ONLINE-TEST 4

——— Aufgabe 1 ———

Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung gegeben durch $f(x, y) = (x + 2y, x - 2y)$.

Wählen Sie die richtige Antwort aus.

Die Anzahl der f-invarianten Unterräume von $\mathbb{C}^2$ ist

○ 0

○1

○2

○3

○4

○unendlich

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung gegeben durch $f(x, y) = (y, -x)$.

Wählen Sie die richtige Antwort aus.

Die Anzahl der f-invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^2$ ist

○ 0

○1

○2

○3

○4

○unendlich

Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung gegeben durch $f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$.

Wählen Sie die richtige Antwort aus.

Die Anzahl der f-invarianten Unterräume von $\mathbb{C}^2$ ist

○ 0

○1

◯2

◯3

◯4

◯unendlich

Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung gegeben durch $f(x, y) = (2x + y, 2y)$.

Wählen Sie die richtige Antwort aus.

Die Anzahl der f-invarianten Unterräume von $\mathbb{C}^2$ ist

◯ 0

◯1

◯2

◯3

◯4

◯unendlich

Aufgabe 2

Wir betrachten $f, g \in \mathbb{C}[x]$, sodass $ggT(f, g) = 1$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□Für alle $v \in$ Kern$(f(A))$ gilt $g(A)v \in$ Kern$(f(A))$.

□Für alle $v \in$ Kern$(f(A))$ gibt es $w \in$ Kern$(f(A))$, sodass $v = g(A)w$.

Wir betrachten $f, g \in \mathbb{R}[x]$, sodass $ggT(f, g) = 1$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□Für alle $v \in$ Kern$(g(A))$ gilt $f(A)v \in$ Kern$(g(A))$.

□Für alle $v \in$ Kern$(g(A))$ gibt es $w \in$ Kern$(g(A))$, sodass $v = f(A)w$.

Wir betrachten $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, sodass $ggT(f, g) = 1$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{Q})$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□Für alle $v \in$ Kern$(f(A))$ gilt $g(A)v \in$ Kern$(f(A))$.

□Für alle $v \in$ Kern$(f(A))$ gibt es $w \in$ Kern$(f(A))$, sodass $v = g(A)w$.

Wir betrachten $f, g \in \mathbb{C}[x]$, sodass $ggT(f, g) = 1$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□Für alle $v \in$ Kern$(g(A))$ gilt $f(A)v \in$ Kern$(g(A))$.

□Für alle $v \in$ Kern$(g(A))$ gibt es $w \in$ Kern$(g(A))$, sodass $v = f(A)w$.

——— Aufgabe 3 ———

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

1. □Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(1,0,0),(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
   □Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
2. □Es gibt $f \in \mathbb{C}[x]$, sodass f ein Teiler von m_A ist und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.
   □Es gibt $f, g \in \mathbb{C}[x]$, sodass $ggT(f,g) = 1$, $fg = m_A$ und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

1. □Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
   □Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(1,0,0),(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
2. □Es gibt $f \in \mathbb{C}[x]$, sodass f ein Teiler von m_A ist und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.
   □Es gibt $f, g \in \mathbb{C}[x]$, sodass $ggT(f,g) = 1$, $fg = m_A$ und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

1. □Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(1,0,0),(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
   □Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
2. □Es gibt $f \in \mathbb{C}[x]$, sodass f ein Teiler von m_A ist und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.
   □Es gibt $f, g \in \mathbb{C}[x]$, sodass $ggT(f,g) = 1$, $fg = m_A$ und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

1. □Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
   □Es gibt einen A-invarianten Unterraum $V \subseteq \mathbb{C}^3$, sodass $V \oplus [\{(1,0,0),(0,1,0)\}] = \mathbb{C}^3$.
2. □Es gibt $f \in \mathbb{C}[x]$, sodass f ein Teiler von m_A ist und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.
   □Es gibt $f, g \in \mathbb{C}[x]$, sodass $ggT(f,g) = 1$, $fg = m_A$ und $[\{(0,1,0)\}] = \mathsf{Kern}(f(A))$.

Aufgabe 4

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Betrachten Sie eine beliebige lineare Abbildung $f : V \to V$ und sei U ein f-invarianter Unterraum von V. Mit $f|_U$ bezeichnen wir die Einschränkung $f : U \to U$. Wir definieren $\overline{f} : V/U \to V/U$ durch $\overline{f}([v]) = [f(v)]$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$m_{\overline{f}} | m_f$

□$m_{f|_U} | m_f$

□$m_{\overline{f}} m_{f|_U} = m_f$

□Alle obigen Aussagen sind falsch

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Betrachten Sie eine beliebige lineare Abbildung $f : V \to V$ und sei U ein f-invarianter Unterraum von V. Mit $f|_U$ bezeichnen wir die Einschränkung $f : U \to U$. Wir definieren $\overline{f} : V/U \to V/U$ durch $\overline{f}([v]) = [f(v)]$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$m_{f|_U}|m_f$

□$m_f|m_{\overline{f}}$

□$m_{\overline{f}}m_{f|_U} = m_f$

□Alle obigen Aussagen sind falsch

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Betrachten Sie eine beliebige lineare Abbildung $f : V \to V$ und sei U ein f-invarianter Unterraum von V. Mit $f|_U$ bezeichnen wir die Einschränkung $f : U \to U$. Wir definieren $\overline{f} : V/U \to V/U$ durch $\overline{f}([v]) = [f(v)]$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$m_{\overline{f}}m_{f|_U} = m_f$

