11 **Längen und Winkel**

11.1 Die gebräuchlichsten Längeneinheiten

- 1 nano nm 10^{-9}
- 1 micro µm 10^{-6}
- 1 mili mm 10^{-3}
- 1 centi cm 10^{-2}
- 1 dezi dm 10^{-1}
- 1 meter m 10^{0}
- 1 kilo km 10^{3}

11.2 Längenmaßstab

Der Maßstab beschreibt ein Größenverhältnis zwischen einer Abbildung oder einer Karte zum dargestellten Original.

- Bsp.: Auf einer Landkarte M 1:75.000 sind zwei Punkte 17,8 cm voneinander entfernt.
  Wie groß (km) ist ihr tatsächlicher Abstand ?

1 : 75.000

17,8 cm : x $\Rightarrow \frac{1}{75.000} = \frac{17{,}8cm}{x} \Rightarrow$ x = 75.000 $\cdot$ 17,8 cm

x = 1335.000 cm

x = 13,35 km

- Bsp.: Unter einem Mikroskop (Vergrößerung 60:1) erscheint ein Haar 2,4 mm breit.
  Wie breit ist es in Wirklichkeit (µm) ?

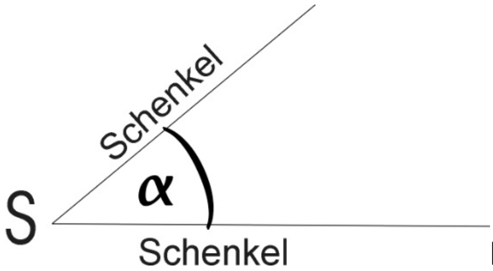
60 : 1

2,4 mm : x $\Rightarrow \frac{60}{1} = \frac{2{,}4mm}{x} \Rightarrow x = \frac{2{,}4mm}{60} = 0{,}04mm = 40\mu m$

11.3 Winkel

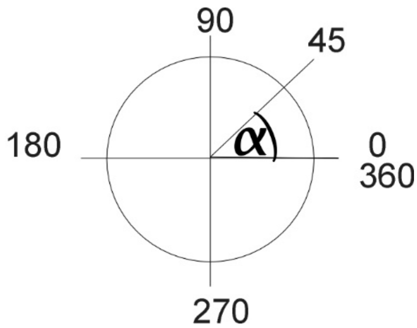
Bezeichnung von Winkeln

Ein Winkel entsteht, wenn man einen Strahl um einen festen Punkt dreht. Die Strahlen heißen Schenkel, ihr Ausgangspunkt S heißt Scheitel.

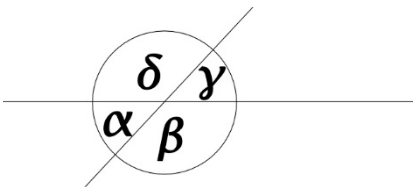


Die Winkel bezeichnet man mit griechischen Buchstaben (α,β,γ...)

a=0°	Nullwinkel
0°<a<90°	spitzer Winkel
a=90°	rechter Winkel
90°<a<180°	stumpfer Winkel
a=180°	gestreckter Winkel
180°<a<360°	überstumpfer Winkel
a=360°	Vollwinkel



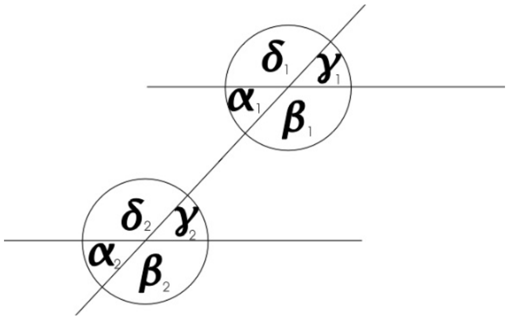
- Bezeichnung von Winkeln



α *und* β, β *und* γ, γ *und* δ, δ *und* α sind Nebenwinkel

α *und*γ, β *und*γ sind Scheitelwinkel

Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180°.
Scheitelwinkel sind stets gleich groß.



