwindigkeit und daher der Betrag der Beschleunigung.

Wir können also festhalten: Die bei der gleichmäßigen Kreisbewegung auftretende Beschleunigung ist ein Vektor, der vom Massenpunkt zum Zentrum der Bewegung hinweist, und dessen Betrag durch

$$a = \omega v \tag{e}$$

gegeben ist. Sie heißt **Zentripetalbeschleunigung**.



Der Beschleunigungsvektor zeigt also bei der gleichmäßigen Kreisbewegung nicht in die Bewegungsrichtung (wie man vielleicht erwarten würde), sondern steht normal auf sie.

Wir ergänzen diese Überlegungen mit einigen nützlichen Formeln für die Zeitdauer eines vollständigen Umlaufs und den Betrag der Geschwindigkeit sowie einer weiteren Formel für den Betrag der Beschleunigung: Dauert die Bewegung eine Zeitspanne t an, so ist ein vollständiger Umlauf vollendet, wenn der während dieser Zeit überstrichene Winkel ωt gleich 2π ist. Die Gleichung $\omega t = 2\pi$ lösen wir nach t auf und erhalten als Ergebnis, dass die **Umlaufszeit** durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{f}$$

gegeben ist. Um den Betrag der Geschwindigkeit zu berechnen, dividieren wir einfach den während eines vollen Umlaufs zurückgelegten Weg (also den Kreisumfang $2\pi R$) durch die dafür benötigte Zeit T. Wir erhalten

$$v = \omega R\,. \tag{g}$$

Damit können wir (e) zu

$$a = \omega^2 R \tag{h}$$

umformen. Durch eine nochmalige Ausnutzung

	von (g) ergibt sich mit $$a = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(i)}$$ eine weitere Formel für den Betrag der Zentripetalbeschleunigung.

Die Formeln für den Betrag der Zentripetalbeschleunigung stellen eine hervorragende Möglichkeit dar, die Wirkungsweise des zweiten **Newtonschen Axioms** (auch **Grundgesetz der Mechanik**: „Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung") zu illustrieren: Wirkt eine Kraft stets zu einem fix gewählten Zentrum hin, und besitzt sie für alle Punkte gleichen Abstands von diesem Zentrum den gleichen Betrag F, so kann sie einen Massenpunkt (der Masse m) auf einer gleichmäßig durchlaufenen Kreisbahn halten. Wir setzen dann

$$F = \frac{m v^2}{R} \quad \text{oder} \quad F = m \omega^2 R\,, \tag{1}$$

je nachdem, ob die Bewegung durch R und v oder durch R und ω beschrieben werden soll. Da die Kraft laut Voraussetzung zum Zentrum hin wirkt, ist sie parallel und gleichorientiert zur Beschleunigung. Damit ist garantiert, dass mit (1) auch die vollständige vektorielle Form

$$\vec{F} = m \vec{a} \tag{2}$$

des zweiten Newtonschen Axioms erfüllt ist.

Beispielsweise gilt für die **Gravitationskraft**, die ein Himmelskörper (der Masse M) auf einen Satelliten (der Masse m) in der Entfernung R ausübt,

$$F = \frac{G M m}{R^2}\,. \tag{3}$$

Ist $m \ll M$, so ist die Rückwirkung des Satelliten auf den Zentralkörper vernachlässigbar klein. Der Satellit kann dann eine Kreisbahn gleichmäßig durchlaufen, wobei der Zentralkörper (fast) unbewegt im Zentrum steht. (1) wird zu

$$\frac{G M m}{R^2} = \frac{m v^2}{R} \quad \text{oder} \quad \frac{G M m}{R^2} = m \omega^2 R \quad \text{(je nach Geschmack).} \tag{4}$$

Dass sich die Satellitenmasse m herauskürzt, unterstreicht, dass „alle Körper gleich schnell fallen". Mit (4) – was übrigens nichts anderes als das dritte Keplersche Gesetz für den Spezialfall einer Kreisbahn ist – kann bei bekannter Masse M und bekanntem Bahnradius R die Bewegung (in Form von v oder ω) ermittelt werden. Umgekehrt kann aus der Kenntnis der Bahndaten die Masse M des Zentralkörpers bestimmt werden. Das ist eine der wichtigsten astrophysikalischen Methoden zur Bestimmung der Massen von Himmelskörpern. (Um etwa die Masse der Sonne zu bestimmen, können wir die Erdbahn mit guter Näherung als Kreisbahn behandeln und für die Bahndaten $R =$ 150 Millionen Kilometer sowie $\omega = 2\pi$ /Jahr setzen).

Diese Anwendung illustriert die für die Mechanik wichtige Logik der Verwendung des Begriffs der Zentripetalbeschleunigung: Sie ist eine *kinematische* Größe, d.h. sie kann ermittelt werden, ohne die Kraft zu kennen, die den Körper auf seiner Bahn hält. Erst mit dem zweiten Newtonschen Axiom wird sie zu einer Kraft in Beziehung gesetzt.

