§7 Diagonalisierbarkeit normaler Endomorphismen

In diesem Abschnitt wollen wir die Eigenwerttheorie benutzen, um selbstadj. oder unitäre Endomorphismen genauer zu untersuchen. Beide sind "normal" im Sinne von:

7.1 Def Sei $(V,\langle\,,\rangle)$ endl. dim unitärer bzw. eukl. $\mathbb{K}$-VR. Ein Endom. $F \in \mathrm{End}(V)$ heißt <u>normal</u>, falls $F^* \circ F = F \circ F^*$.

Analog: Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ heißt <u>normal</u>, wenn $A^*A = A^*A$.

Bsp. Ist $F = F^*$, so ist F auch normal, da $F^* \circ F = F \circ F = F \circ F^*$. Ist F unitär (orthog.), so ist F auch normal, da dann $F^* \circ F = \mathrm{id}_V = F \circ F^*$ gilt. Analoges gilt für Matrizen!

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass jeder normale Endom <u>über $\mathbb{C}$</u> diagonalisierbar ist. Es gibt dann sogar eine ONB aus Eigenvektoren! Analoges folgt dann auch für selbstadj. Endom über $\mathbb{R}$ (also V eukl. VR). Ferner werden wir die Struktur von bel. orthog. Endom. (Matrizen) verstehen!

7.2 Lemma Sei $(V,\langle\,,\rangle)$ endl. dim. unitärer $\mathbb{C}$-VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann gelten:

(1) Ist λ EW von F, so ist $\bar{\lambda}$ EW von F^* und es gilt $E_\lambda(F) = E_{\bar{\lambda}}(F^*)$.

(2) Sind λ_1, λ_2 EW von F mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so gilt
$E_{\lambda_1}(F) \perp E_{\lambda_2}(F)$.

<u>Erinnerung</u>: $E_\lambda(F) = \mathrm{Kern}(\lambda\, \mathrm{id}_V - F)$ ist der Eigenraum zum EW λ von F.

<u>Bew</u>: (1) Da F normal, ist auch $\lambda \mathrm{id} - F$ normal, denn
$$(\lambda \mathrm{id} - F)^* \circ (\lambda \mathrm{id} - F) = \lambda\bar\lambda \,\mathrm{id} - \bar\lambda F - \lambda F^* + F \circ F^*$$
$$\overset{F \text{ normal}}{=} \lambda\bar\lambda \,\mathrm{id} - \lambda F^* - \bar\lambda F + F^* \circ F = (\lambda \mathrm{id} - F) \circ (\lambda \mathrm{id} - F)^*.$$
Nun gilt für alle $G \in \mathrm{End}(V)$ mit G normal, dass $\mathrm{Kern}\, G = \mathrm{Kern}\, G^*$, denn
$$v \in \mathrm{Kern}(G) \iff 0 = \langle Gv, Gv\rangle = \langle G^* \circ G v, v\rangle \overset{\text{normal}}{=} \langle G \circ G^* v, v\rangle$$
$$= \langle G^* v, G^* v\rangle \iff v \in \mathrm{Kern}\, G^*.$$
Mit $G = \lambda \mathrm{id} - F$ folgt:
$$E_\lambda(F) = \mathrm{Kern}(\lambda \mathrm{id} - F) = \mathrm{Kern}(\lambda \mathrm{id} - F)^* = \mathrm{Kern}(\bar\lambda \mathrm{id} - F^*)$$
$$= E_{\bar\lambda}(F^*).$$
(2) Sind $v \in E_{\lambda_1}(F)$, $w \in E_{\lambda_2}(F)$, so folgt
$$\lambda_1 \langle v, w\rangle = \langle \lambda_1 v, w\rangle = \langle F(v), w\rangle = \langle v, F^*(w)\rangle \overset{(1)}{=} \langle v, \bar\lambda_2 w\rangle$$
$$= \lambda_2 \langle v, w\rangle,$$
also $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v, w\rangle = 0$. Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt $\langle v, w\rangle = 0$. ∎

$$\underbrace{}_{= E_{\bar\lambda_2}(F^*)}$$

<u>7.3 Satz</u> Sei $(V, \langle\,,\rangle)$ endl.-dim. unitärer $\mathbb{C}$-VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann besitzt V eine ONB $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren von F. Insb. ist F diagonalisierbar.

