



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Alternierende Vorzeichenmatrizen und ebene Partitionen:  
Eine Polytop-, Poset- und Pyramidenperspektive

verfasst von / submitted by

Josef Küstner

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /  
degree programme code as it appears on  
the student record sheet:

A 406 333

Studienrichtung lt. Studienblatt /  
degree programme as it appears on  
the student record sheet:

Lehramtsstudium  
UF Mathematik  
UF Deutsch

Betreut von / Supervisor:

Univ.-Prof. Mag. Dr. Ilse Fischer, Privatdoz.



# Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle allen Menschen danken, die mich während meines Studiums und beim Schreiben meiner Diplomarbeit unterstützt haben:

Ein großer Dank geht an meine Betreuerin Ilse Fischer, die mich in das spannende Themengebiet eingeführt und mich stets sehr hilfreich unterstützt hat.

Ich danke auch Jessica Striker für ihre außerordentlich inspirierende Arbeit und ihre Unterstützung bei meiner Diplomarbeit.

Danke an meine Studienkolleginnen und -kollegen, Johannes, Jessica, Julia, Katrin, Keuz, Lara, Lina, Mathias, Tina und Vicky, mit denen das Studium so viel Spaß gemacht hat und einfacher geworden ist.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern, David, Sarah, Anna und Martina, die mir das Studium ermöglicht haben und mir stets zur Seite gestanden sind.

Zu guter Letzt möchte ich noch meiner kleinen Familie, meiner Frau Lara und meiner Tochter Juna, danken, die mein Leben so sehr bereichern und mich beim „Boxen-In-Die-Ecke-Stapeln“ unterstützt haben. Ich liebe euch!



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>8</b>
1.1 Alternierende Vorzeichenmatrizen . . . . .	8
1.2 Ebene Partitionen . . . . .	9
1.3 Quadratisches Eis und Flussgitter . . . . .	14
1.4 Polytope . . . . .	20
1.5 Posets . . . . .	21
<b>2 Das ASM-Polytop <math>\mathcal{A}_n</math></b>	<b>25</b>
2.1 Die konvexe Hülle der alternierenden Vorzeichenmatrizen . . . . .	25
2.2 Facetten und Ecken des $\mathcal{A}_n$ . . . . .	32
2.3 Der Seitenverband des $\mathcal{A}_n$ . . . . .	41
<b>3 Das tetraedrische Poset</b>	<b>47</b>
3.1 Motivation . . . . .	47
3.2 Das tetraedrische Poset $T_n$ . . . . .	53
3.3 Teilposets des $T_n$ . . . . .	59
<b>4 Pyramidale ebene Partitionen</b>	<b>69</b>
4.1 Pyramidale ebene Partitionen und das tetraedrische Poset . . . . .	69
4.2 Pyramidale ebene Partitionen zählen? . . . . .	70
4.3 Eck-Pyramidale ebene Partitionen . . . . .	78
<b>Zusammenfassung / Abstract</b>	<b>84</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>87</b>

# Einleitung

Auf wie viele Arten können sich Wassermoleküle auf einer quadratischen Fläche mit gegebener Seitenlänge  $n$  anordnen? Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen  $1$ ,  $-1$  und  $0$  in einer  $n \times n$  Matrix so anzuordnen, dass sich  $1$  und  $-1$  Einträge in jeder Zeile und Spalte abwechseln und jede Zeilen- und Spaltensumme gleich  $1$  ist? Wie viele Möglichkeiten gibt es, Einheitswürfel in einem würfelförmigen Raum mit Seitenlänge  $2n$  in eine Ecke zu stapeln, sodass die Würfelstapel keine Löcher haben, bezüglich aller Achsenpermutationen symmetrisch sind und der leer gebliebene Raum die gleiche Form hat wie der Raum, der mit Würfeln befüllt wurde?

Das sind drei sehr unterschiedliche Fragestellungen, unterschiedlich kompliziert, vielleicht auf den ersten Blick eigenartig und teilweise klingen sie weit hergeholt. Umso verblüffender, dass die Antwort auf alle drei Fragen dieselbe ist. Eine kompakte Produktformel – wir betrachten sie im folgenden Kapitel – beschreibt die Anzahl all dieser Konfigurationen. Während der Zusammenhang der ersten beiden Fragestellungen – Quadratisches-Eis-Konfigurationen und alternierende Vorzeichenmatrizen – schon länger bekannt ist und klar ist, warum die Formel dieselbe ist, stehen wir beim Zusammenhang zur dritten Fragestellung – total symmetrische selbst-komplementäre ebene Partitionen – vor einem großen Fragezeichen.

Es sind genauer gesagt im Laufe der Forschung drei Objektfamilien übriggeblieben, die von derselben Formel gezählt werden und deren Zusammenhang noch nicht entschlüsselt wurde: alternierende Vorzeichenmatrizen, total symmetrische selbst-komplementäre ebene Partitionen und absteigende ebene Partitionen. Es handelt sich um einen langen Weg von der Vermutung, dass diese von derselben Formel gezählt werden, bis zu den jeweiligen Beweisen. Ein Weg, der von David M. Bressoud in einem Buch rekonstruiert wurde [4]. Der Zusammenhang bleibt aber offen und gilt als ein großes, offenes Problem der Kombinatorik.

Eine Mathematikerin, die sich mit diesem Problem auseinandersetzt, ist Jessica Striker. In ihrer Dissertation stellt sie zwei neue Konzepte vor, alternierende Vorzeichenmatrizen

(ASMs) und total symmetrische selbst-komplementäre ebene Partitionen (TSSCPPs) zu betrachten [20]: In einer Polytop- und in einer Poset-Perspektive. Es handelt sich dabei um zwei etablierte Konzepte, die im folgenden Kapitel kurz vorgestellt werden. Striker beschäftigt sich zum einen mit dem Polytop, das entsteht, wenn wir den Raum zwischen den ASMs betrachten. Dieses Polytop kann auch als Verallgemeinerung des bekannteren Birkhoff-Polytops gesehen werden. Zum anderen zeigt sie, dass ASMs und TSSCPPs mit demselben Poset in Verbindung stehen: Dem tetraedrischen Poset.

Die vorliegende Arbeit gibt zunächst einen Überblick über die Konzepte, die im Folgenden behandelt werden. Wir definieren alternierende Vorzeichenmatrizen, ebene Partitionen, Quadratisches-Eis-Konfigurationen sowie Flussgitter, Polytope und Posets. Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit dem ASM-Polytop und den wichtigsten Erkenntnissen von Striker: Die Dimension des Polytops, die Darstellung als Konvexkombination und als Durchschnitt von Halbräumen, die Anzahl der Facetten und Ecken des Polytops und die Anzahl der Facetten, auf denen eine ASM liegt. Schließlich wird noch der Seitenverband des Polytops mithilfe von Flussgittern beschrieben.

Im dritten Kapitel widmen wir uns dem tetraedrischen Poset. Wir leiten es zunächst aus ASMs und TSSCPPs ab, definieren es und betrachten anschließend die Teilposets des tetraedrischen Posets, die entstehen, wenn wir nur bestimmte Kantenfarben zulassen. Dadurch wird deutlich, dass das Poset viele Querverbindungen zu bekannten kombinatorischen Objekten und Zahlenfolgen hat, wie der Booleschen Algebra, den Catalan-Zahlen, dem Binomialkoeffizienten, Turnieren, halbstandardisierten Young-Tableaux, total symmetrischen ebenen Partitionen und eben auch ASMs und TSSCPPs.

Im vierten Kapitel beschäftigen wir uns mit pyramidalen ebenen Partitionen. Auch diese stehen in Verbindung mit dem tetraedrischen Poset. Außerdem stehen sie aber auch, wie wir zeigen werden, in Verbindung mit Symmetrieklassen von ebenen Partitionen.

Im Folgenden verwenden wir deutsche Begriffe. Abkürzungen folgen jedoch, um eine bessere Vergleichbarkeit zu ähnlichen Arbeiten zu erlauben, den englischen Bezeichnungen. Die Menge  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  kürzen wir mit der Bezeichnung  $[n]$  ab.

# 1 Grundlagen

## 1.1 Alternierende Vorzeichenmatrizen

Robbins und Rumsey stießen auf alternierende Vorzeichenmatrizen, als sie sich mit einem Algorithmus von Charles Lutwidge Dodgson beschäftigten. Robbins und Rumsey verallgemeinerten die sogenannte Determinanten Kondensation Dodgsons für die  $\lambda$ -Determinante einer Matrix (siehe [4]) und kamen bei der Determinanten-Evaluation auf alternierende Vorzeichenmatrizen.

**Definition 1.1.1.** Eine  $n \times n$  **alternierende Vorzeichenmatrix (ASM)** ist eine  $n \times n$  Matrix mit Einträgen 0, 1 und  $-1$  mit folgenden Bedingungen:

- Die Summe der Einträge in jeder Zeile und Spalte ist 1.
- Das Vorzeichen der Einträge ungleich 0 in jeder Zeile und Spalte wechselt sich ab (alterniert).

Alternierende Vorzeichenmatrizen sind an sich keine besonders komplizierten Objekte, die Beschäftigung mit ihnen zeigte aber, dass es nicht leicht ist, Vorhersagen über sie zu treffen. So war die ASM-Vermutung darüber, wie viele  $n \times n$  alternierende Vorzeichenmatrizen es gibt, für lange Zeit ungelöst. Es gibt je eine ASM mit  $n = 0$  und  $n = 1$ , zwei ASMs mit  $n = 2$ , sieben ASMs mit  $n = 3$  und 42 ASMs mit  $n = 4$ . Für kleine  $n$  kann man die Anzahl noch händisch oder mit einem Computer herausfinden. Interessanter ist es jedoch, eine Formel für beliebige  $n$  zu entdecken und beweisen.

Mills, Robins und Rumsey haben eine Vermutung aufgestellt, dass die Anzahl an  $n \times n$  alternierenden Vorzeichenmatrizen mit der eleganten Formel

$$\prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} \tag{1.1}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 1.1.1: Die sieben  $3 \times 3$  alternierenden Vorzeichenmatrizen.

berechnet werden kann [11]. Zeilberger [24] bewies diese Vermutung schließlich als erster. Es hat sich gezeigt, dass ASMs in Verbindung mit vielen weiteren Objekten stehen und es Bijektionen – das sind Eins-zu-Eins-Zuordnungen – zwischen diesen Objekten gibt. So sind sie in Bijektion zu monotonen Dreiecken (siehe Kapitel 3.1), den Ordnungsidealen eines tetraedrischen Posets (siehe Kapitel 3.3.4) oder auch Quadratisches-Eis-Konfigurationen (siehe Kapitel 1.3.1), um nur eine Auswahl zu nennen (eine Übersicht findet sich z.B. in [14]). Zwischen all diesen Objekten wurden explizite, zum Teil leicht nachvollziehbare Bijektionen, gefunden. Schwieriger wird es, wenn man nach einer Bijektion zu zwei Klassen von ebenen Partitionen – absteigende ebene Partitionen und total-symmetrische, selbstkomplementäre ebene Partitionen – sucht. Denn obwohl seit einigen Jahren bewiesen ist, dass auch diese zwei Objektklassen von (1.1) gezählt werden, wurde noch keine explizite Bijektion gefunden.

## 1.2 Ebene Partitionen

Ebene Partitionen können als eine Verallgemeinerung von „gewöhnlichen“ (Zahl-)Partitionen gesehen werden [4]. Eine **Partition** einer natürlichen Zahl  $k$  ist eine Darstellung von  $k$  als Summe von natürlichen Zahlen, wobei es auf die Reihenfolge der Zahlen nicht ankommt. So gibt es z.B. von der Zahl 5 die sieben Partitionen  $5$ ,  $4 + 1$ ,  $3 + 2$ ,  $3 + 1 + 1$ ,  $2 + 2 + 1$ ,  $2 + 1 + 1 + 1$  und  $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ . Für die bessere Strukturierung sind die Zahlen einer Partition von links nach rechts hin absteigend angeordnet (d.h. wir schreiben nicht etwa  $1 + 2 + 1$  sondern  $2 + 1 + 1$ ).

Wir können auch allgemein die Zahl  $k$  und die Summenzeichen vernachlässigen und definieren, dass eine Partition eine Zahlenfolge  $p_1, p_2, \dots, p_n$  mit der Bedingung  $p_i \geq p_j$  für alle  $1 \leq i \leq j \leq n$  ist.

Eine Partition können wir als **Young-Tableau** darstellen, das sich in mehrerer Hinsicht als sehr nützlich erweist (z.B. in Kapitel 4.2). Das Young-Tableau einer Partition (siehe Abbildung 1.2.1) repräsentiert die Partition mittels mehrerer Zeilen von Quadraten. Jede

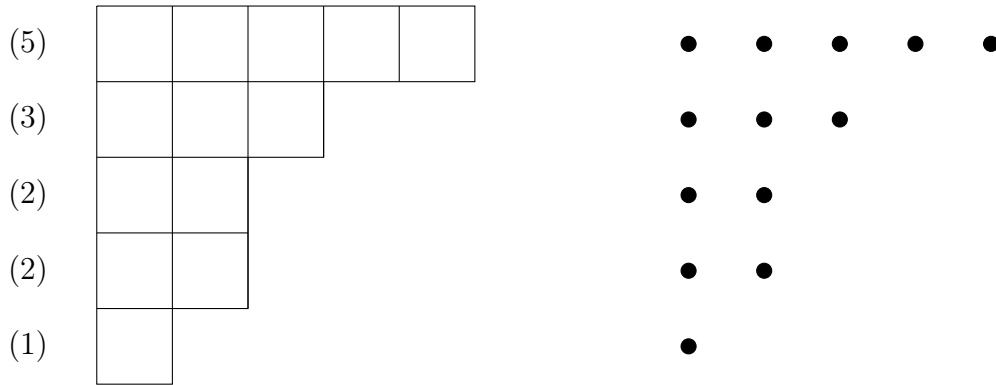


Abbildung 1.2.1: Das Young-Tableau (links) und das Ferrers-Diagramm (rechts) der Partition 53221.

Zahl  $p_i$  der Partition bestimmt die Anzahl an Quadraten in Zeile  $i$  des Tableaus.

Anstatt mit Quadraten können wir die Partition auch mit Punkten  $(i, j)$  repräsentieren, wobei der Punkt  $(i, j)$  existiert, wenn  $p_i \geq j$ . In diesem Fall sprechen wir vom **Ferrers-Diagramm einer Partition**.

Nun sind wir soweit, eine Verallgemeinerung von Partitionen zu definieren, die sogenannten ebenen Partitionen und folgen dabei der Definition von Mills, Robbins und Rumsey [12].

**Definition 1.2.1.** Eine **ebene Partition** ist eine zweidimensionale Zahlenanordnung von natürlichen Zahlen

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & & \cdots & & p_{1,\lambda_1} \\
 p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & & \cdots & & p_{2,\lambda_2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 p_{k,1} & p_{k,2} & p_{k,3} & \cdots & p_{k,\lambda_k} & & 
 \end{array}$$

mit schwach abnehmenden Zeilen- und Spalteneinträgen  $p_{i,j} \leq p_{i+1,j}$  und  $p_{i,j} \leq p_{i,j+1}$  und schwach abnehmenden Zeilenlängen  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ .

So wie wir Partitionen als zweidimensionale Young-Tableaux darstellen, können wir ebene Partitionen als dreidimensionale Stapel von Würfeln darstellen [4], die in eine Ecke gestapelt werden und keine Löcher enthalten (siehe Abbildung 1.2.2).

Die Anordnung besteht aus Würfeln an den Positionen  $(i, j, k)$  und ein Würfel an Position  $(i, j, k)$  existiert, wenn  $p_{i,j}$  existiert und  $1 \leq k \leq p_{i,j}$ .

5 3 2 2 1  
 5 2 1 1  
 3 2 1  
 1

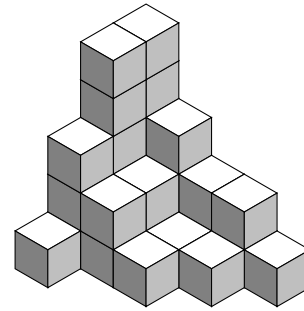


Abbildung 1.2.2: Eine ebene Partition und die zugehörigen Würfelstapel.

Anstatt mit Würfeln können wir die ebenen Partition auch mit Punkten  $(i, j, k)$  repräsentieren, dann sprechen wir vom **Ferrers-Diagramm** einer ebenen Partition.

### 1.2.1 Symmetrieklassen von ebenen Partitionen

Die Erforschung der ebenen Partitionen hat auf einige Symmetrieklassen und ähnliche Zahlenanordnungen geführt, wodurch eine Verbindung zu alternierenden Vorzeichenmatrizen hergestellt wurde (z.B. in [11] und [13]). Richard Stanley [17] hat in einem Artikel zehn Symmetrieklassen samt Vermutungen und Sätzen für deren Anzahlen und erzeugenden Funktionen vorgestellt. Wir definieren nun die Symmetrieklassen, die auch in der vorliegenden Arbeit vorkommen. Eine ausführlichere Diskussion der Symmetrieklassen samt deren Anzahlen und erzeugenden Funktionen findet sich in [4] und [17].

**Definition 1.2.2.** Eine ebene Partition, die symmetrisch bezüglich der  $x = y$  Achse ist, und deren Ferrers-Diagramm in eine  $n \times n \times k$  Box passt, nennen wir **symmetrische ebene Partition (SPP)**.

**Definition 1.2.3.** Eine ebene Partition, deren Ferrers-Diagramm in eine  $n \times n \times n$  Box passt ( $k, \lambda_k, p_{1,1} \leq n$ ) und invariant bezüglich der zyklischen Permutation  $\sigma : (x, y, z) \mapsto (y, z, x)$  der Koordinaten-Achsen ist, nennen wir **zyklisch symmetrische ebene Partition (CSPP)** der Größe  $n$ .

**Definition 1.2.4.** Eine zyklische ebene Partition, die invariant bezüglich aller 6 Permutationen der Koordinaten-Achsen ist, nennen wir **total symmetrische ebene Partition (TSPP)**.

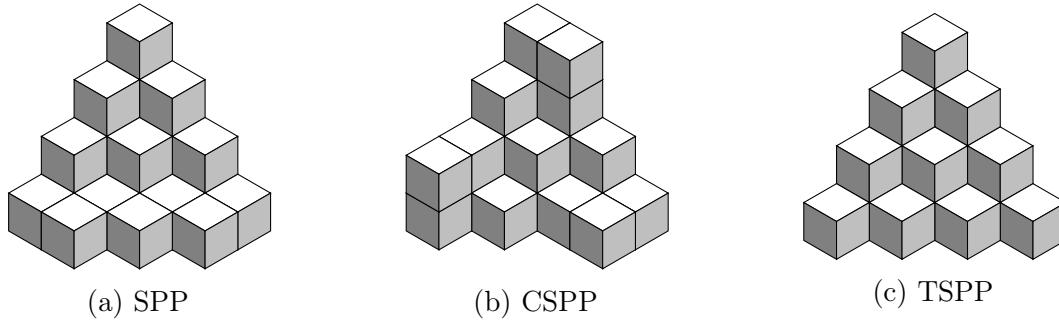


Abbildung 1.2.3: Ebene Partitionen als Würfelstapel aus drei Symmetrieklassen der Größe 4.

Für die nächsten Definitionen brauchen wir noch das Konzept des Komplements und des Transponier-Komplements einer ebenen Partition.

**Definition 1.2.5.** Das **Komplement** einer ebenen Partition mit gegebenem Ferrers-Diagramm  $F$  innerhalb einer  $n \times n \times n$  Box ist die ebene Partition, deren Ferrers-Diagramm aus allen Punkten  $(i, j, k)$  besteht, sodass  $(n + 1 - i, n + 1 - j, n + 1 - k)$  nicht in  $F$  enthalten sind und  $i, j, k \leq n$ .

**Definition 1.2.6.** Das **Transponier-Komplement** einer ebenen Partition mit gegebenem Ferrers-Diagramm  $F$  innerhalb einer  $n \times n \times n$  Box ist die ebene Partition, deren Ferrers-Diagramm aus allen Punkten  $(i, j, k)$  besteht, sodass  $(n + 1 - j, n + 1 - i, n + 1 - k)$  nicht in  $F$  enthalten sind und  $i, j, k \leq n$ .

Die folgenden Fälle können nur eintreten, wenn  $n$  gerade ist. Daher haben in den folgenden Definitionen ebene Partitionen, deren Ferrers-Diagramme in eine  $2n \times 2n \times 2n$  Box passen, die Größe  $n$ .

**Definition 1.2.7.** Eine ebene Partition, deren Ferrers-Diagramm in eine  $2n \times 2n \times 2n$  Box passt und deren Komplement gleich der ebenen Partition ist, nennen wir **selbstkomplementäre ebene Partition (SCPP)** der Größe  $n$ .

**Definition 1.2.8.** Eine ebene Partition, deren Ferrers-Diagramm in eine  $2n \times 2n \times 2n$  Box passt und deren Transponier-Komplement gleich der ebenen Partition ist, nennen wir **transponiert-komplementäre ebene Partition (TCPP)** der Größe  $n$ .

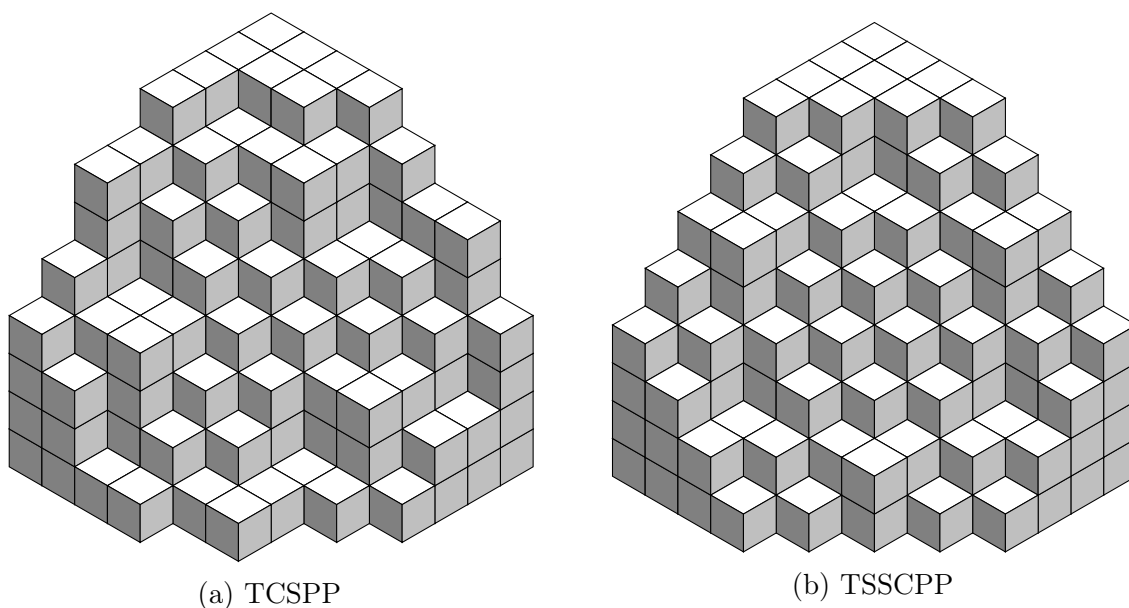


Abbildung 1.2.4: Ebene Partitionen als Würfelstapel aus zwei Symmetrieklassen der Größe 4.

**Definition 1.2.9.** Eine ebene Partition, deren Ferrers-Diagramm in eine  $2n \times 2n \times 2n$  Box passt und die sowohl zyklisch symmetrisch als auch transponiert-komplementär ist, nennen wir **tc-symmetrische ebene Partition (TCSPP)** der Größe  $n$ .

**Definition 1.2.10.** Eine ebene Partition, deren Ferrers-Diagramm in eine  $2n \times 2n \times 2n$  Box passt und die sowohl total symmetrisch als auch selbst-komplementär ist, nennen wir **total symmetrische, selbst-komplementäre ebene Partition (TSSCPP)** der Größe  $n$ .

Wie schon im letzten Kapitel erwähnt, gibt es (1.1) TSSCPPs der Größe  $n$ , eine explizite Bijektion wurde allerdings noch nicht gefunden. Eine Bijektion zwischen TSSCPPs und ASMs zu finden ist ein großes, ungelöstes Problem der Kombinatorik und war auch Ausgangspunkt für Strikers Beschäftigung mit ASMs und TSSCPPs, die in der vorliegenden Arbeit aufgegriffen wird [20].

## 1.3 Quadratisches Eis und Flussgitter

### 1.3.1 Quadratisches Eis

Quadratisches Eis (square ice) ist ein Konzept aus der statistischen Mechanik, das Kuperberg für seinen Beweis der ASM-Vermutung für die Kombinatorik fruchtbar gemacht hat [4, 9]. Unter einer Quadratischen-Eis-Konfiguration versteht man eine Anordnung von Wassermolekülen auf einem zweidimensionalen, quadratischen  $n \times n$  Gitter. Ein Beispiel ist in Abbildung 1.3.1 zu sehen. Die  $n^2$  Sauerstoffatome (O) sind quadratisch angeordnet. Zwischen zwei Sauerstoffatomen liegt je ein Wasserstoffatom (H), das mit einem der beiden O-Atome verbunden ist. Außerdem liegt links von jedem O-Atom in der ersten Spalte ein H-Atom, mit dem es verbunden ist. Dasselbe gilt rechts von jedem O-Atom in der letzten Spalte. An den oberen und unteren Rändern der Konfiguration befinden sich keine H-Atome. Diese Randbedingungen der H-Atome nennen wir Domänenwand Randbedingungen. Insgesamt sind es also  $n^2$  O-Atome und  $2n^2$  H-Atome mit der Bedingung, dass jedes O-Atom mit genau zwei H-Atomen verbunden ist.

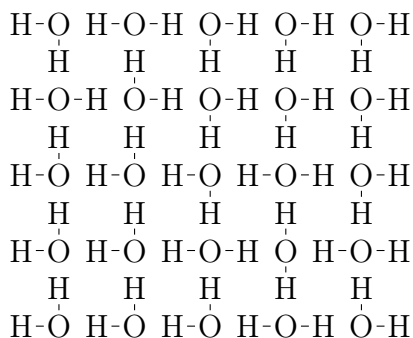


Abbildung 1.3.1: Eine  $5 \times 5$  Quadratisches-Eis-Konfiguration.

Quadratisches Eis kann als gerichteter Graph auf einem quadratischen Gitter dargestellt werden. Jedes O-Atom bildet einen Knoten. Jedes H-Atom bildet eine Kante. Eine Kante ist auf einen Knoten gerichtet, wenn das H-Atom mit dem O-Atom verbunden ist. Außerdem befindet sich je eine gerichtete Kante oberhalb der Knoten in der ersten Zeile und eine Kante unterhalb der Knoten in der letzten Zeile, die nicht auf den Knoten gerichtet ist. Somit hat jeder Knoten Eingangs- und Ausgangsgrad 2. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 1.3.2 dargestellt.

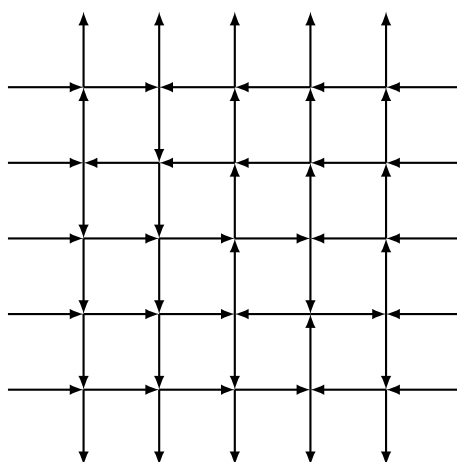


Abbildung 1.3.2: Eine  $5 \times 5$  Darstellung des Sechs-Knoten Modells als Gittergraph. Der Graph korrespondiert mit der Quadratischen-Eis-Konfiguration aus Abbildung 1.3.1.

