

## Übungsblatt 3

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 14/15

**Ausgabe** 24. November 2014

**Abgabe** 01. Dezember 2014, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

**Hinweis:** Eine Sprache  $L$  ist genau dann entscheidbar, wenn  $L$  und deren Komplement  $L^c$  semi-entscheidbar ist.

### Aufgabe 1

(2+2=4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass das Komplement  $\mathcal{H}^c$  des Halteproblems nicht semi-entscheidbar ist.
- (b) Zeigen Sie, dass das Komplement  $L_d^c$  der Diagonalsprache semi-entscheidbar ist.

### Aufgabe 2

(3+3=6 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) Die Menge der entscheidbaren Sprachen ist unter dem Kleene'schen Abschluss abgeschlossen, d.h. für jede entscheidbare Sprache  $L$  gilt, dass  $L^*$  auch entscheidbar ist.
- (b) Die Menge der entscheidbaren Sprachen ist bzgl. der Operation  $\min$  abgeschlossen, d.h. für jede entscheidbare Sprache  $L$  gilt, dass  $\min(L)$  auch entscheidbar ist. Die Operation  $\min$  ist für eine entscheidbare Sprache  $L$  definiert als

$$\min(L) := \{x \in L \mid \text{kein echtes Präfix von } x \text{ ist in } L\}$$

*Hinweis:* Ein Präfix von  $x$  heißt *echt*, wenn es nicht  $x$  ist.

### Aufgabe 3

(2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgende Menge  $\mathcal{D} = \{w \in \{0,1\}^* \mid T_w \text{ hält auf keiner Eingabe}\}$  nicht entscheidbar ist.

#### Aufgabe 4

(6 Punkte)

Das Entscheidungsproblem  $\Pi$ , ob eine gegebene Zahl eine Potenz von 2 ist, ist durch die Problembeispiele  $D_\Pi := \mathbb{N}$  und die Ja-Beispiele  $J_\Pi := \{2^i | i \in \mathbb{N}\}$  gegeben. Seien  $s_b$  die Kodierungsschemata, die natürliche Zahlen auf ihre  $b$ -äre Repräsentation abbilden.

Betrachten Sie nun  $L[\Pi, s_1]$  und  $L[\Pi, s_2]$ . Beschreiben Sie für jede der beiden Sprachen kurz die Arbeitsweise einer deterministischen TM, die sie entscheidet und geben Sie ihre Laufzeit asymptotisch an. Sind die Sprachen in P? Sind sie in NP?

#### Aufgabe 5

(Zusatzpunkte: 1 + 2 = 3 Punkte)

Da in der Vorlesung nur ein kleiner Teil der Komplexitätstheorie vorgestellt wird, ist Ziel dieser Aufgabe, sich eigenständig weiter in dieses Thema einzuarbeiten. Hierzu können Sie zum Beispiel die auf der Vorlesungshomepage vorgestellte Literatur verwenden. Versuchen Sie Ihre Antworten möglichst so zu formulieren als würden Sie das Thema einem fachfremden Publikum vorstellen.

- (a) Definieren Sie PSPACE und EXPTIME, und beschreiben Sie diese Klassen mit eigenen Worten.
- (b) Betrachten Sie die Klassen L, NLOG, P, NP, PSPACE, NPSPACE, EXPSPACE und EXP näher:
  - Stellen Sie die Beziehung zwischen diesen Klassen mithilfe eines geeigneten Diagrammtyps dar.
  - Geben Sie Probleme an, die für heutige Computer bzgl. sinnvoll verwendeter Rechenzeit und Speicherplatz nicht lösbar sind. Zu welchen Komplexitätsklassen gehören diese Probleme?
  - Welche Folgen ergeben sich, falls  $P = NP$ ? (Hinweis: Was bedeutet das in der Praxis, Kryptographie,...)