Bevor wir den Satz beweisen, notieren wir:

7.4 Folgerung: Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ normal. Dann ex. eine unitäre Matrix $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(n)$ mit
$$\mathcal{U}^* A \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ ist Diagonalmatrix.}$$

(Beachte: Für unitäre Matrizen gilt $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$).

Bew.: Betr. $\mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt und $F_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $F_A(x) = Ax$.
Dann ist F_A normal und ist $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ONB von $\mathbb{C}^n$ wie in 7.3, so ist $\mathcal{U} = (v_1, \dots, v_n)$ invertierbar mit
$$\mathcal{U}^{-1} A \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ (Siehe LA 1, § 16).}$$

Nach Satz 6.9 ist $\mathcal{U}$ unitär und $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$! ∎

Beweis von 7.3: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarw. versch. EW von F (da $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ex. mindestens ein EW, da nach dem Fundamentalsatz d. Algebra das char. Polynom von F mindestens eine Nullst. besitzt!)
Seien $E_{\lambda_1}(F), \dots, E_{\lambda_k}(F)$ die zugeh. Eigenräume.

Bestimme (etwa mit dem Schmidtschen Verfahren) eine ONB $\{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$ für $E_{\lambda_i}(F)$ $\forall\, 1 \le i \le k$.
Nach 7.2 gilt $E_{\lambda_i}(F) \perp E_{\lambda_j}(F)$ für $i \neq j$, und damit ist
$$\mathcal{B} := \{v_{11}, \dots, v_{1n_1}, v_{21}, \dots, v_{2n_2}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{kn_k}\}$$

ein ONS aus Eigenvektoren von F in V.
Zeige: $V = LH(\mathcal{B})$ (dann ist $\mathcal{B}$ gesuchte ONB).
Sei dazu $W := LH(\mathcal{B}) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(V)$. Dann gilt
$W \neq V \Leftrightarrow W^\perp \neq \{0\}$.
Wir wollen dies zu einem Widerspruch führen!

<u>Ann</u>: $W^\perp \neq \{0\}$. Dann gilt $F(W^\perp) \subseteq W^\perp$, d.h. $F_{|W^\perp} \in \mathrm{End}(W^\perp)$, denn: Da $E_{\lambda_i}(F) = E_{\bar\lambda_i}(F^*)$ folgt $F^*(E_{\lambda_i}(F)) \subseteq E_{\lambda_i}(F)$ und damit $F^*(W) \subseteq W$, da $W = \bigoplus_{i \in I} E_{\lambda_i}(F)$.

Dann folgt für alle $w \in W$ und $v \in W^\perp$:
$$\langle F(v), w\rangle = \langle v, \underbrace{F^*(w)}_{\in W}\rangle = 0, \text{ also } F(v) \in W^\perp.$$

Da $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ besitzt $F_{|W^\perp}$ mindestens einen EW $\mu \in \mathbb{C}$, und dann ex. ein EV $0 \neq v \in W^\perp$ für μ.
Da $W^\perp \subseteq V$ ist μ auch EW von F und $v \in E_\mu(F)$, d.h. $\exists\, i \in \{1,\dots,k\}$ mit $\mu = \lambda_i$ und dann
$$v \in E_{\lambda_i}(F) \subseteq W.$$
Damit $v \in W \cap W^\perp = \{0\}$. Wid zu $v \neq 0$! ■

Wir wollen nun die reelle Situation untersuchen. Sei also im Folgenden $(V, \langle , \rangle)$ ein endl. dim euklidischer $\mathbb{R}$-VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ normal.
Dann ist F <u>nicht immer</u> über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.
<u>Bsp</u>: $O(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar g.d.w. $\alpha = 0, \pi$ (d.h. wenn $O(\alpha) = \pm E_2$). Aber $O(\alpha)$ ist normal (da orthogonal) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Nach 7.3 bzw. 7.4 ist $O(\alpha)$ aber über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.
Wir wollen dieses nutzen um auch die reelle Situation zu verstehen.