Dadurch sind insgesamt 6 verschiedene Orientierungen an einem Knoten möglich (siehe Abbildung 1.3.3), weswegen solche Graphen auch Beispiele des Sechs-Knotenmodells genannt werden, welches in der Physik Verwendung findet [4]. Im folgenden Satz werden

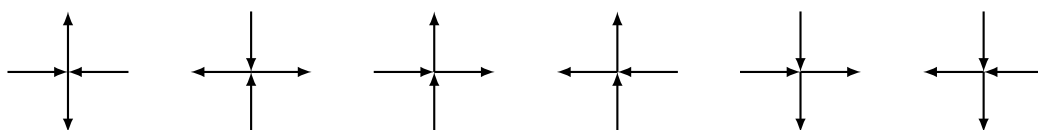


Abbildung 1.3.3: Die sechs Knotenkonfigurationen des Sechs-Knoten Modells.

wir feststellen, dass jeder Quadratischen-Eis-Konfiguration mit Domänenwand Randbedingungen genau eine alternierende Vorzeichenmatrix entspricht. Dadurch sind diese beiden Objektfamilien isomorph und wir können, das ist der große Gewinn einer Isomorphie, kombinatorische Ergebnisse aus der einen Familie auf die andere übertragen.

**Satz 1.3.1.** *Die Anzahl der  $n \times n$  alternierenden Vorzeichenmatrizen ist gleich der Anzahl der Quadratischen-Eis-Konfigurationen mit Domänenwand Randbedingungen auf einem  $n \times n$  Gitter.*

*Beweis.* Es gibt eine Bijektion zwischen den beiden Familien [4, S. 224–226], die man beispielhaft mit den Abbildungen 1.3.4 und 1.3.2 nachvollziehen kann: Horizontale Moleküle entsprechen (+1) Einträgen in der alternierenden Vorzeichenmatrix. Vertikale Moleküle

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 1.3.4: Die  $5 \times 5$  alternierende Vorzeichenmatrix, die der Quadratischen-Eis-Konfiguration aus Abbildung 1.3.1 und dem Gittergraph aus Abbildung 1.3.2 entspricht.

entsprechen  $(-1)$  Einträgen. Alle anderen Moleküle entsprechen  $0$  Einträgen. Bei allen  $0$  Einträgen in der ASM betrachten wir die Zeilensummen aller Einträge links von dem  $0$  Eintrag in derselben Zeile. Wenn diese gleich  $1$  ist, dann hat das entsprechende Molekül ein H-Atom im Osten, wenn die Zeilensumme gleich  $0$  ist, dann hat es ein H-Atom im Westen. Des Weiteren betrachten wir die Spaltensumme aller Einträge oberhalb in derselben Spalte. Wenn diese gleich  $1$  ist, dann hat das entsprechende Molekül ein H-Atom im Norden, wenn die Spaltensumme aber gleich  $0$  ist, hat es ein H-Atom im Süden.

In jeder ASM wechseln sich  $(+1)$  und  $(-1)$  Einträge in jeder Zeile und Spalte ab und weil jedes H-Atom zwischen zwei O-Atomen mit genau einem O-Atom verbunden sein muss, wechseln sich auch horizontale und vertikale Moleküle ab. Außerdem gibt es einen  $(+1)$  Eintrag sowie ein horizontales Molekül (wegen der Randbedingungen) in jeder Zeile und Spalte mehr. Jeder Quadratischen-Eis-Konfiguration wird somit eine eindeutige ASM zugeordnet.

Durch die Spalten- und Zeilensummen-Bedingungen bei den  $0$  Einträgen wird auch jeder ASM eine eindeutige (erlaubte) Quadratische-Eis-Konfiguration mit Domänenwand Randbedingungen zugeordnet.  $\square$

### 1.3.2 Flussgitter

Striker verwendet in [21] eine etwas modifizierte Form der Quadratischen-Eis-Konfigurationen, das einfache Flussgitter. Flussgitter helfen beim Verständnis des ASM-Polytops  $\mathcal{A}_n$  und wir werden in den Kapiteln 2.2 und 2.3 darauf zurückkommen.



**Definition 1.3.1.** Das **vollständige Flussgitter**  $C_n$  ist ein gerichteter Graph auf einem  $(n + 1) \times (n + 1)$  Gitter.  $C_n$  besteht aus den  $n^2$  inneren Knoten  $(i, j)$  für  $i, j \in [n] := \{1, 2, 3, \dots, n\}$  und den  $4n$  Grenz-Knoten  $(i, 0)$ ,  $(0, j)$ ,  $(i, n + 1)$  und  $(n + 1, j)$  für  $i, j \in [n]$  sowie der Kantenmenge  $\{((i, j), (i, j + 1)), ((i, j), (i, j - 1)), ((i, j), (i + 1, j)), ((i, j), (i - 1, j)) : i, j \in [n]\}$ . Das  $5 \times 5$  vollständige Flussgitter ist in Abbildung 1.3.5 dargestellt.

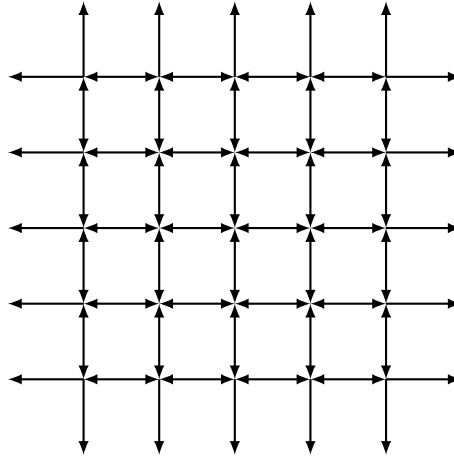


Abbildung 1.3.5: Das  $5 \times 5$  vollständige Flussgitter  $C_5$ .

**Definition 1.3.2.** Ein  $n \times n$  **einfaches Flussgitter** ist ein Teilgraph des  $C_n$ , der aus allen Knoten des  $C_n$  besteht. Für die Kanten gilt: Zu jedem inneren Knoten sind vier Kanten inzident, wobei entweder alle Kanten von dem Knoten weggerichtet sind, alle Kanten auf den Knoten gerichtet sind oder die horizontalen Kanten, die mit dem Knoten inzident sind, in dieselbe Richtung zeigen und die vertikalen Kanten ebenfalls in dieselbe Richtung zeigen.

Ein einfaches Flussgitter ist in Abbildung 1.3.6 dargestellt. Insgesamt sind sechs Knotenkonfigurationen möglich, die in Abbildung 1.3.7 dargestellt sind. Einfache Flussgitter lassen sich in Quadratische-Eis-Konfigurationen umwandeln, indem man die Richtungen aller horizontalen Kanten umdreht. Einfache Flussgitter sind also ebenfalls in Bijektion mit alternierenden Vorzeichenmatrizen. Ein weiterer Beweis für die Bijektion wäre demnach nicht notwendig. Die Bijektion, die im folgenden Beweis gezeigt wird und von Striker vorgestellt wurde [21], liefert aber Einblicke in den Zusammenhang von Flussgittern und ASMs und wird bei der Betrachtung des ASM-Polytops noch relevant sein.

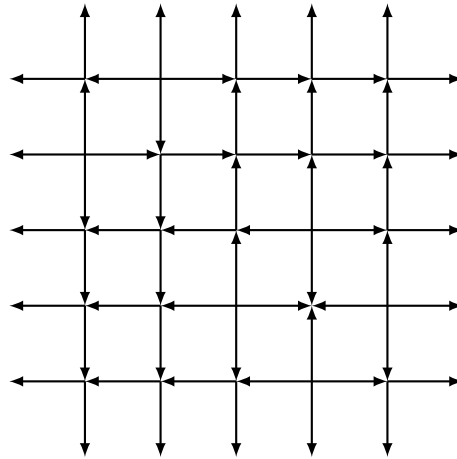


Abbildung 1.3.6: Ein  $5 \times 5$  einfaches Flussgitter. Das Gitter korrespondiert mit der  $5 \times 5$  alternierenden Vorzeichenmatrix in Abbildung 1.3.4 sowie der Quadratischen-Eis-Konfiguration und dem Sechs-Knoten-Modell aus Abbildung 1.3.1 und 1.3.2.

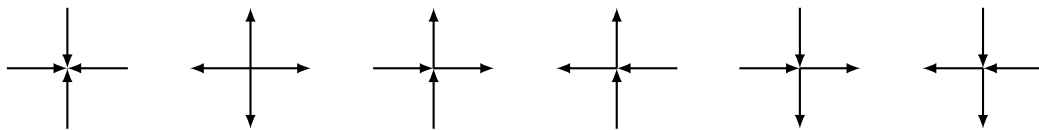


Abbildung 1.3.7: Die sechs Kantenkonfigurationen des einfachen Flussgitters. Eingangsgrad und Ausgangsgrad sind immer gerade.

**Satz 1.3.2.** *Die Anzahl der  $n \times n$  alternierenden Vorzeichenmatrizen ist gleich der Anzahl der  $n \times n$  elementaren Flussgitter.*

*Beweis.* Für diesen Beweis finden wir wieder eine Bijektion zwischen den beiden Familien, die man mit den Abbildungen 1.3.4 und 1.3.6 nachvollziehen kann.

Alle Einträge  $a_{i,j}$  einer ASM  $A$  entsprechen einem inneren Knoten  $v_{i,j}$  eines entsprechenden Flussgitters  $g(A)$ . Wenn die Zeilensumme vom Rand links von  $a_{i,j}$  bis zu diesem Eintrag ( $\sum_{i'=1}^i a_{i',j}$ ) gleich 1 ist, dann gibt es die Kante  $(v_{i,j}, v_{i,j+1})$  in  $g(A)$ . Wenn die Zeilensumme rechts von  $a_{i,j}$  bis zu diesem Eintrag gleich 1 ist, dann gibt es die Kante  $(v_{i,j}, v_{i,j-1})$  in  $g(A)$ .

Wenn die Spaltensumme vom Rand oberhalb von  $a_{i,j}$  bis zu diesem Eintrag ( $\sum_{j'=1}^i a_{i,j'}$ ) gleich 1 ist, dann gibt es die (gerichtete) Kante  $(v_{i,j}, v_{i+1,j})$  in  $g(A)$ . Wenn die Spaltensumme vom Rand unterhalb von  $a_{i,j}$  bis zu diesem Eintrag gleich 1 ist, dann gibt es die Kante  $(v_{i,j}, v_{i-1,j})$  in  $g(A)$ .

Wegen den alternierenden Einträgen in jeder ASM gibt es zwischen je zwei benachbarten inneren Knoten genau eine gerichtete Kante. Weil jede vollständige Spalten- und Zeilensumme in einer ASM gleich 1 ist, gibt es eine gerichtete Kante, die von den äußersten inneren Knoten zu den Grenz-Knoten zeigt.  $(+1)$  Einträge der ASM werden zu Quellen in  $g(A)$ , alle inzidenten Kanten zeigen von diesem Knoten weg.  $0$  Einträge werden zu Senken in  $g(A)$ , alle inzidenten Kanten zeigen zu diesem Knoten hin.

Die restlichen Kanten in  $g(A)$  sind von den Quellen und Senken bestimmt: Wandert man entlang einer Zeile oder Spalte vom Rand bis zur ersten Quelle, zeigen alle Kanten bis dorthin entgegen die Richtung der Wanderroute. Ab der Quelle zeigen alle Kanten in die Richtung der Wanderroute, bis man wieder eine Senke erreicht, wo sich die Richtung der Kanten wieder dreht. So fährt man fort, bis man schließlich die letzte Quelle erreicht, von wo aus alle Kanten bis zum Rand in die Richtung der Wanderroute zeigen.

$$\leftarrow \leftarrow \text{Quelle} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \text{Senke} \leftarrow \dots \leftarrow \text{Quelle} \rightarrow \rightarrow$$

Die Kantenkonfigurationen, die dadurch im korrespondierenden Flussgitter  $g(A)$  entstehen, zeigen, dass  $g(A)$  ein (eindeutiges) einfaches Flussgitter ist.

Außerdem erhalten wir aus jedem einfachen Flussgitter eine eindeutige ASM, indem jede Quelle zu einem  $(+1)$ -Eintrag, jede Senke zu einem  $(-1)$ -Eintrag und jede andere Knotenkonfiguration zu einem  $0$ -Eintrag gemacht wird. Es entsteht dadurch eine alternierende Vorzeichenmatrix, weil in jeder Spalte und Zeile des einfachen Flussgitters wieder

die Wanderoute vom Rand beginnend mit Kanten beginnt, die entgegen der Wanderoute zeigen, bis man zur ersten Quelle gelangt (was wegen der sechs Kantenkonfigurationen die einzige Möglichkeit ist, dass sich die Richtung der Kanten dreht). Danach wechseln sich entlang der Wanderoute die Senken und Quellen ab, bis man schließlich zur letzten Quelle gelangt und anschließend zum Rand des Flussgitters, wo die letzte Kante auf einen Grenz-Knoten zeigt. Dieses Alternieren von Quellen und Senken entspricht dem Alternieren der Vorzeichen in der ASM.  $\square$

Neben einfachen Flussgittern und dem vollständigen Flussgitter betrachten wir in Kapitel 2.3 elementare Flussgitter.

**Definition 1.3.3.** Ein **elementares Flussgitter**  $G$  ist ein Teilgraph des  $C_n$ , sodass die Kantenmenge von  $G$  eine Vereinigung von Kantenmengen von einfachen Flussgittern ist.

## 1.4 Polytope

Bei Polytopen handelt es sich um die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung von Polygonen im 2-dimensionalen oder Polyeder im 3-dimensionalen euklidischen Raum. Striker [21] betrachtet das Polytop, das die  $n \times n$  alternierenden Vorzeichenmatrizen im  $\mathbb{R}^{n^2}$  aufspannen, worauf wir im Kapitel 1.4 zurückkommen werden. Die Theorie und Terminologie über Polytope folgt hauptsächlich dem Buch von Ziegler [25]. Die deutschen Grundlagen für dieses Kapitel sind [3] und [8].

Ein (konvexes) Polytop kann auf zwei unterschiedliche Weisen definiert werden. Erstens ist ein Polytop die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Die konvexe Hülle  $\text{conv}(A)$  besteht aus allen Punkten, die sich als Konvexkombination von Punkten aus  $A$  darstellen lassen:

$$\text{conv}(A) = \left\{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k : x_1, \dots, x_k \in A; \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0; \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zweitens ist ein Polytop der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen, was bedeutet, dass ein Polytop die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems ist:

$$\{v \in \mathbb{R}^n : a_1 v \leq z_1, a_2 v \leq z_2, \dots, a_k v \leq z_k; a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n; z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R}\}.$$

Der Fundamentalsatz für Polytope besagt, dass ein Polytop immer sowohl eine konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge als auch ein beschränkter Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen ist.

Eine Hyperebene im  $n$ -dimensionalen Raum ist ein affiner Teilraum  $H$  des Raumes  $\mathbb{R}^n$  mit Dimension  $n - 1$ . Es handelt sich dabei um die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit  $n$  Unbekannten:

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c_0; a_1, \dots, a_n, c_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Jede Hyperebene trennt den Raum in zwei Halbräume. Eine Hyperebene  $H$  ist eine Stützebene eines Polytops, wenn das Polytop vollständig in einem dieser Halbräume liegt.

Eine Seite des Polytops ist der Durchschnitt des Polytops mit einer Stützebene. Eine Seite mit Dimension  $k$  nennen wir  $k$ -Seite. Die 0-Seite des Polytops ist eine Ecke des Polytops, eine 1-Seite ist eine Strecke. Eine  $(n - 1)$ -Seite ist eine Facette und die  $n$ -Seite ist das Polytop selbst, wenn das Polytop Dimension  $n$  hat. Auch die leere Menge ist eine Seite des Polytops. Die Menge aller Ecken, die in einer  $k$ -Seite  $S$  enthalten sind, bezeichnen wir mit  $\text{vert}(S)$ .

Ist das Polytop  $P$  als konvexe Hülle einer Menge von Punkten  $A$  definiert,  $P = \text{conv}(A)$ , so ist  $\text{vert}(P)$  eine Teilmenge von  $A$ . Gibt es eine Hyperebene  $H$ , die den Raum in zwei Halbräume trennt, sodass ein Punkt  $v \in A$  in einem Halbraum liegt und alle anderen Punkte  $v_i \in \text{vert}(P)$  mit  $v_i \neq v$  im anderen Halbraum liegen, dann ist auch  $v \in \text{vert}(P)$  also eine Ecke von  $P$ . Außerdem ist jede  $k$ -Seite  $S$  eines Polytops  $P$  ein Polytop mit der Eckenmenge  $\text{vert}(S) = S \cap \text{vert}(P)$ , siehe [25, Kapitel 2.1].

## 1.5 Posets

Ein Poset („partially ordered set“) ist, wie der englische Name schon verrät, eine teilweise geordnete Menge. Striker [22, 19] beschäftigt sich mit einem speziellen Poset, dem tetraedrischen Poset, das in Verbindung zu alternierenden Vorzeichenmatrizen, ebenen Partitionen und weiteren kombinatorischen Familien steht. Als Vorbereitung auf dieses Kapitel definieren wir nun die wichtigsten Grundlagen von Posets, die vor allem aus [5] entnommen sind. Eine ausführlichere Besprechung von Posets findet sich in [15].

Es handelt sich bei einem Poset um eine Menge  $P$  zusammen mit einer Relation  $\leq$ , die

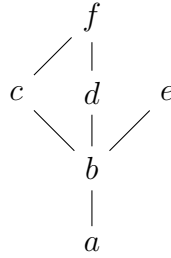


Abbildung 1.5.1: Das Hasse-Diagramm eines Posets mit den Bedeckungsrelationen  $b \succ a$ ,  $c \succ b$ ,  $d \succ b$ ,  $e \succ b$ ,  $f \succ c$  und  $f \succ d$ .

reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist:

- $\forall x \in P : x \leq x$  (Reflexivität),
- $\forall x, y \in P : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$  (Antisymmetrie),
- $\forall x, y, z \in P : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$  (Transitivität).

Wenn  $x \leq y$  und es kein  $z$  gibt, sodass  $x \leq z \leq y$ , schreiben wir  $y \succ x$  („ $y$  bedeckt  $x$ “) für die Bedeckungsrelation.

Ein endliches Poset kann mit einem Hasse-Diagramm visualisiert werden. Das Hasse-Diagramm zeigt alle Elemente aus  $P$  als Knoten eines Graphen und alle Bedeckungsrelationen, die ein endliches Poset eindeutig festlegen, als Kanten. Sind zwei Knoten  $x$  und  $y$  mit einer Kante verbunden, dann bedeckt  $x$  das Element  $y$ , wenn  $x$  nördlich von  $y$  liegt, was in Abbildung 1.5.1 verdeutlicht wird.

Ein Beispiel für ein Poset ist die Boolesche Algebra  $B_n$ . Das ist das Poset über der Menge  $2^{[n]}$ , der Menge aller Teilmengen von  $[n]$ , geordnet durch Mengeninklusion. Die Boolesche Algebra  $B_n$  hat demnach  $2^n$  Elemente. In Abbildung 1.5.2 ist  $B_3$  dargestellt.

Sind die Posets  $P$  mit der Ordnungsrelation  $\leq_P$  und  $Q$  mit der (nicht notwendig gleichen) Ordnungsrelation  $\leq_Q$  gegeben, nennen wir sie isomorph ( $P \cong Q$ ), wenn es eine bijektive Abbildung  $\phi : P \rightarrow Q$  gibt, sodass gilt:

$$\forall x, y \in P : x \leq_P y \Leftrightarrow \phi(x) \leq_Q \phi(y).$$

Die direkte Summe zweier Posets  $P$  mit  $\leq_P$  und  $Q$  mit  $\leq_Q$  ist das Poset auf der Vereinigungsmenge  $P \cup Q$ , sodass  $x \leq y$  genau dann gilt, wenn  $x, y \in P$  und  $x \leq_P y$  oder

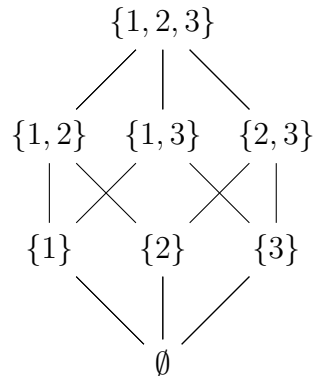


Abbildung 1.5.2: Das Hasse-Diagramm der Booleschen Algebra  $B_3$ .

$x, y \in Q$  und  $x \leq_Q y$ . Als Hasse-Diagramm visualisiert ist die direkte Summe lediglich das Nebeneinander-Zeichnen der beiden Hasse-Diagramme von  $P$  und  $Q$  ohne Verbindungen zwischen den beiden herzustellen.

Ein Poset  $Q$  ist ein induziertes Teilposet eines Posets  $P$ , wenn  $Q \subseteq P$  und  $x \leq_Q y \Leftrightarrow x \leq_P y$ . Das Poset  $P$  nennen wir Oberposet. Ein Teilposet ist also induziert, wenn alle Relationen aus dem Oberposet übernommen werden.

Haben wir ein Poset  $P$  mit der Ordnungsrelation  $\leq_P$  gegeben, ist das duale Poset  $P^*$  gegeben als Poset über der Menge  $P$  mit der Ordnungsrelation  $\leq_{P^*}$ , für die gilt:  $x \leq_{P^*} y \Leftrightarrow y \leq_P x$ .

Eine Teilmenge  $I$  eines Posets  $P$  ist ein Ordnungsideal, wenn für alle  $x \in I$ ,  $y \in P$ , mit  $x \leq y$  folgt, dass  $y \in I$ . Die Menge aller Ordnungsideale  $I$  von  $P$  bildet selbst ein Poset mit der Relation der Mengeninklusion und wird im Folgenden als  $J(P)$  bezeichnet.

Wenn  $K$  ein induziertes Teilposet von  $P$  ist und  $K$  linear geordnet ist, nennen wir  $K$  eine Kette von  $P$ . Eine endliche Kette  $K = k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n$  hat die Länge  $l(K) := |K| - 1$ . Eine Kette heißt maximal, wenn es keine Kette in  $P$  gibt, die  $K$  als echte Teilmenge enthält.

Ein Element  $x \in P$  heißt minimal, wenn es kein  $y \in P$  gibt, sodass  $y \leq x$  und  $y \neq x$ . Ein Element  $x \in P$  heißt maximal, wenn es kein  $y \in P$  gibt, sodass  $x \leq y$  und  $y \neq x$ .

Wir nennen ein Poset  $P$  graduiert vom Rang  $n$ , wenn jede maximale Kette die Länge  $n$  hat. Für ein graduiertes Poset gibt es eine eindeutig bestimmte Rangfunktion  $r : P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$  definiert durch  $r(x) = 0$ , wenn  $x$  ein minimales Element von  $P$  ist, und  $r(y) = r(x) + 1$ , wenn  $y \succ x$ . Wir sagen,  $x$  hat den Rang  $i$ , wenn  $r(x) = i$ . Sei  $p_i$  die Anzahl

der Elemente von  $P$  mit Rang  $i$ , dann ist die rangerzeugende Funktion gegeben durch das Polynom

$$F(P, q) := \sum_{i=0}^n p_i q^i.$$

Die Boolesche Algebra  $B_n$  hat zum Beispiel  $\binom{n}{i}$  Elemente von Rang  $i$ , daher ist die rangerzeugende Funktion

$$F(B_n, q) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} q^i = (1 + q)^n.$$

Ein großer Themenkomplex bei Posets sind Verbände. Sie begegnen uns in Kapitel 2 und 3 und finden auch in der Polytop-Theorie Verwendung.

Sei  $P$  ein Poset und  $x, y \in P$ , dann ist  $z \in P$  eine obere Schranke von  $x$  und  $y$ , wenn  $x \leq z$  und  $y \leq z$ . Analog ist  $z$  eine untere Schranke, wenn  $z \leq x$  und  $z \leq y$ . Das Supremum von  $x$  und  $y$  ist die kleinste obere Schranke  $z$ , für die gilt, dass  $z \leq w$  für alle oberen Schranken  $w$  von  $x$  und  $y$ . Das Infimum von  $x$  und  $y$  ist die größte untere Schranke  $z$ , für die gilt, dass  $w \leq z$  für alle unteren Schranken  $w$  von  $x$  und  $y$ . Wenn es ein Supremum von  $x$  und  $y$  gibt, bezeichnen wir es als  $x \vee y$ . Das Infimum von  $x$  und  $y$  bezeichnen wir als  $x \wedge y$ , wenn es existiert.

Ein Verband ist ein Poset  $P$ , indem es für je zwei Elemente  $x, y \in P$  ein Supremum  $x \vee y$  und ein Infimum  $x \wedge y$  gibt. Ein Verband  $V$  heißt distributiv, wenn für alle  $x, y, z \in V$  gilt:

- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$  und
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ .

In einem Verband  $V$  nennen wir ein nicht-minimales Element  $x \in V$  supremum-irreduzibel, wenn  $x$  für keine zwei Elemente  $y, z \in V$  eine minimale obere Schranke, d.h. ein Supremum, ist.

Schließlich besagt der Struktursatz für endliche, distributive Verbände – der Satz von Birkhoff – dass es für jeden endlichen distributiven Verband  $V$  ein Poset  $P$  gibt, sodass  $J(P) \cong V$ . [5, Satz 2.3.13]



## 2 Das ASM-Polytop $\mathcal{A}_n$

Dieses Kapitel befasst sich hauptsächlich mit den Ergebnissen der Arbeit von Striker in [21] und [20]. Sie geht von den Einsichten über das Birkhoff-Polytop  $\mathcal{B}_n$  aus, welches im ASM-Polytop enthalten ist, und findet analoge Sätze für das ASM-Polytop. Zunächst zur Definition:

**Definition 2.0.1.** Das  $n$ -te Alternierende-Vorzeichenmatrix-Polytop  $\mathcal{A}_n$  ist die konvexe Hülle der  $n \times n$  alternierenden Vorzeichenmatrizen als Vektoren im  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Wir werden zunächst die Beschreibung des Polytops als beschränktes Polyeder betrachten und zeigen, dass die Dimension von  $\mathcal{A}_n$  gleich  $(n-1)^2$  ist. Anschließend zeigen wir, dass das ASM-Polytop  $4((n-2)^2+1)$  Facetten hat. Danach widmen wir uns der Frage, auf wie vielen Facetten eine alternierende Vorzeichenmatrix liegt und zeigen, dass die  $n \times n$  ASMs genau die Ecken des Polytops  $\mathcal{A}_n$  sind. Schließlich widmen wir uns noch dem Seitenverband des Polytops und finden dadurch eine Möglichkeit, die Dimension einer  $k$ -Seite zu bestimmen. Grundlegende Begriffe zu Polytopen (Kapitel 1.4), Posets und Verbände (Kapitel 1.5) und der Graphentheorie (siehe z.B. [1]) sind in diesem Kapitel vorausgesetzt. Außerdem werden wir auf die bereits definierten Begriffe einfaches, elementares und vollständiges Flussgitter (Kapitel 1.3.2) zurückgreifen.

### 2.1 Die konvexe Hülle der alternierenden Vorzeichenmatrizen

Bevor wir zeigen, wie  $\mathcal{A}_n$  auch über den beschränkten Schnitt von Halbräumen definiert werden kann, brauchen wir noch eine Definition für innere Zahlen, die wir im Beweis verwenden.