Harmonische Schwingung

Eine in der Physik häufig auftretende Form der Bewegung findet unter dem Einfluss einer „zur Auslenkung proportionalen Rückstellkraft“ statt. Wir beschränken uns dabei auf eine in einer einzigen Dimension stattfindende Bewegung. Bezeichnet s die Auslenkung des Körpers aus einer fixen räumlichen Position (der „Ruhelage“), so ist die auf ihn wirkende Kraft durch

$$F = -k\,s \qquad (5)$$

gegeben. Das Minuszeichen drückt aus, dass die Kraftwirkung immer zur Ruhelage hin erfolgt. Die auf den Körper zu einem gegebenen Zeitpunkt wirkende Kraft hängt also davon ab, wie groß seine Auslenkung zu diesem Zeitpunkt ist. Die (positive) Proportionalitätskonstante k heißt Federkonstante. Wie bewegt sich ein solcher Körper?

Das zweite Newtonsche Axiom besagt

$$m\,a = -k\,s\,, \qquad (6)$$

wobei m die Masse des Körpers ist und a seine Beschleunigung bezeichnet. Wie kann aus dieser Beziehung die Bewegungsform erschlossen werden?

Argumentation im Physikstudium	**Argumentation im Physikunterricht**
Beziehung (6) ist eine Differentialgleichung. Ist $s(t)$ die Auslenkung des Körpers zur Zeit t, so ist die Beschleunigung durch $\ddot{s}(t)$ gegeben. (6) kann daher auch in der Form $$m\,\ddot{s}(t) = -k\,s(t) \qquad \text{(K)}$$ geschrieben werden. Diese Differentialgleichung muss für alle Zeiten erfüllt sein. Definieren wir die Größe $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \qquad \text{(L)}$$	Um eine Lösung des Bewegungsproblems (6) zu finden, erinnern wir uns an die gleichmäßige Kreisbewegung. Die Beschleunigung, die der Massenpunkt erfährt, ist ein Vektor, der immer genau zum Mittelpunkt der Kreisbahn zeigt. Ihr Betrag ändert sich im Laufe der Bewegung nicht, steht also zu jedem Zeitpunkt in einem fixen Verhältnis zum Radius der Kreisbahn. Formel (h) gibt dieser Verhältnis an: Der Betrag der Beschleunigung ist ω^2 mal dem Radius der Kreisbahn. Betrachten wir nun die **Projektion** der Bewegung auf einen festgehaltenen Kreisdurchmesser! Da die Verbindungsstrecke vom Kreismittelpunkt

so lässt sie sich in der einfacheren Form

$$\ddot{s}(t) = -\omega^2 s(t) \qquad \text{(M)}$$

schreiben. Ihre allgemeine Lösung kann durch einen (komplexen) Exponentialsatz oder einfach durch Erraten gefunden werden. Sie lautet

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \qquad \text{(O)}$$

wobei A (die **Amplitude**) und φ (die **Anfangsphase**) zwei beliebige, frei vorzugebende Konstanten sind. Wir nennen die durch (O) beschriebene Bewegung eine **harmonische Schwingung**. (Anstelle des Sinus kann in (O) übrigens genauso gut die Cosinusfunktion verwendet werden).

Nachdem wir also den geschlossenen Lösungsausdruck (O) gefunden haben, analysieren wir die Natur der Bewegung, die er beschreibt. Die Anfangsphase φ kann durch eine Verschiebung des Nullpunkts der Zeitzählung, also durch eine Ersetzung

$$t_{\text{neue Zeitvariable}} = t_{\text{alte Zeitvariable}} + \frac{\varphi}{\omega} \qquad \text{(P)}$$

der Zeitvariable, zum Verschwinden gebracht werden. Da sie nicht wirklich eine interessante Kenngröße der Bewegung darstellt, können wir $\varphi = 0$ setzen und erhalten den vereinfachten Ausdruck

$$s(t) = A\sin(\omega t). \qquad \text{(Q)}$$

Die Bewegung besteht in einem Hin- und Herpendeln zwischen $-A$ und A (sofern wir $A \geq 0$ voraussetzen). Ist $A = 0$, so ruht der Körper (woraus sich die Bezeichnung der Position $s = 0$ als Ruhelage erklärt). Allgemein ist A die maximale Auslenkung: Für alle Zeiten gilt $|s(t)| \leq A$, und in regelmäßigen Zeitabständen werden $-A$ und A als Auslenkung angenommen.

Weiters ist die Bewegung **periodisch**. In jedem Zeitintervall, während dem die „Phase" ωt um den Betrag 2π anwächst, wird eine Schwingungsperiode vollständig durchlaufen.

zum Massenpunkt stets parallel zum Beschleunigungsvektor ist, werden beide durch die Projektion um den gleichen Faktor verkürzt. Daher steht die Beschleunigung des projizierten Punktes in einem festen Verhältnis zu seiner Entfernung vom Mittelpunkt. Das ist aber genau das, was (6) verlangt! Bezeichnen wir die Entfernung des projizierten Punktes vom projizierten Mittelpunkt als „Auslenkung", so sagt uns Formel (h): Die Beschleunigung des projizierten Punktes ist gleich $-\omega^2$ mal seiner Auslenkung (wobei das Minuszeichen ausdrückt, dass die Beschleunigung des projizierten Punktes immer zum projizierten Mittelpunkt weist).

