Zirkulare/Kreis-Beschleuniger

- ▷ Betatron
- ▷ Schwache Fokussierung, adiabatische Dämpfung
- ▷ Mikrotron, Synchro-/Isochron-Zyklotron
- ▷ Synchrotron

- Limitierte HF-Leistung stimulierte die Entwicklung von zirkularen/Kreis-Beschleuniger:
  - \+ geringste HF-Felder in Kreis-Beschleunigern effektiv nutzbar
    (Teilchen nutzen wiederholt gleiches HF-Feld)
  - \+ lokale und kompakte Beschleunigungsstruktur in Kreisbeschleunigern
    $\leftrightarrow$ langgestreckte Resonatoren in Linearbeschleunigern
  - \+ in Betatron sogar intrinsische Beschleunigung $(U_{ind} \propto -\dot{\phi})$

Zentrale Relation für Kreisbeschleuniger (in Gauss-Einheiten!):

- *Lorentzkraft*: $$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)}$$

Für $\vec{E} = 0$, homogene $\vec{B}$-Feld und Ladung $q = e$ gilt:

- $$\boxed{\vec{F} = \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \stackrel{!}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m \vec{v}) = m\left(\gamma \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\vec{v}\right) = \gamma m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$$

($\vec{E} = 0 \to$ keine Beschleunigung $\to \beta =$ const $\to \gamma =$ const)

Mit Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ folgt:

- $$\boxed{\frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} = \gamma m \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \gamma m \vec{\omega} \times \vec{v}}$$

($\vec{E} = 0 \to$ keine Beschleunigung $\to |\vec{\omega}| = \omega =$ const)

Damit gilt für ein Teilchen, das sich in einer zu $\vec{B}$ senkrechten Ebene bewegt:

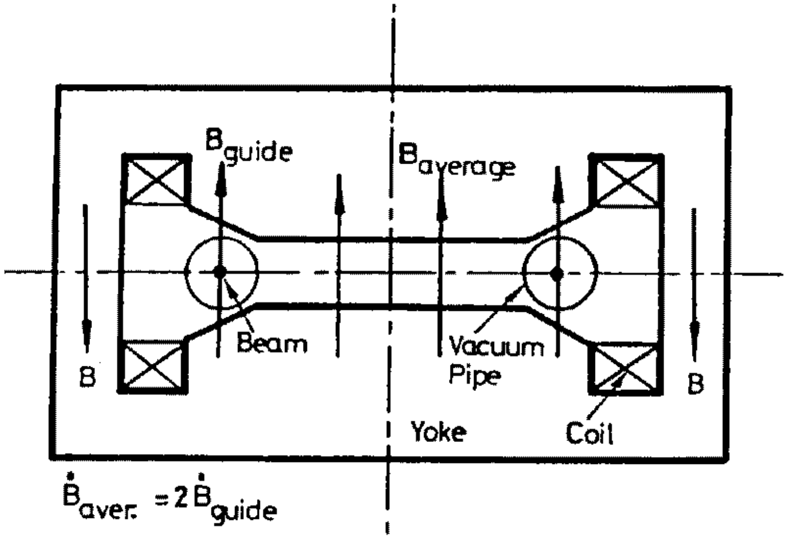
- $$\boxed{\frac{e}{c}vB = \gamma m \omega v = \gamma m \frac{v^2}{r}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p \equiv \beta\gamma m c = \frac{e}{c}Br} \; !$$

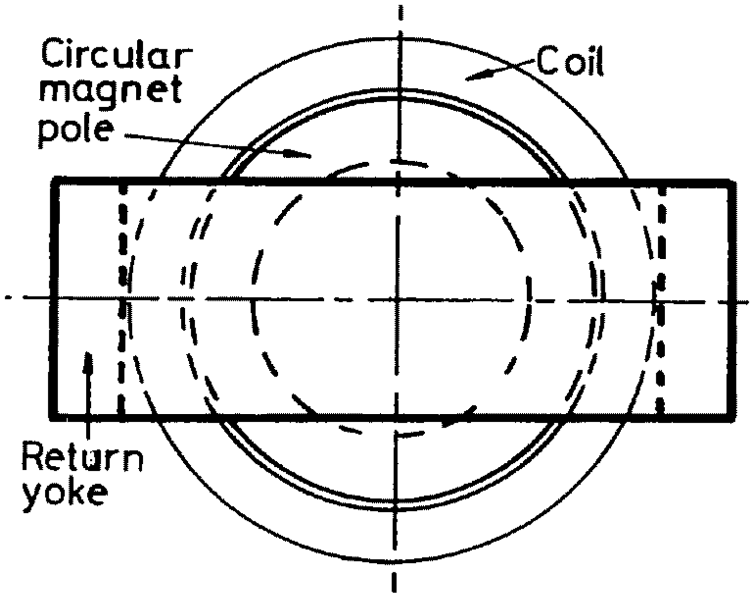
in praktischen Einheiten: $p[\mathrm{GeV}/c] \approx 0.3 \cdot B[\mathrm{T}] \cdot r[\mathrm{m}]$

Betatron

Prinzip:

- Teilchenstrom $\widehat{=}$ Sekundärspule in Transformator
- Schematischer Aufbau:





- Beschleunigung durch Induktionsspannung: $$U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{c\mathrm{d}t} \int_a \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{a} = -\frac{\mathrm{d}}{c\mathrm{d}t} \phi_a$$

(magnet. Fluss ϕ_a durch vom Teilchenstrom umschlossene Fläche a)

- Wideröe: fester Orbitradius des Teilchenstroms $\longrightarrow$ $^1\!/_2$-Bedingung

Wideröesche $^1\!/_2$-Bedingung:

- Es gilt : $\boxed{p = \gamma m v = \frac{e}{c} B r}$
- Beschleunigungskraft $\stackrel{!}{=}$ azimutales E-Feld $\longrightarrow$ $\boxed{F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{c}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \cdot B + r \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right) \stackrel{!}{=} -eE_\varphi}$
- konstanter Orbitradius $r = R$: $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{e}{c} \cdot R \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \stackrel{!}{=} -eE_\varphi}$
- B-Feld homogen innerhalb Sollbahnradius R $\longrightarrow$ $\boxed{\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = \int E_\varphi R \mathrm{d}\varphi = 2\pi R E_\varphi}$
- mit Induktionsgesetz ($U_{\text{ind}} = -\mathrm{d}\phi/c\mathrm{d}t$) $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 2\pi R^2 \frac{\mathrm{d}B(R)}{\mathrm{d}t}}$ (*)
- Gesamter Fluss $\phi = \pi R^2 \overline{B}(R)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \pi R^2 \frac{\mathrm{d}\overline{B}(R)}{\mathrm{d}t}}$ (**)
  mit mittlerer magn. Induktion $\overline{B}$

$\Longrightarrow$ Vergleiche (*) und (**) $\longrightarrow$ $\boxed{B(R) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\overline{B}(R)}$ ($^1\!/_2$-Bedingung)

$\Longrightarrow$ Notwendige Bedingung für stabilen Strahlorbit ($R =$ const) im Betatron

Betatron-Prinzip:

- für alle geladenen Teilchen
- für alle Energien

denn $^1\!/_2$-Bedingung unabhängig davon !

Betatron-Anwendung:

- typ. Beschleunigungszyklus $\longrightarrow$
- kin. Energie (Impuls p, Teilchemasse m):

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$$

▷ für Elektronen (typ. $m_{\text{e}}c \ll p$):

$$E_{\text{kin, e}} \approx cp$$

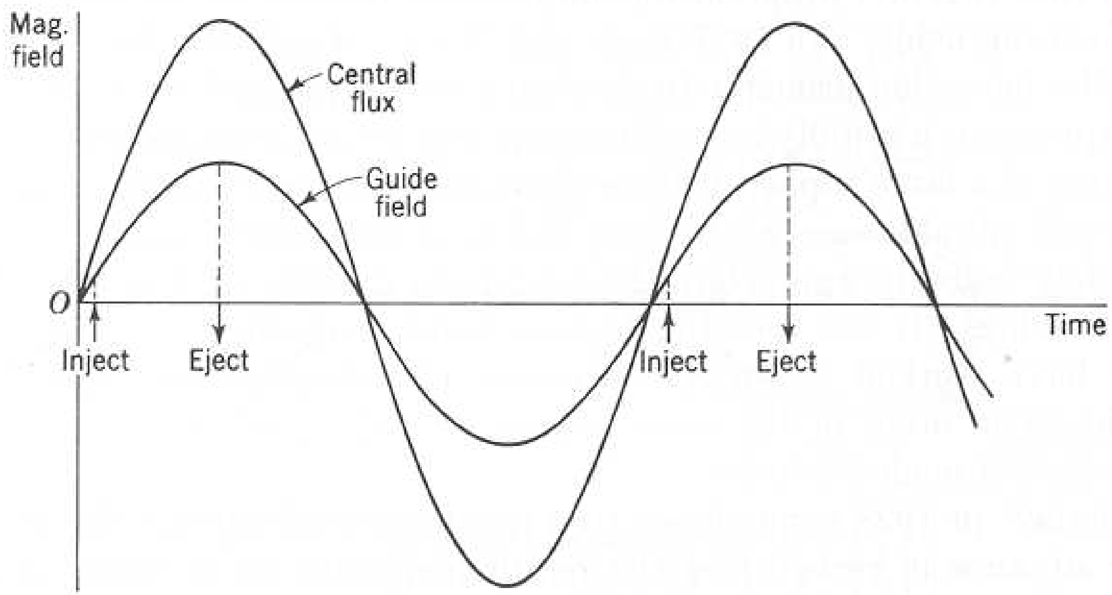
▷ für Protonen (typ. $m_{\text{p}}c \gg p$):

$$E_{\text{kin, p}} \approx p^2/2m_{\text{p}} \ll pc = E_{\text{kin, e}}$$

$\Rightarrow$ Elektronbeschleunigung bevorzugt

Größtes Betatron: (Kerst 1950)

- $R = 1.23$ m Orbitradius
- maximales B-Feld: $B(R) = 0.81$ T
- Magnet-Gesamtgewicht: 350 t
- Elektronenimpuls: $p = 300$ MeV$/c$



Schwache Fokussierung

- $^1\!/_2$-Bedingung $\longrightarrow$ stabiler Orbitradius R

$\rightarrow$ keine Stabilität senkrecht zum Orbit

$\rightarrow$ Strahlfokussierung erforderlich!

Betrachte dazu bei Abweichungen vom idealen Orbit (Koordinaten: x in, $y \perp$ Orbitebene, s entlang Orbit)

Zunächst in x (entspricht radialer Richtung):

- Rückstellkraft $\longrightarrow$ $\boxed{F_x = \gamma m \frac{v^2}{R} - \frac{e}{c} v B_y(R)}$

- kleine Abweichung x vom Sollorbit $\longrightarrow$ $R \to r = R + x = R\left(1 + \frac{x}{R}\right)$

- Taylorentwicklung bis 1. Ordnung $\longrightarrow$ $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{R}\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

  und $\longrightarrow$ $B_y(r) \approx B_y(R) + \frac{\partial B_y(R)}{\partial x} \cdot x \equiv B_y(R) \cdot \left(1 - n \cdot \frac{x}{R}\right)$

- mit *Feldindex* $\longrightarrow$ $\boxed{n \equiv -\frac{R}{B_y(R)} \cdot \frac{\partial B_y(R)}{\partial x}}$ ($\rightarrow$ Form der Magnetpole!)