**Definition 2.1.1.** Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  ist eine *innere Zahl*, wenn  $0 < a < 1$ .

Als laufendes Beispiel, an dem die Schritte im Beweis illustriert werden sollen, dient uns folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0,5 & 0,2 & -0,1 & 0,4 \\ 0,4 & -0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Satz 2.1.1.** *Die konvexe Hülle der  $n \times n$  alternierenden Vorzeichenmatrizen besteht aus allen reellen  $n \times n$  Matrizen  $X = \{x_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ , deren Einträge folgende Bedingungen erfüllen:*

$$0 \leq \sum_{i=1}^{i'} x_{i,j} \leq 1 \quad (1 \leq i', j \leq n) \quad (2.1)$$

$$0 \leq \sum_{j=1}^{j'} x_{i,j} \leq 1 \quad (1 \leq i, j' \leq n) \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1 \quad (1 \leq j \leq n) \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1 \quad (1 \leq i \leq n). \quad (2.4)$$

*Beweis.* Es sei  $P(n)$  die Teilmenge aller Matrizen  $X = \{x_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$  des  $\mathbb{R}^{n^2}$ , die die Bedingungen (2.1)-(2.4) erfüllt. Es ist offensichtlich, dass alternierende Vorzeichenmatrizen die Bedingungen (2.3) und (2.4) erfüllen. Mit der Bedingung, dass sich (+1) und (-1) Einträge in jeder Zeile und Spalte abwechseln, sind auch die Ungleichungen (2.1) und (2.2) erfüllt. Daher sind alle  $n \times n$ -ASMs in  $P(n)$  enthalten.

Es bleibt noch zu zeigen, dass jedes Element aus  $P(n)$  eine Konvexkombination von ASMs ist. Hierzu konstruieren wir mittels innerer Zeilen- und Spalten-Partialsommen einen Kreis in der Matrix  $X \in P(n)$ , mit dessen Hilfe wir  $X$  als Konvexkombination zweier Matrizen beschreiben können. Diese liegen auch in  $P(n)$ , sind aber in zumindest einer Bedingung den ASMs „ähnlicher“ als  $X$ . Durch wiederholte Anwendung dieser Methode erhalten wir schlussendlich eine Konvexkombination aus ASMs für  $X$ .

Sei  $X \in P(n)$ . Wir definieren die  $i$ -te Zeilen-Partialsomme  $z_{i,j}$  und die  $j$ -te Spalten-Partialsomme  $s_{i,j}$  wie folgt:  $z_{i,j} := \sum_{i'=1}^i x_{i',j}$  und  $s_{i,j} := \sum_{j'=1}^j x_{i,j'}$ . Zusätzlich definieren

wir  $z_{0,j} = 0$  und  $s_{i,0} = 0$ . Für die folgende Konstruktion schreiben wir die Partialsummen zwischen die entsprechenden Einträge der Matrix  $X$ :

$$\left( \begin{array}{cccccccccc} & s_{0,1} & & s_{0,2} & & & & s_{0,n-1} & & s_{0,n} \\ z_{1,0} & x_{1,1} & z_{1,1} & x_{1,2} & z_{1,2} & \dots & z_{1,n-2} & x_{1,n-1} & z_{1,n-1} & x_{1,n} & z_{1,n} \\ & s_{1,1} & & s_{1,2} & & & & s_{1,n-1} & & s_{1,n} \\ z_{2,0} & x_{2,1} & z_{2,1} & x_{2,2} & z_{2,2} & \dots & z_{2,n-2} & x_{2,n-1} & z_{2,n-1} & x_{2,n} & z_{2,n} \\ & s_{2,1} & & s_{2,2} & & & & s_{2,n-1} & & s_{2,n} \\ & & \vdots & & & \ddots & & & & \vdots & \\ & s_{n-1,1} & & s_{n-1,2} & & & & s_{n-1,n-1} & & s_{n-1,n} \\ z_{n,0} & x_{n,1} & z_{n,1} & x_{n,2} & z_{n,2} & \dots & z_{n,n-2} & x_{n,n-1} & z_{n,n-1} & x_{n,n} & z_{n,n} \\ & s_{n,1} & & s_{n,2} & & & & s_{n,n-1} & & s_{n,n} \end{array} \right)$$

Nun konstruieren wir einen Kreis  $K$  in  $X$ . Dazu suchen wir eine innere Partialsumme, also eine Partialsumme  $p \in (0; 1)$ , in der Matrix. Wenn es keine solche gibt, dann wechseln sich in der Matrix in jeder Spalte und Zeile laut (2.1) und (2.2) die Einträge (+1) und (-1) ab und die Spalten- und Zeilensummen sind laut (2.3) und (2.4) gleich 1. Also ist die Matrix bereits eine alternierende Vorzeichenmatrix und somit auch eine Konvexkombination aus ASMs ( $X = 1 \cdot X$ ).

Also angenommen, es gibt eine innere Partialsumme  $p_1$ . Wir finden eine benachbarte innere Partialsumme  $p_2$ , d.h. beide Summen sind mit demselben Matrixeintrag  $x \in X$  benachbart, wie folgt:

Jede Partialsumme, die nicht am Rand der Matrix liegt, ist Teil zweier „Sterne“ um Einträge  $x_{i,j}$ , wie sie in Abbildung 2.1.2 dargestellt sind (die Partialsummen am Rand der

$$\left( \begin{array}{cccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0,9 & 1 & 0 & 1 \\ & 0,1 & & 0 & & 0,9 & & 0 & \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0,2 & 0,7 & -0,1 & 0,6 & 0,4 & 1 \\ & 0,6 & & 0,2 & & 0,8 & & 0,4 & \\ 0 & 0,4 & 0,4 & -0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 1 \\ & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \end{array} \right)$$

Abbildung 2.1.1: Das laufende Beispiel mit den Partialsummen zwischen den Einträgen.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & z_{i-1,j} & & z_{i-1,j+1} & & \\
s_{i,j-1} & x_{i,j} & s_{i,j} & , & s_{i,j} & x_{i,j+1} & s_{i,j+1} \\
& & z_{i,j} & & z_{i,j+1} & & 
\end{array}$$

Abbildung 2.1.2: Die beiden Sterne, in denen  $s_{i,j}$  liegt. Ein Stern besteht aus einem Eintrag  $x_{i,j}$  und allen benachbarten Partialsummen dieses Eintrags.

Matrix werden in der Konstruktion nicht betrachtet, da sie entweder 0 oder 1 und somit keine inneren Zahlen sind).

Da  $z_{i,0} = s_{0,j} = 0$  für  $1 \leq i, j \leq n$ , ist  $x_{i,j} = z_{i,j} - z_{i-1,j} = s_{i,j} - s_{i,j-1}$  und somit

$$z_{i,j} + s_{i,j-1} = s_{i,j} + z_{i-1,j}. \quad (2.5)$$

Wir betrachten nun einen Stern, in dem die innere Zahl  $p_1$  enthalten ist. Wir nehmen an, alle drei anderen Partialsummen sind keine inneren Zahlen. Da aber alle Partialsummen in der Menge  $[0; 1]$  enthalten sind, kann die Gleichung (2.5) nicht erfüllt sein, was einen Widerspruch darstellt. Also gibt es zumindest eine benachbarte innere Partialsumme  $p_2$ . Nun fügen wir den Eintrag  $x_1$ , der zu beiden inneren Partialsummen  $p_1$  und  $p_2$  benachbart ist, dem Kreis  $K$  hinzu.

Da  $p_2$  noch in einem zweiten Stern enthalten ist, finden wir wegen (2.5) eine weitere Partialsumme  $p_3$ , die zu  $p_2$  benachbart ist. Wir fügen den Eintrag  $x_2$ , der zu  $p_2$  und  $p_3$  benachbart ist, unserem Kreis hinzu und verbinden ihn mit  $x_1$ . Graphentheoretisch betrachtet sind  $x_1$  und  $x_2$  zwei Knoten, die über eine Kante mit Gewicht  $p_2$  verbunden sind.



Abbildung 2.1.3: Der Ausschnitt der Matrix, der  $p_1, p_2, p_3, x_1$  und  $x_2$  enthält, und der entsprechende Graph.

Da die Matrix endlich groß ist und jede innere Partialsumme in zwei Sternen enthalten ist, in denen (2.5) erfüllt ist, kann dieser Vorgang solange wiederholt werden, bis wir schließlich wieder zu  $p_1$  zurückkommen und den letzten Eintrag  $x_k$  mit  $x_1$  über die Kante

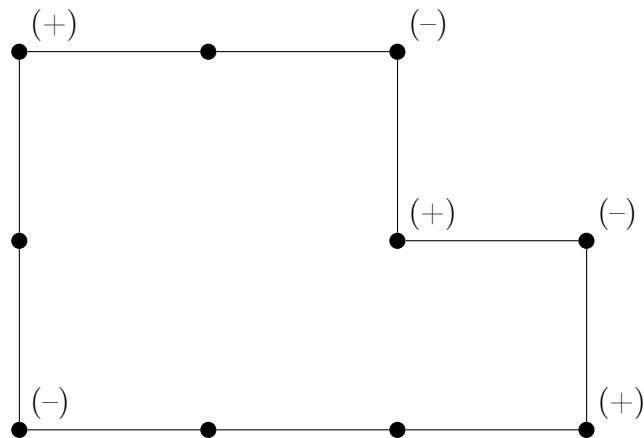


Abbildung 2.1.4: Die Eckpunkte eines Kreises werden abwechselnd mit (+) und (-) markiert. (Der Kreis entspricht nicht dem Kreis im laufenden Beispiel.)

$$\begin{pmatrix}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 0 & \mathbf{0,1 (+)} & \mathbf{0,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0,1} & \mathbf{0,9 (-)} & 1 & 0 & 1 & \\
 & \mathbf{0,1} & & 0 & & \mathbf{0,9} & & 0 & & \\
 0 & \mathbf{0,5} & 0,5 & 0,2 & 0,7 & \mathbf{-0,1} & 0,6 & 0,4 & 1 & \\
 & \mathbf{0,6} & & 0,2 & & \mathbf{0,8} & & 0,4 & & \\
 0 & \mathbf{0,4 (-)} & \mathbf{0,4} & \mathbf{-0,2} & \mathbf{0,2} & \mathbf{0,2 (+)} & 0,4 & 0,6 & 1 & \\
 & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 
 \end{pmatrix}$$

Abbildung 2.1.5: Im laufenden Beispiel wurde ein Kreis konstruiert, dessen Kanten innere Partialsummen sind. Die Kanten sind rot und die Knoten blau dargestellt. Die Eckpunkte wurden abwechselnd mit (+) und (-) markiert.

mit Gewicht  $p_1$  verbinden. Somit haben wir einen Kreis konstruiert, dessen Kantengewichte ausschließlich innere Partialsummen sind.

Der Kreis in der Matrix ist ein Polygon, dessen Eckwinkel alle rechte Winkel sind. Daher hat er eine gerade Anzahl an Eckpunkten und wir können die Eckpunkte des Kreises abwechselnd mit (+) und (-) markieren, wie es in Abbildung 2.1.4 und 2.1.5 zu sehen ist.

Wir fassen die Kantengewichte des Kreises nun zu einer Menge  $M$  wie folgt zusammen: Jede Kante liegt zwischen genau zwei Eckpunkten und für jede Kante gibt es vier Lagemöglichkeiten:

1. Die Kante mit Gewicht  $z_{i,j}$  liegt rechts von einer mit  $(-)$  markierten Ecke und links von einer mit  $(+)$  markierten Ecke. Dann fügen wir  $z_{i,j}$  der Menge  $M$  hinzu.
2. Die Kante mit Gewicht  $z_{i,j}$  liegt rechts von einer mit  $(+)$  markierten Ecke und links von einer mit  $(-)$  markierten Ecke. Dann fügen wir  $1 - z_{i,j}$  der Menge  $M$  hinzu.
3. Die Kante mit Gewicht  $s_{i,j}$  liegt unter einer mit  $(-)$  markierten Ecke und oberhalb einer mit  $(+)$  markierten Ecke. Dann fügen wir  $s_{i,j}$  der Menge  $M$  hinzu.
4. Die Kante mit Gewicht  $s_{i,j}$  liegt unter einer mit  $(+)$  markierten Ecke und oberhalb einer mit  $(-)$  markierten Ecke. Dann fügen wir  $1 - s_{i,j}$  der Menge  $M$  hinzu.

In Abbildung 2.1.6 ist dargestellt, welche Werte der Menge  $M$  bei einer gegebenen Markierung hinzugefügt werden.

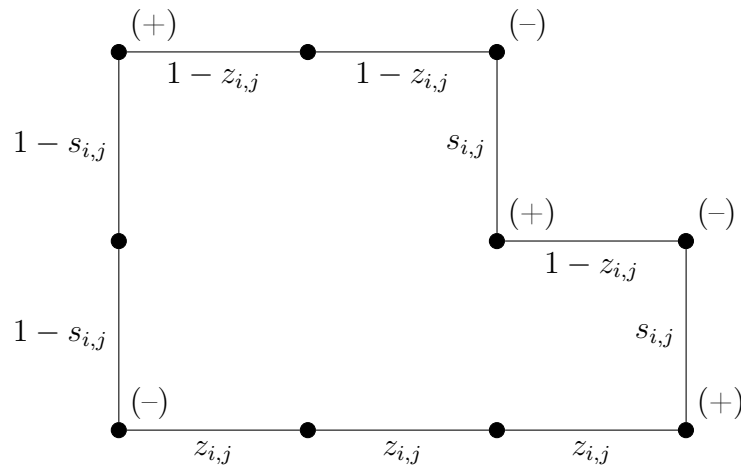


Abbildung 2.1.6: Jede Partialsummen-Kante liegt entweder horizontal oder vertikal zwischen zwei Eckpunkten, wobei es auf die Position der  $(+)$  und der  $(-)$  Markierung ankommt.

Wir bilden nun das Minimum  $k'$  aus der Menge  $M$ :

$$k' := \min(M).$$

Wir ziehen  $k'$  von allen mit  $(-)$  markierten Ecken ab und addieren es zu allen mit  $(+)$  markierten Ecken. Dadurch erhalten wir eine Matrix  $X'$ , die außer den Eckpunkten des Kreises mit der Matrix  $X$  übereinstimmt.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 & & & & 0 & & \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0 & 0,3 & 0,7 & 1 & 0 & 1 & \\ & 0,5 & & 0 & & 0,5 & & 0 & & \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0,2 & 0,7 & -0,1 & 0,6 & 0,4 & 1 & \\ & 0,8 & & 0,2 & & 0,6 & & 0,4 & & \\ 0 & 0,2 & 0,2 & -0,2 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0,6 & 1 & \\ & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{pmatrix}$$

Abbildung 2.1.7: Im laufenden Beispiel ist  $M = \{0, 9; 0, 9; 0, 9; 0, 8; 0, 4; 0, 2; 0, 5\}$  und somit  $k' = 0, 2$ . Es wurde in dieser Abbildung  $k'$  von allen  $(-)$  Einträgen abgezogen und zu allen  $(+)$  Einträgen addiert. Die Zeilen- und Spaltensummen bleiben 1 und es gibt eine innere Partialsumme weniger (die Zeilenpartialsumme  $z_{3,2}$  ist 0).

In  $X'$  sind die Zeilen und Spaltensummen 1, da aufgrund der Polygonkonstruktion in jeder Zeile und Spalte gleich oft derselbe Wert subtrahiert wie addiert wird. Außerdem bleiben die Partialsummen in  $[0; 1]$ , weil alle Partialsummen des Kreises im Minimum „vertreten“ sind und somit nur um die Differenz zu 0 bzw. zu 1 addiert bzw. subtrahiert wird. (Wenn z. B. eine Partialsumme 0,1 rechts von einer  $(-)$ -Ecke liegt, kann von dieser Ecke nicht 0,5 abgezogen werden und sich somit die Partialsumme auf -0,4 verringern, weil das Minimum höchstens 0,1 sein kann.)

Da in  $K$  nur innere Partialsummen vorkommen, sind die Partialsummen, die in  $X$  keine inneren Partialsummen sind, auch in  $X'$  keine inneren Partialsummen. Außerdem ist in  $X'$  mindestens eine Partialsumme  $p$  mit  $p = k'$  oder  $1 - p = k'$ , die in  $X$  eine innere Partialsumme ist, keine innere Partialsumme mehr. Also hat  $X'$  zumindest eine innere Partialsumme weniger als  $X$ .

Als nächsten Schritt konstruieren wir analog eine Matrix  $X''$ , indem wir die  $(+)$  und  $(-)$  Markierungen in  $X$  vertauschen und den Vorgang mit einem Minimum  $k''$  wiederholen. Auch die Matrix  $X''$  hat zumindest eine innere Partialsumme weniger als  $X$ .

Wie leicht nachgerechnet werden kann, ist  $X$  eine Konvexkombination der Matrizen  $X'$  und  $X''$ :

$$X = \frac{k''}{k' + k''} X' + \frac{k'}{k' + k''} X''.$$

Wenn  $X'$  oder  $X''$  keine ASM ist, wird derselbe Vorgang für  $X'$  oder  $X''$  wiederholt.

Wenn dieser Vorgang genügend oft wiederholt wird, d.h. solange, bis in allen Matrizen der Konvexkombination alle Partialsummen gleich 1 oder 0 sind (während die Spalten- und Zeilensummen gleich 1 sind), sehen wir, dass  $X$  eine Konvexkombination aus alternierenden Vorzeichenmatrizen ist.  $\square$

**Korollar 2.1.1.** *Das ASM-Polytop  $\mathcal{A}_n$  hat Dimension  $(n - 1)^2$ .*

*Beweis.* Wie wir gerade bewiesen haben, sind alle Zeilen- und Spaltensummen in  $\mathcal{A}_n$  gleich 1. Es können also in jeder Zeile und in jeder Spalte  $n - 1$  Einträge frei gewählt werden. Der  $n$ -te Eintrag ist dann jedoch die nötige Differenz auf 1.  $\square$

## 2.2 Facetten und Ecken des $\mathcal{A}_n$

Zunächst wollen wir uns ansehen, wie viele Facetten das Polytop  $\mathcal{A}_n$  hat. Eine Facette ist, zur Erinnerung, eine  $k$ -Seite des Polytops, dessen Dimension um 1 kleiner ist als die Dimension des Polytops. Im  $\mathcal{A}_n$  sind die Facetten also die  $((n - 1)^2 - 1)$ -Seiten.

**Satz 2.2.1.** *Das Polytop  $\mathcal{A}_n$  hat  $4((n - 2)^2 + 1)$  Facetten.*

*Beweis.*  $\mathcal{A}_n$  ist durch die Bedingungen aus Satz 2.1.1 definiert. Für den Beweis wollen wir die Ungleichungen umformulieren. Aus (2.1) und (2.3) bekommen wir  $\sum_{i=1}^{i'-1} x_{i,j} \stackrel{(2.3)}{=} 1 - \sum_{i=i'}^n x_{i,j} \geq 1$  und somit  $\sum_{i=i'}^n x_{i,j} \leq 0$ . Analog folgt aus (2.2) und (2.4)  $\sum_{j=j'}^n x_{i,j} \geq 0$ . Somit lässt sich  $\mathcal{A}_n$  durch die folgenden  $4n^2$  Ungleichungen beschreiben:

$$\sum_{i=1}^{i'} x_{i,j} \geq 0 \quad \sum_{i=i'}^n x_{i,j} \geq 0 \quad \sum_{j=1}^{j'} x_{i,j} \geq 0 \quad \sum_{j=j'}^n x_{i,j} \geq 0$$

für alle  $1 \leq i', j' \leq n$ . Es kann also maximal  $4n^2$  Facetten des Polytops geben, die entstehen, wenn wir aus einer der Ungleichungen eine Gleichung machen. Aus Symmetriegründen reicht es, wenn wir zunächst nur die Facetten zählen, die aus den Ungleichungen  $\sum_{i=1}^{i'} x_{i,j} \geq 0$  entstehen und die Anzahl dann vervierfachen. Hierzu müssen wir alle  $k$ -Seiten ausschließen, deren Dimension kleiner als  $(n - 1)^2 - 1$  ist. Zur Illustration werden im Folgenden die Partialsummen-Ungleichungen  $\sum_{i=1}^{i'} x_{i,j} \geq 0$  als Pfeile in der Matrix dargestellt, wie es in Abbildung 2.2.1 dargestellt ist.



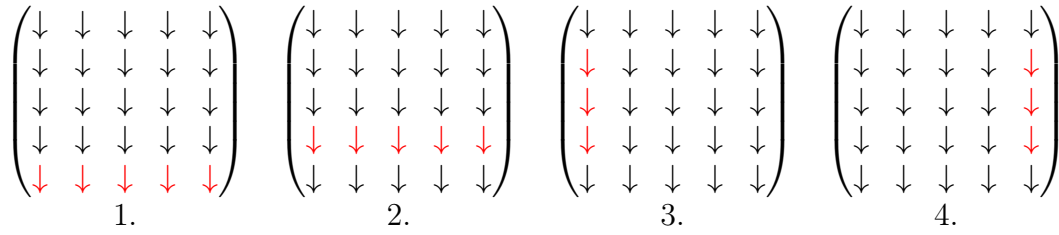


Abbildung 2.2.2: Die Partialsummen-Ungleichungen, die wegen 1.-4. keine Facetten definieren, sind rot dargestellt.

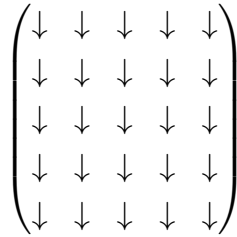


Abbildung 2.2.1: Die Partialsummen-Ungleichungen der Spaltensummen von oben beginnend sind als Pfeile dargestellt. Die Pfeile zeigen die Richtung an, in der die Summen entstehen.

1. Da die kompletten Spalten- und Zeilensummen immer gleich 1 sind, definiert die Gleichung  $\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 0$  die leere 0-Seite und somit keine Facette.
2. Die Einträge am Rand der Matrix sind nicht negativ und im Speziellen ist  $x_{n,j} \geq 0$  für alle  $j$ . Zusammen mit der Bedingung  $x_{n,1} + \dots + x_{n,n} = 1$  folgt, dass  $x_{n,j} \leq 1 = \sum_{i=1}^n x_{i,j}$ . Wenn wir nun auf beiden Seiten der Ungleichung  $x_{n,j} \geq 0$  abziehen, erhalten wir die Ungleichung  $\sum_{i=1}^{n-1} x_{i,j} \geq 0$ . Somit sind diese Partialsummen-Ungleichungen für alle  $j$  bereits impliziert und erhöhen die Anzahl der Facetten nicht.
3. Außerdem sind durch die Nichtnegativität am Rand auch die Ungleichungen der Partialsummen am Rand  $\sum_{i=1}^{i'} x_{i,1} \geq 0$  und
4.  $\sum_{i=1}^{i'} x_{i,n} \geq 0$  für  $2 \leq i' \leq n-1$  impliziert.

Somit bleiben die  $(n-2)^2$  Gleichungen  $\sum_{i=1}^{i'} x_{i,j} = 0$  mit  $1 \leq i' \leq n-2$  und die Gleichungen  $x_{1,1} = 0$  und  $x_{1,n} = 0$  übrig, die Facetten definieren können. Aus Symmetriegründen müssen wir jedoch die Gleichung  $x_{1,n} = 0$  weglassen, da sie auch in den Gleichungen der Form  $\sum_{j=j'}^n x_{i,j} = 0$  enthalten ist. Somit kommen wir auf  $(n-2)^2 + 1$  Gleichungen.

$$\begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

Abbildung 2.2.3: Die verbleibenden Gleichungen einer „Symmetrieklasse“ sind in schwarz dargestellt.

Jede dieser Gleichungen definiert eine Facette, da durch die Gleichung ein weiterer Eintrag der Matrix nicht mehr frei wählbar ist. Betrachten wir z.B. die Gleichung  $\sum_{i=1}^k x_{i,j} = 0$  für ein  $k$  mit  $2 \leq k \leq n$ . Dann können  $k - 1$  Einträge, die in der Summe vorkommen, frei gewählt werden, der  $k$ -te Eintrag ist dann aber festgelegt. Wenn wir als Beispiel  $x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{k-1,j}$  frei wählen, dann ist  $x_{k,n} = -\sum_{i=1}^{k-1} x_{i,j}$ .

Wenden wir nun das Symmetrieargument an, kommen wir auf maximal  $4((n - 2)^2 + 1)$  Facetten. Jede dieser Facetten ist definiert als die Menge aller Matrizen in  $\mathcal{A}_n$ , die für  $2 \leq i, j \leq n - 1$  eine der folgenden Gleichungen erfüllen (aufgrund der besseren Vergleichbarkeit wurden  $i'$  und  $i$  sowie  $j'$  und  $j$  vertauscht):

$$\sum_{i'=1}^{i-1} x_{i',j} = 0, \quad \sum_{i'=i+1}^n x_{i',j} = 0, \quad \sum_{j'=1}^{j-1} x_{i,j'} = 0, \quad \sum_{j'=j+1}^n x_{i,j'} = 0 \quad (2.6)$$

$$x_{1,1} = 0, \quad x_{n,1} = 0, \quad x_{1,n} = 0, \quad x_{n,n} = 0. \quad (2.7)$$

Wir haben somit gezeigt, dass die Anzahl der Facetten des  $\mathcal{A}_n$  kleiner oder gleich  $4((n - 2)^2 + 1)$  ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Facetten, die durch die Gleichungen definiert sind, voneinander verschieden sind, womit die Gleichheit gezeigt ist. Dafür finden wir für je zwei verschiedene Facetten  $F_1, F_2$  zwei Matrizen  $X_1, X_2$ , die je in einer Facette enthalten und in der anderen nicht enthalten sind, also  $X_1 \in F_1, X_1 \notin F_2, X_2 \in F_2$  und  $X_2 \notin F_1$ . Wir beschränken uns hierfür auf die alternierenden Vorzeichenmatrizen im Polytop, da sie für den Beweis ausreichen.

Wir verwenden das einfache Flussgitter  $g(A)$  einer alternierenden Vorzeichenmatrix, das durch die Bijektion im Beweis von Satz 1.3.2 eindeutig definiert ist, und das vollständige Flussgitter  $C_n$ , in dem alle möglichen Kanten der von den  $n \times n$  ASMs definierten Gitter

vorhanden sind. Jede Kante in  $g(A)$  entsteht durch eine Partialsumme gleich 1. Das heißt aber auch, dass jede Kante, die in  $g(A)$  im Vergleich zu  $C_n$  fehlt, eine Partialsumme gleich 0 repräsentiert.

Somit können wir die Facetten aus (2.6) als Teilgraphen des  $C_n$  betrachten, in dem eine gerichtete Kante entfernt wurde. Die Facetten aus (2.7) können wir als Teilgraphen des  $C_n$  betrachten, aus dem zwei gerichtete Kanten entfernt wurden (z.B. für  $x_{1,1} = 0$  die Kanten  $((1, 1), (1, 2))$  und  $((1, 1), (2, 1))$ ). In Abbildung 2.2.4 sind zwei Beispiele dargestellt.

Betrachten wir nun zwei Facetten  $F_1$  und  $F_2$ , die aus je einer Gleichung aus (2.6) und (2.7) entstehen. Wir bezeichnen die gerichteten Kanten, die in den zugehörigen Teilgraphen des  $C_n$  fehlen, als  $f_1 \notin F_1$  und  $f_2 \notin F_2$ . Wenn es eine zweite fehlende Kante gibt, nennen wir sie  $f'_1$  bzw.  $f'_2$ . Die fehlenden Kanten von  $F_1$  und  $F_2$  sind aufgrund der Konstruktion aus (2.6) und (2.7) verschieden.