Damit haben wir eine Lösung des Bewegungsproblems gefunden: Der Körper bewegt sich wie die **Projektion eines gleichmäßig eine Kreisbahn durchlaufenden Massenpunktes**! Wir nennen eine solche Bewegungsform eine **harmonische Schwingung**. Sie besteht in einem ständigen Hin- und Herpendeln.

Welchen Wert für ω müssen wir dabei annehmen? Nach (6) ist die Beschleunigung gleich $-k/m$ mal der Auslenkung. Wir müssen also

$$-\omega^2 = -\frac{k}{m} \qquad \text{(j)}$$

oder

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(k)}$$

setzen. Diese Größe heißt **Kreisfrequenz**. Der Radius der Kreisbahn ist nicht festgelegt – er ist beliebig und entspricht der maximalen Auslenkung. Die maximale Auslenkung einer harmonischen Schwingung nennen wir **Amplitude**.

Eine harmonische Bewegung kann also offenbar eine beliebige Amplitude besitzen. Mit anderen Worten: Der Radius der Kreisbahn, deren Projektion die harmonische Schwingung beschreibt, kann frei gewählt werden. Die Eigenschaften und Formeln der Kreisbewegung

Die **Periodendauer** ist daher durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(R)}$$

gegeben. Die Zahl der Schwingungsperioden pro Zeitintervall heißt **Frequenz**. Wir ermitteln Sie durch die Überlegung, dass während der Zeit (R) genau eine Schwingungsperiode durchlaufen wird. Während einer beliebigen anderen Zeit Δt werden daher $\Delta t / T$ Schwingungsperioden durchlaufen. Diese Anzahl dividiert durch Δt ergibt die Frequenz

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad \text{(S)}$$

Kreisfrequenz und Frequenz unterscheiden sich also nur um einen Faktor 2π .

Die Ähnlichkeit der hier auftretenden Beziehungen zu den bei der Beschreibung der gleichmäßigen Kreisbewegung aufgetretenen fällt auf. Sie rührt daher, dass sowohl die x-Komponente als auch die y-Komponente der Zentripetalbeschleunigung die Differentialgleichung (M) erfüllt. Beweis: Formel (F)! Die harmonische Schwingung kann daher als **Projektion einer gleichmäßigen Kreisbewegung** verstanden werden. Der Radius R der Kreisbahn muss dabei durch die Amplitude A ersetzt werden. Diese Beobachtung führt auf einen Weg, die harmonische Schwingung im Physikunterricht auch ohne Verwendung von Winkelfunktionen als Lösung des Bewegungsproblems (6) zu erkennen. Er ist in der rechten Spalte skizziert. Sind den SchülerInnen die elementaren Eigenschaften der Winkelfunktionen bekannt, so kann danach die formale Darstellung (O), gegebenenfalls in der vereinfachten Form (Q), eingeführt und begründet werden.

übertragen sich dann auf die harmonische Schwingung. Sie ist **periodisch**, d.h. sie wiederholt sich immer wieder. Mit (f) ist die Dauer einer vollständigen Schwingungsperiode durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(l)}$$

gegeben. Im Zusammenhang mit der harmonischen Bewegung heißt diese Größe **Periodendauer**.

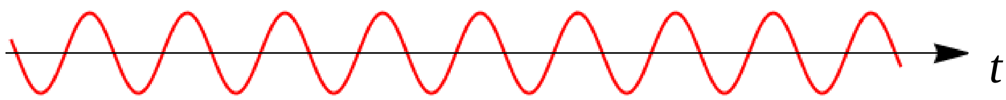
Die Zahl der Schwingungsperioden pro Zeitintervall heißt **Frequenz**. Wir ermitteln Sie durch die Überlegung, dass während der Zeit (l) genau eine Schwingungsperiode durchlaufen wird. Während einer beliebigen anderen Zeit Δt werden daher $\Delta t / T$ Schwingungsperioden durchlaufen. Diese Anzahl dividiert durch Δt ergibt die Frequenz

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad \text{(m)}$$

Kreisfrequenz und Frequenz unterscheiden sich also nur um einen Faktor 2π .

Interessanterweise sind Kreisfrequenz, Frequenz und Periodendauer von der Amplitude unabhängig. Ist die Amplitude gleich 0 (was einer zu einem Punkt geschrumpften Kreisbahn entspricht), so ruht der Körper. Die Position, die er dann hat, bezeichnen wir als „Ruhelage". Ist die Amplitude ungleich 0, so schwingt der Körper um seine Ruhelage mit einem Rhythmus, der nach (k) nur vom Verhältnis k / m abhängt, nicht aber davon, wie weit er ausschwingt.

