

4. Übung im Modul „Modellierung“

Wintersemester 2023/24

Lösungen bis 8. November 2023 einzusenden im Opal-Kurs

<https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/41590390790>**Aufgabe 4.1**

- a. Finden Sie eine aussagenlogische Formel $\varphi \in \text{AL}(\{p, q, r\})$ und
- b. eine aussagenlogische Formel $\psi \in \text{AL}(\{p, q, r\})$ in CNF

mit der Modellmenge $\text{Mod}(\varphi) = \text{Mod}(\psi) = \{W_{011}, W_{100}, W_{101}, W_{111}\}$.**Aufgabe 4.2**

- a. Geben Sie für $P = \{p, q, r, s\}$ eine aussagenlogische Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$ an, die genau von allen Belegungen erfüllt wird, unter denen mindestens zwei der Atome falsch sind.
- b. Geben Sie zu eine zu dieser Formel äquivalente Formel $\psi \in \text{AL}(P)$ in DNF an.
- c. Geben Sie zu eine zu dieser Formel äquivalente Formel $\eta \in \text{AL}(P)$ in CNF an.

Aufgabe 4.3Zeigen Sie, dass für je zwei beliebige Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}(P)$ genau dann $\varphi \equiv \psi$ gilt, wenn die Formel $\varphi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig ist.**Aufgabe 4.4**

Welche der folgenden Aussagen gelten:

- a.

$$\begin{aligned} \text{Mod}((p \rightarrow \neg q) \wedge (p \vee q)) &\subseteq \text{Mod}((p \wedge \neg p) \wedge q) \\ \text{Mod}((p \wedge q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \wedge (p \vee q)) &\subseteq \text{Mod}((p \wedge \neg p) \wedge q) \end{aligned}$$
- b.

$$\begin{aligned} \{p \rightarrow \neg q, p \vee q\} &\models (p \wedge \neg p) \wedge q \\ \{p \wedge q, p \rightarrow \neg q, p \vee q\} &\models (p \wedge \neg p) \wedge q \end{aligned}$$

Aufgabe 4.5Gegeben ist die Formelmeng $\Phi = \{\neg(a \wedge \neg b), \neg b \vee c\}$

- a. Welche der folgenden Formeln sind semantische Folgerungen aus Φ ?
 - (1) $\neg(a \wedge b)$
 - (2) $\neg a \vee c$
- b. Geben Sie eine Formel ψ an, die die Aussagenvariable c nicht enthält, so dass die Formel c eine semantische Folgerung aus der Formelmeng $\Phi \cup \{\psi\}$ ist.
- c. Geben Sie eine Formel φ an, so dass die Formelmeng $\Phi \cup \{\varphi\}$ unerfüllbar ist.

Aufgabe 4.6

Ein Gerät kann je nach Kombination der Baugruppen A, B, C und D in verschiedenen Varianten hergestellt werden. Dabei sind jedoch folgende Bedingungen einzuhalten:

- Die Baugruppen A und D können nur gemeinsam auftreten.
 - Der Einbau von D macht den Einbau von C erforderlich.
 - Jede Variante, die A nicht enthält, muss B enthalten.
 - B und D schließen einander aus.
- a. Geben Sie zu jeder der vier Bedingungen einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck an. Verwenden Sie dazu die Aussagenvariablen a , b , c und d , wobei jeweils die Aussagenvariable x bedeutet, dass das Bauteil X eingebaut wird.
 - b. Ermitteln Sie alle mögliche Bauvarianten.
 - c. Geben Sie Ihren Lösungsweg an.

Aufgabe 4.7

Repräsentieren Sie die folgenden Sachverhalte durch eine Menge aussagenlogischer Formeln: Wenn ein Einhorn ein Fabelwesen ist, dann ist es unsterblich. Ist es jedoch kein Fabelwesen, dann ist es ein sterbliches Säugetier. Sind Einhörner Säugetiere oder unsterblich, dann haben sie ein Horn. Einhörner mit Horn haben Zauberkraft.

- a. Ist diese Formelmenge erfüllbar? Begründen Sie.
- b. Welche der folgenden Aussagen lassen sich aus dieser Formelmenge semantisch folgern:
 - (f) Das Einhorn ist ein Fabelwesen.
 - (z) Das Einhorn hat Zauberkraft.
 - (h) Das Einhorn hat ein Horn.
- c. Leiten Sie jede der folgerbaren Aussagen aus Teilaufgabe b. durch aussagenlogische Resolution aus dem Kontext ab.

Aufgabe 4.8

Zeigen Sie, dass man im Allgemeinen beim Bilden der Resolventen nicht zwei verschiedene Literale gleichzeitig eliminieren kann (z.B. zur Klauselmengemenge $\{\{a \vee b \vee c\}, \{\neg a \vee \neg b \vee c\}\}$ die Klausel $\{c\}$ hinzufügen, ohne die Modellmenge zu ändern).

Aufgabe 4.9

Geben Sie für jeden der folgenden umgangssprachlich beschriebenen Sachverhalte an:

- O: die Menge der Individuen, um die es geht,
 - E: alle relevanten Eigenschaften der Individuen,
 - B: alle relevanten Beziehungen zwischen den Individuen,
 - F: alle relevanten Funktionen auf der Menge der Individuen,
 - φ : eine prädikatenlogische Formel, die den Sachverhalt beschreibt.
- a. Cousins einer Person sind alle männlichen Kinder von Geschwistern der Eltern dieser Person.
 - b. Das Quadrat jeder ungeraden Primzahl ist ungerade.
 - c. Zwischen 13 und 17 gibt es keine durch 10 teilbare natürliche Zahl.
 - d. Jeder Unter sticht alle Karten, die keine Unter sind.
 - e. Alle Punkte auf einem Kreis haben denselben Abstand zum Mittelpunkt des Kreises.