- Rückstellkraft bei Abweichung x $\longrightarrow$ $F_x \approx \gamma m \dfrac{v^2}{R}\left(1 - \dfrac{x}{R}\right) - \dfrac{e}{c} v B_y(R) \cdot \left(1 - n \cdot \dfrac{x}{R}\right)$

- für Sollorbit: $\gamma m v^2/R \stackrel{!}{=} e v B_y(R)/c$

$\rightarrow$ Schwingungs-DGL ($\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0$) $\longrightarrow$ $\boxed{\gamma m \ddot{x} - F_x = \gamma m \cdot \ddot{x} + \gamma m \dfrac{v^2}{R^2}(1-n) \cdot x = 0}$

- Teilchenorbit bei kleinen Störungen $\longrightarrow$ Oszillation um Sollorbit: *horizontale Betatron-Schwingung*

$\rightarrow$ harmon. Schwingung mit Kreisfrequenz $\longrightarrow$ $\boxed{\omega_x = \dfrac{v}{R}\sqrt{1-n} \equiv \omega_0 \sqrt{1-n}}$ *horizontale Betatron-Frequenz* !

$\Longrightarrow$ *Stabilitätsbedingung* für Orbit (horizontaler Orbit in x) $\longrightarrow$ $\boxed{n < 1}$!

Abweichungen vom idealen Orbit in y:

- Bewegungs-DGL : $$\boxed{\gamma m \cdot \ddot{y} = \frac{e}{c} v B_x(R)}$$

- aus $\nabla \times \vec{B} = -\partial \vec{E}/\partial t$ $\longrightarrow$ $\dfrac{\partial B_x}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial x} = 0$

  (mit Feldindex n) $\longrightarrow$ $B_x = \int \dfrac{\partial B_x}{\partial y} \mathrm{d}y = -\int n \dfrac{B_y(R)}{R} \mathrm{d}y = -n \dfrac{B_y(R)}{R} y$ (*)

$\rightarrow$ (mit Sollorbit: $\gamma m v^2/R \stackrel{!}{=} e v B_y(R)/c$) $\longrightarrow$ $$\boxed{\gamma m \cdot \ddot{y} + \gamma m \frac{v^2}{R^2} n \cdot y = 0}$$

- Teilchenorbit bei kleinen Störungen $\longrightarrow$ Oszillation um Sollorbit: *vertikale Betatron-Schwingung*

$\rightarrow$ harmon. Schwingung mit Kreisfrequenz $\longrightarrow$ $\boxed{\omega_y = \dfrac{v}{R}\sqrt{n} \equiv \omega_0 \sqrt{n}}$ *vertikale Betatron-Frequenz* !

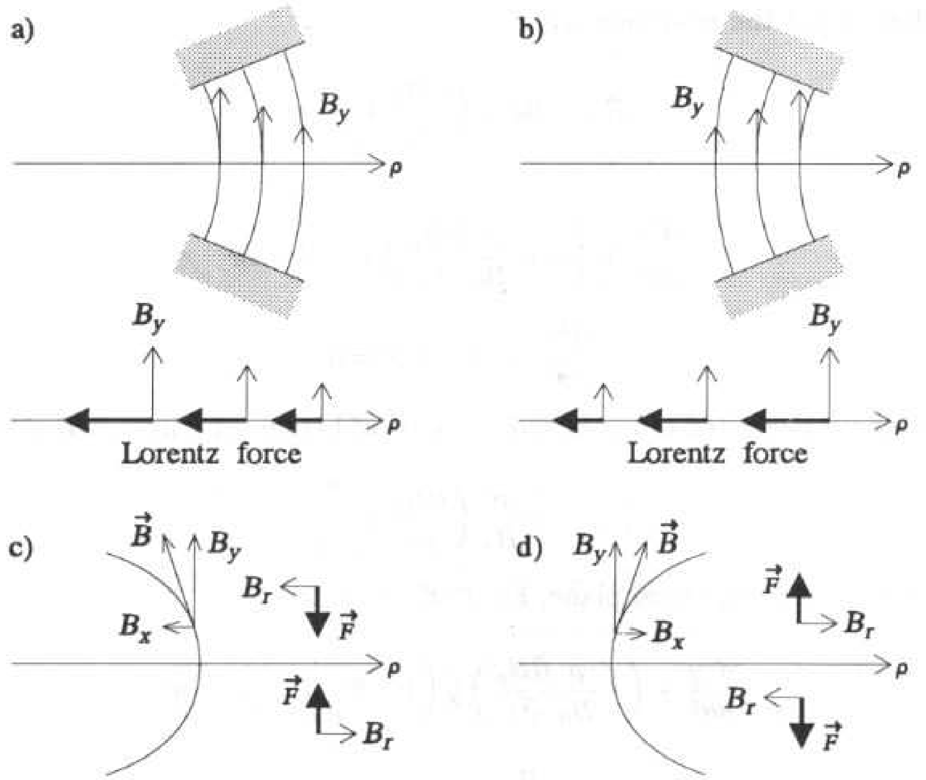
$\Longrightarrow$ *Stabilitätsbedingung* für Orbit $\longrightarrow$ $\boxed{n > 0}$!

(vertikaler Orbit in y)

$\Longrightarrow$ *schwache Fokussierung:* $\boxed{0 < n < 1}$! *Steenbeck-Stabilitätskriterium*

Aber:

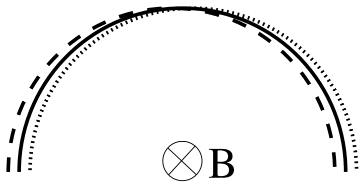
Fokussierung in vertikaler Richtung, Defokussierung in horizontaler Ebene $\Leftarrow$



$\Rightarrow$ Fokussierung in horizontaler Ebene, Defokussierung in vertikaler Richtung

Figure. 2.2 Forces for a positive particle coming out of the page: a) Radial defocusing force from radially opening poles. b) Radial focusing gradient from radially closing poles. c) Vertical defocusing forces from radially opening poles. d) Vertical focusing forces from radially closing poles.

Geometrische Fokussierung:

$p = eBR/c \longrightarrow$ Alle Orbits mit Radius R:  $\longrightarrow$ Fokussierung

(Sollorbit: durchgezogen; $r > R$ (gestrichelt) und $r < R$ (punktiert) $\rightarrow$ auf Sollorbit abgelenkt)

$\Longrightarrow$ Geometrische Fokussierung kompensiert (schwache) horizontale Defokussierung für vertikale Fokussierung

Tune der Betatron-Oszillationen:

entspricht Anzahl der Oszillationen je Umlauf

- horizontaler Tune : $\boxed{Q_x \equiv \dfrac{\omega_x}{\omega_0} = \sqrt{1-n}}$
- vertikaler Tune : $\boxed{Q_y \equiv \dfrac{\omega_y}{\omega_0} = \sqrt{n}}$

Betatron-Oszillationen und Tunes sind charakteristische Eigenschaften eines Kreisbeschleunigers !