Beachte: Die gleichmäßige Kreisbewegung, die wir benutzt haben, um die harmonische Schwingung zu beschreiben, ist hier *keine reale physikalische Gegebenheit*, sondern nur eine clevere Methode, um herauszufinden, welche Bewegungsform eine zur Auslenkung proportionale Rückstellkraft bewirkt.



Als Unterstützung bei der Behandlung der harmonischen Schwingung im Physikunterricht steht eine Reihe interaktiver Visualisierungen zur Verfügung, die illustrieren, wie die als Projektion einer gleichmäßigen Kreisbewegung konstruierte Schwingungsform in einem Zeit-Raum-Diagramm aussieht. Siehe etwa

- „Die Graphen von sin, cos und tan" unter
  http://www.mathe-online.at/galerie/fun2/fun2.html#sincostan
- „Sinusfunktion am Einheitskreis" unter
  http://www.geogebra.org/de/upload/files/dynamische_arbeitsblaetter/eckert/Sinusfunktion.html
  (Das Kästchen bei „a über B abtragen" anklicken und die Spur-Anzeige mit Rechtsklick einschalten!)
- „Trigonometrische Funktionen, Graph zu y=sin x" unter
  http://www.realmath.de/Neues/Klasse10/trifkt/sinusfunktion.html.

Sie unterstützen auch die Einführung der formalen Beschreibung einer harmonischen Schwingung mit Hilfe der Sinus- oder Cosinusfunktion, sofern diese bekannt sind.

Ebene Welle

Die mathematische Behandlung von Wellen ist im Physikunterricht nur in sehr rudimentärer Weise vorgesehen. Da manche der formalen Aspekte des Wellenbegriffs aber sehr wohl für die Unterrichtsgestaltung relevant sind, sollten LehrerInnen mit dem Modell der „ebenen Welle" vertraut sein und über eine abgerundete Sichtweise auf dieses Konzept verfügen. Zu seiner formalen Beschreibung ist lediglich ein bisschen analytische Geometrie nötig. Sind den SchülerInnen diese Techniken sowie der Graph der Sinusfunktion bekannt, so können Elemente der folgenden Darstellung auch in den Physikunterricht integriert werden. Die Belohnung ist ein besseres Verständnis des Wellenphänomens an sich und eine zusätzliche Vorstellungshilfe.

Was „wellt" bei einer Welle? Physikalisch gibt es viele Möglichkeiten: Beim Licht „wellen" das elektrische und das magnetische Feld, bei Wasserwellen „wellt" die Oberfläche des Wassers (die quantitativ durch die Angabe der Höhe über Grund angegeben werden kann), bei der Schallwelle „wellen" der Druck und die Dichte der Luft. Wir beschränken uns auf eine Situation, in der nur eine *einzige* Größe „wellt", also sich in Raum und Zeit ausbreitet. Wir bezeichnen diese Größe mit ϕ und sprechen dann von einer „skalaren" Welle (im Unterschied zu einer Welle, in der es *mehrere* solche Größen gibt, wie etwa beim elektromagnetischen Feld, bei dem diese Vielzahl von „wellenden" Freiheitsgraden zum Phänomen der Polarisation führt). Eine konkrete skalare Welle ist durch die Angabe einer konkreten Funktion $\phi \equiv \phi(\vec{x},t)$ gegeben. Sie drückt aus, welchen Wert ϕ zur Zeit t am Punkt $\vec{x}$ annimmt.

Eine skalare (harmonische) **ebene Welle** ist gegeben durch eine Funktion der Form

$$\phi(\vec{x},t) = A\sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\,. \tag{7}$$

Dabei sind $A > 0$ und $\omega > 0$ Konstanten, und $\vec{k}$ ist ein konstanter Vektor.[1] Der Ausdruck $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$ ist der *allgemeinste* in Raum und Zeit *lineare* (genauer: *linear-homogene*) Term. Wir könnten ihn auch zunächst in der Form $k_1 x + k_2 y + k_3 z + k_0 t$ anschreiben , dann (k_1, k_2, k_3) zu einem Vektor $\vec{k}$ zusammenfassen und $k_0 = -\omega$ setzen (wobei das Minuszeichen einer allgemein verwendeten Konvention entspricht). Dieser lineare Ausdruck wird **Phase** der Welle genannt (ganz einfach, weil wir alles, auf das eine Winkelfunktion wirkt, als Phase bezeichnen können). Nun wollen wir uns einige mathematische Fragen stellen, die mit ein bisschen Geometrie und Vektorrechnung zu beantworten sind:

- **An welchen Punkten des Raumes hat die Phase der Welle, also der Term $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$, zu einer festgehaltenen Zeit einen gegebenen Wert?**

  Sei also eine Konstante C gegeben, und sei ein Zeitpunkt t festgehalten. Wir suchen die Menge aller Punkte $\vec{x}$, für die

  $$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = C \quad \text{oder, anders angeschrieben,} \quad \vec{k} \cdot \vec{x} = \omega t + C \tag{8}$$

  gilt. Diese Beziehung ist nichts anderes als die Gleichung einer Ebene in Normalvektorform! Der Vektor $\vec{k}$ spielt die Rolle des Normalvektors, d.h. er steht normal auf die gesuchte Ebene. Wo die Ebene im Raum genau liegt, hängt aber nicht nur von $\vec{k}$ ab, sondern auch vom Wert der Größe $\omega t + C$, die wiederum von der gewählten Konstante C und vom (festgehaltenen) Zeitpunkt t abhängt.

