DEFINITHEIT VON MATRIZEN – quadratische Formen

Sei A eine $n \times n$ Matrix.

- A definiert eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
  Der n-Vektor $\boldsymbol{x}$ wird durch f übergeführt in den n-Vektor

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

Matrix $\times$ Spaltenvektor $=$ Spaltenvektor

- A definiert ebenfalls eine quadratische Abbildung $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.
  Der n-Vektor $\boldsymbol{x}$ wird durch q übergeführt in den Skalar (Zahl)

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' A\boldsymbol{x}$$

Zeilenvektor $\times$ Matrix $\times$ Spaltenvektor $=$ Skalar

Beispiel 1:

Wir beschränken uns hier auf symmetrische Matrizen A.

$n = 2$, also $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' A \boldsymbol{x} = (\, x_1, x_2 \,) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

Es gilt für beliebiges n: $\boxed{q(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda^2 q(\boldsymbol{x})}$ und $\boxed{q(\mathbf{0}) = 0}$.

Beispiel 2:

Gegeben sei die quadratische Form

$$q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 4x_1\,x_2 + x_2^2 - 3x_1x_3 - 2x_3^2$$

Gib die zu dieser quadratischen Form q gehörende symmetrische Matrix A an!
Es gilt:

$a_{ii} =$ $\qquad\qquad$ $a_{ij} =$

Definitheit von quadratischen Formen

Definition: Eine quadratische Form $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$, bzw die entspr. Matrix A ist

1) positiv definit, falls $q(\boldsymbol{x}) = \boxed{\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} > 0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

2) positiv semi-definit, falls $q(\boldsymbol{x}) = \boxed{\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} \geq 0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

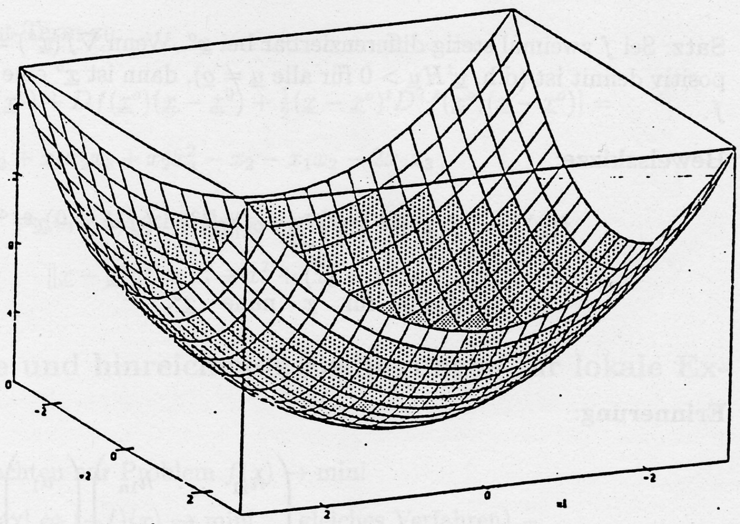
3) negativ definit, falls $q(\boldsymbol{x}) = \boxed{\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} < 0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

4) negativ semi-definit, falls $q(\boldsymbol{x}) = \boxed{\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} \leq 0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

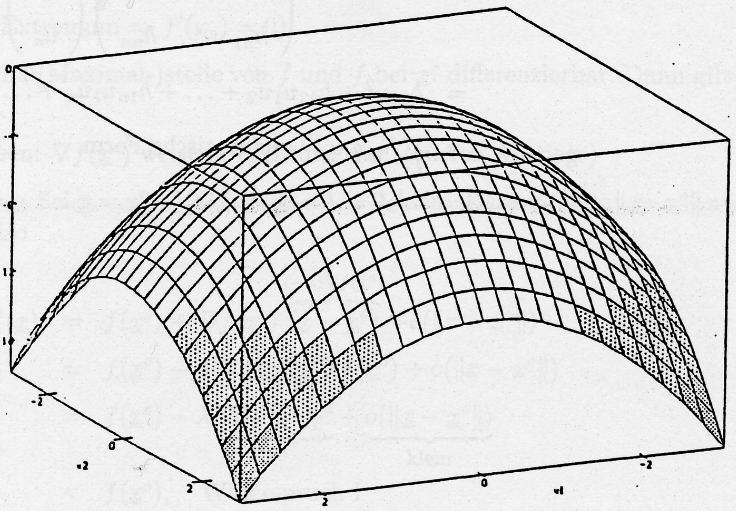
5) indefinit, falls es ein $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $q(\boldsymbol{x}) = \boxed{\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} < 0}$ **und** ein $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $q(\boldsymbol{y}) = \boxed{\boldsymbol{y}'A\boldsymbol{y} > 0}$.