(nicht nur für Betatrons)

adiabatische Dämpfung

In (vertikalen&horizontalen) Oszillationen vernachlässigt: Effekt der Beschleunigung

Dazu nochmals:

- Bewegungs-DGL in y $(p = \gamma m v_y)$: $$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m \cdot \dot{y}) = \frac{e}{c} v B_x(R)}$$

→ Beschleunigung $\widehat{=} \dot{\gamma} \neq 0$ $\longrightarrow \gamma m c^2 \cdot \ddot{y} + \dot{\gamma} \cdot m c^2 \dot{y} = e c \omega_0 R B_x(R)$

($\omega_0 = v/R$ für Sollorbit)

→ mit B_x aus (*) (Folie 3.8) und Energiegewinn $\dot{E} \equiv mc^2 \cdot \dot{\gamma}$ $\longrightarrow$ $$\boxed{\ddot{y} + \left(\frac{\dot{E}}{E}\right)\dot{y} + n\omega_0^2 \cdot y = 0} \quad (**)$$

- (**) ist DGL eines gedämpften harmonischen Oszillators $\longrightarrow y(t) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha_y t} \cos \omega t$ mit $\omega \approx \omega_0 \sqrt{n}$

- Dämpfungskonstante $\longrightarrow \alpha_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{E}}{E}\right) \widehat{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)$

$\Longrightarrow$ Beschleunigung führt zur Dämpfung der vertikalen Betatron-Oszillation!

Charakterisierung der Dämpfung:

- techn. erreichbar $\dot{E}/E \ll 1$ $\longrightarrow$ Dämpfungszeit $\tau_y = 1/a_y \gg 2\pi/\omega$ Oszillationsperiode

$\rightarrow$ Einhüllende der Oszillation: $\longrightarrow$ $\mathrm{d}y_{\text{max}} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\dot{E}}{E}\right) y_{\text{max}} \cdot \mathrm{d}t$

$y_{\text{max}}(t) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha_y t}$

$\rightarrow$ mit Startenergie E_0, Endenergie E $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{y_{\text{max}}}{y_{0,\text{max}}} \equiv \dfrac{y_{\text{max}}(E)}{y_{\text{max}}(E_0)} = \sqrt{\dfrac{E_0}{E}}}$ *adiabatische Dämpfung* !

- analog auch für horizontale Oszillation !

Bedeutung der Dämpfung:

- reduziert Phasenraum des Strahls $\longrightarrow$ $\epsilon_u \propto \dfrac{1}{E}$ mit $u = x$ oder y und $s = v \cdot t$ entlang Orbit

  (so gen. *Emittanz*: $\epsilon_u \equiv u_{\text{max}} \cdot u'_{\text{max}}$
  $\equiv u_{\text{max}} \cdot \frac{\mathrm{d}u_{\text{max}}}{\mathrm{d}s}$)

- Effektivere Dämpfung durch $\longrightarrow$ *Synchrotronstrahlung* ($\rightarrow$ Abschnitt 9)

  (für Elektronenstrahlen)

NB: Adiabatische Dämpfung bei jeder Form von Teilchenbeschleunigung !

Mikrotron

Prinzipielle Konzepte der Kreisbeschleuniger:

1. *Betatron*: Beschleunigung durch Induktionsspannung $U_{\text{ind}} = -\mathrm{d}\phi/c\mathrm{d}t$

$\rightarrow$ intrinsisch erzeugt durch veränderliche magnetische Induktion $B \equiv |\vec{B}(t)| \longrightarrow E_\varphi \propto R \cdot \dot{B}$

2. externe Beschleunigung durch HF-Feld

$\rightarrow$ *Mikrotron*: $B =$ const.,

$\rightarrow$ *Zyklotron*: $B =$ const. oder $B \propto p/R$,

$\rightarrow$ *Synchrotron*: $B \propto p/R$.

Mikrotron-Konzept:

- $B =$ const $\rightarrow$ Radius $r \propto$ Impuls p
- Phasenverschiebung je Umlauf zwischen Teilchen und HF: $\Delta\phi = j \cdot 2\pi,\ j \in I\!N$
- Zeit für ersten Umlauf:
$$t_1 = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\gamma mc}{qB} = \frac{2\pi E_1}{qBc} \stackrel{!}{=} k \cdot T_{\text{RF}}$$
- Zunahme Umlaufzeit bei Energiegewinn ΔE:
$$\Delta t = \frac{2\pi\Delta E}{qBc} \stackrel{!}{=} j \cdot T_{\text{RF}}$$

$\rightarrow$ Synchronitätsbedingung ($E_{\text{inj}} \equiv E_1 - \Delta E$):

$$\boxed{\Delta E = \frac{j}{k-j} \cdot E_{\text{inj}}}$$

- Erster Umlauf:
$$E_1 = E_{\text{inj}} + \Delta E > \Delta E \qquad \rightarrow \qquad k > j$$
- z.B. ΔE für $k = 2,\ j = 1$:
$$\boxed{\Delta E = E_{\text{inj}} \longrightarrow \Delta\gamma = E_{\text{inj}}/mc^2 \approx 1} \quad !$$
(bedeutet z.B. $\Delta E \approx 1$ GeV für Protonen)