<u>7.5. Def + Lemma</u> (Komplexifizierung)
Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein eukl. $\mathbb{R}$-VR. Wir setzen dann
$$V_{\mathbb{C}} := \{v + iw \mid v, w \in V\} \quad \text{Formale Summen}$$

versehen mit d. Addition

$$(v_1+iw_1)+(v_2+iw_2)=(v_1+v_2)+i(w_1+w_2)$$

und d. Mult. mit Skalaren

$$(a+ib)(v+iw)=(av-bw)+i(bv+aw)$$

(formal ausmultiplizieren!) und dem $\mathbb{C}$-wertigen Skalarprodukt

$$\langle v_1+iw_1, v_2+iw_2\rangle_{\mathbb{C}}=\langle v_1,v_2\rangle+\langle w_1,w_2\rangle+i(\langle w_1,v_2\rangle-\langle v_1,w_2\rangle)$$

(ebenfalls formal nach den Rechenregeln für $\mathbb{C}$-wertige Skalarprodukte ausrechnen).

Dann gilt. $(V_{\mathbb{C}},\langle\,,\rangle_{\mathbb{C}})$ ist ein unitärer $\mathbb{C}$-VR mit $\dim_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})=\dim_{\mathbb{R}}(V)$. Ist $F\in\mathrm{End}(V)$, so wird durch

$$F_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}}\to V_{\mathbb{C}},\quad F_{\mathbb{C}}(v+iw)=F(v)+iF(w)$$

ein $F_{\mathbb{C}}\in\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ definiert.

Bez: $(V_{\mathbb{C}},\langle\,,\rangle_{\mathbb{C}})$ heißt die Komplexifizierung von $(V,\langle\,,\rangle)$ und $F_{\mathbb{C}}$ heißt die Komplexif. von F.

7.6 Bsp: Ist $V=\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarpr., so ist $V_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^n$ mit Standard-Skalarprodukt, denn jeder Vektor $z\in\mathbb{C}^n$ besitzt eine eind. Zerlegung

$$z=x+iy \quad\text{mit } x,y\in\mathbb{R}^n.$$

Ist $A\in M(n\times n,\mathbb{R})$ und $F_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $F_A(x)=Ax$, so ist $(F_A)_{\mathbb{C}}(z)=A\cdot z$, wenn wir A als komplexe Matrix auffassen!

7.7 Lemma Sei $(V,\langle\,,\rangle)$ endl. dim eukl. $\mathbb{R}$-VR und sei $F\in\mathrm{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

(1) F ist normal (bzw. orthogonal bzw. selbstadj.)
(2) $F_{\mathbb{C}}$ ist normal (bzw. unitär bzw. selbstadj.).
Ferner gilt $F_{\mathbb{C}}^* = (F^*)_{\mathbb{C}}$.

Bew: Wir zeigen nur $F_{\mathbb{C}}^* = (F^*)_{\mathbb{C}}$. Die Äquiv. (1) $\Leftrightarrow$ (2) folgt dann leicht. $\forall\, v_1 + i w_1, v_2 + i w_2 \in V_{\mathbb{C}}$ gilt: $\langle F_{\mathbb{C}}(v_1 + i w_1), v_2 + i w_2\rangle = \langle F(v_1) + i F(w_1), v_2 + i w_2\rangle$
$$= \langle F(v_1), v_2\rangle + \langle F(w_1), w_2\rangle + i(\langle F(w_1), v_2\rangle - \langle F(v_1), w_2\rangle)$$
$$= \langle v_1, F^*(v_2)\rangle + \langle w_1, F^*(w_2)\rangle + i(\langle w_1, F^*(v_2)\rangle - \langle v_1, F^*(w_2)\rangle)$$
$$= \langle v_1 + i w_1, F^*(v_2) + i F^*(w_2)\rangle = \langle v_1 + i w_1, (F^*)_{\mathbb{C}}(v_2 + i w_2)\rangle$$
■