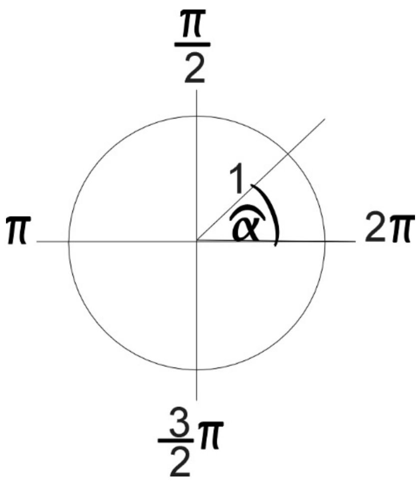
α_1 $und \alpha_2$, β_1 und β_2, γ_1 und γ_2, δ_1 und δ_2 sind Stufenwinkel

α_1 und γ_2, β_1 und δ_2, γ_1 und α_2, δ_1 und β_2 sind Wechselwinkel

Je zwei Stufenwinkel sind gleich.
Je zwei Wechselwinkel sind gleich.

11.4 Winkelmaße

Die Größe eines Winkels kann man in Grad messen, oder im Bogenmaß (das Maß Neugrad wird kaum verwendet).
Zwischen dem Gradmaß und dem Bogenmaß besteht folgender Zusammenhang:
Gradmaß: Vollwinkel ist 360°
Bogenmaß: Vollwinkel ist 2π
(Neugrad: Vollwinkel ist 400°)



Das Bogenmaß eines Winkels ist die Maßzahl für die Länge des Kreisbogens, der im Einheitskreis dem Winkel $\hat{\alpha}$ gegenüberliegt.
Für die Umrechung gilt:

Grad →Bogenmaß $\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180°} \bullet \alpha$

Bsp:α=54° $\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180°} \bullet 54 = 0{,}94[rad]$

Bogemaß $\rightarrow$ Grad $\alpha = \frac{180°}{\pi} \bullet \hat{\alpha}$ [°]

Bsp:α= 1,2 rad $\alpha = \frac{180°}{\pi} \bullet 1{,}2 = 68{,}75°$

11.4 Angabe eines Winkels in Grad-Minute-Sekunde

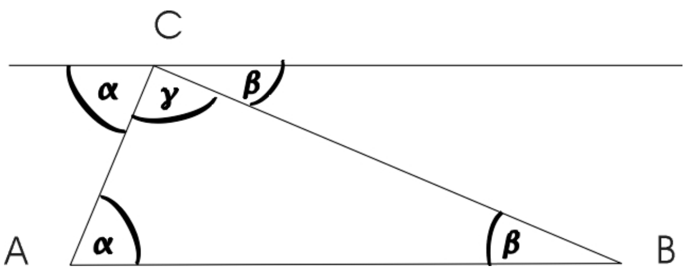
Um einen Winkel zu messen teilt man einen Kreisbogen in 360 gleiche Teile ein. Die Größe eines Winkels geht nicht aus der Länge des Schenkels, sondern aus der Länge des Kreisbogens hervor.
Bemaßt wird die Größe also entweder durch den Bogen oder in der Einheit Grad. Kleinere Einheiten von Grad sind Minuten und Sekunden.

1 Grad = 60 Minuten 1 Minute = 60 Sekunden
1° = 60´ 1´ = 60´´

Umrechungen:
Dezimal $\rightarrow$ Minute, Sekunde
Bsp: 43,28° $=$ 43° 16´48´´ $\rightarrow$ 43° bleibt
0,28 •60 = 16,8 ; 16´ bleibt
0,8 •60 = 48´´

Minute, Sekunde $\rightarrow$Dezimal
Bsp: 43° 16´48´´= 43,28 $\rightarrow \frac{\min}{60} + \frac{\sec}{60 \bullet 60} = \frac{16}{60} + \frac{48}{60 \bullet 60} = 0{,}28$

11.5 Winkelsumme



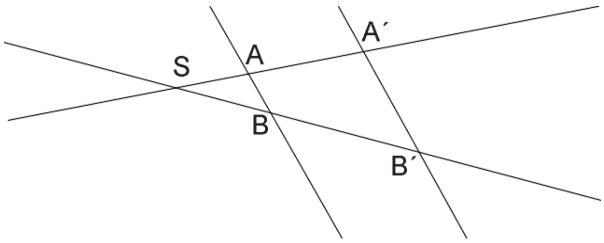
Im Dreieck gilt: $\alpha+\beta+\gamma$=180°.
In einem Viereck ist die Summe aller Winkel 360°.