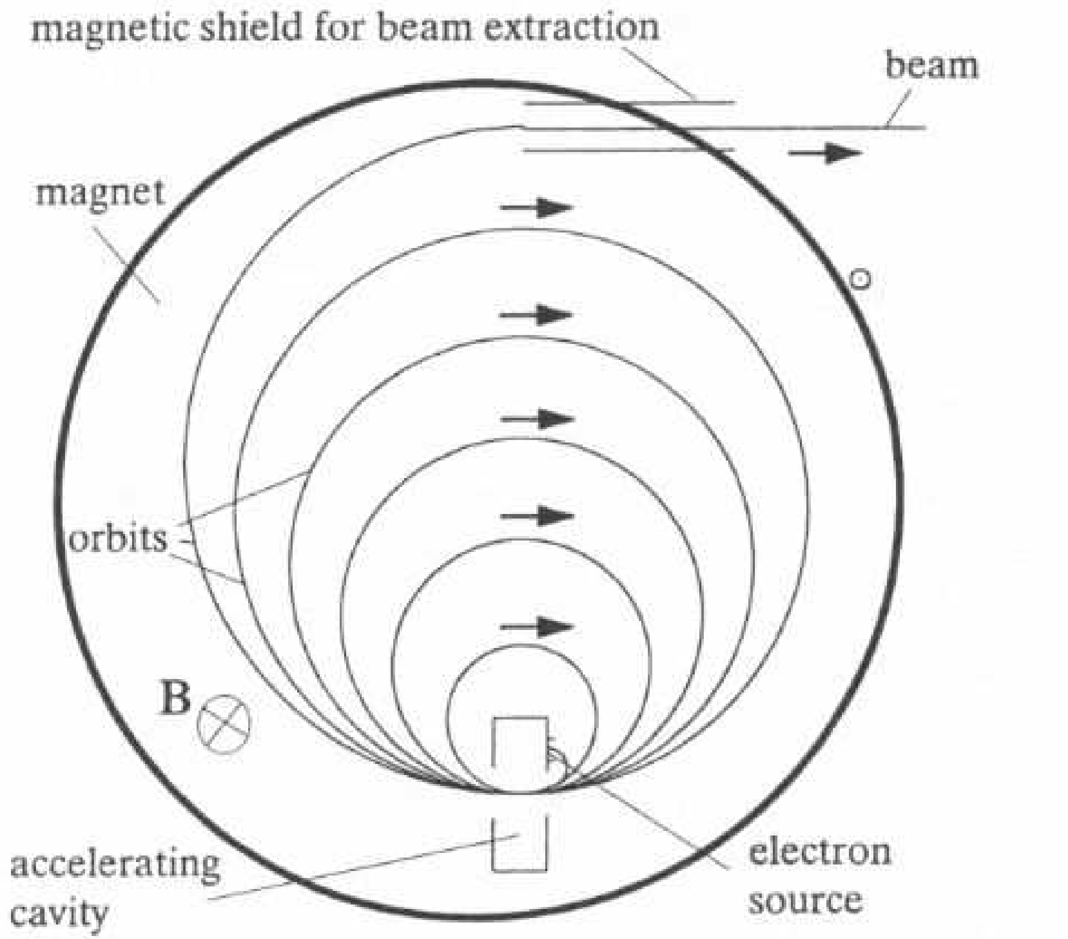


Fig. 3.2. The principle of a microtron accelerator (schematic)

$\Rightarrow$ Mikrotron nur für leichte Teilchen, i.W. Elektronen !

Rennbahn-Mikrotron: (engl. racetrack microtron)

- vermeidet Limitierungen des Mikrotrons (z.B. Magnet-Ø $\propto E^2$)
- eingesetzt für Elektronen
- einfachere Synchronitätsbedingung (Länge $l, k \gg 2, j \in I\!N$):

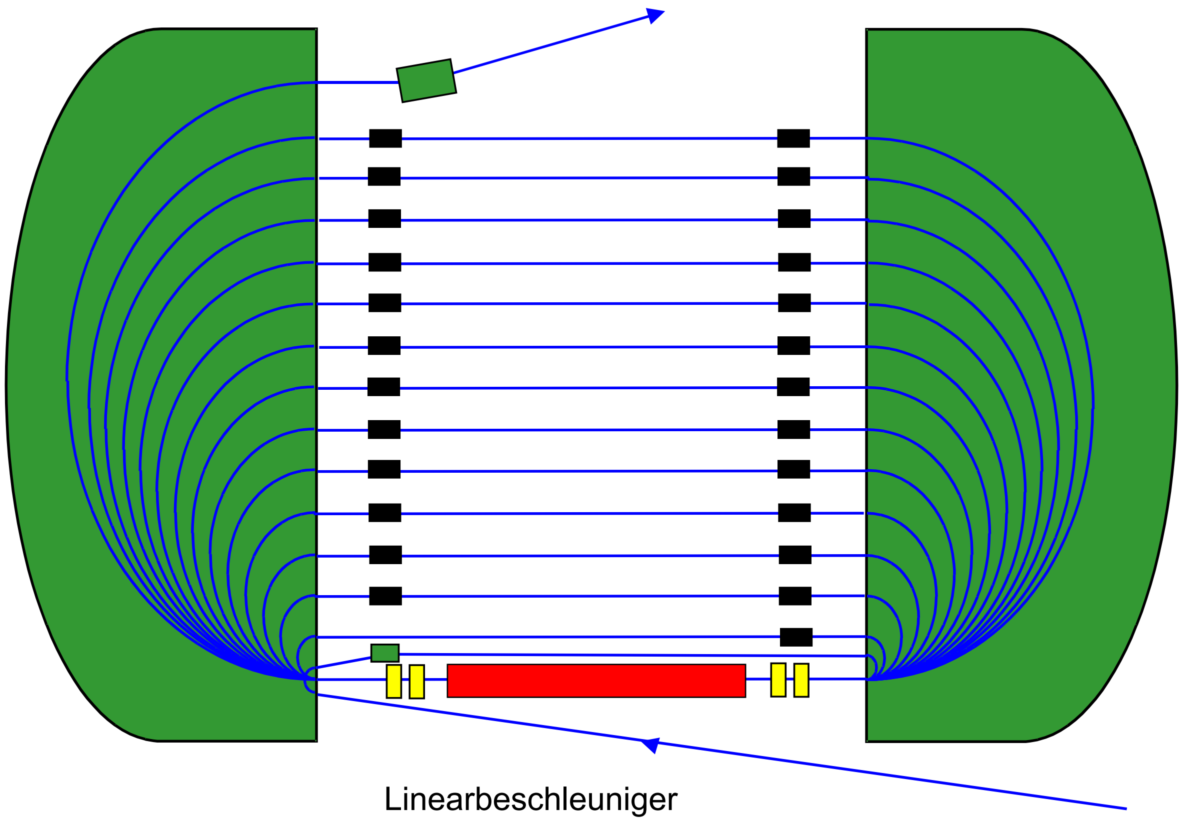
$$t_1 = \frac{2\pi E_1}{qBc} + \frac{2l}{c} \stackrel{!}{=} k \cdot T_{\mathrm{RF}}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi \Delta E}{qBc} \stackrel{!}{=} j \cdot T_{\mathrm{RF}}$$