- **Wie hängt die Lage der durch (8) beschriebenen Ebene von der Zeit t ab?**

  Für jeden Zeitpunkt t ergibt sich, wie bereits beobachtet, eine auf $\vec{k}$ normal stehende Ebene. Daher besitzen Ebenen, die sich auf diese Weise zu unterschiedlichen Zeiten ergeben, den gleichen Normalvektor und sind demnach alle zueinander parallel. Lassen wir die Zeit laufen, so ergibt sich das Bild einer *Ebene, die sich im Raum bewegt*. Wie schnell? Die Geschwindigkeit einer solchen „Ebene konstanter Phase" messen wir natürlich in Richtung des Normalvektors $\vec{k}$. Sie wird auch als **Ausbreitungsrichtung** der Welle bezeichnet. Welchen Betrag hat die gesuchte Geschwindigkeit? Gilt zu einem Zeitpunkt t die Beziehung (8), so gilt ein Zeitintervall Δt später (also zur Zeit $t + \Delta t$) die Gleichung

  $$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(t + \Delta t) = C \quad \text{oder} \quad \vec{k} \cdot \vec{x} = \omega \Delta t + \omega t + C\,. \tag{9}$$

  Die mathematische Preisfrage lautet nun, welchen Normalabstand die beiden durch (8) und (9) beschriebenen Ebenen haben. Dazu stellen wir uns einen Verbindungsvektor von der ersten zur zweiten Ebene vor, der auf beide Ebenen normal steht. Klarerweise muss er ein

---

[1] Statt der Sinusfunktion kann hier auch die Cosinusfunktion verwendet werden. Eine allgemeinere Form wäre $\phi(\vec{x}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \delta)$ mit einer weiteren Konstanten δ . In der Quanten- und Teilchenphysik werden ebene Wellen oft in der komplexen Form $\phi(\vec{x}, t) = A e^{i\,(\vec{k} \cdot \vec{x} \mp \omega t)}$ angeschrieben. Mit Hilfe der Eulerschen Identität $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ können sie durch Sinus- und Cosinusfunktionen ausgedrückt werden. All diese Varianten machen in der nun folgenden Analyse keinen großen Unterschied.

Vielfaches von $\vec{k}$ sein – wir schreiben ihn als $u\,\vec{k}$. Ist nun $\vec{x}_0$ ein Punkt der ersten Ebene, so ist $\vec{x}_0 + u\,\vec{k}$ ein Punkt der zweiten Ebene. Wir setzen $\vec{x}_0$ in (8) und $\vec{x}_0 + u\,\vec{k}$ in (9) ein und erhalten die Beziehungen

$$\vec{k}\cdot\vec{x}_0 = \omega t + C \quad \text{und} \quad \vec{k}\cdot\left(\vec{x}_0 + u\,\vec{k}\right) = \omega\,\Delta t + \omega t + C\,. \tag{10}$$

Subtrahieren wir die erste von der zweiten, so ergibt sich

$$u\,\vec{k}\cdot\vec{k} = \omega\,\Delta t\,, \tag{11}$$

wobei wir anstelle von $\vec{k}\cdot\vec{k}$ auch $|\vec{k}|^2$ schreiben können. Damit ist $u = \omega\,\Delta t / |k|^2$ bestimmt. Beachten Sie, dass $u > 0$ ist, da wir $\omega > 0$ vorausgesetzt haben. Der Normalabstand der beiden Ebenen ist aber gerade die Länge des Vektors $u\,\vec{k}$, also

$$\Delta x = u\,|\vec{k}\,| = \frac{\omega\,\Delta t}{|k|^2}|\vec{k}\,| = \frac{\omega\,\Delta t}{|\vec{k}\,|}\,, \tag{12}$$

und daher ist die Geschwindigkeit der wandernden Ebene in Ausbreitungsrichtung durch

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{|\vec{k}\,|} \tag{13}$$

gegeben. Wir nennen sie die **Phasengeschwindigkeit** der Welle, weil sie angibt, wie schnell sich Ebenen konstanter Phase in Ausbreitungsrichtung bewegen. Wegen $u > 0$ erfolgt die Bewegung genau in die Richtung von $\vec{k}$ (und nicht in die Gegenrichtung).