Kongruenzsätze

- Wenn zwei Dreiecke in 3 Seiten übereinstimmen, dann sind sie deckungsgleich.
- Wenn zwei Dreiecke in 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind sie deckungsgleich.
- Wenn zwei Dreiecke in 1 Seite und 2 Winkeln übereinstimmen, sind sie deckungsgleich.
- Wenn zwei Dreiecke in 2 Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen, sind sie deckungsgleich.

12 **Strahlensätze**

Wenn zwei von einem gemeinsamen Punkt S ausgehenden Strahlen von Parallelen geschnitten werden, ergeben sich besondere Zusammenhänge.



1. Strahlensatz

Wird ein Geradenbüschel von Parallelen geschnitten, so bestehen zwischen den Längen der gleichliegenden Abschnitte der Strahlen die gleichen Verhältnisse.

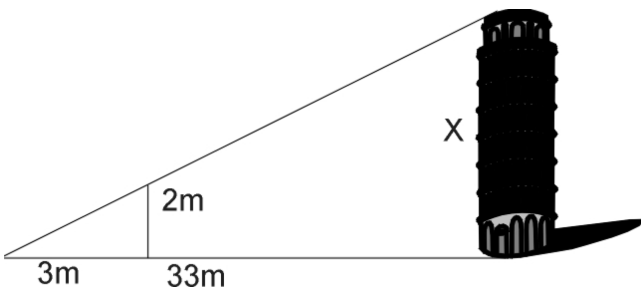
$\frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}}$ und $\frac{\overline{SA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{BB'}}$

2. Strahlensatz

Wird ein Geradenbüschel von Parallelen geschnitten, so bilden die Längen der Abschnitte der Parallelen und die Längen der entsprechenden Strahlenabschnitte vom Schnittpunkt S aus gemessen gleiche Verhältnisse.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}}$

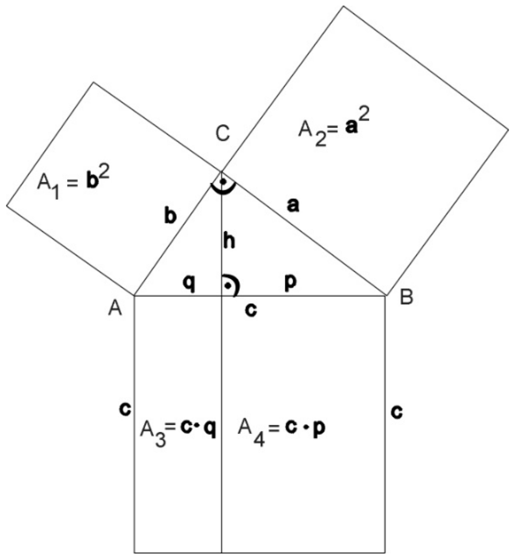
Bsp: Wie hoch ist ein Turm, der einen Schatten von 33m wirft, wenn der Schatten eines 2m langen Stabes bei gleichem Sonnenstand 3m lang ist?



Nach dem 2. Strahlensatz gilt: $\frac{x}{2m} = \frac{33m}{3m} \quad \Rightarrow \quad x = 22m$

Der Turm ist 22m hoch.

13 **Flächensätze beim rechtwinkligen Dreieck**



13.1 Bezeichnungen:

c: Hypotenuse
a,b: Katheten
p,q: Hypotenusenabschnitte
h : Dreieckhöhe

13.2 Der Kathetensatz des Euklid

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck, gebildet aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$a^2 = c \bullet p \quad und \quad b^2 = c \bullet q$

13.3 Der Satz des Pythagoras

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate flächengleich dem Hypotenusenquadrat.

$a^2 + b^2 = c^2$

13.4 Der Höhensatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich dem Rechteck, gebildet aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

$h^2 = p \bullet q$

13.5 Satz des Thales

Jeder Winkel dessen Schenkel durch A und B gehen und dessen Scheitel auf dem Umfang des Halbkreises $\overline{AB}$ liegt, ist ein rechter Winkel.

14 **Flächen und Volumen**

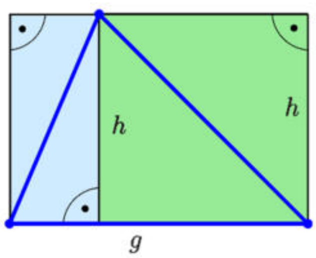
14.1 Flächen

Flächen sind Begrenzungen eines Körpers. Eine Fläche hat zwei Ausdehnungen (Dimensionen) : Länge und Breite.