Wir erzeugen nun eine ASM  $X_1$  über ihr einfaches Flussgitter  $g(X_1)$  mit den Bedingungen, dass  $f_1 \notin g(X_1)$  (und  $f'_1 \notin g(X_1)$ ) und  $f_2 \in g(X_1)$  (und  $f'_2 \in g(X_1)$ ). Die restlichen Kanten können frei gewählt werden. Dann ist  $X_1$  in  $F_1$  enthalten und in  $F_2$  nicht enthalten. Analog erzeugen wir eine ASM  $X_2$ , die in  $F_1$  nicht enthalten und in  $F_2$  enthalten ist. Illustriert wird das in Abbildung 2.2.5.

Somit sind die beiden Facetten voneinander verschieden und jede der  $4((n-2)^2 + 1)$  Gleichungen definiert eine eigene Facette.  $\square$

Als nächstes sehen wir uns an, auf wie vielen Facetten des Polytops eine einzelne ASM liegt. Die Anzahl der Facetten hängt von den (+1) Einträgen am Rand der Matrix ab, weshalb wir auf diese zuvor noch genauer eingehen.

**Definition 2.2.1.** Sei  $A$  eine  $n \times n$  alternierende Vorzeichenmatrix. Die Anzahl der (+1) Einträge in den Ecken der Matrix  $A$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{E}(A)$ . Die Anzahl der (+1) Einträge am Rand der Matrix  $A$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{R}(A)$ . Da am Rand keine (-1) Einträge vorkommen, können wir schreiben:

$$E(A) := a_{1,1} + a_{n,1} + a_{1,n} + a_{n,n}, \quad (2.8)$$

$$R(A) := \sum_{i=1}^n a_{i,1} + \sum_{i=1}^n a_{i,n} + \sum_{j=2}^{n-1} a_{1,j} + \sum_{j=2}^{n-1} a_{n,j}. \quad (2.9)$$

Ein Beispiel ist die  $4 \times 4$  ASM in Abbildung 2.2.6, in der die (+1) Einträge am Rand

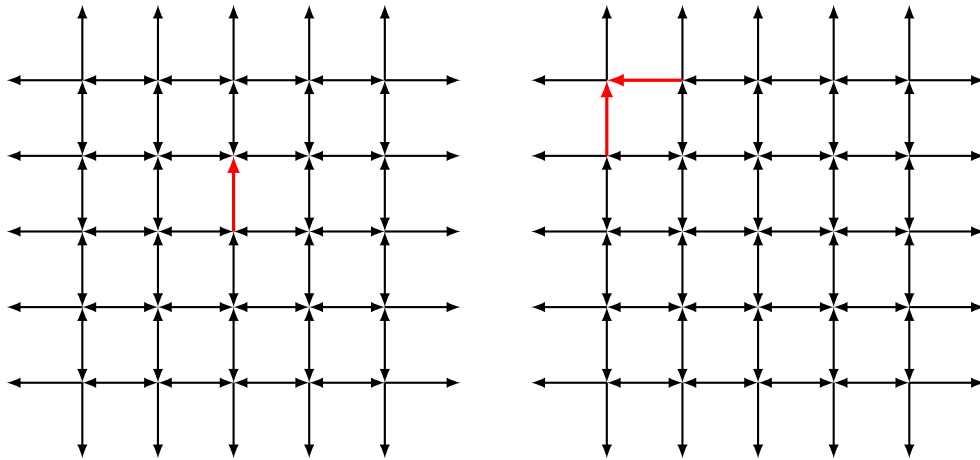


Abbildung 2.2.4: Ein Teilgraph des  $C_5$ , bei dem aufgrund der Gleichung  $\sum_{i'=1}^2 x_{i',3} = 0$  eine Kante fehlt (links) und ein Teilgraph, bei dem aufgrund der Gleichung  $x_{1,1} = 0$  zwei Kanten fehlen (rechts).

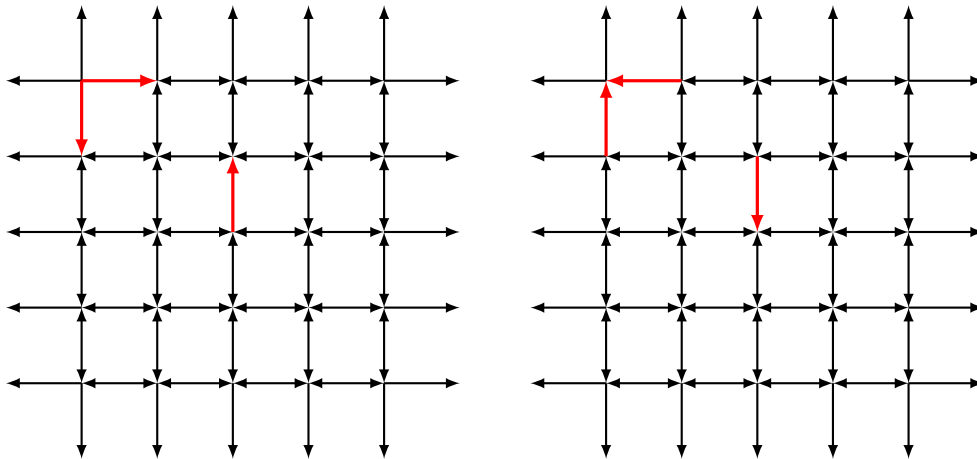


Abbildung 2.2.5: Die zwei Teilgraphen des  $C_5$ , auf Basis derer man zwei ASMs findet, die jeweils nur in einer der Facetten enthalten sind, die durch die Teilgraphen in Abbildung 2.2.4 definiert sind.

der Matrix blau dargestellt werden und der (+1) Eintrag, der zusätzlich in einer Ecke der Matrix steht, rot dargestellt wird.

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Abbildung 2.2.6: Eine  $4 \times 4$  alternierende Vorzeichenmatrix mit  $E(A) = 1$  und  $R(A) = 3$ .

Am Rand kann kein  $(-1)$  Eintrag vorkommen, da sonst die Zeilen- oder Spalten-Summe nicht 1 sein könnte. Weil in jeder Zeile und Spalte am Rand keine  $(-1)$  Einträge vorkommen, gibt es genau einen  $(+1)$  Eintrag in jeder Zeile und Spalte am Rand der Matrix  $A$ . Wenn ein  $(+1)$  Eintrag in einer Ecke der Matrix steht, steht er zugleich in einer Zeile *und* einer Spalte am Rand der Matrix, wodurch kein weiterer  $(+1)$  Eintrag in dieser Zeile bzw. Spalte vorkommen kann. Wir sehen also:

$$E(A) \in \{0, 1, 2\}, R(A) \in \{2, 3, 4\}$$

und

$$R(A) = 4 - E(A).$$

Mit diesen Erkenntnissen lässt sich nun der folgende Satz beweisen.

**Satz 2.2.2.** *Eine  $n \times n$  alternierende Vorzeichenmatrix  $A$  liegt auf  $2(n-1)(n-2) + E(A)$  Facetten von  $\mathcal{A}_n$ .*

*Beweis.* Aus Satz 2.2.1 wissen wir, dass jeder 0 Eintrag am Rand der Matrix für eine Facette des Polytops steht. Die Einträge am Rand korrespondieren also mit  $4n - 4 - R(A)$  bzw.  $4n - 8 + E(A)$  Facetten, auf denen die Matrix  $A$  liegt.

Die restlichen Facetten erhalten wir aus dem  $(n-2) \times (n-2)$  inneren Bereich des einfachen Flussgitters  $g(A)$ , das mit der Matrix  $A$  korrespondiert. In diesem Bereich gibt es  $2(n-2)(n-3)$  gerichtete Kanten. Jede Kante steht laut Konstruktion der Bijektion (Beweis von Satz 1.3.2) für eine Zeilen- oder Spaltenpartialsumme gleich 0 in der Matrix  $A$ . Betrachten wir z.B. eine gerichtete Kante  $(a_{i,j}, a_{i+1,j})$  (die Kante zeigt von  $a_{i,j}$  auf  $a_{i+1,j}$ ), dann ist die Summe  $\sum_{i'=i+1}^n a_{i',j} = 0$ . Wie man leicht nachprüfen kann, korrespondieren

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

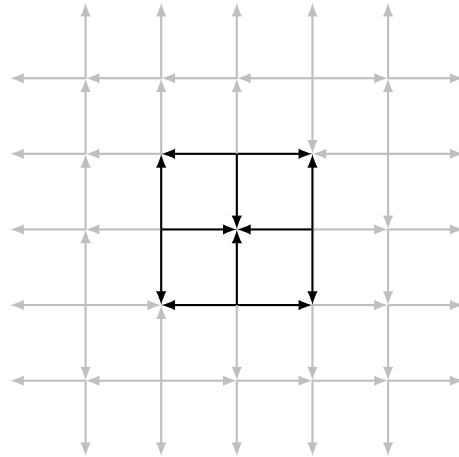


Abbildung 2.2.7: Eine  $5 \times 5$  ASM  $A$  mit  $g(A)$ , bei dem der innere Bereich mit seinen  $2(n-2)(n-3) = 12$  Kanten hervorgehoben ist.

die  $2(n-2)(n-3)$  inneren Kanten genau mit den Summen aus dem vorherigen Satz, die für Facetten in Frage kommen (bis auf die Einträge am Rand).

Also ist die Anzahl der Facetten, auf denen  $A$  liegt,

$$4n - 8 + E(A) + 2(n-2)(n-3) = 2(n-1)(n-2) + E(A).$$

□

*Beispiel 2.2.1.* Betrachten wir folgende alternierende Vorzeichenmatrix  $A$  mit  $n = 4$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nachdem die Matrix einen  $(+1)$  Eintrag in den Ecken hat, ist  $E(A) = 1$ . Die Matrix liegt also auf 13 Facetten des  $\mathcal{A}_4$ . Neun Facetten sind durch Partialsummen bestimmt, die mit den 0 Einträgen am Rand der Matrix korrespondieren.  $A$  liegt zum Beispiel auf der Facette mit allen  $X$  mit  $\sum_{i'=1}^1 a_{i',3} = a_{1,3} = 0$ . Die restlichen vier Facetten sind durch Partialsummen bestimmt, die mit den vier Kanten aus dem inneren  $2 \times 2$  Bereich von  $g(A)$  korrespondieren, die in Abbildung 2.2.8 hervorgehoben sind.

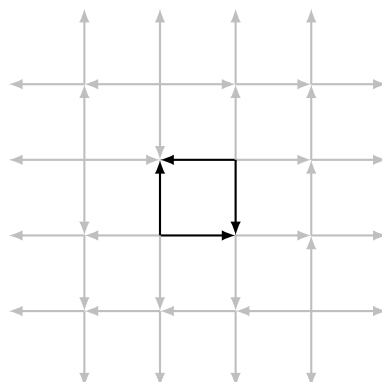


Abbildung 2.2.8: Das korrespondierende einfache Flussgitter  $g(A)$ .

Aus dem inneren  $2 \times 2$  Bereich von  $g(A)$  können wir herauslesen, dass  $A$  auf den Facetten mit allen  $X$  liegt, für die eine der folgenden Gleichungen erfüllt ist:  $\sum_{i'=1}^2 a_{i',2} = 0$ ,  $\sum_{i'=3}^4 a_{i',3} = 0$ ,  $\sum_{j'=1}^2 a_{2,j'} = 0$  oder  $\sum_{j'=3}^4 a_{3,j'} = 0$ .

**Satz 2.2.3.** Die  $n \times n$  alternierenden Vorzeichenmatrizen sind die Ecken des  $\mathcal{A}_n$ .

*Beweis.*  $\mathcal{A}_n$  ist als die konvexe Hülle der  $n \times n$  alternierenden Vorzeichenmatrizen definiert. Daher ist die Menge der Ecken des Polytops eine Teilmenge der  $n \times n$  ASMs (siehe Kapitel 1.4).

Es bleibt noch zu zeigen, dass auch wirklich jede ASM eine Ecke des Polytops ist. Der Fall, dass in einem Polytop nicht jeder der Punkte, von denen die konvexe Hülle gebildet wird, eine Ecke ist, ist in Abbildung 2.2.9 dargestellt.

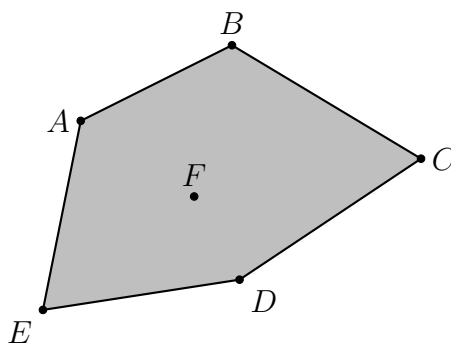


Abbildung 2.2.9: Dieses Polytop im  $\mathbb{R}^2$  ist definiert als die konvexe Hülle der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  und  $F$ .  $F$  ist jedoch keine Ecke des Polytops.

Für diesen Beweis konstruieren wir eine Hyperebene zu jeder ASM  $A$ , sodass  $A$  auf der einen Seite der Hyperebene liegt und alle anderen ASMs auf der anderen Seite. Für eine geometrische Vorstellung dieses Vorgehens siehe Abbildung 2.2.10.

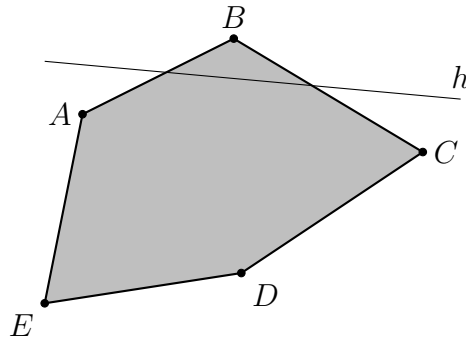


Abbildung 2.2.10: Eine Hyperebene  $h$  (in diesem Fall eine Gerade), die zeigt, dass  $B$  eine Ecke des Polytops  $P = \text{conv}(A, B, C, D, E)$  ist.

Betrachten wir eine beliebige  $n \times n$  ASM  $A$ . Das dazugehörige einfache Flussgitter  $g(A)$  hat  $2n(n + 1)$  gerichtete Kanten, die jeweils eine Partialsumme gleich 1 repräsentieren.  $A$  ist die einzige ASM mit genau dieser Kombination von Kanten in  $g(A)$  und daher auch die einzige ASM mit den entsprechenden Partialsummen gleich 1.

Nennen wir die Menge dieser Partialsummen  $PS_1(A)$  und eine Partialsumme  $p$  vom Rand bis zu einem Eintrag in einer  $n \times n$  Matrix  $X$  nennen wir  $p(X)$ . Wenn  $p(A) = 1$ , dann ist also  $p \in PS_1(A)$ .

Wenn wir die Partialsummen in  $PS_1(A)$  wiederum summieren, ist offensichtlich

$$\sum_{p \in PS_1(A)} p(A) = 2n(n + 1).$$

Wenn wir dieselben Partialsummen in einer anderen ASM  $A'$  summieren, ist die Summe mindestens um 1 kleiner als  $2n(n + 1)$ . Die Hyperebene

$$H = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n^2} : \sum_{p \in PS_1(A)} p(X) = 2n(n + 1) - \frac{1}{2} \right\}$$

trennt daher  $A$  räumlich von allen anderen ASMs.  $H$  ist eine Hyperebene, da sich die Summe auch als Linearkombination auffassen lässt:  $\sum_{p \in PS_1(A)} p(X) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_{i,j}$ ,



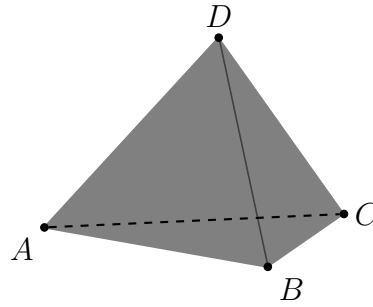


Abbildung 2.3.1: Ein Tetraeder im  $\mathbb{R}^3$ , den wir als Polytop  $W := \text{conv}\{A, B, C, D\}$  auffassen.

wobei  $a_{i,j}$  die Anzahl der Partialsummen ist, in denen  $x_{i,j}$  vorkommt. Also ist  $A$  eine Ecke in  $\mathcal{A}_n$ . □

## 2.3 Der Seitenverband des $\mathcal{A}_n$

Eine kombinatorische Sicht auf Polytope liefert uns der Seitenverband [25]. Dieser beinhaltet die Struktur des Polytops über dessen  $k$ -Seiten. So ist die kombinatorische Äquivalenz zweier Polytope genau dann gegeben, wenn die Seitenverbände isomorph sind.

**Definition 2.3.1.** Der **Seitenverband** eines konvexen Polytops  $P$  ist das Poset  $L := L(P)$  aller  $k$ -Seiten von  $P$ , geordnet durch Inklusion.

*Beispiel 2.3.1.* Betrachten wir den (regelmäßigen) Tetraeder in Abbildung 2.3.1 im  $\mathbb{R}^3$ .

Der Tetraeder besteht aus folgenden  $k$ -Seiten:

1. der leeren Menge,
2. den Ecken (0-Seiten)  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ ,
3. den Seiten (1-Seiten)  $\text{conv}\{A, B\}$ ,  $\text{conv}\{A, C\}$ ,  $\text{conv}\{A, D\}$ ,  $\text{conv}\{B, C\}$ ,  $\text{conv}\{B, D\}$  und  $\text{conv}\{C, D\}$ ,
4. den Flächen (2-Seiten oder Facetten)  $\text{conv}\{A, B, C\}$ ,  $\text{conv}\{A, B, D\}$ ,  $\text{conv}\{A, C, D\}$ , und  $\text{conv}\{B, C, D\}$  sowie
5. dem Tetraeder (3-Seite)  $\text{conv}\{A, B, C, D\}$ .

Die  $k$ -Seiten sind durch Inklusion geordnet. So ist zum Beispiel die Ecke  $A$  in den Seiten  $AB$ ,  $AC$  und  $AD$  enthalten. Die Seite  $AB$  ist in den Flächen  $ABC$  und  $ABD$  enthalten. Alle Flächen sind im Tetraeder enthalten und die leere Menge ist in allen anderen Mengen enthalten. Das entsprechende Hasse-Diagramm des Seitenverbandes ist in Abbildung 2.3.2 zu sehen.

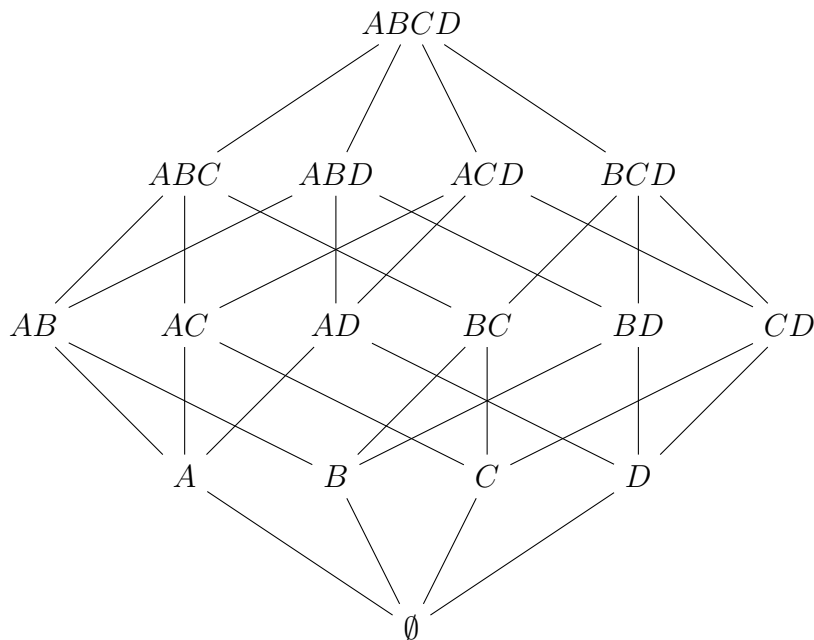


Abbildung 2.3.2: Das Hasse-Diagramm des Seitenverbandes des Tetraeders.

Kommen wir nun zu unserem Polytop  $\mathcal{A}_n$  zurück. Wie wir im folgenden Satz sehen werden, lässt sich der Seitenverband am besten über elementare Flussgitter beschreiben [21], die in Definition 1.3.3 definiert sind und eine Vereinigung von einfachen Flussgittern darstellen. Ein Beispiel für ein elementares Flussgitter ist in Abbildung 2.3.3 abgebildet.

**Satz 2.3.1.** *Der Seitenverband von  $\mathcal{A}_n$  ist isomorph zum Verband aller elementaren Flussgitter, geordnet durch Inklusion.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass es eine Bijektion zwischen elementaren Flussgittern und den  $k$ -Seiten des  $\mathcal{A}_n$  gibt, in der auch die Ordnung beibehalten wird.

Wir definieren das Flussgitter  $g(F)$  einer  $k$ -Seite  $F$  als die Vereinigung der einfachen

Flussgitter aller Ecken der Seite:

$$g(F) := \bigcup_{A \in \text{vert}(F)} g(A),$$

wobei  $\text{vert}(F)$  die Eckenmenge von  $F$  bezeichnet. Nachdem die Ecken einer Seite im  $\mathcal{A}_n$  alternierende Vorzeichenmatrizen sind, ist  $g(F)$  ein elementares Flussgitter.

Umgekehrt definieren wir die  $k$ -Seite  $f(G)$  eines elementaren Flussgitters  $G$  als die konvexe Hülle aller ASMs  $A$  bzw. aller Ecken des  $\mathcal{A}_n$ , dessen einfache Flussgitter  $g(A)$  Teilgraphen von  $G$  sind:

$$f(G) := \text{conv}\{A \in \text{vert}(\mathcal{A}_n) : g(A) \subseteq G\}$$

Aus dem Beweis von Satz 2.2.1 wissen wir, dass wir jede Facette des  $\mathcal{A}_n$  als Teilgraph des  $C_n$  auffassen können, bei dem eine gerichtete Kante aus der „erlaubten“ Menge entfernt wurde oder zwei zusammengehörende Kanten (z.B.  $(1, 1)$  und  $(1, 2)$ ) entfernt wurden. Somit steht jede dieser „erlaubten“ Kanten bzw. jedes Kantenpaar, das in einem elementaren Flussgitter  $G$  fehlt, für eine Facette, die  $f(G)$  enthält. Wir fassen diese Kanten zu einer Menge zusammen, wobei wir bei den Kantenpaaren nur das „kleinere“ nehmen (bei dem Kantenpaar  $(i, j), (i', j')$  wählen wir  $(i, j)$ , wenn  $i < i'$  oder  $(i = i' \wedge j < j')$ ). Diese Menge  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_l\}$  hat eine ihr entsprechende Menge an Facetten  $\{F_1, F_2, \dots, F_l\}$ .

Wir nennen  $D$  den Durchschnitt dieser Facetten.  $D$  ist eine  $k$ -Seite des  $\mathcal{A}_n$ , da der Durchschnitt von Seiten wiederum eine Seite ist. Wir wollen nun zeigen, dass  $f(G) = D$  und  $f(G)$  somit eine eindeutig bestimmte  $k$ -Seite des  $\mathcal{A}_n$  ist.

Wir wissen, dass  $f(G) \subseteq D$ , weil  $G$  keine der Kanten aus  $K$  enthält.

Wählen wir nun eine Ecke  $e$  des  $\mathcal{A}_n$  (eine alternierende Vorzeichenmatrix), die in  $D$  enthalten ist. Das entsprechende einfache Flussgitter  $g(e)$  darf also keine der Kanten aus  $K$  enthalten. Daher sind auch alle gerichteten Kanten aus  $g(e)$  in  $G$  und  $e \in f(G)$ . Darum ist auch  $D \subseteq f(G)$  und somit  $f(G) = D$ .

Außerdem sehen wir durch die eindeutige Zuordnung der fehlenden Kanten in einer Facette, dass  $f(g(F)) = F$  und  $g(f(G)) = G$  und wenn  $S_1$  und  $S_2$  zwei  $k$ -Seiten des  $\mathcal{A}_n$  sind, dann ist  $S_1 \subseteq S_2 \Leftrightarrow g(S_1) \subseteq g(S_2)$ .

Somit sind elementare Flussgitter, geordnet durch Inklusion, und der Seitenverband  $L(\mathcal{A}_n)$  isomorph. □

Durch die Bijektion der  $k$ -Seiten des Polytops mit den elementaren Flussgittern können wir nun mit dem folgenden Satz die Dimension der Seiten bestimmen. Die Dimension ist gleich der Zahl der doppelt gerichteten Gebieten [21], wie wir im folgenden Satz zeigen werden. Zuvor werden noch doppelt gerichtete Gebiete definiert.

**Definition 2.3.2.** Ein **doppelt gerichtetes Gebiet** in einem elementaren Flussgitter ist eine Sammlung von benachbarten Zellen, die vollständig von doppelt gerichteten Kanten umgeben ist und in dem keine benachbarten Zellen von doppelt gerichteten Kanten getrennt werden. Die **Anzahl** der doppelt gerichteten Gebiete eines elementaren Flussgitters  $G$  ist  $\alpha(G)$ .

*Beispiel 2.3.2.*

- Ein einfaches Flussgitter  $g(A)$  hat keine doppelt gerichtete Kante und somit ist  $\alpha(g(A)) = 0$ .
- Das vollständige Flussgitter  $C_n$  hat nur gerichtete Kanten und  $(n - 1)^2$  Zellen, die alle von doppelt gerichteten Kanten umgeben sind, somit ist  $\alpha(C_n) = (n - 1)^2$ .
- Betrachten wir die alternierenden Vorzeichenmatrizen  $A$  und  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Vereinigung  $G = g(A) \cup g(B)$  ist in Abbildung 2.3.3 mit nummerierten Zellen dargestellt. Als Vereinigung von einfachen Flussgittern ist  $G$  ein elementares Flussgitter. Zählt man die doppelt gerichteten Gebiete  $\{2\}$ ,  $\{7, 8, 12\}$ ,  $\{10\}$ ,  $\{11\}$  und  $\{15\}$ , kommt man auf  $\alpha(G) = 5$ .

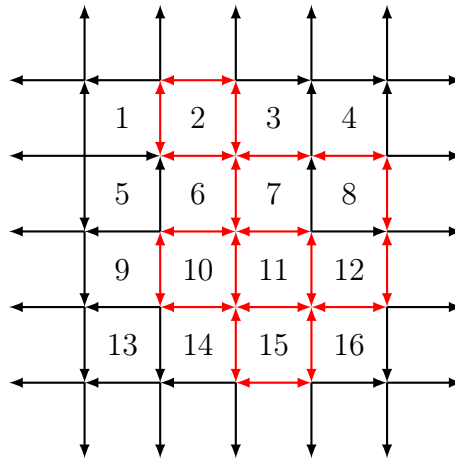


Abbildung 2.3.3: Ein elementares Flussgitter  $G$  mit den 5 doppelt gerichteten Gebieten  $(\alpha(G) = 5) \{2\}, \{7, 8, 12\}, \{10\}, \{11\}$  und  $\{15\}$ .

**Satz 2.3.2.** *Die Dimension  $k$  einer  $k$ -Seite  $S$  von  $\mathcal{A}_n$  ist gleich der Anzahl an doppelt gerichteten Gebieten in  $g(S)$ .*

*Beweis.* Wir beweisen den Satz mittels vollständiger Induktion nach  $k$ .

**Induktionsanfang:** Eine Ecke (0-Seite) des Polytops ist eine alternierende Vorzeichenmatrix (Satz 2.2.3) und hat somit keine doppelt gerichteten Gebiete.