7.8 Bem: Ist $(V, \langle\,,\rangle)$ ein endl. $\mathbb{R}$-VR und ist $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine ONB von V, so ist $\mathcal{B}$ auch eine ONB von $V_{\mathbb{C}}$ (wir fassen V als Teilm. von $V_{\mathbb{C}}$ auf via, $v \mapsto v + i0$).
Denn: $\langle v_i, v_j\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$.

und $\dim(V_{\mathbb{C}}) = \dim(V) = n$.
Ist $F \in \mathrm{End}(V)$, so erhält man für die zugeh. Darstellungsmatrix
$$A^{\mathcal{B}}_{F_{\mathbb{C}}} = A^{\mathcal{B}}_F,$$
denn ist $A^{\mathcal{B}}_{F_{\mathbb{C}}} = (\tilde{a}_{ij})$, $A^{\mathcal{B}}_F = (a_{ij})$ so gilt nach 5.4:
$$\tilde{a}_{ij} = \langle F_{\mathbb{C}}(v_j + i0), v_i + i0\rangle_{\mathbb{C}} = \langle F(v_j) + i0, v_i + i0\rangle = \langle F(v_j), v_i\rangle = a_{ij}.$$

Wir wollen aber nun umgekehrt aus einer ONB von $V_{\mathbb{C}}$ aus Eigenvektoren von $F_{\mathbb{C}}$ eine "schöne" ONB für V basteln! Dazu benutzen wir zunächst, dass jedes reelle Polynom

$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ durch Einsetzen von $\lambda \in \mathbb{C}$ auch als komplexes Polynom aufgefasst werden kann.

<u>7.9 Lemma</u> Sei $(V, \langle , \rangle)$ endl. dim eukl. $\mathbb{R}$-VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt

$$\chi_{F_{\mathbb{C}}}(\lambda) = \chi_F(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

d.h. das charakt. Polynom von $F_{\mathbb{C}}$ ist gleich dem charakt. Polynom von F (fortgesetzt auf $\mathbb{C}$).

<u>Bew:</u> Wähle ONB $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V wie in 7.7. Dann folgt mit 7.8:

$$\chi_{F_{\mathbb{C}}}(\lambda) = \det(\lambda E_n - A^{\mathcal{B}}_{F_{\mathbb{C}}}) = \det(\lambda E_n - A^{\mathcal{B}}_F) = \chi_F(\lambda). \blacksquare$$

<u>7.10 Lemma</u> Sei $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ ein reelles Polynom. Dann gilt: Ist $\mu \in \mathbb{C}$ eine k-fache komplexe Nullst. von p, so ist auch $\bar{\mu} \in \mathbb{C}$ eine k-fache komplexe Nullst von p. Damit besitzt p eine Faktorisierung

$$p(\lambda) = a(\lambda-\lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda-\lambda_l)^{n_l}(\lambda-\mu_1)^{m_1}(\lambda-\bar{\mu}_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\mu_k)^{m_k}(\lambda-\bar{\mu}_k)^{m_k}$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ die paarw. versch. reellen Nullst. von p sind und $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_k, \bar{\mu}_k$ die paarw. versch. konj. komplexer Paare nicht-reelle Nullst. mit Vielf. $n_1, \dots, n_l, m_1, \dots, m_k$ sind.