Und nun kommen wir endlich zum typischen **Wellenverhalten**: Es ergibt sich aus der Kombination der fortschreitenden Ebenen konstanter Phase mit der Sinusfunktion in (7), die wir noch gar nicht betrachtet haben. Wir beobachten zunächst den Zusammenhang der Welle zur **Schwingung**: Stellen wir uns vor, ein Beobachter ruht am Ort $\vec{x}$ und ist in der Lage, den Wert von ϕ zu jedem Zeitpunkt zu messen. Was beobachtet er? Er könne der Übersicht halber die Größe $\vec{k}\cdot\vec{x}$ als Konstante K bezeichnen (denn da er sich in Ruhe befindet, ändert sie sich für ihn ja nicht) und findet mit (7) an seinem festgehaltenen Ort $\vec{x}$ den zeitlichen Verlauf

$$\phi(t) = A\sin(K - \omega t) = -A\sin(\omega t - K) = A\sin(\omega t + \pi - K)\,. \tag{14}$$

Das ist nichts anderes als eine harmonische Schwingung vom Typ (O) mit Kreisfrequenz ω, Amplitude A und Anfangsphase $\varphi = \pi - K$. Daher verwenden wir für die Konstanten ω und A die gleichen Bezeichnungen wie im Kontext der Schwingung und nennen sie die **Kreisfrequenz** und die **Amplitude** der Welle. Als **Periodendauer** und **Frequenz** bezeichnen wir ebenfalls die gleichnamigen Größen, die unser Beobachter der von ihm gemessenen Schwingung zuordnet. Insbesondere ist die Frequenz mit (S) durch

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{15}$$

gegeben.

Langsam rundet sich das Bild ab. Eine wichtige Eigenschaft ebener Welle fehlt uns aber noch: Die Größe ϕ kann gemäß (7) Werte zwischen $-A$ und A annehmen. Wie sind sie in Raum und Zeit verteilt? Das können wir jetzt aufgrund der bereits geleisteten Vorarbeit leicht beantworten: Zu einem gegebenen Zeitpunkt t entspricht jede auf den Vektor $\vec{k}$ normal stehende Ebene einem gegebenen Wert der Phase, von der die Sinusfunktion gebildet wird. Eine vollständige Periode der Sinusfunktion entspricht einer Zunahme der Phase um 2π. Zwei auf $\vec{k}$ normal stehende Ebenen, zwischen denen die Phase eine volle Periode durchlaufen hat, bilden ein Grundmuster, das sich periodisch bis ins Unendliche wiederholt. Welchen Normalabstand besitzen zwei solche Ebenen? Entspricht die erste der Phase C, so entspricht die zweite der Phase $C+2\pi$. Die beiden Ebenen werden dann durch die Gleichungen

$$\vec{k}\cdot\vec{x} = \omega t + C \quad \text{und} \quad \vec{k}\cdot\left(\vec{x}+\lambda\vec{k}\right) = \omega t + C + 2\pi \tag{16}$$

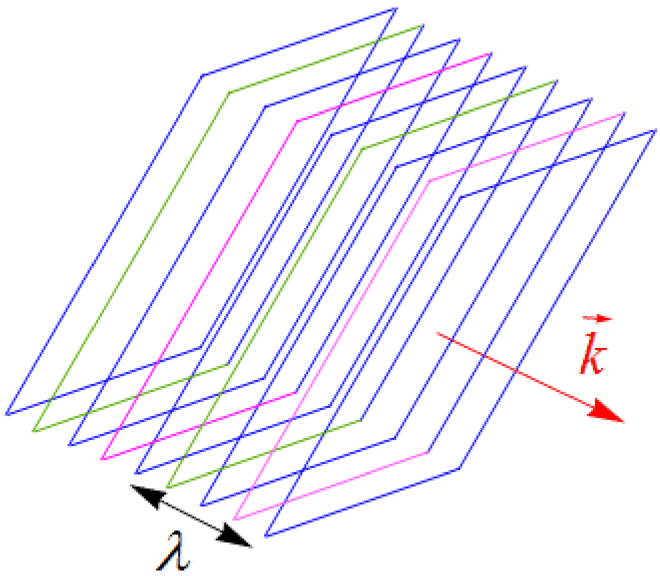
beschrieben, und eine Berechnung, die ganz analog wie die von (10) zu (12) funktioniert, ergibt den gesuchten Abstand. Wir bezeichnen ihn traditionsgemäß mit dem Symbol λ, denn es handelt sich um nichts anderes als die **Wellenlänge**:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}. \tag{17}$$