- Einheiten: 1 $mm^2 = 10^{-6}$ m^2
  1 $cm^2 = 10^{-4}$ m^2
  1 $dm^2 = 10^{-2}$ m^2
  1 $dm^2 = 10^{-2}$ m^2
  1 m^2
  1 ar = 10^{2} m^2
  1 ha = $10^{4} m^2$
  1 $km^2 = 10^6$ m^2

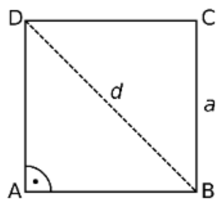
- Flächenberechnung

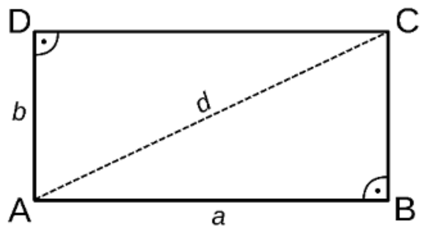
Dreieck $A = \frac{1}{2} \bullet g \bullet h$



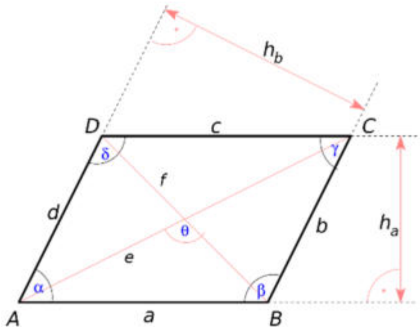
Quadrat $A = a^2$

Rechteck $A = a \bullet b$

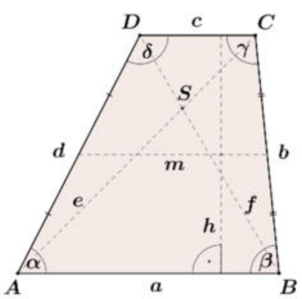




Parallelogramm $A = a \bullet h_a = b \bullet h_b$



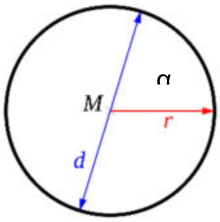
Trapez $A = \frac{a+c}{2} \bullet h$

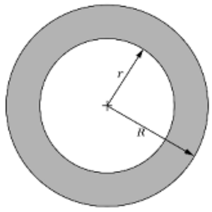


Kreis $\quad A = \pi \bullet r^2 = \pi \bullet \frac{d^2}{4}$

Kreisring $\quad A = \pi \bullet R^2 - \pi \bullet r^2$

Kreisausschnitt $\quad A = \pi \bullet r^2 \bullet \frac{\alpha}{360°}$





14.2 Volumen

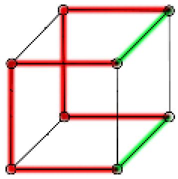
Das Volumen ist die räumliche Ausdehnung eines Körpers. Das Volumen hat drei Ausdehnungen (Dimensionen) und bezeichnet den Rauminhalt.

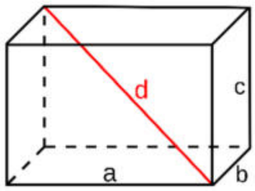
- Einheiten : $1\ mm^3 = 10^{-9} m^3$
  $1\ cm^3 = 10^{-6}\ m^3$
  $1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^3$
  $1 m^3$
  $1\ km^3 = 10^{9}\ m^3$

- Volumenberechnung

Würfel $\quad V = a^3$

Quader $\quad V = a \bullet b \bullet c$

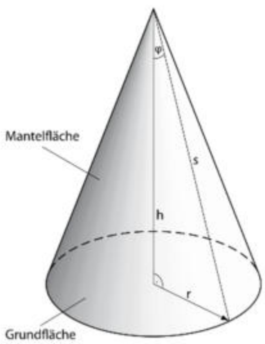




Prisma $\quad V = G \bullet h$ $\quad$ (Grundfläche G)

h

Kegel $\quad V = \frac{1}{3} \bullet G \bullet h$



14 **Winkelfunktionen**

Mit Hilfe der Winkelfunktionen können Winkel und Strecken in einem Dreieck berechnet werden, ohne dass die unterschiedlichen Maßeinheiten berücksichtigt werden müssen. Es werden die Katheten, die am oder gegenüber dem Winkel liegen (Ankathete, Gegenkathete) zur Hypothenuse ins Verhältnis gesetzt; bzw.
die Kathetenstrecken zueinander.