<u>Bew:</u> Sei $\mu \in \mathbb{C}$ Nullst. von p. <u>Dann gilt</u>

$$p(\bar{\mu}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{\mu}^k \overset{a_k = \overline{a_k}}{=} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \bar{\mu}^k = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \mu^k} = \overline{p(\mu)} = 0,$$

also ist auch $\bar{\mu}$ Nullst von p. Nach §1 ex. Ist $\mu \notin \mathbb{R}$, so ist $\bar{\mu} \neq \mu$. Ferner gilt mit $\mu = \alpha + i\beta$:

$$(\lambda-\mu)(\lambda-\bar{\mu}) = (\lambda-(\alpha+i\beta))(\lambda-(\alpha-i\beta)) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2+\beta^2),$$

also ist $(\lambda-\mu)(\lambda-\bar{\mu})$ ein reelles Polynom.
Damit ex. ein reelles Polynom q mit $\operatorname{grad}(q) = \operatorname{grad}(p)-2$ mit

$$p(\lambda) = q(\lambda)(\lambda-\mu)(\lambda-\bar{\mu}).$$

Die Behauptung folgt dann per Induktion nach $\operatorname{grad}(p)$. ∎

7.11 Folgerung: Ist $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ ein reelles Polynom, so besitzt p eine Faktorzerlegung

$$p(\lambda) = a(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_\ell)^{n_\ell}(\lambda^2+a_1\lambda+b_1)^{m_1}\cdots(\lambda^2+a_k\lambda+b_k)^{m_k}$$

mit $a, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$ und $\lambda^2+a_i\lambda+b_i$ ist quadr. reelles Polynom, das keine reelle Nullst. besitzt.

Bew: Ist $\mu_i, \bar{\mu}_i$ ein konj. komplexes Nullst. Paar von p, so gilt mit $\mu_i = \alpha_i + i\beta_i$:

$$(\lambda-\mu_i)(\lambda-\bar{\mu}_i) = \lambda^2 - 2\alpha_i\lambda + (\alpha_i^2+\beta_i^2)$$ keine Nullst in $\mathbb{R}$, da beide Nulls in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

und dann ist $(\lambda-\mu_i)^{m_i}(\lambda-\bar{\mu}_i)^{m_i} = (\lambda^2-2\alpha_i\lambda+(\alpha_i^2+\beta_i^2))^{m_i}$.
Also $a_i = -2\alpha_i$, $b_i = (\alpha_i+\beta_i)^2$. ∎

7.12 Lemma Seien $(V, \langle\,,\,\rangle)$ ein endl. dim. eukl. $\mathbb{R}$-VR und $F \in \operatorname{End}(V)$ normal. Für $u = v+iw \in V_\mathbb{C}$ setze $\bar{u} = v - iw \in V_\mathbb{C}$. Dann gelten:

(1) Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ EW von $F_\mathbb{C}$ und $u = v+iw \in V_\mathbb{C}$ ein EV zu λ, so gelten:

$$\left.\begin{cases} F(v) = \alpha v - \beta w \\ F(w) = \beta v + \alpha w \end{cases}\right\} \text{ und } F_\mathbb{C}(\bar{u}) = \bar{\lambda}\bar{u}.$$

(2) Ist $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ eine ONB für $E_\lambda(F_\mathbb{C}) \subseteq V_\mathbb{C}$, so ist $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_\ell\}$ eine ONB für $E_{\bar{\lambda}}(F_\mathbb{C})$.

(3) Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ wie in (1) mit $\beta \neq 0$ und ist $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ eine ONB für $E_\lambda(F_\mathbb{C})$ mit $u_j = v_j + i w_j$, so ist
$\{\sqrt{2}\, v_1, \sqrt{2}\, w_1, \dots, \sqrt{2}\, v_\ell, \sqrt{2}\, w_\ell\}$
eine ONB von $E_\lambda(F_\mathbb{C}) \oplus E_{\bar\lambda}(F_\mathbb{C})$.