Anschaulich:

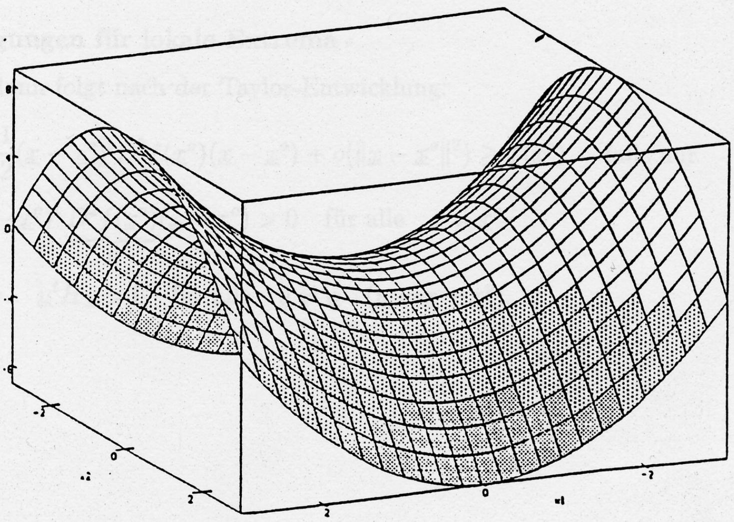
H positiv definit



H negativ definit



H indefinit



Hauptminoren

Der i-te Hauptminor α_i einer $n \times n$ Matrix A ist definiert als

$$\alpha_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat Hauptminoren

Definitheit und Hauptminoren

(a) Eine $n \times n$ Matrix A ist positiv definit $\Longleftrightarrow$ alle n Hauptminoren erfüllen $\alpha_i > 0$

(b) Eine $n \times n$ Matrix A ist negativ definit $\Longleftrightarrow$ alle n Hauptminoren erfüllen $\alpha_i \cdot (\text{-}1)^i > 0$

D.h.:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 < 0 \\ &\alpha_2 > 0 \\ &\alpha_3 < 0 \\ &\alpha_4 > 0 \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

Alle geraden Hauptminoren (α_2, α_4, α_6,. . .) sind positiv und alle ungeraden Hauptminoren (α_1, α_3, α_5,. . .) sind negativ.

(c) $\det A \neq 0$ und weder (a) noch (b) treffen zu $\Rightarrow$ A ist indefinit. (Nicht umgekehrt!!)

Wichtig: Semidefinite Matrizen können mit der Methode der Hauptminoren nicht klassifiziert werden, indefinite Matrizen nur teilweise!

Beispiele:

Bestimme die Defnitheit der folgenden quadratischen Formen:

1) $q(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^t \begin{pmatrix} 2 & \text{-}1 & 0 \\ \text{-}1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

2) $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x}$, mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ und $A = \begin{pmatrix} \text{-}4 & 3 \\ 3 & \text{-}5 \end{pmatrix}$

3) $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1\, x_3 - x_1^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 5x_3^2$

Definitheit und Eigenwerte

Für jede (symmetrische) $n \times n$ Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gilt:

1) Sind $\boxed{\text{alle } \lambda_i > 0}$, dann ist A positiv definit.

2) Sind $\boxed{\text{alle } \lambda_i \geq 0}$, dann ist A positiv semi-definit.

3) Sind $\boxed{\text{alle } \lambda_i < 0}$, dann ist A negativ definit.

4) Sind $\boxed{\text{alle } \lambda_i \leq 0}$, dann ist A negativ semi-definit.

5) Ist $\boxed{\text{ein } \lambda_i < 0 \text{ und ein } \lambda_j > 0}$, dann ist A indefinit.

Beispiel:

Bestimme die Definitheit der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$