**Induktionsvoraussetzung:** Für eine  $l$ -Seite  $S'$  mit Dimension  $l$  gilt  $\alpha(g(S')) = l$ .

**Induktionsschritt:** Sei  $S$  eine  $(l+1)$ -Seite von  $\mathcal{A}_n$ . Wir betrachten eine  $l$ -dimensionale Teilseite  $S'$  von  $S$ . Laut Induktionsvoraussetzung ist  $\alpha(g(S')) = l$ . Das entsprechende elementare Flussgitter  $g(S')$  ist somit ein Teilgraph vom elementaren Flussgitter  $g(S)$  und wir finden eine ASM  $A$  mit  $g(S) = g(S') \cup g(A)$ , wobei  $A \in S \setminus S'$ .

Nehmen wir eine beliebige Ecke  $A'$  aus  $S'$ . Die einfachen Flussgitter  $g(A)$  und  $g(A')$  unterscheiden sich voneinander in zumindest einer gerichteten Kante, die in die andere Richtung zeigt. Betrachten wir nun die Knoten der beiden Flussgitter. Jeder Knoten in einem einfachen Flussgitter hat geraden Eingangsgrad und geraden Ausgangsgrad. Wenn sich also die Flussgitter an einem Knoten unterscheiden, dann in einer geraden Anzahl von Kanten, die mit diesem Knoten inzident sind. In der Vereinigung  $g(A) \cup g(A')$  hat demnach jeder Knoten eine gerade Anzahl (0, 2 oder 4) an doppelt gerichteten, inzidenten Kanten (siehe Abbildung 1.3.7). Nachdem das Flussgitter endlich ist, hat  $g(A) \cup g(A')$  zumindest einen Kreis aus doppelt gerichteten Kanten (sonst hätte ein Knoten nur eine doppelt gerichtete, inzidente Kante, was eine ungerade Anzahl darstellt). Außerdem ist

zumindest eine doppelt gerichtete Kante nicht in  $g(S')$ .

Das Flussgitter  $g(S)$  hat also zumindest ein doppelt gerichtetes Gebiet mehr als  $g(S')$  und somit ist  $\alpha(g(S)) \geq l + 1$ .

Es bleibt noch die Gleichheit zu zeigen. Indirekt angenommen,  $\alpha(g(S)) > l + 1$  bzw.  $\alpha(g(S)) \geq l + 2$ . Nach der vorherigen Überlegung gilt dann für eine  $(l + 2)$ -Seite  $S''$ :

$$\alpha(g(S'')) \geq (l + 2) + 1 = l + 3.$$

Führt man diesen Schritt wiederholt aus, bis man schließlich bei der  $(n - 1)^2$ -Seite, also dem vollständigen  $\mathcal{A}_n$  (siehe Korollar 2.1.1), angelangt ist, erhält man:

$$\alpha(g(\mathcal{A}_n)) \geq l + 2 + (n - 1)^2 - (l + 1) = (n - 1)^2 + 1.$$

Wir wissen aber, dass  $\alpha(g(\mathcal{A}_n)) = \alpha(C_n) = (n - 1)^2$  und erhalten den Widerspruch

$$\alpha(g(\mathcal{A}_n)) \geq (n - 1)^2 + 1 \stackrel{!}{>} (n - 1)^2 = \alpha(g(\mathcal{A}_n)).$$

Somit ist  $\alpha(g(S)) = l + 1$ . □

Für 1-Seiten ergibt sich daraus folgender Spezialfall:

**Korollar 2.3.1.** *Die Kanten von  $\mathcal{A}_n$  entsprechen den elementaren Flussgittern, die genau einen Kreis an doppelt gerichteten Kanten beinhalten.*

## 3 Das tetraedrische Poset

Das tetraedrische Poset ist ein Poset, dessen Hasse-Diagramm die Form eines Tetraeders annimmt. Striker hat gezeigt, dass Teilposets des tetraedrischen Posets in Verbindung zu verschiedenen kombinatorischen Familien stehen [19, 22, 20]. Darunter befinden sich auch alternierende Vorzeichenmatrizen und total symmetrische selbst-komplementäre ebene Partitionen. In diesem Kapitel zeigen wir zunächst einen Zugang zum tetraedrischen Poset über ASMs und TSSCPPs. Anschließend definieren wir das tetraedrische Poset und beweisen eine Proposition, mit dessen Hilfe wir Bijektionen von Ordnungsidealen von Teilposets zu weiteren kombinatorischen Objekten finden können. Schließlich betrachten wir ebendiese Teilposets und finden Formeln für die Anzahl an Ordnungsidealen und rangerzeugende Funktionen sowie Verbindungen zu kombinatorischen Familien.

### 3.1 Motivation

In ihrer ersten Arbeit zum tetraedrischen Poset zeigt Striker, dass das tetraedrische Poset, das wir im nächsten Kapitel definieren werden, auf natürliche Weise entsteht, wenn man alternierende Vorzeichenmatrizen (ASM) und total symmetrische selbst-komplementäre ebene Partitionen (TSSCPP) mit einer teilweisen Ordnung ordnet. [22]

Da sich ASMs und TSSCPPs nicht so leicht direkt ordnen lassen, betrachten wir die Ordnung von halbstandardisierten Young-Tableaux, die mit ASMs und TSSCPPs in Verbindung stehen:

**Definition 3.1.1.** Ein **halbstandardisiertes Young-Tableau (SSYT)** ist eine 2-dimensionale Zahlenanordnung aus Einträgen  $1 \leq y_{i,j} \leq n$  mit nicht-ansteigender Zeilenlänge, sodass  $y_{i,j} \geq y_{i,j+1}$  und  $y_{i,j} > y_{i+1,j}$ .

Ein Young-Tableau hat die **Form**  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ , wenn die Zeile  $i$  des Tableaus aus den Einträgen  $y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,\lambda_i}$  besteht.

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 3 & 3 \\
3 & 3 & 4 & \\
4 & & & \\
\lambda = 4431 & & & 
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 2 & 2 \\
2 & 3 & 3 & \\
3 & 4 & & \\
4 & & & \\
\lambda = \delta_4 = 4321 & & & 
\end{array}$$

Abbildung 3.1.1: Ein beliebiges SSYT und ein SSYT in Treppenform  $\delta_4$ .

$$\begin{array}{cccc}
& & & 2 \\
& & 2 & 3 \\
& 1 & 2 & 4 \\
1 & 2 & 3 & 4
\end{array}$$

Abbildung 3.1.2: Ein monotones Dreieck mit  $n = 4$

Die **Treppenform**  $\delta_n$  ist die Form  $\delta_n = n(n-1)(n-2)\cdots 21$ .

Eine Eins-Zu-Eins-Zuordnung von ASMs und einer bestimmten Klasse von SSYT erhält man über monotone Dreiecke, die mit alternierenden Vorzeichenmatrizen in Bijektion stehen [4]: Aus der alternierenden Vorzeichenmatrix erhält man eine Partialsummenmatrix, indem man jeden Eintrag  $x_{i,j}$  mit der Partialsumme von oben bis zu diesem Eintrag ( $\sum_{i'=1}^i x_{i',j}$ ) ersetzt. In dieser Matrix sind alle Einträge gleich 1 oder 0. Das zugehörige monotone Dreieck gibt in jeder Zeile die Nummern der Spalten an, in denen die Partialsumme in dieser Zeile gleich 1 ist. Aufgrund der Eigenschaften von alternierenden Vorzeichenmatrizen gibt es in der ersten Zeile der Matrix genau eine Partialsumme, die gleich 1 ist, in der zweiten Zeile zwei, in der dritten Zeile drei usw. Ordnet man diese Zahlen in einem Dreieck wie in Abbildung 3.1.2, erhält man, wieder aufgrund der Eigenschaften von ASMs, ein monotones Dreieck, das durch folgende Eigenschaften definiert ist:

**Definition 3.1.2.** Ein **monotones Dreieck** ist eine dreieckige Zahlenanordnung wie in Abbildung 3.1.2 mit letzter Zeile  $1\ 2\ 3\ \cdots\ n$  und Einträgen  $a_{i,j}$ , die in nord-ost und süd-ost Richtung schwach abnehmend und entlang der Zeilen strikt steigend sind.

Diese gerade beschriebene Zuordnung ist eine Eins-Zu-Eins Zuordnung von alternierenden Vorzeichenmatrizen und monotonen Dreiecken [4]. Das so erhaltene monotone Dreieck verändern wir nun so, dass wir alle Zeilen, von unten beginnend, so weit nach links verschieben, bis der westlichste Eintrag der Zeile in derselben Spalte wie der westlichste Eintrag der Zeile darunter liegt. Dreht man diese Anordnung nun im Uhrzeigersinn um  $\frac{\pi}{4}$ ,





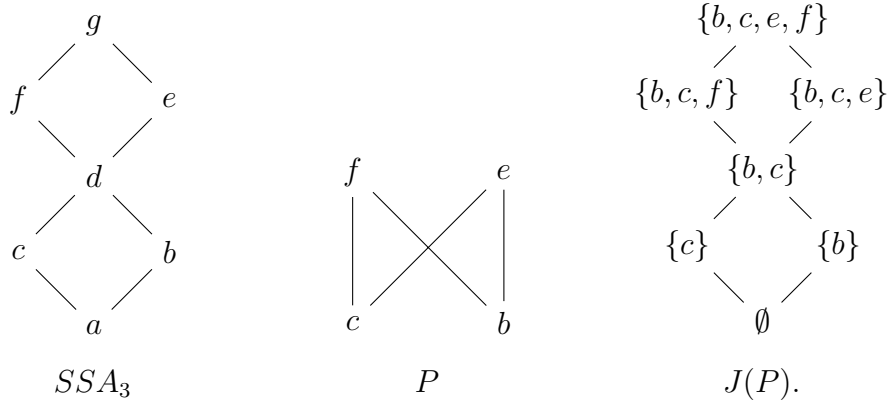


Abbildung 3.1.4: Die Hasse-Diagramme von  $SSA_3$ , der supremum-irreduziblen Elemente  $P$  von  $SSA_3$  und der Ideale  $J(P)$ .

*Beispiel 3.1.2.* Das 3-dimensionale Hasse-Diagramm der supremum-irreduziblen Elemente  $P$  von  $SSA_4$ , ist in Abbildung 3.1.5 dargestellt. Die Farben, Richtungen und Längen der Kanten im Hasse-Diagramm orientieren sich an der Definition in Kapitel 3.2, die Striker [19] zur Definition des tetraedrigen Posets vorschlägt.

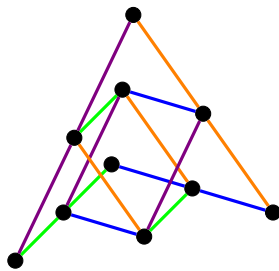


Abbildung 3.1.5: Das Hasse-Diagramm der supremum-irreduziblen Elemente  $P$  von  $SSA_3 \cong J(P)$ .

Ähnlich wie bei alternierenden Vorzeichenmatrizen finden wir auch eine Bijektion zwischen total-symmetrischen selbst-komplementären ebenen Partitionen (TSSCPP) und einer Klasse von SSYT.

Haben wir eine TSSCPP  $t = \{t_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq 2n}$  gegeben, können wir uns auf eine fundamentale Anordnung beschränken: Die fundamentale Anordnung von  $t$  ist die dreieckige Zahlenanordnung  $\{t_{i,j}\}_{n+1 \leq j \leq i \leq 2n}$  (siehe Abbildung 3.1.6). Wir können aus diesen Zahlen die gesamte TSSCPP erschließen, da sie symmetrisch bezüglich der  $x = y$  Achse, zyklisch symmetrisch und selbst-komplementär ist. Für die Einträge  $t_{i,j}$  der dreieckigen Zahlen-

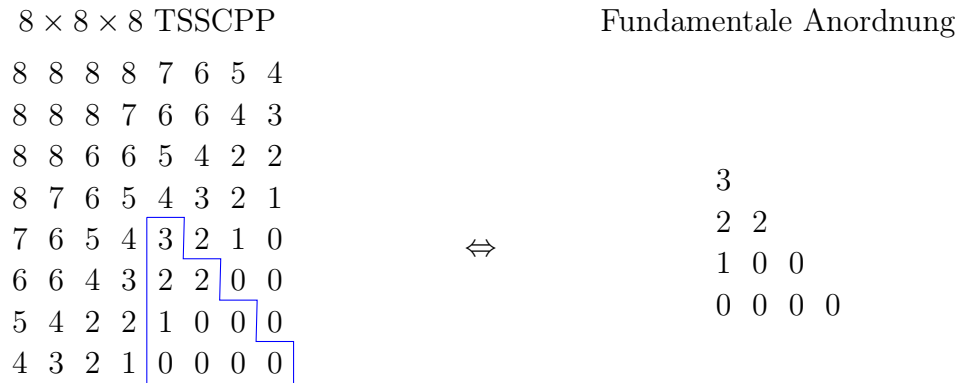


Abbildung 3.1.6: Die fundamentale Anordnung einer TSSCPP.

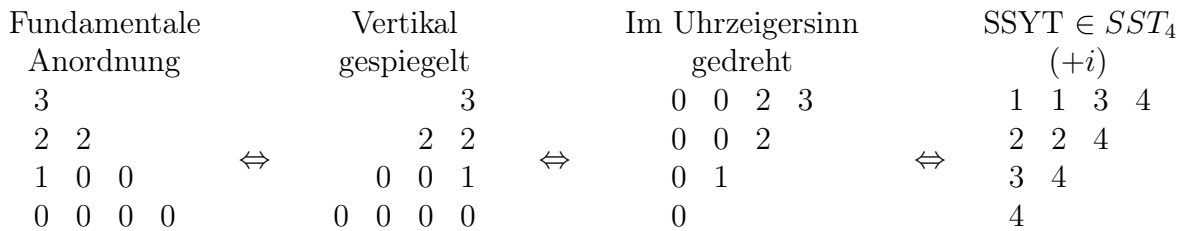


Abbildung 3.1.7: Die Bijektion zwischen einer TSSCPP und dem dazugehörigen SSYT.

anordnung gilt  $t_{i,j} \leq t_{i+1,j}$  und  $t_{i,j} \leq t_{i,j+1}$ , weil  $t$  eine ebene Partition ist. Außerdem gilt  $0 \leq t_{i,j} \leq 2n - i$  [22, 13].

Diese fundamentale Anordnung spiegeln wir nun entlang einer vertikalen Achse, verschieben die Zeilen wieder so, dass die westlichsten Einträge der Zeilen in einer gemeinsamen Spalte liegen, und drehen sie um  $\frac{\pi}{4}$  im Uhrzeigersinn. Die so entstandene Anordnung  $\{x_{i,j}\}_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n-j+1}$  ist, wie man leicht nachprüfen kann, in Treppenform  $\delta_n$  und hat die Bedingungen  $x_{i,j} \leq x_{i,j+1}$ ,  $x_{i,j} \leq x_{i+1,j-1}$  und  $0 \leq x_{i,j} \leq j$ .

Nun addieren wir  $i$  zu jedem Eintrag in Zeile  $i$  und erhalten ein SSYT  $Y$  in Treppenform  $\delta_n$  mit einer zusätzlichen Bedingung für alle Einträge  $y_{i,j}$ :  $y_{i,j} \leq y_{i-1,j+1} + 1$ . Wir nennen die Menge aller halbstandardisierten Young-Tableaux, die diese Bedingungen erfüllen,  $SST_n$ .

Dadurch ist gezeigt, dass es eine Bijektion zwischen TSSCPP in einer  $2n \times 2n \times 2n$  Box und halbstandardisierten Young-Tableaux in Treppenform  $\delta_n$  mit der zusätzlichen Bedingung  $y_{i,j} \leq y_{i-1,j+1} + 1$  gibt, was im Beweis des Satzes 3.3.7 aufgegriffen wird.

Wir bilden nun erneut ein Poset, indem wir alle Elemente aus  $SST_n$  mit komponentenweisem Vergleich ordnen. Auch dieses Poset ist ein distributiver Verband und daher gibt

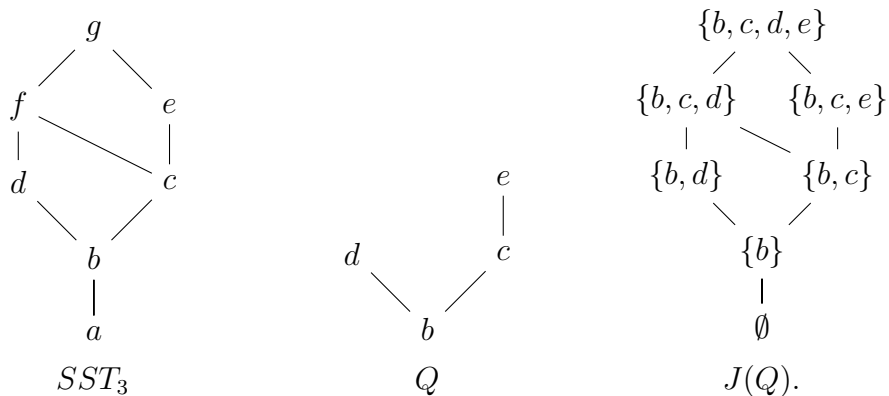


Abbildung 3.1.8: Die Hasse-Diagramme von  $SST_3$ , der supremum-irreduziblen Elemente  $Q$  von  $SST_3$  und der Ideale  $J(Q)$ .

es ein Poset  $Q$  der supremum-irreduziblen Elemente aus  $SST_n$  mit  $J(Q) \cong SST_n$ .

*Beispiel 3.1.3.* Betrachten wir auch hier den Fall  $n = 3$ . Es gibt insgesamt sieben TSSCPP in einer  $6 \times 6 \times 6$  Box, die mit eindeutigen SSYTs korrespondieren. Wir beschränken uns auf die fundamentalen Anordnungen:

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
0	1	1	2	1	2	2
0 0	0 0	1 0	0 0	1 1	1 0	1 1
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕
1 1 1	1 1 2	1 1 2	1 1 3	1 2 2	1 1 3	1 2 3
2 2	2 2	2 3	2 2	2 3	2 3	2 3
3	3	3	3	3	3	3

Von diesen sieben SSYTs sind  $b, c, d$  und  $e$  supremum-irreduzibel und bilden selbst das (induzierte) Teilposet  $Q$ , wobei  $J(Q) \cong SST_3$ . Die Elemente  $a, f$  und  $g$  sind nicht supremum-irreduzibel, da  $f = c \vee d, g = e \vee f$  und  $a$  ein minimales Element ist.

Die Hasse-Diagramme von  $SST_3, Q$  und  $J(Q)$  sind in Abbildung 3.1.8 dargestellt. Bemerkenswert ist, dass die Hasse-Diagramme zwar gleich viele Elemente enthalten wie ihre Pendants aus  $SSA_3$ , sich jedoch die Struktur zum Teil unterscheidet. Das unterstreicht wiederum die Schwierigkeit, eine explizite Bijektion zwischen ASMs und TSSCPPs zu finden.

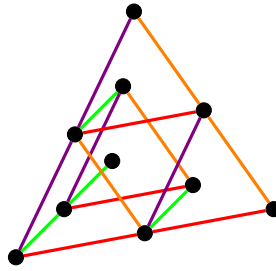


Abbildung 3.1.9: Das Hasse-Diagramm der supremum-irreduziblen Elemente  $Q$  von  $SST_4 \cong J(Q)$ .

*Beispiel 3.1.4.* Das 3-dimensionale Hasse-Diagramm der supremum-irreduziblen Elemente  $Q$  von  $SST_4$ , ist in Abbildung 3.1.9 dargestellt. Die Farben, Richtungen und Längen der Kanten im Hasse-Diagramm orientieren sich wieder an der Definition in Kapitel 3.2.

Die Hasse-Diagramme in Abbildung 3.1.5 und 3.1.9 von  $P$  und  $Q$  haben zwar nicht dieselben Kanten, jedoch gleich viele Knoten. Wir können das so interpretieren: Die Posets  $P$  und  $Q$  entspringen demselben Poset, aus dem einige Kanten entfernt wurden. Ein solches Poset nennt Striker das tetraedrische Poset  $T_n$  [22]. Es entsteht, wenn wir die Kanten von  $P$  und  $Q$  zusammenführen und noch weitere Kanten (in silber) hinzufügen. Das 3-dimensionale Hasse-Diagramm von  $T_n$  hat die Form eines Tetraeders, was in Abbildung 3.1.10 deutlich werden soll. Die Definition des tetraedrischen Posets erfolgt im folgenden Kapitel. Interessant ist, dass es nicht nur für die Teilposets von  $T_n$ , die mit alternierenden Vorzeichenmatrizen und TSSCPPs in Verbindung stehen, sondern für fast alle Teilposets von  $T_n$  Bijektionen zu bekannten kombinatorischen Objekten und schöne Produktformeln für die Anzahl der Ordnungsideale gibt.

## 3.2 Das tetraedrische Poset $T_n$

Wir kommen nun zur Definition des tetraedrischen Posets, wie es von Striker in [19] beschrieben wird. Wir definieren das tetraedrische Poset über die Einheitsvektoren  $\vec{r} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $\vec{g} = (0, 1, 0)$  und  $\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ . Die Menge  $T_n$  besteht aus allen Koordinatenpunkten, die durch Linearkombinationen von  $\vec{r}$ ,  $\vec{g}$  und  $\vec{v}$  erreicht werden:

$$T_n = \{c_1 \vec{r} + c_2 \vec{g} + c_3 \vec{v} : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}_0, c_1 + c_2 + c_3 \leq n - 2\}. \quad (3.1)$$

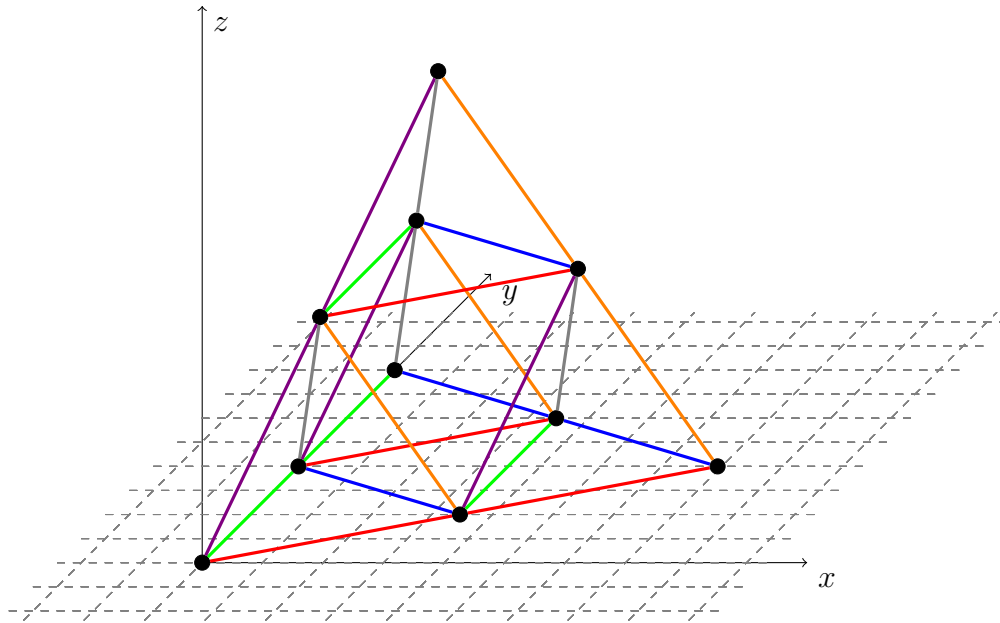


Abbildung 3.1.10: Das Hasse-Diagramm des vollständigen tetraedrischen Posets  $T_4$  in einer dreidimensionalen Darstellung.

Die Vektoren  $\vec{r}$ ,  $\vec{g}$  und  $\vec{v}$ , die die Elemente von  $T_n$  erzeugen, sind rote, grüne und violette gerichtete Kanten zwischen je zwei Elementen im Hasse-Diagramm und geben mit ihrer Richtung die partielle Ordnung des Posets an. Des Weiteren definieren wir die Einheitsvektoren  $\vec{b} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $\vec{o} = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3})$  und  $\vec{s} = (-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$ . Die Vektoren  $\vec{b}$ ,  $\vec{o}$  und  $\vec{s}$  sind blaue, orange und silberne gerichtete Kanten zwischen zwei Elementen im Hasse-Diagramm, wo auch immer diese möglich sind, und geben weitere Bedingungen für die partielle Ordnung vor.

So haben wir ein Poset  $T_n$  definiert, dessen Hasse-Diagramm die Form eines Tetraeders annimmt, wie es in Abbildung 3.1.10 dargestellt wird. Für zwei Punkte  $X$  und  $Y$  aus  $T_n$  gilt die Ordnungsrelation  $X \leq Y$ , wenn es einen Pfad von  $X$  zu  $Y$  im Hasse-Diagramm gibt, der nur in Richtung der gerichteten Kanten verläuft. Außerdem wird  $X$  von  $Y$  bedeckt ( $Y \succ X$ ), wenn  $Y = X + \vec{z}$  mit  $\vec{z} \in \{\vec{r}, \vec{g}, \vec{v}, \vec{b}, \vec{o}, \vec{s}\}$ . Des Weiteren hat jede Kante im Hasse-Diagramm eine eindeutig bestimmte Farbe aus der Menge {rot ( $r$ ), grün ( $g$ ), violett ( $v$ ), blau ( $b$ ), orange ( $o$ ), silber ( $s$ )}.

Die Anzahl der Elemente in  $T_n$  hängt von den Möglichkeiten der Wahl der  $c_i$ 's in (3.1) ab. Jede Kombination der  $c_i$ 's ergibt einen eindeutigen Punkt, der aufgrund der Konstruktion der Vektoren  $\vec{r}$ ,  $\vec{g}$  und  $\vec{y}$  von keiner anderen Kombination getroffen wird. Die Wahl

der  $c_i$ 's ist in Bijektion mit der Anzahl der  $(n - 2)$ -elementigen Multimengen von 4 bzw. dem Verteilen von  $n - 2$  Kugeln auf 4 Urnen. Die Anzahl der Kugeln in den ersten drei Urnen korreliert mit den Werten der  $c_i$ 's. Die vierte Urne benötigen wir, da die Summe der  $c_i$ 's auch kleiner als  $n - 2$  sein kann. Die Kugeln in der vierten Urne sind sozusagen „nicht genutzte“ Kugeln, also ist die Anzahl der Kugeln in der vierten Urne die Differenz  $n - 2 - (c_1 + c_2 + c_3)$ . Daher ist  $|T_n| = \binom{4}{n-2} = \binom{4+n-2-1}{n-2}$  (siehe z.B. [15, Kap. 1.2], [7, Kap. 9]) und somit

$$|T_n| = \binom{n+1}{n-2} = \binom{n+1}{(n+1)-(n-2)} = \binom{n+1}{3}.$$

Wir kommen nun zu den Teilposets des tetraedrischen Posets  $T_n$ . Wir definieren die Teilposets, mit denen wir uns im Folgenden befassen, als Poset über alle Elemente von  $T_n$ . Die Ordnungen werden allerdings auf bestimmte Farben aus der Menge  $\{r, g, v, b, o, s\}$  beschränkt. Wir können zum Beispiel feststellen, dass die Relationen der beiden Farben rot und blau bereits die Relation der Farbe grün implizieren, da  $\vec{r} + \vec{b} = \vec{g}$ . Das gilt auch für andere Kombinationen, weshalb wir, damit alle Teilposets verschieden voneinander sind, folgende Definition benötigen:

**Definition 3.2.1.** Eine Teilmenge  $S$  der Menge  $\{r, g, v, b, o, s\}$  heißt **erlaubt**, wenn jede der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\{r, b\} \subseteq S \Rightarrow g \in S$ ,
- $\{o, s\} \subseteq S \Rightarrow b \in S$ ,
- $\{s, v\} \subseteq S \Rightarrow g \in S$ ,
- $\{r, o\} \subseteq S \Rightarrow v \in S$ .