Bew: (1) Sei $\lambda = \alpha + i\beta$ und $u = v + iw$ EV zu λ. Dann gilt:

$$F(v) + i F(w) = F_\mathbb{C}(v+iw) = (\alpha+i\beta)(v+iw)$$
$$= \alpha v - \beta w + i(\beta v + \alpha w)$$

Damit folgt $F(v) = \alpha v - \beta w$, $F(w) = \beta v + \alpha w$.
Dann folgt auch

$$F_\mathbb{C}(v - iw) = F(v) - i F(w) = (\alpha v - \beta w) - i(\beta v + \alpha w)$$
$$= (\alpha - i\beta)(v - iw),$$

also $F_\mathbb{C}(\bar u) = \bar\lambda \bar u$.

(2) Ist $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ ein ONS, so auch $\{\bar u_1, \dots, \bar u_\ell\}$, denn man rechnet schnell nach, dass
$$\langle \bar u_i, \bar u_j \rangle = \overline{\langle u_i, u_j \rangle} = \bar\delta_{ij} = \delta_{ij}$$ gilt.
Die Aussage folgt dann mit (1).

(3) Sei $u_j = v_j + i w_j$ für $1 \le j \le \ell$. Da $\lambda \neq \bar\lambda$ EW von $F_\mathbb{C}$ und da $F_\mathbb{C}$ normal, gilt $E_\lambda(F_\mathbb{C}) \perp E_{\bar\lambda}(F_\mathbb{C})$ (Lemma 7.2). Damit folgt für $i \neq j$:
$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 = \langle u_i, \bar u_j \rangle \quad \text{und} \quad \langle u_i, \bar u_i \rangle = 0.$$
Wegen $v_j = \frac{1}{2}(u_j + \bar u_j)$, $w_j = \frac{1}{2i}(u_j - \bar u_j)$ folgt für $i \neq j$:
$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle \tfrac{1}{2}(u_i + \bar u_i), \tfrac{1}{2}(u_j + \bar u_j) \rangle = 0$$
$$\langle w_i, w_j \rangle = \langle \tfrac{1}{2i}(u_i - \bar u_i), \tfrac{1}{2i}(u_j - \bar u_j) \rangle = 0, \quad \text{und}$$
$$\langle v_i, w_j \rangle = \langle \tfrac{1}{2}(u_i + \bar u_i), \tfrac{1}{2i}(u_j - \bar u_j) \rangle = 0.$$

Ferner folgt wegen $E_\lambda(F_\mathbb{C}) \perp E_{\bar\lambda}(F_\mathbb{C})$ für alle $1 \leq j \leq l$:

$$
\begin{aligned}
0 = \langle u_j, \overline{u_j}\rangle &= \langle v_j + i w_j, v_j - i w_j\rangle \\
&= \langle v_j, v_j\rangle - \langle w_j, w_j\rangle + i\underbrace{(\langle w_j, v_j\rangle + \langle v_j, w_j\rangle)}_{= 2\langle v_j, w_j\rangle} \\
&= \|v_j\|^2 - \|w_j\|^2 + i\, 2\langle v_j, w_j\rangle
\end{aligned}
$$

Damit folgt $\|w_j\|^2 = \|v_j\|^2$ und $\langle v_j, w_j\rangle = 0$.

Wegen $1 = \|u_j\|^2 = \|v_j + i w_j\|^2 \overset{v_j \perp w_j}{=} \|v_j\|^2 + \|w_j\|^2$

folgt dann $\|v_j\| = \|w_j\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Damit ist $\{\sqrt{2}v_1, \sqrt{2}w_1, \ldots, \sqrt{2}v_l, \sqrt{2}w_l\}$ ein ONS in $E_\lambda(F_\mathbb{C}) \oplus E_{\bar\lambda}(F_\mathbb{C})$ mit $2l$-Elementen, und damit eine ONB in $E_\lambda(F_\mathbb{C}) \oplus E_{\bar\lambda}(F_\mathbb{C})$. ∎