□$m_f|m_{f|_U}$

□$m_{\overline{f}}|m_f$

□Alle obigen Aussagen sind falsch

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Betrachten Sie eine beliebige lineare Abbildung $f : V \to V$ und sei U ein f-invarianter Unterraum von V. Mit $f|_U$ bezeichnen wir die Einschränkung $f : U \to U$. Wir definieren $\overline{f} : V/U \to V/U$ durch $\overline{f}([v]) = [f(v)]$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□$m_{\overline{f}}m_{f|_U} = m_f$

□$m_f|m_{f|_U}$

□$m_f|m_{\overline{f}}$

□Alle obigen Aussagen sind falsch

Aufgabe 5

Sei K ein Körper. Sei V ein K-Vektorraum, und $U \subseteq V$ ein Untervektorräum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei $V := K[X]$, $n \in \mathbb{N}$, $U := \{p \in K[X] : (X^n + 1)|p\}$. Der K-Vektorraum V/U ist endlichdimensional.

□wahr □falsch

Sei K ein Körper. Sei V ein K-Vektorraum, und $U \subseteq V$ ein Untervektorräum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei $V := K[X]$, $n \in \mathbb{N}$, $U := \{p \in K[X] : (X^n + 1)|p\}$. Der K-Vektorraum V/U ist endlichdimensional.

☐wahr ☐falsch

Sei K ein Körper. Sei V ein K-Vektorraum, und $U \subseteq V$ ein Untervektorräum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei $V := K[X]$, $n \in \mathbb{N}$, $U := \{p \in K[X] : (X^n + 1)|p\}$. Der K-Vektorraum V/U ist endlichdimensional.

☐wahr ☐falsch

Sei K ein Körper. Sei V ein K-Vektorraum, und $U \subseteq V$ ein Untervektorräum.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei $V := K[X]$, $n \in \mathbb{N}$, $U := \{p \in K[X] : (X^n + 1)|p\}$. Der K-Vektorraum V/U ist endlichdimensional.

☐wahr ☐falsch

Aufgabe 6

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq$ ☐. ____________________

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq$ ☐. ____________________

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq$ ☐.

Sei $A \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die richtige Antwort.

Die Matrix A ist genau dann triagonalisierbar, wenn $|k| \geq$ ☐.

Aufgabe 7

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & k & -k^2 & 2 \\ 5 & -1 & k & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist M trigonalisierbar.

☐ Wenn $k = 1$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

☐ Wenn $k = 0$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & k & -k^2 & 8 \\ 7 & -1 & k & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐ Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist M trigonalisierbar.

☐ Wenn $k = 1$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

☐ Wenn $k = 0$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 11 & k & -k^2 & 5 \\ 6 & -1 & k & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist M trigonalisierbar.

□Wenn $k = 1$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

□Wenn $k = 0$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

Sei $M \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrix gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & k & -k^2 & 7 \\ 7 & -1 & k & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□Für alle $k \in \mathbb{R}$ ist M trigonalisierbar.

□Wenn $k = 1$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

□Wenn $k = 0$, dann ist M nicht trigonalisierbar.

Aufgabe 8

Seien $M_1, M_2 \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrizen gegeben durch

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□M_1 ist triagonalisierbar.

□M_2 ist triagonalisierbar.

□Alle obigen Aussagen sind falsch

Seien $M_1, M_2 \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrizen gegeben durch

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□ M_1 ist triagonalisierbar.

□ M_2 ist triagonalisierbar.

□ Alle obigen Aussagen sind falsch

Seien $M_1, M_2 \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrizen gegeben durch

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

□ M_1 ist triagonalisierbar.

□ M_2 ist triagonalisierbar.

□ Alle obigen Aussagen sind falsch

Seien $M_1, M_2 \in \mathsf{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ die Matrizen gegeben durch

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

☐M_1 ist triagonalisierbar.

☐M_2 ist triagonalisierbar.

☐Alle obigen Aussagen sind falsch

Aufgabe 9

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ linear.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei T invertierbar. W ist ein T-invarianter Unterrraum von V genau dann, wenn W ein T^{-1}-invarianter Unterrraum von V ist.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ linear.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei T invertierbar. W ist ein T-invarianter Unterrraum von V genau dann, wenn W ein T^{-1}-invarianter Unterrraum von V ist.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ linear.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei T invertierbar. W ist ein T-invarianter Unterrraum von V genau dann, wenn W ein T^{-1}-invarianter Unterrraum von V ist.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ linear.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei T invertierbar. W ist ein T-invarianter Unterrraum von V genau dann, wenn W ein T^{-1}-invarianter Unterrraum von V ist.

☐wahr ☐falsch

Aufgabe 10

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ linear.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei χ_T das charakteristische Polynom von T. Wenn χ_T irreduzibel ist, so gibt es keine T-invarianten Unterräume außer 0 und V.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ linear.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei χ_T das charakteristische Polynom von T. Wenn χ_T irreduzibel ist, so gibt es keine T-invarianten Unterräume außer 0 und V.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ linear.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei χ_T das charakteristische Polynom von T. Wenn χ_T irreduzibel ist, so gibt es keine T-invarianten Unterräume außer 0 und V.

☐wahr ☐falsch

Seien K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $T : V \to V$ linear.

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Sei χ_T das charakteristische Polynom von T. Wenn χ_T irreduzibel ist, so gibt es keine T-invarianten Unterräume außer 0 und V.

☐wahr ☐falsch