Im Folgenden schreiben wir alle implizierten Farben in Klammern (z.B.  $S = \{r, b, (g)\}$ ). Die erlaubten Teilposets von  $T_n$  werden nun wie folgt definiert:

**Definition 3.2.2.** Sei  $S$  eine erlaubte Teilmenge von  $\{r, g, v, b, o, s\}$ . Ein **Teilposet  $T_n(S)$**  von  $T_n$  ist die Menge aller Elemente aus  $T_n$  gemeinsam mit allen Ordnungsrelationen, die durch Kanten des Hasse-Diagramms von  $T_n$ , dessen Farben in der Menge  $S$  enthalten sind, definiert werden.

Das Hasse-Diagramm in Abbildung 3.1.5 ist auch gleichzeitig das Hasse-Diagramm des Teilposets  $T_4(\{g, v, b, o\})$ . Gleich verhält es sich mit Abbildung 3.1.9 und  $T_4(\{r, o, (v), g\})$ . Um diese Bijektionen explizit darzustellen und weitere Bijektionen zwischen Teilposets und anderen kombinatorischen Objekten herzustellen, greifen wir auf Zahlenanordnungen zurück, die mit den Teilposets in Verbindung stehen, wie die folgende Proposition zeigen wird. Zunächst definieren wir noch die nötigen Zahlenanordnungen:

**Definition 3.2.3.** Sei  $S$  eine erlaubte Teilmenge von  $\{r, g, v, b, o, s\}$  und  $g \in S$ . Dann definieren wir  $\mathbf{Y}_n(S)$  als die Menge aller zweidimensionalen Zahlenanordnungen  $Y = \{y_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-i}$  in Treppenform  $\delta_n$  mit den Bedingungen  $i \leq y_{i,j} \leq j + i$  und den Bedingungen, die von den Elementen in  $S$  abhängen:

- orange:  $o \in S \Rightarrow y_{i,j} < y_{i+1,j}$ ,
- rot:  $r \in S \Rightarrow y_{i,j} \leq y_{i-1,j+1} + 1$ ,
- violett:  $v \in S \Rightarrow y_{i,j} \leq y_{i,j+1}$ ,
- blau:  $b \in S \Rightarrow y_{i,j} \leq y_{i+1,j-1}$ ,
- silber:  $s \in S \Rightarrow y_{i,j} \leq y_{i,j-1} + 1$ .

Somit kommen wir zur folgenden Proposition, die die Grundlage für weitere Bijektionen bildet:

**Proposition 3.2.1.** Sei  $S$  eine erlaubte Teilmenge von  $\{r, g, v, b, o, s\}$  und  $g \in S$ . Dann gibt es eine gewichts-erhaltende Bijektion zwischen  $Y_n(S)$  und  $J(T_n(S))$ , wobei das Gewicht von  $Y = \{y_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-i} \in Y_n(S)$  durch  $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i} (y_{i,j} - i)$  und das Gewicht von  $I \in J(T_n(S))$  durch  $|I|$  gegeben ist.

*Beweis.* Für diesen Beweis betrachten wir folgende Konstruktion von  $T_n$ : Wir beginnen mit dem Teilposet  $T_n(\{r, b, (g)\})$ . Das ist eine direkte Summe von  $n - 1$  disjunkten Komponenten. Wir nennen diese Komponenten  $P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$ , wie es in Abbildung 3.2.1 ersichtlich ist.



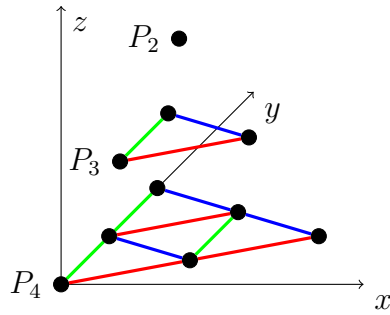


Abbildung 3.2.1: Das Hasse-Diagramm von  $T_4(\{r, b, (g)\})$  als direkte Summe der Komponenten  $P_4$ ,  $P_3$  und  $P_2$ .

Wir können uns nun  $T_n$  als Poset denken, das entsteht, wenn wir mit  $P_n$  beginnen und  $P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_3, P_n$  darüberlegen und jeweils die Komponenten  $P_i$  und  $P_{i-1}$  mit orangen, violetten und silbernen Kanten verbinden (siehe Abbildung 3.2.2).

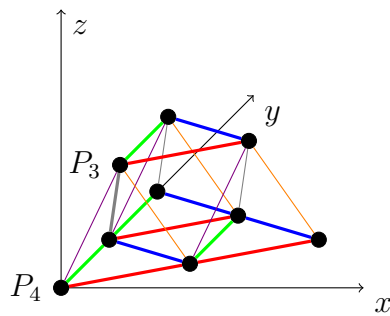


Abbildung 3.2.2: Die Komponenten  $P_4$  und  $P_3$  werden mit orangen, violetten und silbernen Kanten verbunden.

Mit dieser Vorarbeit können wir nun jedem Ordnungsideal  $I$  aus  $T_n(S)$  genau eine Zahlenanordnung  $Y$  aus  $Y_n(S)$  zuordnen. Sei  $S$  eine erlaubte Teilmenge von  $\{r, g, v, b, o, s\}$  und  $g \in S$ . Weil  $S$  die Farbe grün enthält, gibt es in jeder Komponente  $P_k$  genau  $k - 1$  Ketten, die nur aus grünen Kanten bestehen. Diese Ketten haben die Längen  $k - 2, k - 3, \dots, 1, 0$ , was auch an Abbildung 3.2.1 abzulesen ist. Die  $k - 1$  grünen Ketten der Komponente  $P_k$  bestimmen die Einträge  $y_{i,j}$  einer Zahlenanordnung  $Y$  auf der Diagonale mit  $i + j = k$  wie folgt:

Bei einem gegebenen Ordnungsideal  $I$  formen wir eine Zahlenanordnung  $Y$  mit der Vorschrift  $y_{i,j} = i + \#(\text{Elemente von } I, \text{ die in der grünen Kette der Länge } j - 1 \text{ von } P_{i+j} \text{ liegen})$ . Betrachten wir zum Beispiel die grüne Kette der Länge 3 in  $P_6$  in  $T_n$

( $n \geq 6$ ). Diese bestimmt den Eintrag  $y_{2,4}$ . Weil  $g \in S$ , gibt es 5 Möglichkeiten, wie viele Elemente von  $I$  in dieser Kette liegen können: Kein Element dieser Kette liegt in  $I$ , nur das unterste Element der Kette liegt in  $I$ , nur die beiden untersten Elemente der Ketten liegen in  $I$ ,  $\dots$ , alle 4 Elemente der Kette liegen in  $I$  (siehe Abbildung 3.2.3). Daher ist  $y_{2,4} \in \{2 + 0, 2 + 1, 2 + 2, 2 + 3, 2 + 4\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ , was allgemein der Vorschrift  $i \leq y_{i,j} \leq i + j$  entspricht.

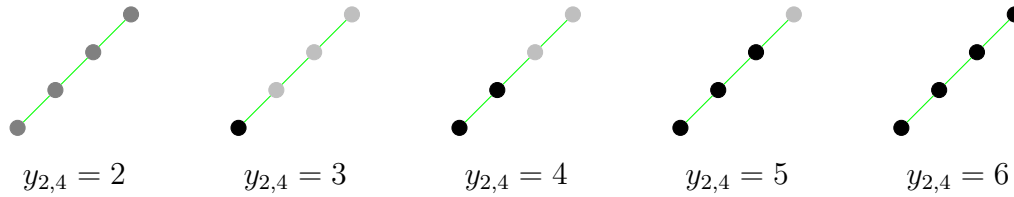


Abbildung 3.2.3: Die 5 Möglichkeiten für  $y_{2,4}$ . Die Elemente, die im Ordnungsideal  $I$  liegen, sind hervorgehoben.

Diese Zuordnung ergibt eine Zahlenanordnung  $Y$  in Treppenform  $\delta_n$  mit Einträgen  $i \leq y_{i,j} \leq i + j$ . Weil jeder Eintrag  $y_{i,j}$  von einem eindeutigen induzierten Ordnungsideal (induziert von der grünen Kette der Länge  $j - 1$  in  $P_{i+j}$ ) bestimmt ist und jedes Element von  $T_n$  in genau einer grünen Kette liegt, wissen wir, dass  $|I| = \sum_{i,j} y_{i,j} - i$ . Daher bleibt das Gewicht erhalten.

Es bleibt noch zu zeigen, wie sich die anderen Farben auf die Zahlenanordnungen auswirken. Die roten und blauen Kanten verbinden grüne Ketten in derselben Komponente  $P_k$ . Daher beeinflussen sie Beziehungen von Elementen in  $Y$  auf derselben Südwest-Nordost-Diagonale, wie folgt:

Betrachten wir den Fall  $r \in S$ . Jedes Element in der grünen Kette der Länge  $j - 1$  in  $P_{i+j}$  bedeckt mit einer roten Kante ein Element in der grünen  $j$ -Kette (siehe Abbildung 3.2.4). Das minimale Element in der  $(j - 1)$ -Kette bedeckt das minimale Element in der  $j$ -Kette, das nächsthöhere Element in der  $(j - 1)$ -Kette bedeckt das nächsthöhere Element in der  $j$ -Kette usw. Wenn also ein Element aus der grünen  $(j - 1)$ -Kette im Ordnungsideal  $I$  liegt, liegt auch das Element in der  $j$ -Kette, das von diesem bedeckt wird, in  $I$  sowie alle Elemente in der grünen  $j$ -Kette, die unterhalb dieses Elements liegen. Daher sind in der grünen  $j$ -Kette mindestens genauso viele Elemente in  $I$ , wie in der grünen  $(j - 1)$ -Kette. Weil außerdem der Wert  $i$  zum Eintrag  $y_{i,j}$  gezählt wird, ist  $y_{i,j} \leq y_{i-1,j+1} + 1$ . Analog erhalten wir auch  $b \in S \Rightarrow y_{i,j} \leq y_{i+1,j}$ .

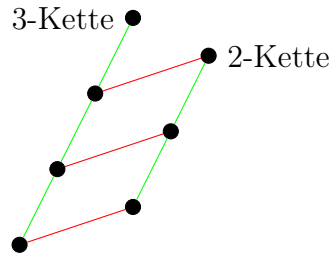


Abbildung 3.2.4: Zwei grüne Ketten sind mit roten Kanten verbunden.

Die violetten, orangen und silbernen Kanten verbinden jeweils zwei Komponenten  $P_k$  und  $P_{k+1}$  ( $2 \leq k \leq n-1$ ). Auch bei diesen Farben funktioniert die Argumentationsweise, die wir bei den roten Kanten angewandt haben. So bedeckt zum Beispiel jedes Element in der  $j$ -Kette in  $P_k$  ( $j < k$ ) ein Element in der  $(j+1)$ -Kette in  $P_{k+1}$  mit einer violetten Kante (siehe Abbildung 3.2.2). Daher gilt  $v \in S \Rightarrow y_{i,j} \leq y_{i,j+1}$ . Des Weiteren gilt  $o \in S \Rightarrow y_{i,j} \leq y_{i+1,j}$  und  $s \in S \Rightarrow y_{i,j} \leq y_{i,j-1} + 1$ .  $\square$

### 3.3 Teilposets des $T_n$

Striker gibt in [19] einen guten Überblick über die Teilposets  $T_n(S)$  des tetraedrischen Posets. Insgesamt gibt es  $2^6 = 64$  mögliche Farbkombinationen für  $S$ , allerdings sind nur 40 davon erlaubte Teilmengen. Außerdem ergeben einige Teilposets isomorphe oder duale Posets, wodurch sich die Anzahl an zu behandelnden Fällen wiederum verringert. Für die meisten  $T_n(S)$  gibt es schöne Produktformeln für die Anzahl an Ordnungsidealen. Außerdem beschreibt Striker die rangerzeugenden Funktionen  $F(P, q)$ , wenn es welche gibt. In der vorliegenden Arbeit werden ebenso alle Formeln beschrieben und zur besseren Vergleichbarkeit sind die meisten Formeln auch als Produkt über  $1 \leq i \leq j \leq k \leq n-1$  angegeben, was an die MacMahon-Boxformel angelehnt ist.

### 3.3.1 0-Farben-Poset und 1-Farben-Posets

**Satz 3.3.1.** Für  $S = \emptyset$  gilt

$$F(J(T_n(\emptyset)), q) = (1 + q)^{\binom{n+1}{3}} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n-1} \frac{[2]_q}{[1]_q},$$

$$|J(T_n(\emptyset))| = 2^{\binom{n+1}{3}}.$$

*Beweis.* Da es keine Kanten im Hasse-Diagramm gibt, ist  $J(T_n(\emptyset))$  die Menge aller Teilmengen von  $T_n$  und somit isomorph zur Booleschen Algebra  $B_{\binom{n+1}{3}}$ , weil  $|T_n| = \binom{n+1}{3}$ .  $F(J(T_n(\emptyset)), q)$  ist somit die rangerzeugende Funktion der Booleschen Algebra (vgl. Kapitel 1.5) und  $|J(T_n(\emptyset))|$  die Anzahl aller Teilmengen von  $[\binom{n+1}{3}]$  und deshalb gleich  $2^{\binom{n+1}{3}}$ .  $\square$

**Satz 3.3.2.** Für  $S = \{x\}$  mit  $x \in \{r, b, v, g, o, s\}$  gilt

$$F(J(T_n(\{x\})), q) = \prod_{j=1}^n j!_q = \prod_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n-1} \frac{[i+1]_q}{[i]_q},$$

$$|J(T_n)| = \prod_{j=1}^n j!$$

mit  $j!_q = (1)(1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+q^2+\cdots+q^{j-1})$ .

*Beweis.* Das Poset  $T_n(\{x\})$  ist eine direkte Summe von  $n-j$  disjunkten Ketten der Länge  $j-1$  für jedes  $j \in [n-1]$ . Die Anzahl an Ordnungsidealen ist daher gleich dem Produkt aller Anzahlen an Ordnungsidealen in jeder Kette. Es gibt  $n-1$  Ketten der Länge 0,  $n-2$  Ketten der Länge 1 usw. Schließlich gibt es 1 Kette der Länge  $n-2$ . In jeder Kette der Länge  $k$  gibt es  $k+2$  Ordnungsideale (siehe Abbildung 3.2.3 für den Fall  $k=3$ ). Daher ist

$$|J(T_n)| = 2^{n-1} \cdot 3^{n-2} \cdot 4^{n-3} \cdots (n-1)^2 \cdot n^1 = \prod_{j=1}^n j!$$

und die rangerzeugende Funktion ist das Produkt der rangerzeugenden Funktionen der einzelnen Ketten

$$F(J(T_n(\{x\})), q) = (1+q)^{n-1} (1+q+q^2)^{n-2} \cdots (1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1})^1 =$$

$$= \prod_{j=1}^n (1)(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{j-1}) = \prod_{j=1}^n j!_q.$$

□



Abbildungung 3.3.1: Das 0-Farben-Poset  $T_4(\emptyset)$  (links) und das grüne 1-Farben-Poset  $T_4(\{g\})$  (rechts).

### 3.3.2 2-Farben-Posets

**Satz 3.3.3.** Für  $S \in \{\{g, o\}, \{r, s\}, \{b, v\}\}$  gilt

$$F(J(T_n(S)), q) = \prod_{j=1}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \prod_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n-1} \frac{[j+1]_q}{[j]_q},$$

$$|J(T_n(S))| = \prod_{j=1}^n \binom{n}{j}$$

mit  $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \prod_{i=1}^j \frac{1-q^{n-j+i}}{1-q^i} = \frac{(1-q)^n (1-q)^{n-1} (1-q)^{n-2} \cdots (1-q)^{n-j+1}}{(1-q^1)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^j)}$ .

*Beweis.* Die Posets  $T_n(\{g, o\})$ ,  $T_n(\{r, s\})$  und  $T_n(\{b, v\})$  sind isomorphe Posets, daher können wir uns auf den Fall  $S = \{g, o\}$  beschränken. Für den Beweis benutzen wir Proposition 3.2.1. Die Zahlenanordnungen  $Y_n(\{g, o\})$  haben nur die Bedingung  $y_{i,j} < y_{i+1,j}$ . Die Einträge sind also entlang der Spalten strikt steigend, haben aber keine Bedingungen entlang der Zeilen. In einer Spalte der Länge  $j$  müssen demnach  $j$  verschiedene Zahlen aus  $[n]$ , der Größe nach geordnet, vorkommen. Das entspricht einer  $k$ -elementigen Teilmenge von  $[n]$ , wofür es  $\binom{n}{j}$  Möglichkeiten gibt. Da es keine Bedingungen entlang der Zeilen gibt, können wir die Anzahlen in den Spalten multiplizieren (siehe Abbildung 3.3.2) und

bekommen

$$|Y_n(S)| = |J(T_n(S))| = \prod_{j=1}^n \binom{n}{j}.$$

Wir geben nun jedem Eintrag  $y_{i,j}$  in der Zahlenanordnung das Gewicht  $q^{y_{i,j}-i}$ . So erhalten wir die erzeugende Funktion  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right]_q$  in jeder Spalte  $j$  und insgesamt wieder ein Produkt

$$\mathcal{GF}_{Y_n(S)}(q) = F(J(T_n(S)), q) = \prod_{j=1}^n \left[ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right]_q.$$

□

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{5} & \\ \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{4} & & \\ \boxed{4} & \boxed{5} & & & \\ \boxed{5} & & & & \end{array}$$

$$\binom{5}{5} \times \binom{5}{4} \times \binom{5}{3} \times \binom{5}{2} \times \binom{5}{1}$$

Abbildung 3.3.2: Eine Zahlenanordnung aus  $Y_5(\{g, o\})$  besteht aus 5 voneinander unabhängigen Spalten.

**Satz 3.3.4.** Für  $S_1 \in \{\{b, g\}, \{b, s\}, \{v, o\}, \{g, s\}\}$  und  $S_2 \in \{\{r, v\}, \{r, g\}, \{v, g\}, \{b, o\}\}$  gilt

$$F(J(T_n(S_1)), q) = F(J(T_n^*(S_2)), q) = \prod_{j=1}^n C_j(q),$$

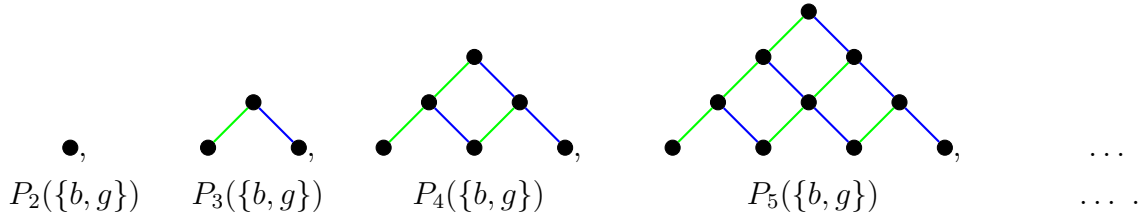
$$|J(T_n(S_1))| = |J(T_n(S_2))| = \prod_{j=1}^n C_j = \prod_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n-1} \frac{i+j+2}{i+j},$$

wobei  $C_j$  die  $j$ 'te Catalanzahl  $C_j := \frac{1}{j+1} \binom{2j}{j}$  und  $C_j(q)$  die Carlitz-Riordan  $q$ -Catalanzahl, definiert durch  $C_j(q) := \sum_{k=1}^j q^{k-1} C_{k-1}(q) C_{j-k}(q)$  und die Anfangsbedingungen  $C_0(q) = C_1(q) = 1$ , ist.

*Beweis.* Die Posets  $T_n(S_1)$  und  $T_n^*(S_2)$  für alle  $S_1 \in \{\{b, g\}, \{b, s\}, \{v, o\}, \{g, s\}\}$  und  $S_2 \in \{\{r, v\}, \{r, g\}, \{v, g\}, \{b, o\}\}$  sind isomorphe Posets. Darum können wir uns auf das

Poset  $T_n(\{b, g\})$  beschränken. Der Beweis für die restlichen Posets folgt aus der Poset-Isomorphie.

Das Poset  $T_n(\{b, g\})$  entsteht, wie im Beweis der Proposition 3.2.1 beschrieben, als direkte Summe der disjunkten Komponenten (bzw. Posets)  $P_j(\{b, g\})$  für  $2 \leq j \leq n$ . Das Hasse-Diagramm dieser Posets hat die Form (in dieser Darstellung leicht gedreht)



Wie man anhand dieser Darstellung schon sehen kann, stehen die Komponenten  $P_j$  in Beziehung zu Dyck-Pfaden. Ein Dyck-Pfad der Länge  $2n$  ist ein Gitterpunktweg von  $(0, 0)$  nach  $(2n, 0)$  mit den erlaubten Schritten  $(1, 1)$  („hinauf“) und  $(1, -1)$  („hinunter“), der nie unter die  $x$ -Achse gerät. Es gibt  $C_n$  Dyck-Pfade der Länge  $2n$  (siehe z.B. [15, 6]). Die Carlitz-Riordan  $q$ -Catalanzahlen  $C_n(q)$  geben jedem Pfad das Gewicht  $q$  hoch der Anzahl an vollständigen Einheitsquadraten zwischen Pfad und  $x$ -Achse.

Wir legen nun einen Dyck-Pfad der Länge  $2j$  über das Hasse-Diagramm des Posets  $P_j(\{b, g\})$ , wie in Abbildung 3.3.3, und fügen jeden Knoten von  $P_j(\{b, g\})$  einem Ordnungsideal  $I$  hinzu, wenn es strikt unter dem Pfad liegt (in der Abbildung sind diese Knoten hervorgehoben). Dadurch wird ersichtlich, dass die Menge der Ordnungsideale von  $P_j(\{b, g\})$  in Bijektion zu Dyck-Pfaden der Länge  $2n$  stehen. Daher ist  $|J(P_j(\{b, g\}))| = C_j$ .

Da außerdem jeder Knoten von  $P_j(\{b, g\})$  die südliche Ecke eines Einheitsquadrates darstellt, das zwischen Dyck-Pfad und  $x$ -Achse liegen kann, liegt es genau dann strikt unterhalb des Pfades, wenn auch das Quadrat unterhalb des Pfades liegt. Daher geben die Carlitz-Riordan  $q$ -Catalanzahlen  $C_n(q)$  jedem Ideal  $I$  von  $P_j(\{b, g\})$  das Gewicht  $q^{|I|}$ . Somit ist  $F(J(P_j(\{b, g\})), q) = C_j(q)$ . Weil  $T_n(\{b, g\})$  die direkte Summe der disjunkten Komponenten  $P_j$  ist, erhalten wir schließlich

$$F(J(T_n(\{b, g\})), q) = \prod_{j=2}^n F(J(P_j(\{b, g\})), q) = \prod_{j=2}^n C_j(q) = \prod_{j=1}^n C_j(q),$$

$$|J(T_n(\{b, g\}))| = \prod_{j=2}^n |J(P_j(\{b, g\}))| = \prod_{j=2}^n C_j = \prod_{j=1}^n C_j.$$

□

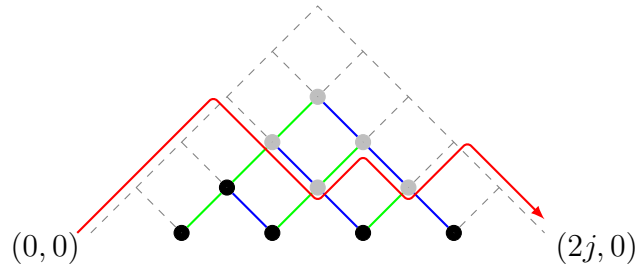


Abbildung 3.3.3: Ein Dyck-Pfad (in rot) der Länge  $2j = 5$  über  $P_5(\{b, g\})$ . Die Knoten strikt unterhalb des Pfades bilden ein Ordnungsideal.



Abbildung 3.3.4: Das binomische Poset  $T_4(\{o, g\})$  (links) und das Catalan-Poset  $T_4(\{b, g\})$  (rechts).

### 3.3.3 3-Farben-Posets

**Satz 3.3.5.** Für eine erlaubte Teilmenge  $S$  von  $\{r, b, g, o, v, s\}$  mit  $|S| = 3$  und  $S \notin \{\{r, g, v\}, \{s, b, r\}\}$  gilt

$$F(J(T_n(S)), q) = \prod_{j=1}^{n-1} (1 + q^j)^{n-j} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n-1} \frac{[i+j]_q}{[i+j-1]_q},$$

$$|J(T_n(S))| = 2^{\binom{n}{2}}.$$

Der Beweis findet sich in zwei Schritten in [22]. Es gibt zwei nicht-isomorphe Klassen von Posets  $T_n(S)$  mit diesen Bedingungen. Die Posets der Klasse mit  $S \subseteq \{\{o, s, b\}, \{s, v, (g)\}, \{o, r, (v)\}, \{b, r, (g)\}\}$  bestehen wieder aus disjunkten  $P_j$ 's, weshalb die rangerzeugende Funktion von  $J(T_n(S))$  das Produkt der rangerzeugenden Funktionen von  $J(P_j(S))$  ist. Für die Posets der Klasse mit  $S \subseteq \{\{r, g, s\}, \{o, b, v\}, \{v, g, o\}, \{b, g, o\}, \{v, g, b\}\}$  gilt



laut Proposition 3.2.1, dass es eine gewichtserhaltende Bijektion von  $J(T_n(\{g, v, o\}))$  zu  $Y_n(\{g, v, o\})$  gibt und  $Y_n(\{g, v, o\})$  ist die Menge aller SSYT in Treppenform  $\delta_n$ . Die erzeugende Funktion für SSYT in Treppenform  $\delta_n$  erhält man über die Schur-Funktion und die Vandermonde-Determinante.

Das Einsetzen von  $q = 1$  in der rangerzeugenden Funktion ergibt schließlich die Anzahl  $|J(T_n(S))| = \prod_{j=1}^{n-1} 2^{n-j} = 2^{\binom{n}{2}}$ .

Für die dualen Posets  $T_n(\{r, g, v\})$  und  $T_n(\{s, b, r\})$  wurde noch keine Produktformel gefunden und es scheint auch keine schöne zu geben. Die Ordnungsideale sind jedoch in Bijektion zu pyramidalen ebenen Partitionen, was in Kapitel 4 gezeigt wird.



Abbildung 3.3.5: Das Turnier-Poset  $T_4(\{r, (y), o\})$  (links) und das SSYT- $\delta_n$ -Poset  $T_4(\{o, g, y\})$  (rechts).

Der Term  $2^{\binom{n}{2}}$  beschreibt auch die Anzahl an Teilgraphen des vollständigen Graphen  $K_n$  mit  $n$  bezeichneten Knoten sowie die Anzahl an Turnieren mit  $n$  bezeichneten Knoten.

**Definition 3.3.1.** Ein **Turnier** mit  $n$  bezeichneten Knoten ist ein schlingenloser Graph ohne Mehrfachkanten, bei dem zwischen je zwei Knoten  $i$  und  $j$  die gerichtete Kante  $(i, j)$  oder die gerichtete Kante  $(j, i)$  in der Kantenmenge enthalten ist.

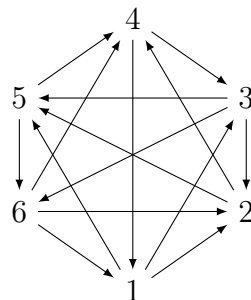


Abbildung 3.3.6: Ein Turnier mit 6 Knoten.