$$\rightarrow \Delta E = j \cdot \frac{qBc}{2\pi} \cdot T_{\mathrm{RF}}$$

$$\rightarrow \Delta E = \frac{E_{\mathrm{inj}}}{\left(\frac{k-j}{j} - \frac{2l}{jT_{\mathrm{RF}}c}\right)}$$

$\rightarrow \Delta E \ll E_{\mathrm{inj}}$ für $k \gg 2$ und z.B. $j = 1$



Prinzip des Rennbahn-Mikrotrons: Der Elektronenstrahl mit niedriger Energie (blau gezeichnet) tritt in den linken Umlenkmagneten (grün) ein, wird im homogenen Magnetfeld um 180° umgelenkt, läuft parallel zum Linearbeschleuniger (rot) und tritt in den rechten Ablenkmagneten ein. Nach nochmaliger Umlenkung um 180° läuft er durch den Beschleuniger, erfährt dort einen Energiegewinn und wird aufgrund seiner jetzt höheren Energie auf einer Bahn mit größerem Ablenkradius geführt. Das Spiel wiederholt sich x mal. Nach x Umläufen verlässt der Elektronenstrahl das Mikrotron mit dem x-fachen Energiegewinn.

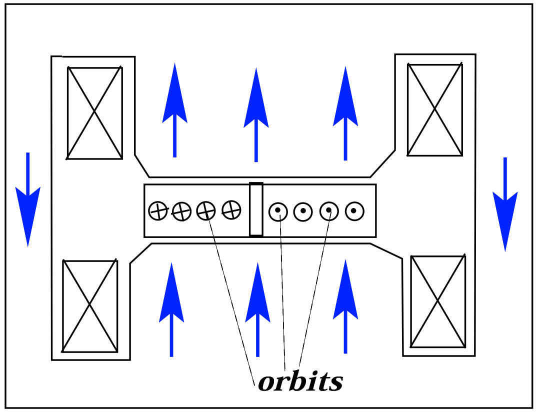
Daten zu MAMI:

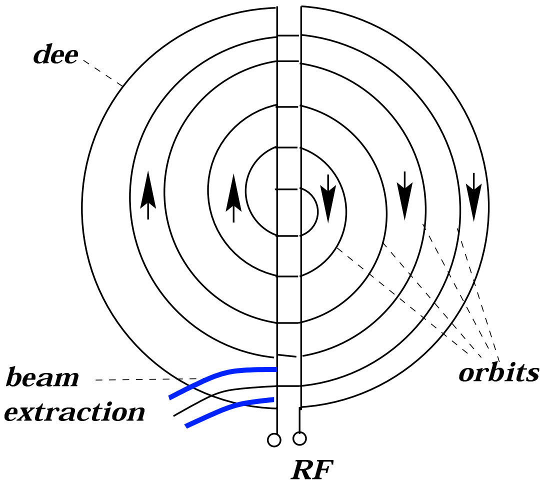
- Injektionsenergie
  $E_{\text{inj}} = 179.7$ MeV
- Ejektionsenergie
  $E_{\text{ej}} = 855.0$ MeV
- Magnetfeld 1.28 T
- Linac-Länge 8.87 m
- Energiegewinn/Umlauf
  $\Delta E = 7.5$ MeV

Dritte Stufe von MAMI: Das weltweit größte Mikrotron. Das Gewicht der beiden Umlenkmagnete (grün) beträgt jeweils 450 Tonnen. Der Linearbeschleuniger (auf der rechten Seite) wird von den Elektronen 90 mal durchlaufen. Er besteht aus 5 Sektionen, die jeweils mit einer eigenen Hochfrequenzversorgung mit einer Leistung von 50 000 Watt ausgestattet sind.

Abbildung 15: Das Mainzer Rennbahn-Mikrotron MAMI

Zyklotron





- Mit $\boxed{p = Ze/c \cdot B \cdot r}$ und $\boxed{p \equiv \gamma m v = \gamma m c \cdot \beta}$

$\rightarrow$ Umlauf-/Zyklotron-/Lamorfrequenz: $\boxed{\omega(\gamma) = \frac{v}{r} = \frac{Ze}{\gamma m c} \cdot B}$

NB: $\omega \propto Z/m \cdot B$

$\rightarrow$ Radius der Bahn: $\boxed{r(\beta) = \frac{\gamma m c}{Ze} \cdot \frac{\beta}{B} = \frac{mc}{Ze \cdot B} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}}$

- Für nicht-relativistische Teilchen ($\gamma \approx 1$ bzw. $\beta \ll 1$) gilt:
  - ▷ $B =$ const.
  - ▷ $\omega =$ const.
  - ▷ $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = Z^2 e^2 B^2 R^2 / 2mc^2$
- Für relativistische Teilchen ($\gamma \gg 1$ bzw. $\beta \approx 1$) gilt:
  - ▷ $\omega = \omega(\gamma) \propto B[r(t)]/\gamma(t)$ $\longrightarrow$ Syncho-Zyklotron
  - ▷ $\omega = \omega(\gamma) \propto B[r(t)]/\gamma(t) \equiv$ const $\longrightarrow$ Isochron-Zyklotron

Synchro- und Isochron-Zyklotron

Zyklotron:

- beschränkt auf nicht-relativistische Energien, da $f_{\text{RF}} = \omega/2\pi = $ const.