Der Vektor $\vec{k}$ heißt **Wellenzahlvektor**. Seine Richtung ist, wie wir schon gesehen haben, die Ausbreitungsrichtung der Welle, und sein Betrag gibt (bis auf den Faktor 2π) an, wie viele Wellenlängen in eine gegebene Länge in Ausbreitungsrichtung passen. Aus (13), (15) und (17) ergibt sich die bekannte (und zu Recht berühmte) Beziehung

$$\lambda\, f = c\,. \tag{18}$$

Insgesamt sind wir nun bei einem sehr einfachen Bild angelangt: Die Verteilung der Werte von ϕ in Raum und Zeit entspricht dem Voranschreiten von Ebenen mit der Phasengeschwindigkeit c in Richtung $\vec{k}$, wobei ϕ auf jeder solchen Ebene konstant ist und sich die gleiche Abfolge von ϕ-Werten in Abständen von (17) wiederholen. Wir können uns diese Situation etwa so vorstellen, dass sich ein Stapel Papier, der aus einer sich periodisch wiederholenden Abfolge von einfarbigen (unendlich ausgedehnten) Blättern besteht, starr durch den Raum bewegt. Die Farben widerspiegeln die (sich wiederholenden) Werte der Sinusfunktion (multipliziert mit der Amplitude). In der folgenden Skizze kann die Farbe blau mit $\phi = 0$ identifiziert werden, grün mit $\phi = A$ und rosa mit $\phi = -A$.



Wichtig ist, sich zu vergegenwärtigen, dass dabei in diesem Bild zunächst *nichts schwingt*! Die Schwingung kommt erst ins Spiel, wenn ein Beobachter an einem festgehaltenen Punkt sitzt und die Welle (also die „Abfolge" der Ebenen verschiedener ϕ-Werte) über sich „hinwegstreichen" lässt. Auch wenn man sich in Gedanken „auf die Welle draufsetzt" und sich mit ihr mitbewegt, schwingt nichts! Man sitzt dann einfach auf einer der Ebenen konstanter Phase und bewegt sich gleichförmig mit allen anderen Ebenen durch den Raum. Nützlich für die Vermeidung falscher Vorstellungen ist auch, sich zu verdeutlichen, dass eine ebene Welle keine „Bahn" besitzt – weder eine gerade noch eine „gewellte" (obwohl Wellen zeichnerisch oft als Schlangenlinien dargestellt werden)!

Nachbemerkungen zum Wellenbegriff

Das bisher Gesagte gehört genau genommen in das Kapitel „Kinematik der ebenen Welle". Jede (skalare und harmonische) ebene Welle ist von diesem Typ (wobei in manchen Fällen anstelle der Sinusfunktion die komplexe Exponentialfunktion gesetzt werden muss). Es gibt aber nun *unterschiedliche* Wellen, je nachdem, was sie physikalisch bedeuten bzw. von welchem Mechanismus sie erzeugt werden. Bei all diesen Wellen sind $\vec{k}$ und ω nicht voneinander unabhängig. Jeder Wellentyp ist durch eine **Zusatzbedingung** charakterisiert, die festlegt, **wie die Kreisfrequenz vom Wellenzahlvektor abhängt**. Wir wollen hier nur zwei Beispiele nennen:

- Für die meisten Wellen, mit denen man im Studium und im Physikunterricht zu tun hat, gilt

$$\omega(\vec{k}) = c\,|\vec{k}\,|, \tag{19}$$

  wobei c eine fix vorgegebene (also für *beliebige* Wellenzahlvektoren gültige) „universelle" Geschwindigkeit ist. Ebene Wellen dieses Typs sind diese genau jene, die die so genannte (mit (7) und (19) leicht zu verifizierende) **Wellengleichung**

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\phi(\vec{x},t)=0 \tag{20}$$

erfüllen, wobei $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace-Operator ist.[2] In diese Kategorie fallen insbesondere die **elektromagnetischen Wellen** (im Vakuum und sofern ihre Polarisation ignoriert wird, wobei c für die Lichtgeschwindigkeit steht) und die **Schallwellen** in Gasen und Flüssigkeiten (wobei ϕ den Druck und c die Schallgeschwindigkeit bezeichnet). Die Wellengleichung (20) besitzt neben den ebenen Wellen noch andere Lösungen (die ebenfalls als Wellen angesehen werden, nur nicht als ebene).

- Ein Beispiel für einen anderen Typ Wellen sind jene ebenen Wellen, die die **Schrödingergleichung** für ein freies Teilchen der Masse m lösen. Für sie wird $\hbar\omega$ mit der Energie E und $\hbar\vec{k}$ mit dem Impuls $\vec{p}$ identifiziert (das sind die berühmten de Broglie-Beziehungen, nur etwas anders angeschrieben), und an die Stelle von (19) tritt der aus der Energie-Impulsbeziehung $E(\vec{p})=\frac{1}{2m}|\vec{p}|^2$ folgende Zusammenhang

$$\omega(\vec{k})=\frac{\hbar}{2m}|\vec{k}|^2. \tag{21}$$

  Für diese Wellen (sie sind ein Spezialfall der quantenmechanischen „**Wellenfunktionen**“ für ein freies Teilchen und werden manchmal auch mit dem älteren Begriff „**Materiewellen**“ bezeichnet) hängt die Phasengeschwindigkeit (13) vom Wellenzahlvektor (und damit von der Wellenlänge) ab.[3] Die Rolle der Wellengleichung spielt hier nicht (20), sondern die freie Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(\vec{x},t), \tag{22}$$

  deren Lösungen allerdings komplex sind (vgl. Fußnote 1). Auch sie besitzt neben den ebenen Wellen auch andere Lösungen.

