

## 2. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2010

Abgabe: Dienstag, 16.03.2010, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

### Aufgabe 5: Spur, Adjungierte, Determinante

(5 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen aus dem Anhang A des Vorlesungsskripts:

a)  $\text{Sp}(\hat{A}|\phi\rangle\langle\psi|) = \langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle$

b)  $\text{Sp}A^\dagger = (\text{Sp}A)^*$

c)  $\det(H) = \prod_i \lambda_i$ ,

wobei  $H$  eine hermitesche  $n \times n$  Matrix mit den zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_i$  ist.

### Aufgabe 6: Operatoren in Bra-Ket-Schreibweise

(7 Punkte)

Es sei ein Vektorraum mit den beiden orthonormierten Basiszuständen  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$  gegeben, sowie der Zustand  $|\psi\rangle = |1\rangle + i|2\rangle$ .

a) Normieren Sie den Zustand  $|\psi\rangle$  und finden Sie einen normierten Zustand, der orthogonal zu  $|\psi\rangle$  ist.

b) Es sei der Operator

$$\hat{H} = 2|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| - 3i|1\rangle\langle 2| + 3i|2\rangle\langle 1|$$

gegeben. Geben Sie die Matrixdarstellung dieses Operators in der Basis  $|1\rangle, |2\rangle$  an. Ist dieser Operator hermitesch?

c) Berechnen Sie  $\frac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$ . Dies ist der Erwartungswert des Operators  $\hat{H}$  im Zustand  $|\psi\rangle$ .

(bitte wenden)

## Aufgabe 7: Unitäre Operatoren und Basistransformationen

(8 Punkte)

Durch  $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$  sei eine orthonormale Basis gegeben. Eine weitere orthonormale Basis sei durch

$$|b_1\rangle = \frac{1}{5}(3|a_1\rangle + 4i|a_2\rangle) \quad , \quad |b_2\rangle = \frac{1}{5}(4|a_1\rangle - 3i|a_2\rangle)$$

gegeben.

- a) Drücken Sie den unitären Operator  $\hat{U}$ , der die  $a$ -Basisvektoren in die  $b$ -Basisvektoren überführt, durch Bra und Ket-Vektoren aus. Welche Matrix ist diesem Operator in der  $a$ -Basis zugeordnet ?

Überprüfen Sie, explizit in Matrixdarstellung, dass  $U$  unitär ist.

- b) Ein Vektor  $|\chi\rangle$  sei in der  $a$ -Basis durch den Koeffizientenvektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  gegeben. Schreiben Sie  $|\chi\rangle$  als Summe von Ket-Vektoren. Wie lauten die Koeffizienten dieses Vektors in der  $b$ -Darstellung ?

- c) Ein linearer Operator  $\hat{T}$  sein in der  $a$ -Basis durch die Matrix

$$t^{(a)} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$$

gegeben. Drücken Sie diesen Operator durch die Basis-Bras und -Kets der  $a$ -Basis aus. Wie lautet die Matrixdarstellung von  $\hat{T}$  in der  $b$ -Basis ?