Aufgabe 1

Die Spanne von 10 bis 100 ist in 4 Intervalle einzuteilen, so daß sich die entstehenden Zahlen verhalten

(a) wie eine arithmetische Folge (konstanter Zuwachs),

(b) wie eine geometrische Folge (gleicher prozentualer Zuwachs).

Lösung: Wir bezeichnen die Intervallgrenzen mit a_n und beginnen mit $a_0 = 10$. Dann sind a_1, a_2 und a_3 gesucht, und es ist $a_4 = 100$.

(a) Bei einer arithmetischen Folge haben wir den gleichen konstanten Zuwachs d von einem Folgenglied zum nächsten; der Zuwachs ist die Differenz $d = a_{n+1} - a_n$. Also gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= 10, \\ a_1 &= a_0 + d = 10 + d, \\ a_2 &= a_1 + d = (10 + d) + d = 10 + 2d, \\ a_3 &= a_2 + d = (10 + 2d) + d = 10 + 3d, \\ a_4 &= a_3 + d = (10 + 3d) + d = 10 + 4d. \end{aligned}$$

Nun ist aber $a_4 = 100$, so daß

$$100 = 10 + 4d$$

folgt, woraus sich

$$d = \frac{90}{4} = 22,5$$

ergibt. Damit erhalten wir dann die Zahlenwerte der Intervallgrenzen:

$$a_1 = 32,5; \qquad a_2 = 55; \qquad a_3 = 77,5.$$

Wir hätten auch die Glieder der arithmetischen Folge allgemein als $a_n = a_0 + n \cdot d$ schreiben und für $n = 4$ nach d auflösen können: $d = (a_4 - a_0)/4$.

(b) Bei einer geometrischen Folge haben wir gleichen prozentualen Zuwachs von einem Folgenglied zum nächsten, q ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder: $q = a_{n+1}/a_n$. Für die ersten Folgenglieder heißt das

$$\begin{aligned} a_1 &= q \cdot a_0, \\ a_2 &= q \cdot a_1 = q \cdot (q \cdot a_0) = q^2 \cdot a_0, \\ a_3 &= q \cdot a_2 = q \cdot (q^2 \cdot a_0) = q^3 \cdot a_0, \\ a_4 &= q \cdot a_3 = q \cdot (q^3 \cdot a_0) = q^4 \cdot a_0. \end{aligned}$$

Allgemein gilt

$$a_n = q^n \cdot a_0.$$

Mit $n = 4$ folgt

$$100 = q^4 \cdot 10,$$

woraus sich

$$q = \sqrt[4]{10} \approx 1,778$$

ergibt. Für die Intervallgrenzen bekommen wir damit

$$a_1 \approx 17,78; \qquad a_2 \approx 31,62; \qquad a_3 \approx 56,23.$$

Aufgabe 2

Von einer Folge sind die beiden Glieder $a_k = 40$ und $a_{k+2} = 90$ bekannt. Welchen Wert müssen die Folgenglieder a_{k+1} und a_{k+3} haben, wenn es sich

(a) um eine arithmetische Folge (konstanter Zuwachs),

(b) um eine geometrische Folge (gleicher prozentualer Zuwachs)

handelt?

Lösung:

(a) Bei einer arithmetischen Folge, also einer Folge mit dem gleichen konstanten Zuwachs d von einem Folgenglied zum nächsten, ist

$$a_k + d = a_{k+1}$$

und

$$a_k + 2d = a_{k+2}.$$

Daraus folgt

$$2d = a_{k+2} - a_k = 90 - 40 = 50,$$

also

$$d = 25.$$

Damit ist

$$a_{k+1} = a_k + d = 40 + 25 = 65$$

und

$$a_{k+3} = a_{k+2} + d = 90 + 25 = 115.$$

(b) Bei einer geometrischen Folge, d. h. einer Folge mit dem gleichen prozentualen Zuwachs q von einem Folgenglied zum nächsten, gilt

$$a_k \cdot q = a_{k+1}$$

und

$$a_k \cdot q^2 = a_{k+2}.$$

Also folgt

$$q^2 = \frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{90}{40} = \frac{9}{4}$$

und

$$q = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Damit ist

$$a_{k+1} = a_k \cdot q = 40 \cdot \frac{3}{2} = 60$$

und

$$a_{k+3} = a_{k+2} \cdot q = 90 \cdot \frac{3}{2} = 135.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Summe aller durch 7 teilbaren positiven ganzen Zahlen kleiner als 1000.

Lösung: Wir können die Summe mit Hilfe der Gaußschen Summenformel

$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$$

berechnen, aber auch direkt die Idee verwenden, die der Gaußschen Formel zugrunde liegt.

Die größte durch 7 teilbare Zahl kleiner als 1000 ist 994. Also ist die Summe gleich

$$\begin{aligned} 7 + 14 + \ldots + 994 &= 7 \cdot (1 + 2 + \ldots + 142) \\ &= 7 \cdot \sum_{n=1}^{142} n = 7 \cdot \frac{142 \cdot 143}{2} \\ &= 7 \cdot 71 \cdot 143 = 71071. \end{aligned}$$

Oder man überlegt, daß der erste plus der letzte Summand gleich 1001 ist, ebenso der zweite und der vorletzte Summand u.s.w. Da wir insgesamt 142 Summanden haben, bekommen wir 71 mal 1001, erhalten also 71071 als Gesamtsumme.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Summen

$$\sum_{n=0}^{9} 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{9} (-2)^n$$

mit der in der Vorlesung hergeleiteten Formel.

Lösung: In der Vorlesung wurde gezeigt, daß

$$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

mit beliebigem $m \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ gilt. Damit bekommen wir die Summenwerte

$$\sum_{n=0}^{9} 2^n = \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \frac{1 - 1024}{-1} = 1023$$

und

$$\sum_{n=0}^{9} (-2)^n = \frac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)} = \frac{1 - 1024}{3} = -\frac{1023}{3} = -341.$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Grenzwerte der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Lösung: Für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \qquad \text{für } |q| < 1.$$

Für die beiden vorliegenden geometrischen Reihen folgt damit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Aufgabe 6
Welchen Grenzwert hat die Reihe

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

für $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$?

Lösung: Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1.$$

Beginnt die Summation nicht bei Null, sondern bei einer größeren natürlichen Zahl, müssen die fehlenden Summanden von $1/(1-q)$ abgezogen werden. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} q^n &= \frac{1}{1-q} - 1, \\
\sum_{n=2}^{\infty} q^n &= \frac{1}{1-q} - 1 - q, \\
\sum_{n=3}^{\infty} q^n &= \frac{1}{1-q} - 1 - q - q^2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Für die Reihe aus unserer Aufgabe ergibt sich

$$\begin{aligned}
n = 0: &\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \\
n = 1: &\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2 - 1 = 1, \\
n = 2: &\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,, \\
n = 3: &\qquad \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{8} + \ldots = 2 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

Welchen Grenzwert hat die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{2})^{k-1}}$?

Lösung: Die Reihe kann in eine geometrische Reihe der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

umgeformt werden. Dann kann der Grenzwert mit der Formel

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad (\text{für } |q| < 1)$$

berechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{2})^{k-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{2})^{k}} \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \\
&= 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\,.
\end{aligned}$$

Der Bruch kann noch zu

$$\begin{aligned}
2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} &= 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 2 \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2-1} \\
&= 4 + 2\sqrt{2} \approx 6,8.
\end{aligned}$$

vereinfacht werden. Also ist $4 + 2\sqrt{2} \approx 6,8$ der Grenzwert der Reihe.