Neben der Abhängigkeit der Kreisfrequenz vom Wellenzahlvektor illustrieren diese zwei Beispiele auch, dass sich jeder physikalische Wellentyp von einer Wellengleichung herleitet. (20) und (22) sind Beispiele für *lineare* Wellengleichungen. Lineare Wellengleichungen besitzen die nützliche Eigenschaft, dass jede Linearkombination (also jede Summe und jedes Vielfache) von Lösungen

---

[2] Wellen dieses Typs in niedrigeren Dimensionen erfüllen entsprechend verkürzte Gleichungen, etwa $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x,t)=0$ für Schallwellen, die sich in einem länglichen Musikinstrument, also effektiv in einer einzigen Dimension (unter Vernachlässigung der Querdimensionen) ausbreiten, oder Auslenkungswellen, die sich entlang eines gespannten Seiles ausbreiten (sofern die Auslenkung so gering ist, dass nichtlineare Effekte, die bis zum Reißen des Seils führen, vernachlässigt werden können).

[3] Das Phänomen, dass die Phasengeschwindigkeit vom Wellenzahlvektor abhängt, wird allgemein als *Dispersion* bezeichnet. Es kann auch bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Materie auftreten.

wieder eine Lösung ist. Das bedeutet, dass Teilwellen einander **überlagern** (d.h. **interferieren**) können. Es ist dann etwa die Summe zweier ebener Wellen mit verschiedenen Wellenzahlvektoren wieder eine Lösung der jeweiligen Wellengleichung, stellt also eine Welle, aber keine *ebene* Welle dar. *Nichtlineare* Wellengleichungen (wie beispielsweise Oberflächenwellen des Wassers bei geringer Wassertiefe) sind wesentlich schwieriger zu behandeln und besitzen in der Regel *keine* ebenen Wellen als Lösungen.

Vielleicht drängt sich jetzt eine letzte Frage auf: Was ist mit den **Lichtstrahlen**? Sind das keine Wellen? Ja, sie sind Wellen, aber sie sind keine *ebenen* Wellen. Generell kann ein **Strahl** im Rahmen einer linearen Wellentheorie als (kontinuierliche) Überlagerung von ebenen Wellen mit unterschiedlichen Wellenzahlvektoren und Amplituden dargestellt werden. [4] Eine solche Überlagerung muss derart fein austariert sein, dass außerhalb einer dünnen Röhre praktisch nichts von der Welle zu merken ist.[5] Mathematisch wird sie meist mittels einer Integration über die drei Komponenten des Wellenzahlvektors mit entsprechenden $\vec{k}$ -abhängigen Gewichten bewerkstelligt. Auch **Wellenpakete**, die nur in räumlich begrenzten Gebieten nennenswert von 0 verschieden sind, und **sphärische Wellen** (**Kugelwellen**), die sich von einem Zentrum ausbreiten, können auf diese Weise aus ebenen Wellen konstruiert werden.

> Hier eine Kostprobe für eindimensionale Wellen: Die „ebenen" Wellen der Form $\sin\left(kx-\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$ mit $\omega = c\,k$, der Entsprechung von (19) für eindimensionale Wellen, sind in Raum und Zeit „unendlich ausgedehnt". Eine kontinuierliche Überlagerung der Form
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{a}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-a^2k^2\right)\sin\left(kx-ckt-\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{4a^2}\right) \qquad (23)$$
>
> (jedes bessere Computeralgebra-System kann dieses Integral berechnen!) stellt aber, wie die rechte Seite zeigt, ein Wellenpaket von der Form einer Gaußschen Glockenkurve dar, das nur auf einem Raumgebiet der Größe a nennenswert von 0 verschieden ist und sich mit Geschwindigkeit c nach rechts (in die positive x-Richtung) bewegt. Der Faktor $\frac{a}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-a^2k^2\right)$ des Integranden stellt das „Gewicht" dar, mit dem die ebene Welle $\sin\left(kx-ckt-\frac{\pi}{2}\right)$ zu diesem Wellenpaket beiträgt.

Der mathematische Grund dafür, dass *beliebige* Wellen, die als Lösungen einer linearen Wellengleichung auftreten, als Überlagerungen *ebener* Wellen dargestellt werden können, liegt darin, dass die ebenen Wellen eine *Basis* des Raums aller Lösungen der entsprechenden Wellengleichung bilden.

---

[4] Dazu muss man grundsätzlich *alle möglichen* ebenen Wellen zulassen, also – je nach Wellentyp – auch ebene Wellen der allgemeineren Form $\phi(\vec{x},t) = A\sin(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t+\delta)$ oder komplexe Wellen (vgl. Fußnote 1).

[5] Für elektromagnetische Wellen entspricht der Übergang zu Röhren, die (im Vergleich zu den Abmessungen optischer Geräte) so dünn sind, dass sie praktisch als Linien behandelt werden können, dem Übergang von der Wellenoptik zur geometrischen Optik.