Abbildung 3.3.7: Eine Zahlenanordnung  $Y \in Y_4(\{b, r, (g)\})$  und das korrespondierende Turnier.

**Satz 3.3.6.** *Es gibt eine Bijektion zwischen  $J(T_n(\{b, r, (g)\}))$  und Turnieren mit  $n$  bezeichneten Knoten.*

*Beweis.* Wie betrachten die Zahlenanordnung  $Y_n(\{b, r, (g)\})$ . Die Bedingungen, die die Zahlenanordnung von den Farben Blau ( $y_{i,j} \leq y_{i+1,j-1}$ ) und Rot ( $y_{i,j} \leq y_{i-1,j+1} + 1$ ) erbt, ergeben gemeinsam die Bedingung  $y_{i+1,j-1} \leq y_{i,j} \leq y_{i+1,j-1} - 1$ . Wenn wir also entlang einer Diagonale von südwest nach nordost auf der Zahlenanordnung hinaufwandern, hat der nächste Eintrag immer die Wahl, gleich seinem südwestlichen Nachbar oder um 1 kleiner zu sein.

Die Einträge in der ersten Spalte, wir nennen diese Spalte der Einfachheit wegen hier Spalte  $j = 0$ , sind immer mit  $1, 2, 3, \dots, n$  fixiert. Jeder weitere der  $\frac{(n-1)n}{2} = \binom{n}{2}$  Einträge mit  $j \neq 0$  hat genau 2 Möglichkeiten bei einem gegebenen südwestlichen Nachbar:  $y_{i,j} = y_{i+1,j-1}$  oder  $y_{i,j} = y_{i+1,j-1} - 1$ . Somit gibt es also  $2^{\binom{n}{2}}$  solcher Zahlenanordnungen.

Wir konstruieren nun die Bijektion wie folgt: In einem Turnier mit  $n$  Knoten zeigt zwischen zwei Knoten  $i$  und  $i + j$  die Kante von  $i + j$  auf  $i$ , wenn  $y_{i,j} = y_{i+1,j-1}$ . Sonst zeigt die Kante von  $i$  auf  $i + j$ . □

### 3.3.4 4-Farben-Posets

**Satz 3.3.7.** *Für eine erlaubte Teilmenge  $S$  von  $\{r, b, g, o, v, s\}$  mit  $|S| = 4$  gilt*

$$|J(T_n(S))| = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n-1} \frac{i+j+k+1}{i+j+k-1}.$$

*Beweis.* Die Posets  $T_n(S)$  der erlaubten Teilmengen  $S$  von  $\{r, b, g, o, v, s\}$  mit  $|S| = 4$  bilden zwei nichtisomorphe Klassen: Das Poset  $T_n(\{g, v, b, o\})$  auf der einen Seite und die

Posets  $T_n(\{r, o, (v), g\})$ ,  $T_n(\{r, b, (g), v\})$ ,  $T_n(\{v, s, (g), r\})$  sowie die zu ihnen dualen Posets  $T_n(\{v, s, (g), b\})$ ,  $T_n(\{o, s, (b), g\})$  und  $T_n(\{r, b, (g), s\})$  auf der anderen Seite.

In Kapitel 3.1 (zusammen mit Proposition 3.2.1) haben wir gezeigt, dass die Ordnungsideale von  $T_n(\{g, v, b, o\})$  in Bijektion zu  $n \times n$  alternierenden Vorzeichenmatrizen und die Ordnungsideale von  $T_n(\{r, o, (v), g\})$  in Bijektion zu TSSCPPs in einer  $2n \times 2n \times 2n$  Box stehen. Die Ordnungsideale der restlichen Teilposets mit  $|S| = 4$  sind wegen der Poset-Isomorphie ebenfalls in Bijektion mit TSSCPPs. Die Anzahl an  $n \times n$  AMSs [24] und TSSCPPs [2] in einer  $2n \times 2n \times 2n$  Box ist  $\prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$ .  $\square$

### 3.3.5 5-Farben-Posets

Es gibt nur drei erlaubte Teilposets von  $T_n$  mit fünf Farben und darunter zwei Isomorphie-Klassen. Für keine konnte bisher eine schöne Produktformel gefunden werden. Das Teilposet  $T_n\{r, b, o, (v), (g)\}$  ist allerdings die Vereinigung von  $T_n\{b, o, (v), (g)\}$  und  $T_n\{r, o, (v), (g)\}$ , was wir uns als Zusammensetzung von ASMs und TSSCPPs vorstellen können. Eine genauere Untersuchung dieses Teilposets könnte also tiefere Einblicke in die Vergleichbarkeit von ASMs und TSSCPPs bringen. Für eine ausführlichere Besprechung siehe [19].

### 3.3.6 Das vollständige Poset $T_n$

**Satz 3.3.8.** *Für das vollständige tetraedrische Poset  $T_n$  gilt*

$$|J(T_n)| = \prod_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n-1} \frac{i + j + k - 1}{i + j + k - 2}.$$

*Beweis.* In [18] beweist der Autor, dass die obige Formel für  $|J(T_n)|$  die Anzahl an totalsymmetrischen ebenen Partitionen (TSPP) in einer  $(n-1) \times (n-1) \times (n-1)$  Box angibt. Daher suchen wir nach einer Bijektion zwischen  $T_n$  und TSPP. TSPP sind ebene Partitionen, die bezüglich aller Permutationen der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse symmetrisch sind. Als fundamentale Anordnung einer TSPP reicht daher der Bereich im dreidimensionalen Ferrers-Diagramm, wo  $x \geq y \geq z$ . Wir betrachten nun alle  $(x, y, z)$  in diesem Bereich als Gitterpunkte und verbinden sie mit roten, orangen und silbernen Kanten, die mit der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung im Ferrers-Diagramm korrespondieren. Dieses Gitter ist isomorph zum Hasse-Diagramm von  $T_n(\{r, o, s\})$  und jede erlaubte fundamentale Anordnung der TSPP

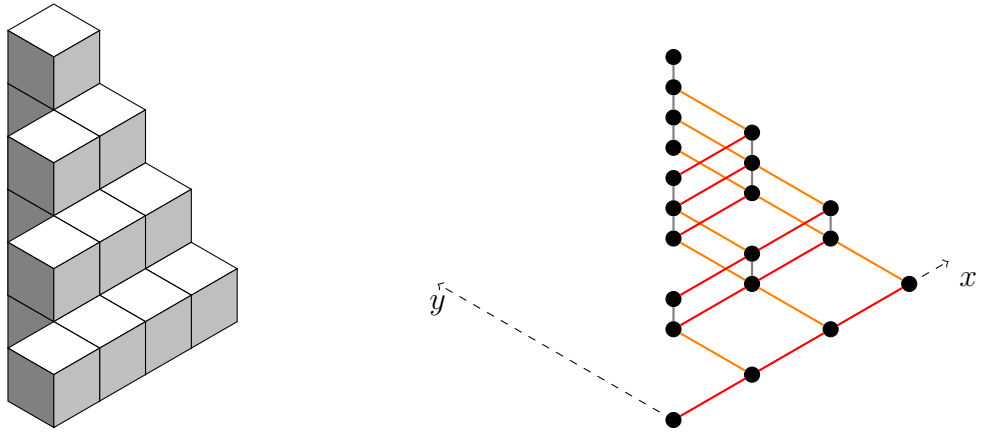


Abbildung 3.3.8: Die fundamentale Anordnung einer TSPP und das korrespondierende Gitter, beide in einer zur üblichen Darstellung um die  $z$ -Achse gedrehten Form.

korrespondiert mit einem Ordnungsideal von  $T_n(\{r, o, s\})$ . Alle anderen Farb-Kanten in  $T_n$  sind von diesen Farben induziert. Daher sind alle TSPP in einer  $(n-1) \times (n-1) \times (n-1)$  Box in Bijektion mit den Ordnungsidealen von  $T_n$ .

Dargestellt ist dieses Gitter in gedrehter Ansicht in Abbildung 3.3.8. Hier sehen wir, dass das Gitter aus disjunkten Komponenten  $P_j(\{r, o\})$  besteht, die mit silbernen Kanten verbunden sind, auf die Weise, dass das Gitter zu  $T_n(\{r, o, s\})$  isomorph ist. Die Bedingungen für ein Ordnungsideal decken sich offensichtlich mit den Bedingungen für eine ebene Partition.  $\square$

# 4 Pyramidale ebene Partitionen

In diesem Kapitel widmen wir uns pyramidalen ebenen Partitionen. Die Definition stammt aus [10]. Wir zeigen eine Verbindung zum tetraedrischen Poset. Anschließend beschäftigen wir uns mit der Struktur von pyramidalen ebenen Partitionen und zeigen Bijektionen von einer modifizierten Form von pyramidalen ebenen Partitionen zu TCSP und TSSCP.

## 4.1 Pyramidale ebene Partitionen und das tetraedrische Poset

In [10] berechnen die Autoren die Anzahlen von ebenen Partitionen, die in die vollständige pyramidale ebene Partition der Größe  $n$  passen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & \\
 n-1 & n-2 & & \dots & & & 1 \\
 n-2 & \vdots & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \\
 2 & & 1 & & & & \\
 1 & & & & & & 
 \end{array}$$

Die Anzahlen für  $n = 0, \dots, 6$  sind 1, 2, 9, 96, 2498, 161422, 26217833. Diese Anzahlen decken sich mit den Anzahlen für die Ordnungsideale der dualen Posets  $T_n(\{r, g, v\})$  und  $T_n(\{s, b, r\})$ , die Striker in [22] für  $n = 1, \dots, 6$  berechnet hat. Im Folgenden stellen wir eine Bijektion zwischen den beiden Objekten vor.

**Definition 4.1.1.** Eine ebene Partition  $P_n = \{p_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n, i+j \leq n+1}$  ist eine **pyramidale ebene Partition** (PPP) der Größe  $n$ , wenn  $0 \leq p_{i,j} \leq n - (i + j) + 2$ .

**Satz 4.1.1.** *Pyramidale ebene Partitionen der Größe  $n$  sind in Bijektion mit den Ordnungsidealen von  $T_{n+1}(\{r, g, v\})$  und dem dualen Poset  $T_{n+1}(\{s, b, r\})$ .*

PPP mit $n = 4$		Zeilen nach rechts gerückt		Vertikal gespiegelt		i addiert und Spalte $j = 0$ eingefügt
3 1 1 0		3 1 1 0		0 1 1 3		1 1 2 2 4
1 1 0	$\Leftrightarrow$	1 1 0	$\Leftrightarrow$	0 1 1	$\Leftrightarrow$	2 2 3 3
1 0		1 0		0 1		3 3 4
1		1		1		4 5
						5

Abbildung 4.1.1: Die Bijektion zwischen einer PPP und dem dazugehörigen SSYT.

*Beweis.* Da  $J(T_{n+1}(\{r, g, v\}))$  in gewichtserhaltender Bijektion zu  $Y_{n+1}(\{r, g, v\})$  steht, zeigen wir eine Bijektion zwischen pyramidalen ebenen Partitionen der Größe  $n$  und  $Y_{n+1}(\{r, g, v\})$ . Das sind SSYT in Treppenform  $\delta_{n+1}$  mit Einträgen  $y_{i,j}$ , für die gilt  $i \leq y_{i,j} \leq j + i$ ,  $y_{i,j} \leq y_{i-1,j+1} + 1$  und  $y_{i,j} \leq y_{i,j+1}$ .

Wir beginnen mit einer PPP  $P_n$ . Wir rücken alle Einträge  $p_{i,j}$  um  $i - 1$  Einträge nach rechts. Danach spiegeln wir diese Anordnung entlang einer vertikalen Achse. Wir addieren  $i$  zu jedem Eintrag  $p_{i,j}$  in Zeile  $i$ . Schließlich fügen wir noch eine Spalte  $j = 0$  mit den Einträgen  $1, 2, \dots, n + 1$  als erste Spalte links hinzu. Somit erhalten wir ein SSYT mit Einträgen  $y_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$ ,  $0 \leq j \leq n$  und den Bedingungen  $i \leq y_{i,j} \leq j + i$ ,  $y_{i,j} \leq y_{i-1,j+1} + 1$  und  $y_{i,j} \leq y_{i,j+1}$ . Diese Zuordnung ist eine Eins-Zu-Eins-Zuordnung.  $\square$

*Anmerkung 4.1.1.* Die Bijektion kann auch direkt zwischen pyramidalen ebenen Partitionen und den Ordnungsidealen von  $T_{n+1}(\{r, g, v\})$  konstruiert werden. Betrachten wir das dreidimensionale Ferrers-Diagramm der vollständigen pyramidalen ebenen Partition. Wir verbinden die Punkte  $(i, j, k)$  als Gitterpunkte mit einer roten Kante, wenn sie in Richtung der  $x$ -Achse benachbart sind, mit einer grünen Kante, wenn sie in Richtung der  $y$ -Achse benachbart sind und mit einer violetten Kante, wenn sie in Richtung der  $z$ -Achse benachbart sind (Abbildung 4.1.2). Dieses Gitter ist isomorph zum Hasse-Diagramm von  $T_{n+1}(\{r, g, v\})$  und jede mögliche pyramidale ebene Partition ist in direkter Bijektion zu einem Ordnungsideal in  $J(T_{n+1}(\{r, g, v\}))$ .

## 4.2 Pramidale ebene Partitionen zählen?

Obwohl es wohl keine schöne Produktformel für pyramidale ebene Partitionen gibt, sind es doch interessante Objekte, die einer genaueren Betrachtung bedürfen. Wir stellen nun

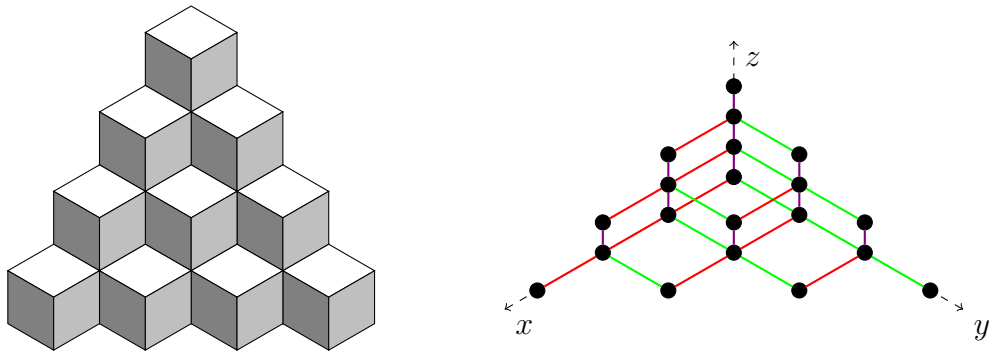
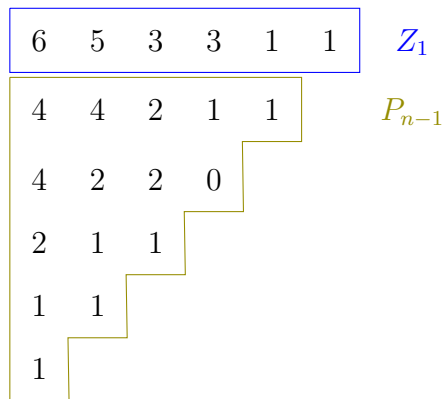


Abbildung 4.1.2: Die vollständige pyramidale ebene Partition und das zugehörige Gitter. Dreht man das Gitter um  $\pi$  um die  $z$ -Achse, erhält man das Hasse-Diagramm von  $T_{n+1}(\{r, g, v\})$ .

einige Ansätze vor, mit der wir Zeilen, Spalten und Hüllen von PPP zählen können, auch wenn es schließlich nicht gelingt, eine Formel für PPP zu finden.

### 4.2.1 Zeilen der PPP

Pyramidale ebene Partitionen können auf mehrfache Weise rekursiv betrachtet werden. So ist eine PPP  $P_n$  eine Zusammensetzung aus der ersten Zeile  $Z_1: p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,n}$  und einer PPP  $P_{n-1}$  im Süden:



Die erste Zeile ist eine (Zahl-)Partition mit höchstens  $n$  Summanden mit der Bedingung  $0 \leq p_{1,i} \leq n - i + 1$  für  $1 \leq i \leq n$ . Es gibt insgesamt  $C_{n+1}$  solcher Partitionen [16, Ex. 6.19 (vv)], wobei  $C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} \binom{2(n+1)}{n+1}$  die  $(n+1)$ -te Catalan-Zahl ist. Abbildung 4.2.1 verdeutlicht diesen Zusammenhang: Markiert man in einem Dyck-Pfad (in der Abbildung

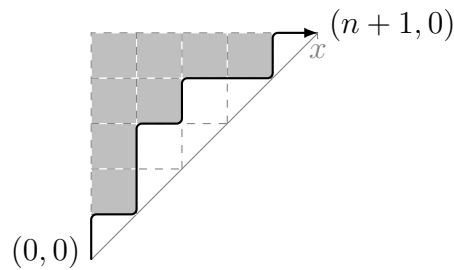


Abbildung 4.2.1: Der gedrehte Dyck-Pfad der Länge 5, der mit der (Zahl-)Partition 4211 korrespondiert.

um  $\frac{\pi}{4}$  gedreht) der Länge  $2(n+1)$  die Quadrate, die der Pfad nicht mit der  $x$ -Achse einschließt, entsteht ein Young-Tableau einer Partition, die genau die obigen Bedingungen erfüllt. Dyck-Pfade der Länge  $2(n+1)$  werden mit  $C_{n+1}$  gezählt.

Man kann dies auch für alle Zeilen verallgemeinern. Für jede Zeile  $i$  mit  $1 \leq i \leq n$  der pyramidalen ebenen Partition  $P_n$  gibt es  $C_{n-i+2}$  Möglichkeiten, wenn wir die Zeile darüber außer Acht lassen. Interpretiert man die Zeilen als Gitterpunktwege (ähnlich wie in [4]), erhalten wir ein Nest von Gitterpunktwegen: Der Gitterpunktweg, der mit der ersten Zeile korrespondiert, startet im Punkt  $(0, 0)$  und endet im Punkt  $(7, 7)$ . Der nächste Pfad darüber, der mit der zweiten Zeile korrespondiert, startet im Punkt  $(-1, 2)$  und endet im Punkt  $(7-2, 7+1)$ . So startet jeder Pfad, der mit Zeile  $i$  korrespondiert, im Punkt  $(1-i, 2i-2)$  und endet im Punkt  $(9-2i, 6+i)$ . Erlaubt sind die Schritte  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  und jeder Pfad verläuft so, dass er das Ferrers-Diagramm der Partition in Zeile  $i$  wie in Abbildung 4.2.1 darstellt. Da es sich um eine ebene Partition handelt, dürfen sich die Pfade nicht berühren. Die Bedingung, dass es sich um eine PPP handelt, korrespondiert mit der Tatsache, dass der Pfad, der mit Zeile  $i$  korrespondiert, die Diagonale  $y = x + 3(i-1)$  nicht unterschreiten darf. Abgebildet ist so ein Nest in Abbildung 4.2.2.

Die Schwierigkeit, diese Nester von Gitterpunktwegen zu zählen, liegt allerdings in der Bedingung, dass die Diagonale nicht unterschritten werden darf. Dadurch ist es nämlich nicht möglich, dass jeder Pfad, der im Anfangspunkt der Zeile  $i$  startet, in jedem Endpunkt enden kann. Daher kann z.B. die Methode, die in [4, Theorem 3.6] beschrieben wird, nicht angewendet werden.



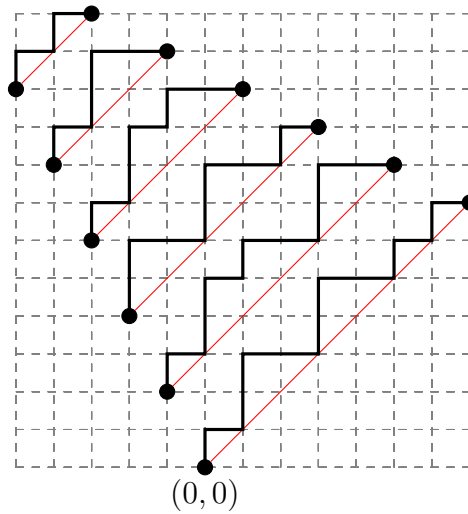
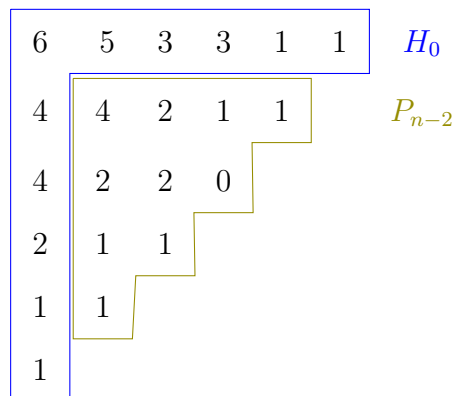


Abbildung 4.2.2: Das Nest von Gitterpunktswegen, das mit der PPP auf Seite 71 korrespondiert. Die roten Linien sind die Diagonalen, die nicht unterschritten werden dürfen.

### 4.2.2 Hüllen der PPP

Vorerst verlagern wir unsere Aufmerksamkeit jedoch auf eine weitere rekursive Darstellung von PPP, die neue Perspektiven aufwirft: Eine PPP  $P_n$  ist auch eine Zusammensetzung aus seiner äußersten Hülle und einer PPP  $P_{n-2}$ :



**Definition 4.2.1.** Die  **$k$ -te Hülle** einer pyramidalen ebenen Partition  $P_n$  besteht aus den Einträgen  $p_{i,j}$  mit  $i = k + 1 \wedge j \geq k + 1$  oder  $j = k + 1 \wedge i \geq k + 1$ . Die 0-te Hülle bezeichnen wir als die **äußerste Hülle**.

$$\begin{array}{ccccccc}
 p_{k+1,k+1} & p_{k+1,k+2} & p_{k+1,k+3} & \cdots & p_{k+1,n-k-1} & p_{k+1,n-k} & \\
 p_{k+2,k+1} & & & & & & \\
 p_{k+3,k+1} & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \\
 p_{n-k-1,k+1} & & & & & & \\
 p_{n-k,k+1} & & & & & & 
 \end{array}$$

**Definition 4.2.2.** Generell definieren wir eine **pyramidale Hülle der Größe  $n$**  als ebene Partition mit den Einträgen  $p_{i,j}$  mit  $i = 1 \leq j \leq n$  oder  $j = 1 \leq i \leq n$ , wobei  $0 \leq p_{i,j} \leq n - (i + j) + 2$ .

**Satz 4.2.1.** *Es gibt insgesamt  $\sum_{l=0}^n \left[ \frac{n+1-l}{n+1} \binom{n+l}{n} \right]^2$  verschiedene pyramidale Hüllen der Größe  $n$ .*

*Beweis.* Sei  $H_n$  die Anzahl aller pyramidalen Hüllen der Größe  $n$ . Betrachten wir das Ferrers-Diagramm einer pyramidalen Hülle der Größe  $n$ . Wir sehen in Abbildung 4.2.3, dass jede solche Hülle in Bijektion zu einem Gitterpunktweg ist, der sich wie folgt zusammensetzt:

Der Gitterpunktweg geht zuerst von  $(n + 1, 1, 0)$  nach  $(1, 1, l)$ , wobei  $l \in [n]$  der  $z$ -Wert des höchsten, nordwestlichsten Punktes  $(1, 1, l)$  im Ferrers-Diagramm ist. Die erlaubten Schritte des Weges sind  $(-1, 0, 0)$  und  $(0, 0, 1)$ . Er darf in diesem Abschnitt nicht die Diagonale, die durch  $(n + 1, 1, 0)$  und  $(1, 1, n)$  geht, überschreiten. Anschließend geht der Gitterpunktweg weiter von  $(1, 1, l)$  nach  $(1, n + 1, 0)$  mit den Schritten  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, -1)$ , wobei er die Diagonale, die durch  $(1, 1, k)$  und  $(1, n + 1, 0)$  geht, nicht überschreiten darf. Es gilt also insgesamt:

$$H_n = \sum_{l=0}^n \left[ \#(\text{Wege von } (n + 1, 1, 0) \text{ nach } (1, 1, l)) \times \#(\text{Wege von } (1, 1, l) \text{ nach } (1, n + 1, 0)) \right].$$

Betrachten wir beide Teilwege nun im zweidimensionalen Raum, sehen wir, dass beide Teilwege in Bijektion zu Gitterpunktwegen mit den Schritten  $(1, 1)$  und  $(1, -1)$  stehen,

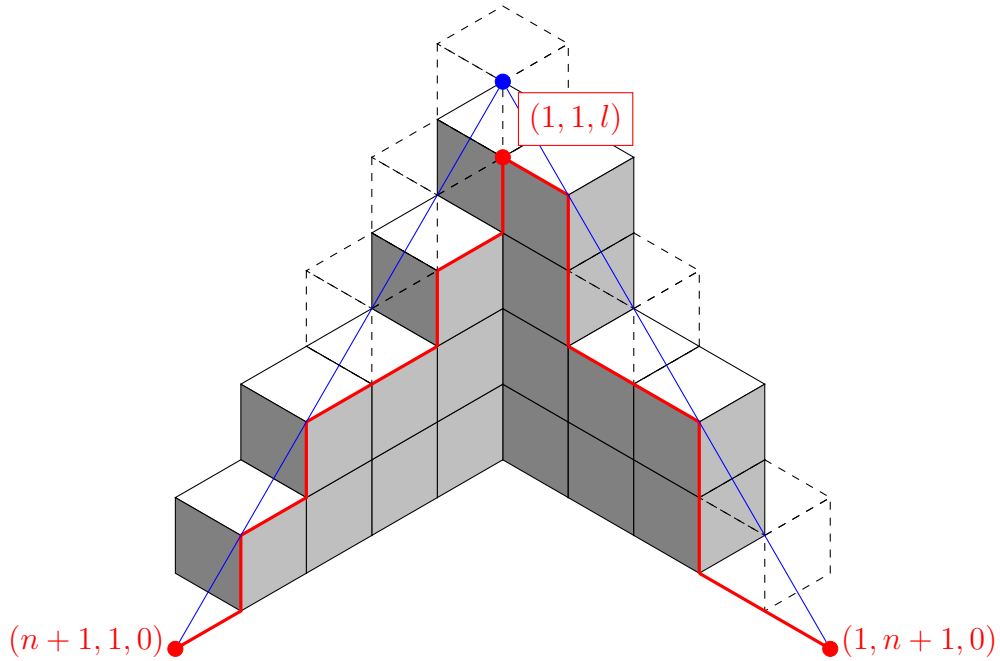


Abbildung 4.2.3: Eine pyramidale Hülle und der entsprechende Gitterpunktweg.

die in  $(0, 0)$  starten und in  $(n + l, n - l)$  enden und nicht unter die  $x$ -Achse gehen – einer etwas modifizierten Form von Dyck-Pfaden. Daher bekommen wir für die Anzahl:

$$H_n = \sum_{l=0}^n [\#(\text{Dyck-Pfade von } (0, 0) \text{ nach } (n + l, n - l))]^2.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Anzahl aller Dyck-Pfade von  $(0, 0)$  nach  $(n + l, n - l)$  gleich  $\frac{n+1-l}{n+1} \binom{n+l}{n}$  ist. Wir zeigen dies mit dem Spiegelungsprinzip [6, Anhang A]. Die Anzahl aller Pfade mit den Schritten  $(1, 1)$  und  $(1, -1)$  von  $(0, 0)$  nach  $(n + l, n - l)$  (ohne Rücksicht auf die  $x$ -Achse) ist  $\binom{n+l}{n}$ , da aus  $n + l$  Schritten  $n$  Schritte nach oben gehen müssen. Von dieser Anzahl müssen wir die Anzahl aller „schlechten“ Pfade abziehen, die über die  $x$ -Achse gehen. Jeder solche „schlechte“ Pfad  $p$  hat einen ersten Schnittpunkt  $S$  mit der Gerade  $y = -1$  (siehe Abbildung 4.2.4). Wir erstellen einen Pfad  $q$ , indem wir den Pfad  $p$  bis zu diesem Punkt, also von  $(0, 0)$  bis  $S$ , an der Gerade  $y = -1$  spiegeln. Ab  $S$  sind  $q$  und  $p$  ident. Wir erhalten einen Pfad, der in  $(0, -2)$  beginnt und in  $(n + l, n - l)$  endet. Wir erhalten so eine Bijektion von allen „schlechten“ Pfaden zu allen Pfaden, die in  $(0, -2)$  beginnen und in  $(n + l, n - l)$  enden. Deren Anzahl ist  $\binom{n+l}{n+1}$ .