- $Sinus = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$
- $Cosinus = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$
- $Tangens = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$
- $Cotangens = \frac{Ankathete}{Gegenkathete}$

Besondere Beziehungen:

sin 0° = 0	cos 0° = 1
sin 90° = 1	cos 90° = 0
tan 0° = 0	
tan 45° = 1	

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \bullet \cos\beta + \cos\alpha \bullet \sin\beta$$

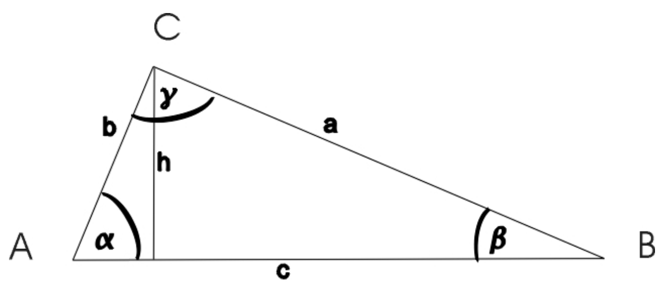
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \bullet \cos\beta - \sin\beta \bullet \cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \sin\alpha \bullet \sin\alpha = (\sin\alpha)^2$$

arc = Umkehrfunktion

15 **Trigonometrie**

Die Winkelfunktionen des Kapitels 15 beziehen sich ausschließlich auf rechtwinklige Dreiecke. Mit Hilfe des Sinus- und Kosinussatzes kann man auch schiefwinklige Dreiecke berechnen, ohne sie in rechtwinklige Teildreiecke zerlegen zu müssen.



- Sinussatz :

Zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinuswerte ihrer Gegenwinkel.

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad und \quad \frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad und \quad \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

- Kosinussatz

Das Quadrat einer Dreieckseite ist gleich die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seiten und dem cos des eingeschlossenen Winkels.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \bullet \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \bullet \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \bullet \cos\gamma$$

16 **Funktionen**

Funktionen dienen zur Darstellung und Beschreibung von Zusammenhängen und Abhängigkeiten zwischen zwei physikalisch-technischen Messgrößen.
Also versteht man unter der Funktion eine Vorschrift, die jedem Element x aus der Menge D genau ein Element y aus der Menge W zuordnet.
y = f(x) mit x: unabhängige Veränderliche oder Argument
y: abhängige Veränderliche oder Funktionswert
D: Definitionsbereich der Funktion
W: Wertebereich der Funktion

17.1 Graphische Darstellung

- Das kartesische Koordinatensystem besteht aus zwei senkrecht aufeinanderstehenden Zahlengeraden. Man bezeichnet sie als x-Achse (Abszisse) und y-Achse (Ordinate).
  Die Funktion y=f(x) wird in einem kartesischen Koordinatensystem durch eine ebene Punktmenge dargestellt (Funktionskurve, -graph, Schaubild).
  Einem Wert (x) wird mittels der Funktionsvorschrift ein Kurvenpunkt P(x,y) zugeordnet. Verbindet man die Punkte, so erhält man den Graphen der Funktion.
  Man kann die Funktion auch in Polarkoordinaten darstellen.
  Dann ergibt sich ein Kurvenpunkt aus der Länge eines Vektors und seiner Richtung P(r,α) mit r: Abstand des Punkts P vom Koordinatenursprung
  α = Winkel zwischen $\overline{op}$ und der Polarachse.

- Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

$$x = r \bullet \cos\alpha \quad und \quad y = r \bullet \sin\alpha$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad und \quad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

Bsp: P=(4,3) d.h. x = 4 und y = 3
Gesucht sind die Polarkoordinaten des Punktes P

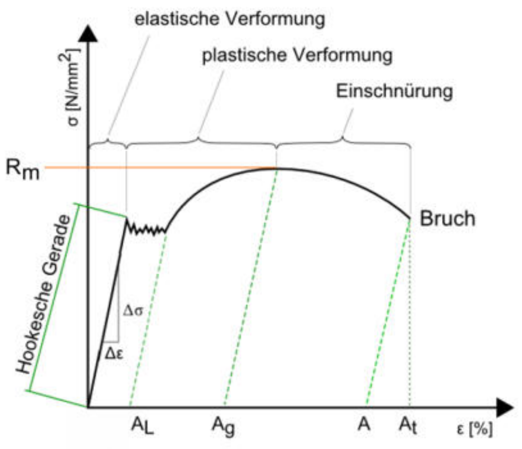
$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad und \quad tan\,\alpha = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36{,}8°$$

Anhand einer „Lageskizze” kann man erkennen, dass der Punkt P im 1.Quadranten liegt. Daraus ergibt sich:
Ergebnis: r= 5 und $\alpha = 36{,}8°$:

17.2 Empirische Funktionen in der Optik

Um Zusammenhänge darzustellen bedient man sich in Wissenschaft und Technik Schaubildern. Bei solchen Zusammenhängen ist oft eine Größe des einen Bereichs von der Größe des anderen Bereichs abhängig, so dass wenn sich die eine Größe ändert, verändert sich die andere.

Bsp: Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Werkstoffs.



17.3 Lineare Gleichungen

Bei diesem Gleichungstyp ist eine reelle Funktion f(x) durch einen linearen Term der Form f(x)= mx+b definiert.
mit: m = Steigungsfaktor
b = Absolutglied, Stelle an der die Gerade die y-Achse schneidet

17.4 Ellipse, Hyperbel, Parabel

- Exzentrizität

Verschiedene Kegelschnittformen lassen sich durch die Exzentrizität beschreiben. Sie ist ein Maß für die Abweichung einer asphärischen Fläche von ihrem Scheitelkreis (s. Abb. 1)

$\varepsilon = 0$ Kreis

$0 < \varepsilon < 1$ Ellipse

$\varepsilon = 1$ Parabel

$\varepsilon > 1$ Hyperbel

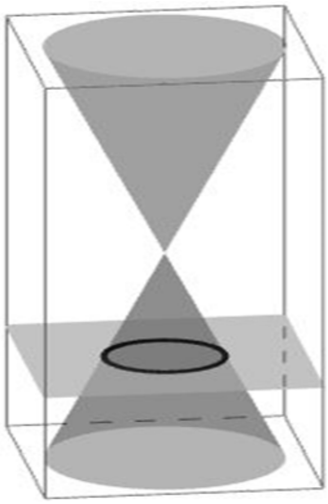


Abb. 1

- Ellipse

Die Ellipse ist definitionsgemäß die Menge aller (ebenen) Punkte, für die die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten, den sogenannten Brennpunkten F_1 und F_2 konstant ist.
(s.Abb 2)

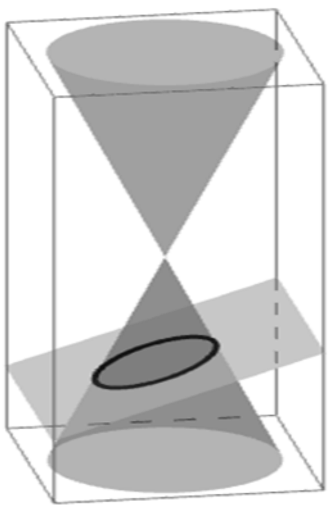


Abb. 2

- Hyperbel

Die Hyperbel ist die Menge aller (ebenen) Punkte, für die die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten, den Brennpunkten F_1 und F_2 konstant ist (s. Abb. 3)

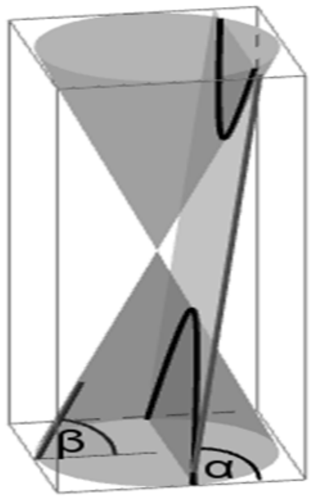


Abb. 3

- Parabel

Die Parabel ist als geometrischer Ort aller (ebenen) Orte definiert, die von einem festen Punkt, dem Brennpunkt F, und einer festen Geraden, Leitlinie genannt, gleich weit entfernt sind
(s. Abb. 4)

Abb. 4