$\rightarrow$ variable HF $\longrightarrow$ relativistische Energien

$\rightarrow$ kontinuierlicher Teilchenstrahl $\longrightarrow$ gebündelte Teilchen

$\rightarrow$ longitudinale *Phasenstabilität*: Teilchenbündel $\leftrightarrow$ HF $\longrightarrow$ Phasenfokussierung (Veksler und McMillan)

$\Longrightarrow$ **Synchro-Zyklotron:**

- $f_{\text{RF}} = f_{\text{RF}}(\gamma) = ZeB/2\pi\gamma mc$
- $B = $ const.

$\rightarrow$ Synchronität durch $f_{\text{RF}}(t) \propto 1/\gamma(t)$ $\longrightarrow$ *Syncho*-Zyklotron

- mit $\gamma(t)$ aus $E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)mc^2$ und $p = ZeBr/c$: $ZeBrc = \sqrt{E_{\text{kin}} \cdot (E_{\text{kin}} + 2mc^2)}$
- hohe Endenergie $\leftrightarrow$ viele Umläufe $\longrightarrow$ schwache Fokussierung erforderlich

$\rightarrow$ effektive horizontale&vertikale Fokussierung (vgl. Folie 3.6): Feldindex $n = {}^1\!/_2$ $\longrightarrow$ $B_y(r) \propto 1/\sqrt{r}$

$\rightarrow$ $B \neq$ const $\longrightarrow$ $f_{\text{RF}} \propto \dfrac{B[r(t)]}{\gamma(t)}$

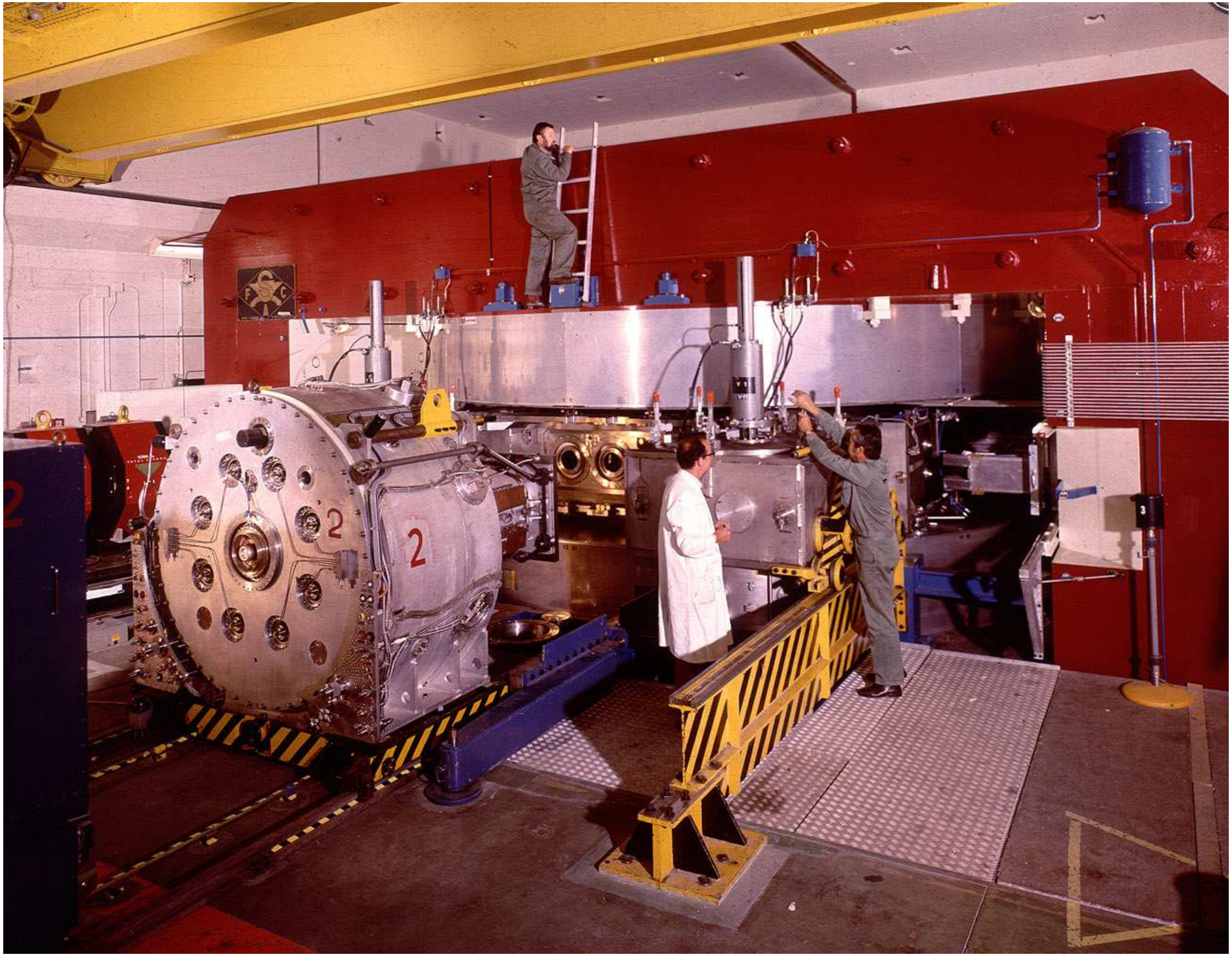


Abbildung 16: Synchro-Zyklotron am CERN

Isochron-Zyklotron:

- Frequenzmodulation im Synchro-Zyklotron technisch aufwendig
- und unterschiedlich für verschiedene Teilchen ($f_{\text{RF}} \propto B/\gamma m$)
- Vereinfachung durch (L.H.Thomas, 1938): $f_{\text{RF}} \propto \dfrac{B(r(t))}{\gamma(t)} = \text{const.}$ $\longrightarrow$ *Isochronität* von $B(t)$ und $\gamma(t)$
- Beibehaltung der Fokussierung erfordert: $\dfrac{\partial B_y(r,\varphi)}{\partial \varphi} \neq 0$

$\rightarrow$ damit *schwache* durch *starke Fokussierung* ersetzt (folgt später)

$\rightarrow$ Fokussierung entlang der Teilchentrajektorie

$\rightarrow$ Synchronität nur noch im Mittel je Umlauf gewährleistet, sodass $\dfrac{1}{2\pi} \oint B_y(r(t),\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi \propto \gamma(t)$

Eigenschaften:

- *starke Fokussierung* erlaubt Rückkehr zu festem f_{RF}
- Isochron-Zyklotron liefert kontinuierlichen Strahl mit Mikrobunch-Struktur (gemäß RF)

Synchrotron

- Praktische Limitierung von Zyklotrons durch notwendigen Magnet-Ø
- höhere Energie möglich falls $R = $ const.