Somit erhalten wir für die Anzahl aller Dyck-Pfade von  $(0, 0)$  nach  $(n + l, n - l)$  den Ausdruck  $\binom{n+l}{n} - \binom{n+l}{n+1} = \frac{n+1-l}{n+1} \binom{n+l}{n}$  und insgesamt

$$H_n = \sum_{l=0}^n \left[ \frac{n+1-l}{n+1} \binom{n+l}{n} \right]^2.$$

□

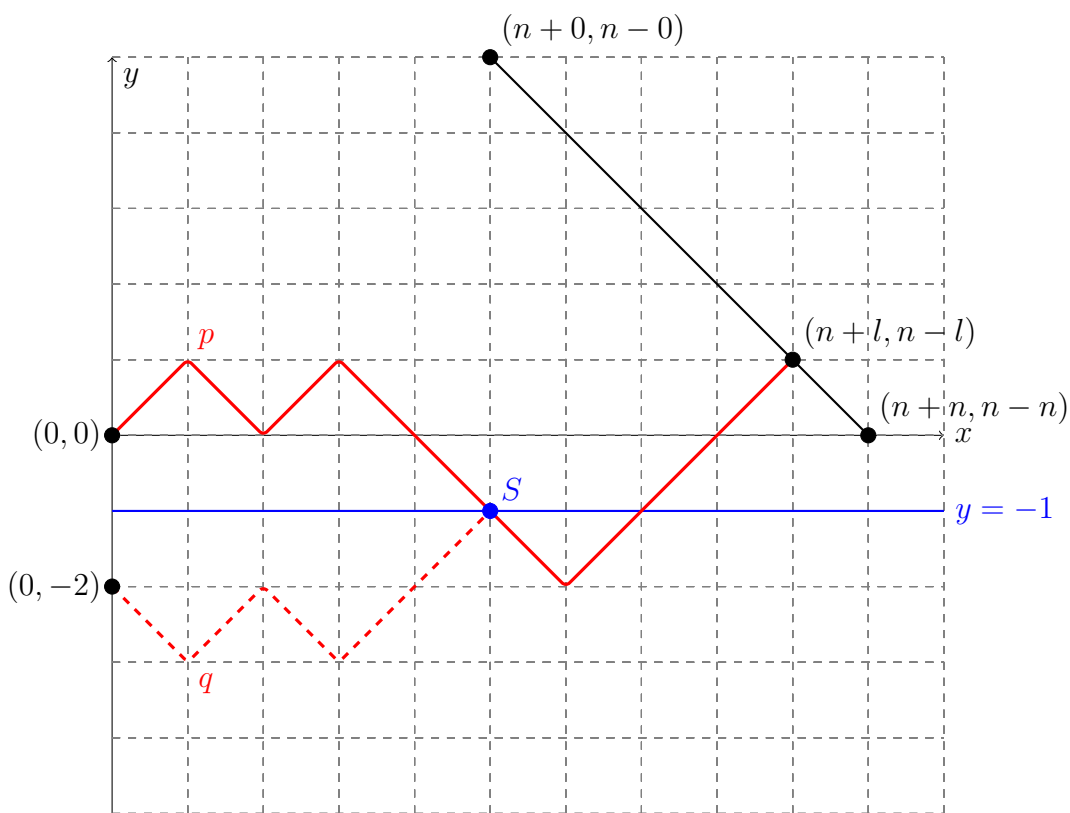


Abbildung 4.2.4: Das Spiegelungsprinzip verdeutlicht, dass Pfade von  $(0, 0)$  nach  $(n + l, n - l)$ , die die  $x$ -Achse überschreiten, in Bijektion mit Pfaden von  $(0, -2)$  nach  $(n + l, n - l)$  sind.

*Anmerkung 4.2.1.* Wir erhalten diese Formel auch, wenn wir die Einträge einer Zeile des Catalan-Dreiecks [23] quadrieren und anschließend summieren. Das Catalan-Dreieck

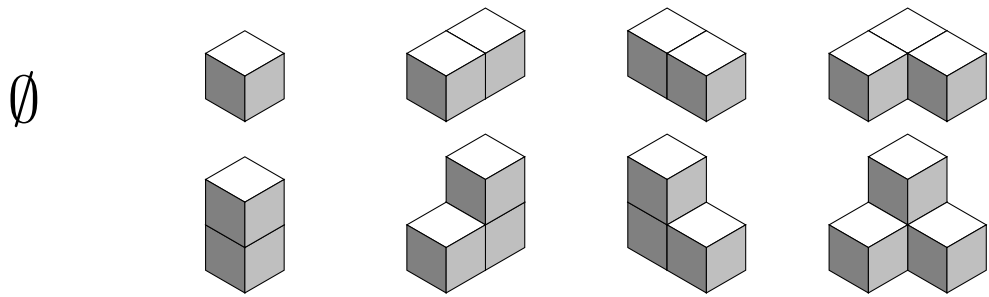


Abbildung 4.2.5: Die 9 pyramidalen Hüllen der Größe 2.

1
1 1
1 2 2
1 3 5 5
1 4 9 14 14

besteht aus Einträgen  $c_{n,k}$  mit  $0 \leq k \leq n$ . Für die Einträge gilt  $c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n,k-1}$  und  $c_{n,0} = 1$ . Für die Einträge gilt  $c_{n,k} = \frac{n+1-k}{n+1} \binom{n+k}{n}$  [23].

Der Eintrag  $c_{n,k}$  beschreibt auch die Anzahl an Partitionen mit höchstens  $n$  Summanden  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , wobei  $0 \leq p_i \leq n - i + 1$ ,  $2 \leq i \leq n$  und  $p_1 = k$ . Nennen wir diese Partitionen pyramidale Zeilen. Die Menge der pyramidalen Zeilen mit fixem  $n$  und  $k$  besteht nämlich aus der Teilmenge der pyramidalen Zeilen mit  $p_2 \leq k - 1$  und der Teilmenge der pyramidalen Zeilen mit  $p_2 = k$  (für  $k \neq n$ ). Die Teilmenge mit  $p_2 = k$  (für  $k \neq n$ ) ist in Bijektion zu pyramidalen Zeilen mit  $n - 1$  Summanden und  $p_1 = k$  und die Teilmenge mit  $p_2 \leq k - 1$  ist in Bijektion zu pyramidalen Zeilen mit  $n$  Summanden und  $p_1 = k - 1$ . Das entspricht der rekursiven Formel  $c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n,k-1}$ . Außerdem gibt es genau eine pyramidale Zeile der Länge  $n$  mit  $p_1 = 0$ .

Eine pyramidale Hülle ist die Zusammensetzung aus zwei pyramidalen Zeilen mit  $n$  Summanden und  $p_1 = k$ . Daher

$$H_n = \sum_{l=0}^n c_{n,l}^2 = \sum_{l=0}^n \left[ \frac{n+1-l}{n+1} \binom{n+l}{n} \right]^2.$$

**Korollar 4.2.1.** *Es gibt  $\sum_{l=0}^n \left[ \frac{n+1-l}{n+1} \binom{n+l}{n} \right]^2$  verschiedene äußerste Hüllen für pyramidale ebene Partitionen  $P_n$ . Für die  $k$ -te Hülle einer pyramidalen ebenen Partition der Größe  $n$  gibt es insgesamt*

$$\sum_{l=0}^{n-2k} \left[ \frac{n-2k+1-l}{n-2k+1} \binom{n-2k+l}{n-2k} \right]^2$$

*verschiedene Möglichkeiten für  $n-2k \geq 0$ .*

*Beweis.* Eine pyramidale ebene Partition besteht aus pyramidalen Hüllen der Größe  $n, n-2, n-4, \dots, 4, 2$  (für gerades  $n$ ) oder  $n, n-2, n-4, \dots, 3, 1$  (für ungerades  $n$ ). Somit ist die  $k$ -te Hülle einer pyramidalen ebenen Partition eine pyramidale Hülle der Größe  $n-2k$  und die 0-te bzw. äußerste Hülle eine pyramidale Hülle der Größe  $n$ .  $\square$

### 4.3 Eck-Pyramidale ebene Partitionen

Ein interessanter Aspekt tut sich auf, wenn wir uns fragen, wie eine pyramidale ebene Partition aussieht, bei der die  $k$ -te Hülle eine pyramidale Hülle die Größe  $n-k$  hat. Wir nennen solche ebenen Partitionen eck-pyramidale ebene Partitionen (CPPP).

**Definition 4.3.1.** Eine ebene Partition  $E_n = \{p_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$  ist eine **eck-pyramidale ebene Partition** (CPPP) der Größe  $n$ , wenn  $0 \leq p_{i,j} \leq n-i+1$  und  $0 \leq p_{i,j} \leq n-j+1$ .

Eck-pyramidale ebene Partitionen sind also alle ebenen Partitionen, die in die vollständige eck-pyramidale ebene Partition passen:

$$\begin{array}{ccccccc} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & \\ n-1 & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & \\ n-2 & n-2 & n-2 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \end{array}$$

Wir sehen, dass die  $k$ -te Hülle einer eck-pyramidalen ebenen Partition eine pyramidale Hülle der Größe  $n-k$  ist. Daher ergeben sich sofort folgende Korollare.

**Korollar 4.3.1.** *Es gibt  $\sum_{l=0}^n \left[ \frac{n+1-l}{n+1} \binom{n+l}{n} \right]^2$  verschiedene äußerste Hüllen für eck-pyramidale ebene Partitionen  $E_n$ . Für die  $k$ -te Hülle einer eck-pyramidalen ebenen Partition der Größe  $n$  gibt es insgesamt*

$$\sum_{l=0}^{n-k} \left[ \frac{n-k+1-l}{n-k+1} \binom{n-k+l}{n-k} \right]^2$$

*verschiedene Möglichkeiten für  $0 \leq k \leq n$ .*

**Korollar 4.3.2.** *Es gibt  $C_{n+1}$  verschiedene äußerste Hüllen für symmetrische eck-pyramidale ebene Partitionen  $E_n$ . Für die  $k$ -te Hülle einer eck-pyramidalen ebenen Partition der Größe  $n$  gibt es insgesamt  $C_{n+1-k}$  verschiedene Möglichkeiten für  $k \leq n$ .*

Außerdem ist eine CPPP  $E_n$  die Zusammensetzung aus der äußersten Hülle und einer CPPP  $E_{n-1}$ :

6	5	3	3	1	1	$H_0$
5	5	3	1	1	1	$E_{n-1}$
4	4	2	1	1	1	
2	2	2	1	1	0	
2	1	1	1	0	0	
1	1	1	0	0	0	

Wir sehen also, dass eck-pyramidale ebene Partitionen in einem engen Zusammenhang zu pyramidalen ebenen Partitionen stehen. Außerdem ist jede pyramidale ebene Partition auch eine eck-pyramidale ebene Partition. Daher ist folgender Satz umso interessanter.

**Satz 4.3.1.** *Eck-pyramidale ebene Partitionen der Größe  $n - 1$  sind in Bijektion zu  $tc$ -symmetrischen ebenen Partitionen (TCSPP) in einer  $2n \times 2n \times 2n$  Box. Daher ist die Anzahl der eck-pyramidalen ebenen Partitionen der Größe  $n$  gleich*

$$\prod_{i=0}^{n-2} \frac{(3i+1)(6i)!(2i)!}{(4i+1)!(4i)!}$$

*Beweis.* Mills, Robins und Rumsey [12] beschreiben eine fundamentale Anordnung für  $tc$ -symmetrische ebene Partitionen  $\{a_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq 2n}$ . Sie besteht aus den Einträgen

$$\begin{array}{cccc}
a_{1,n+1} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,2n-1} \\
a_{2,n+1} & \cdots & a_{1,2n-2} & \\
\vdots & & & \\
a_{n-1,n+1} & & & 
\end{array}$$

und reicht aus, um eine tc-symmetrische ebene Partition vollständig zu beschreiben. Die Autoren haben gezeigt, dass jede dieser Anordnungen die Bedingungen hat, dass die Anordnung eine ebene Partition ist und  $n \leq a_{i,j} \leq 2n - i$ . Außerdem haben sie gezeigt, dass alle Anordnungen mit diesen Bedingungen in Bijektion zu tc-symmetrischen ebenen Partitionen stehen.

Wir ziehen nun  $n$  von jedem Eintrag  $a_{i,j}$  ab und erhalten die Menge  $F$  dieser modifizierten fundamentalen Anordnungen. Wir sehen, dass  $F$  auch gleichzeitig die Menge aller ebenen Partitionen ist, die in die „vollständige fundamentale TCSPP-Anordnung“ passen:

$$\begin{array}{cccccc}
n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 & \\
n-2 & n-2 & \cdots & n-2 & & \\
\vdots & \vdots & \cdots & & & \\
2 & 2 & & & & \\
1 & & & & & 
\end{array}$$

Betrachten wir nun eine Anordnung in  $F$  als Stapel von Einheitswürfeln (Abbildung 4.3.1). Drehen wir die Darstellung mit einer zyklischen Rotation der  $x$ -,  $y$ -, und  $z$ -Achse,  $(x, y, z) \mapsto (z, x, y)$ , erhalten wir eine eck-pyramidale ebene Partition der Größe  $n - 1$ . Die vollständige fundamentale TCSPP-Anordnung wird auf die vollständige eck-pyramidale ebene Partition abgebildet. Jede ebene Partition, die in die vollständige fundamentale TCSPP-Anordnung passt, passt nach der Rotation in die vollständige EPPP. Diese Zuordnung ist eine Eins-Zu-Eins-Zuordnung. Die Anzahl an TCSPP in einer  $2(n - 1) \times 2(n - 1) \times 2(n - 1)$  Box entspricht obiger Formel [12].  $\square$

*Anmerkung 4.3.1.* Fügen wir pyramidalen ebenen Partitionen der Größe  $n - 1$  eine Spalte mit 0 Einträgen rechts und eine Zeile mit 0 Einträgen unten hinzu, handelt es sich dabei um die Einträge  $\{a_{n+i,n+j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$  der tc-symmetrischen ebenen Partitionen, also um das süd-östliche Viertel (siehe Abbildung 4.3.2). Das kommt daher, dass wir die fundamentale Anordnung im vorherigen Beweis zyklisch permutiert haben und tc-symmetrische ebene Partitionen bezüglich dieser Rotation invariant sind. Die  $x$ -Werte



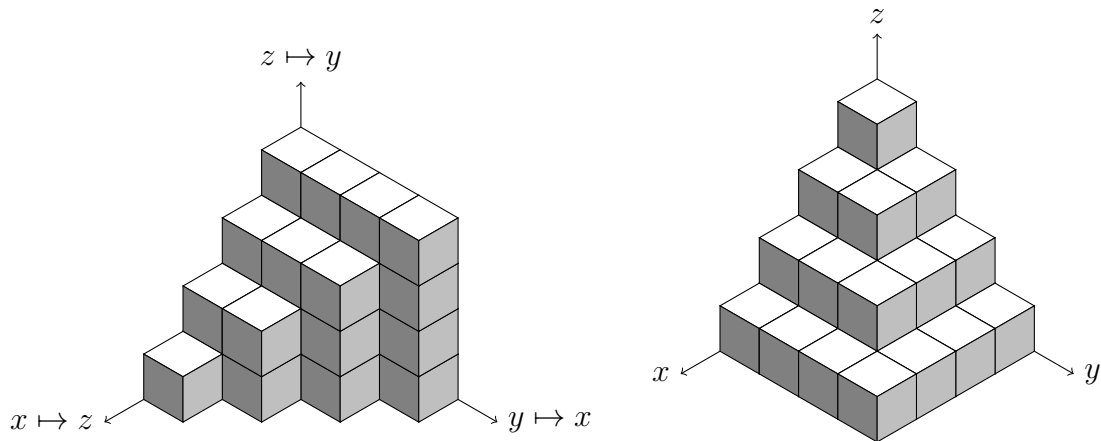


Abbildung 4.3.1: Die vollständige eck-pyramidale ebene Partition (rechts) entsteht aus einer Rotation der vollständigen fundamentalen TCSPP-Anordnung (links).

$\leq n - 1$  in der fundamentalen Anordnung entsprechen den  $z$ -Werten in der CPPP, die  $y$ -Werte  $\geq n + 1$  entsprechen den  $x$ -Werten in der CPPP und die  $z$ -Werte  $\geq n + 1$  entsprechen den  $y$ -Werten in der CPPP im süd-östlichen Viertel einer TCSPP. Außerdem ist in einer TCSPP, wie Mills, Robins und Rumsey im selben Artikel gezeigt haben,  $a_{i,2n+1-i} = n$  für  $i \in [n]$ , was mit den 0 Einträgen in der letzten Zeile und Spalte korrespondiert.

Die letzte Klasse der pyramidalen ebenen Partitionen, die wir in dieser Arbeit betrachten, sind symmetrische pyramidale ebene Partitionen.

**Definition 4.3.2.** Eine ebene Partition ist eine **symmetrische eck-pyramidale ebene Partition** (SCPPP) der Größe  $n$ , wenn sie eine eck-pyramidale ebene Partition der Größe  $n$  und symmetrisch bezüglich der  $x = y$  Achse ist.

**Satz 4.3.2.** *Symmetrische eck-pyramidale ebene Partitionen der Größe  $n - 1$  sind in Bijektion zu total-symmetrischen selbst-komplementären ebenen Partitionen (TSSCPP) in einer  $2n \times 2n \times 2n$  Box. Daher ist die Anzahl an symmetrischen eck-pyramidalen ebenen Partitionen der Größe  $n$  gleich*

$$\prod_{j=0}^{n-2} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}.$$

*Beweis.* Bei einer symmetrischen eck-pyramidalen ebenen Partition können wir uns auf die Einträge  $\{p_{i,j}\}_{1 \leq j \leq i \leq n}$  beschränken, da alle anderen Einträge von der Symmetrie bestimmt sind. Fügen wir diesen Anordnungen eine Zeile mit 0 Einträgen unten hinzu, bekommen

8	8	8	8	7	6	6	4
8	8	8	7	5	5	4	2
8	7	7	7	5	4	3	2
8	7	6	5	4	3	3	1
7	6	5	4	3	1	1	0
7	4	4	3	2	1	0	0
5	4	4	2	1	1	0	0
4	3	1	1	0	0	0	0

Abbildung 4.3.2: Eine tc-symmetrische ebene Partition: Im nord-östlichen Viertel befindet sich die fundamentale Anordnung nach Mills, Robbins und Rumsey, im süd-östlichen Viertel befindet sich eine eck-pyramidale ebene Partition.

8	8	8	8	7	6	5	4
8	8	8	7	6	6	4	3
8	8	6	6	5	4	2	2
8	7	6	5	4	3	2	1
7	6	5	4	3	2	1	0
6	6	4	3	2	2	0	0
5	4	2	2	1	0	0	0
4	3	2	1	0	0	0	0

Abbildung 4.3.3: Im süd-östlichen Viertel einer TSSCPP befindet sich eine eck-pyramidale ebene Partition.

wir genau die fundamentalen Anordnungen für TSSCPP, die wir in Kapitel 3.1 beschrieben haben. Eine fundamentale Anordnung einer TSSCPP besteht nämlich aus den Einträgen  $\{t_{i,j}\}_{n+1 \leq j \leq i \leq 2n}$  und hat die Bedingungen  $t_{i,j} \leq t_{i+1,j}$ ,  $t_{i,j} \leq t_{i,j+1}$  und  $0 \leq t_{i,j} \leq 2n - i$ . Die Anzahl an TSSCPP in einer  $2(n - 1) \times 2(n - 1) \times 2(n - 1)$  Box entspricht obiger Formel [2]. □

*Anmerkung 4.3.2.* Durch diesen Beweis wird wiederum deutlich, dass es sich bei SCPPP, wenn wir unten eine Zeile mit 0 Einträgen und rechts eine Spalte mit 0 Einträgen hinzufügen, um die Einträge  $\{a_{n+i,n+j}\}_{1 \leq i,j \leq n}$  der tc-symmetrischen ebenen Partitionen, also um das süd-östliche Viertel (siehe Abbildung 4.3.3), handelt.

Wir haben gesehen, dass es sich bei eck-pyramidalen ebenen Partitionen um weitaus besser erforschte Objekte handelt als bei pyramidalen ebenen Partitionen. Vielleicht kann

ein Rückgriff auf die bereits bekannten Ergebnisse neue Erkenntnisse für pyramidale ebene Partitionen und den mit ihnen korrespondierenden dreifarbigem Teilposets von  $T_n$  bringen. Außerdem sollte deutlich werden, dass es sich bei den Pyramiden um fundamentale Objekte handelt, die in Korrespondenz zu Symmetrieklassen von ebenen Partitionen stehen. Eine weitere Erforschung der pyramidalen ebenen Partitionen könnte also auch weitere allgemeine Einblicke in ebene Partitionen liefern.

# Zusammenfassung

Alternierende Vorzeichenmatrizen (ASMs) haben eine lange, immer noch aktuelle Tradition in der Kombinatorik und der Zusammenhang zu total symmetrischen, selbstkomplementären ebenen Partitionen (TSSCPPs), die von derselben Formel gezählt werden, ist immer noch ungeklärt. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir ASMs und TSSCPPs in allgemeineren Kontexten, die vor allem durch Striker in [20] erforscht wurden.

Zunächst beweisen wir einige Sätze über die Darstellung durch Ungleichungen, Facetten und Ecken des ASM-Polytops, das als die konvexe Hülle von  $n \times n$  ASMs definiert ist und beschreiben den Seitenverband mithilfe von Flussgittern.

Danach widmen wir uns dem tetraedrischen Poset. Wir zeigen, dass die Ordnungsideale von Teilposets des tetraedrischen Posets mit bekannten kombinatorischen Objekten – darunter ASMs und TSSCPPs – in Bijektion stehen.

Schließlich geben wir noch einen Einblick in pyramidale ebene Partitionen (PPPs). Wir betrachten zwei Klassen von PPPs und zählen Zeilen, Spalten sowie Hüllen und zeigen Bijektionen zu einem unerforschten Teilposet des tetraedrischen Posets sowie transponiertkomplementären, zyklisch symmetrischen ebenen Partitionen (TCSPP) und TSSCPPs.

# Abstract

Alternating sign matrices (ASMs) have a long and recent tradition in combinatorics and they are counted by the same formula as totally symmetric self-complementary plane partitions (TSSCPPs). Although the connection remains unclear and no explicit bijection is known. In this thesis we look at ASMs and TSSCPPs in larger contexts which are mainly based on the work of Striker in [20].

At first, we prove some theorems concerning the inequality description, facets and vertices of the ASM-Polytope which is defined as the convex hull of the  $n \times n$  ASMs. We describe the face lattice by using flow grids.

Then, we define the tetrahedral poset. We show that order ideals of subposets of the tetrahedral poset are in bijection with other combinatorial objects, among them ASMs and TSSCPPs.

Finally we give an insight into pyramidal plane partitions (PPPs). We count rows, columns and hulls of two types of PPPs and show bijections to an unexplored subposet of the tetrahedral poset, transpose-complementary cyclically symmetric plane partitions (TCSPPs) and TSSCPPs.

# Literatur

- [1] Martin Aigner. *Graphentheorie. Eine Einführung aus dem 4-Farben-Problem*. Wiesbaden: 2. Auflage, Springer, 2015.
- [2] George E. Andrews. “Plane Partitions V: The TSSCPP Conjecture”. In: *Journal of Combinatorial Theory A* 66 (1994), S. 28–39.
- [3] Tommy Bonnesen und Werner Fenchel. *Theorie der konvexen Körper*. Berlin: Springer, 1934.
- [4] David M. Bressoud. *Proofs and Confirmations. The story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*. New York: Cambridge University Press, 1999.
- [5] Markus Fulmek. “Kombinatorik. Vorlesungsskriptum, Universität Wien”. SS 2015.
- [6] Markus Fulmek und Christian Krattenthaler. “Diskrete Mathematik. Vorlesungsskriptum, Universität Wien”. SS 2017.
- [7] Norbert Henze. *Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. 10. Aufl. Wiesbaden: Springer, 2013.
- [8] Ivan Izmestiev. “Einführung in die Konvexgeometrie, Vorlesungsskriptum, FU Berlin”. WS 2003/04.
- [9] Greg Kuperberg. “Another proof of the alternating-sign matrix conjecture”. In: *International Mathematics Research Notices* 3 (1996), S. 139–150.
- [10] Oleg Lazarev, Matt Mizuhara und Ben Reid. “Some results in Partitions, Plane Partitions, and Multipartitions”. 2010.
- [11] W. H. Mills, David P. Robbins und Howard Rumsey Jr. “Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions”. In: *Journal of Combinatorial Theory A* 34 (1983), S. 340–359.

- [12] W. H. Mills, David P. Robbins und Howard Rumsey Jr. “Enumeration Of A Symmetry Class Of Plane Partitions”. In: *Discrete Mathematics* 67 (1987), S. 43–45.
- [13] W. H. Mills, David P. Robbins und Howard Rumsey Jr. “Self-Complementary Totally Symmetric Plane Partitions”. In: *Journal of Combinatorial Theory A* 42 (1986), S. 277–292.
- [14] James Propp. “The many faces of alternating-sign matrices”. In: *ArXiv e-prints: arXiv:math/0208125 [math.CO]* (2002).
- [15] Richard P. Stanley. *Enumerative Combinatorics: 1*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
- [16] Richard P. Stanley. *Enumerative Combinatorics: 2*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
- [17] Richard P. Stanley. “Symmetries of Plane Partitions”. In: *Journal of Combinatorial Theory A* 43 (1986), S. 103–113.
- [18] J.R. Stembridge. “The Enumeration of Totally Symmetric Plane Partitions”. In: *Advances in Mathematics* 111.2 (1995), S. 227–243.
- [19] Jessica Striker. “A unifying poset perspective on alternating sign matrices, plane partitions, Catalan objects, tournaments, and tableaux”. In: *Advances in Applied Mathematics* 46.1 (2011), S. 583–609.
- [20] Jessica Striker. “Poset and Polytope Perspectives On Alternating Sign Matrices”. Diss. University of Minnesota, 2008.
- [21] Jessica Striker. “The alternating sign matrix polytope”. In: *Electronic Journal of Combinatorics* 16.1 (2009).
- [22] Jessica Striker. “The poset perspective on alternating sign matrices”. In: *ArXiv e-prints: arXiv:0905.4497 [math.CO]* (2009).
- [23] Eric W. Weisstein. “Catalan’s Triangle”. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/CatalansTriangle.html>. 2018.
- [24] Doron Zeilberger. “Proof of the Alternating Sign Matrix Conjecture”. In: *Electronic Journal of Combinatorics* (1995).
- [25] Günter Ziegler. *Lectures on Polytopes*. New York: Springer-Verlag, 2005.