Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

7. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich“ gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

7.1. Gegeben sind Permutationen π, σ und τ in der symmetrischen Gruppe S_5 mit

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Für die Komposition zweier Permutationen α und β schreiben wir statt $\alpha \circ \beta$ kurz $\alpha\beta$. Berechnen Sie $\sigma\tau$, $\sigma\pi$, τ^{-1}, $(\sigma\pi)^{-1}$ und $\pi^{-1}\sigma^{-1}$.

7.2. Sei $R = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$. Wir definieren Addition bzw. Multiplikation (die so genannte punktweise Addition bzw. Multiplikation) durch

$$\begin{aligned}(f+g)(m) &= f(m) + g(m) \text{ bzw.} \\ (f \cdot g)(m) &= f(m)g(m)\end{aligned}$$

für alle $f, g \in R$ und $m \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass R bezüglich dieser Operationen ein kommutativer Ring ist.

(b) Ist R auch ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.

7.3. Schriftlich: komplett – 3 Punkte.
Seien

$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} \\ \overline{2} & \overline{5} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{5} & \overline{3} & \overline{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \overline{7} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{0} \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} \overline{6} \\ \overline{7} \\ \overline{1} \end{pmatrix}$$

Matrizen mit Einträgen im Ring $\mathbb{Z}_8$.

(a) Welche der folgenden Ausdrücke sind wohldefiniert?

(i) $A + B$ (ii) $B + C$ (iii) BA (iv) AB (v) CB (vi) CD (vii) $AC + B$ (viii) $BD + C$

(b) Berechnen Sie die wohldefinierten Ausdrücke aus (a) und geben Sie das Ergebnis so an, dass die Matrizen nur Einträge in den Repräsentanten k mit $0 \leq k < 8$ haben.

7.4. Man sagt, dass zwei Elemente x, y eines Rings R *kommutieren*, falls $xy = yx$.
Sei $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass A und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ genau dann kommutieren, wenn A eine Diagonalmatrix ist.

(b) Zeigen Sie, dass A und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ genau dann kommutieren, wenn A eine Diagonalmatrix ist.

(c) Welche 2×2-Matrizen A kommutieren mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Folgern Sie, dass A genau dann mit allen Matrizen von $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ kommutiert, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $A = \lambda \cdot I_2$.

7.5. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1, sei $\lambda \in R$, seien m, n und p natürliche Zahlen und seien $A, B \in M_{n\times p}(R)$ und $D \in M_{m\times n}(R)$ Matrizen mit Einträgen in R. Zeigen Sie:

(a) $(\lambda \cdot D)A = D(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot (DA)$

(b) $D(A + B) = DA + DB$

(c) Für $a \in R$ gilt $(-1) \cdot a = -a$; insbesondere folgt $(-1)A = -A$.

7.6. Schriftlich: komplett – 5 Punkte.

Die Menge K sei definiert durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, a = d \text{ und } b = -c \right\}.$$

Addition und Multiplikation in K seien gegeben durch gewöhnliche Addition und Multiplikation von Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass Addition und Multiplikation in K wohldefiniert sind. Bestimmen Sie das Nullelement 0 und das Einselement in K. Zeigen Sie, dass die Multiplikation auf K kommutativ ist und dass zu jedem $A \in K \setminus \{0\}$ ein multiplikativ Inverses $A^{-1} \in K$ existiert.

(b) Wir definieren die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + b\mathtt{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Auf $\mathbb{C}$ sind eine Addition und eine Multiplikation gegeben durch: Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sei

$$(a + b\mathtt{i}) + (c + d\mathtt{i}) := (a + c) + (b + d)\mathtt{i},$$
$$(a + b\mathtt{i}) \cdot (c + d\mathtt{i}) := (ac - bd) + (ad + bc)\mathtt{i}.$$

Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{C} \to K, a + b\mathtt{i} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ eine bijektive Abbildung definiert, die für alle $z, z' \in \mathbb{C}$ die Gleichungen $f(z + z') = f(z) + f(z')$ und $f(z \cdot z') = f(z) \cdot f(z')$ erfüllt.

7.7. Schriftlich: (b), (c) – 2 Punkte. Geben Sie Matrizen $A, B, C, D, X, Y, Z \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ an, sodass:

(a) $AB = 0$,

(b) $CX = DX$ und $C \neq D$,

(c) $Y^3 = 0$ und $Y^2 \neq 0$,

(d) $Z^2 = I_3$ und Z ist keine Diagonalmatrix.