$\longrightarrow$ zentraler Magnetbereich nicht benötigt

$\longrightarrow$ kleinere Magnete entlang des Orbits einsetzbar

- Designkriterium: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{eB}{pc} = $ const.

$\longrightarrow \quad B \propto p = \gamma m v$

- Synchronitätsbedingung: $f_{\mathrm{RF}} = \dfrac{ZeB}{2\pi\gamma m c}$

$\longrightarrow$ Umlauffrequenz: $f_{\mathrm{rev}} \propto v/c \equiv \beta$

▷ relativistisch: $\beta \approx 1 \longrightarrow f_{\mathrm{rev}}(t) \approx$ const.

▷ nicht-relativ.: $\beta < 1 \longrightarrow f_{\mathrm{rev}}(t) \propto \beta(t)$

- Aufrechterhalten der Synchronität: (Umlauf $\leftrightarrow$ HF)

$\longrightarrow f_{\mathrm{RF}} = h \cdot f_{\mathrm{rev}}$ mit *harmonischer Zahl* $h \in \mathbb{N}$ (engl.: *harmonic number*)

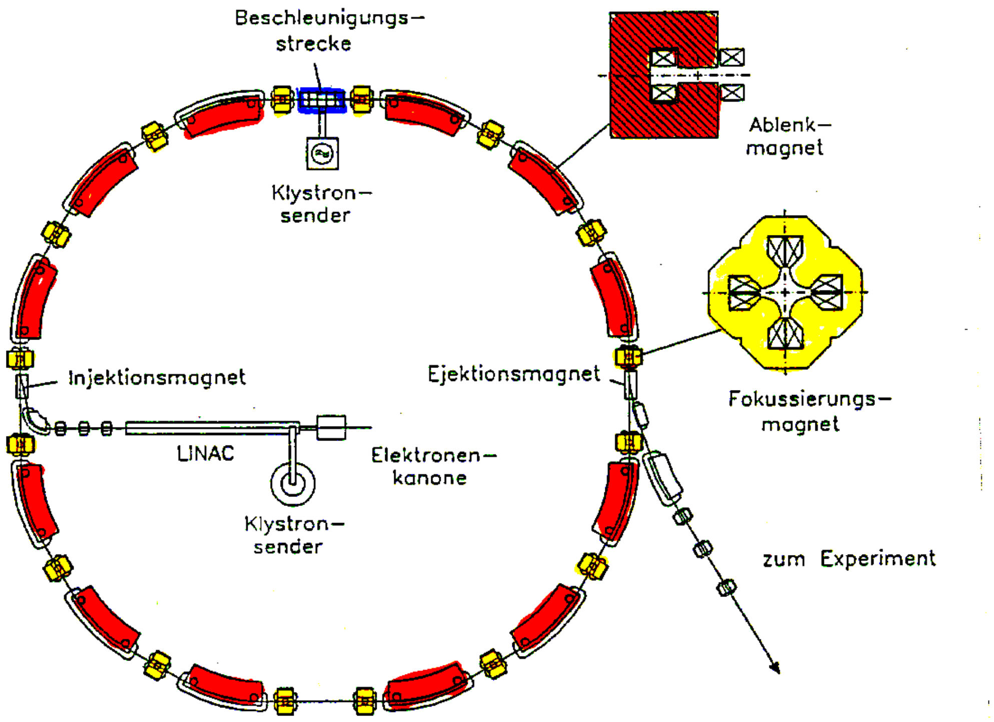


Fig. 1.16 Prinzipieller Aufbau eines modernen Synchrotrons. Die Bahn wird durch Ablenkmagnete mit homogenem Feld festgelegt, während die Fokussierung des Strahls durch gesonderte Magnete besorgt wird. Die Beschleunigung geschieht durch eine oder mehrere kurze HF-Strukturen. Die Teilchen werden von einem Vorbeschleuniger (Linac oder Microtron) geliefert.

Synchrotron-Prinzip mit FODO-Struktur, Injektion und Ejektion

Zusammenfassung

- $\boxed{p = eBr/c}$ (in Gauss-Einheiten!)
- $^1\!/_2$-Bedingung für stabiles Orbit im Betatron
- Betatron-Schwingung, schwache Fokussierung und Steenbeck-Kriterium, adiabatische Dämpfung
- Grundlegende Prinzipien der Kreisbeschleuniger beschrieben durch nur zwei Relationen:

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{eB_y}{\gamma m c^2 \beta}} \quad \text{und} \quad \boxed{f_{\mathrm{RF}} = \frac{eB_y}{2\pi\gamma m c} \cdot h}$$

Übersicht der Kreisbeschleuniger:

Prinzip	Energie γ	Geschwindigkeit v	Orbit r	Feld B	Frequenz f_{RF}	Teilchen-fluss
Zyklotron	1	variabel	$\propto v$	const.	const.	const. [a]
Synchro-Zyklotron	var.	var.	$\propto p$	$B(r)$	$\propto \frac{B(r)}{\gamma(t)}$	gepulst
Isochron-Zyklotron	var.	var.	$r = f(p)$	$B(r,\varphi)$	const.	const. [a]
Proton/Ion-Synchrotron	var.	var.	R	$\propto p(t)$	$\propto v(t)$	gepulst
Elektron-Synchrotron	var.	var.	R	$\propto p(t)$	const.	gepulst

[a] kontinuierlicher Strahl, jedoch HF moduliert