7.13 Satz (reelle normale Endomorphismen)

Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein endl. dim. euklidischer $\mathbb{R}$-VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann ex. eine ONB $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, w_1, \ldots, v_m, w_m\}$ von V mit

$$
A_F^B = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & & & 0 \\
& \ddots & & & & \\
& & \lambda_k & & & \\
& & & \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1\end{pmatrix} & & \\
& & & & \ddots & \\
0 & & & & & \begin{pmatrix}\alpha_m & \beta_m \\ -\beta_m & \alpha_m\end{pmatrix}
\end{pmatrix}
$$

Hierbei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die reellen EW von F (mit Vielfachheiten) und $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\overline{\mu_j} = \alpha_j - i\beta_j$ sind die komplexen EW von $F_\mathbb{C}$, $1 \leq j \leq m$ (mit Vielf.).

Bew: Sei $F_\mathbb{C} \in \mathrm{End}(V_\mathbb{C})$ die Komplexifizierung von F. Wähle zu jedem EW λ von $F_\mathbb{C}$ eine ONB $\{u_1, \ldots, u_l\}$ von $E_\lambda(F_\mathbb{C})$ wobei wir zu $E_{\bar\lambda}(F_\mathbb{C})$ die ONB $\{\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_l}\}$ wählen.

1. Fall: Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so können wir o.B.d.A $u_i \in V$ annehmen, denn ist $u_i = v_i + i w_i$ komplexe EV zu λ, so ist auch $\overline{u}_i = v_i - i w_i$ EV zu $\overline{\lambda} = \lambda$, und dann sind auch

$$v_i = \frac{1}{2}(u_i + \overline{u}_i) \quad , \quad w_i = \frac{1}{2i}(u_i + \overline{u}_i)$$

EV zu λ. Da $u_i \in LH\{v_i, w_i\}$ ist $\{v_1, w_1, \dots, v_e, w_e\}$ ein Erz. System von $E_\lambda(F_\mathbb{C})$. Nach Basisauswahlsatz enthält dieses eine Basis $\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_e\}$ von $E_\lambda(F_\mathbb{C})$. Wenden wir hierauf das Schmidtsche ON-Verfahren an (4.13) erhalten wir eine ONB $\{u_1', \dots, u_e'\}$ von $E_\lambda(F_\mathbb{C})$ mit u_i' reell (also $u_i' \in V$) $\forall 1 \leq i \leq e$.

Beachte: Die Anwend. des Schmidtschen Verf. auf reelle Vektoren führt wieder zu reellen Vektoren!

2. Fall: Ist $\mu, \overline{\mu} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Paar komplexer EW von $F_\mathbb{C}$, so folgt nach 7.12(3): Ist $u_i = \tilde{v}_i + i\tilde{w}_i$ und und $v_i = \sqrt{2}\,\tilde{v}_i$, $w_i = \sqrt{2}\,\tilde{w}_i$, so ist $\{v_1, w_1, \dots, v_e, w_e\}$ eine ONB von $E_\mu(F_\mathbb{C}) \oplus E_{\overline{\mu}}(F_\mathbb{C})$ und es gilt nach 7.12(4):

$$F(v_i) = \alpha v_i - \beta v_i, \quad F(w_i) = \beta v_i - \alpha w_i$$

wenn $\lambda = \alpha + i\beta$.

Da $V_\mathbb{C} = \bigoplus_{j=1}^{N} E_{\lambda_j}(F_\mathbb{C})$ wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ die paarw. versch. EV von $F_\mathbb{C}$.

Da $V_\mathbb{C} = \bigoplus_{j=1}^{k} E_{\lambda_j}(F_\mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \left(E_{\mu_j}(F_\mathbb{C}) \oplus E_{\overline{\mu}_j}(F_\mathbb{C})\right)$ (7.3)

Ist $B = \{u_1, \dots, u_k, v_1, w_1, \dots, v_m, w_m\}$, wobei $\{u_1, \dots, u_k\}$ die Vereinigung der in Fall 1 konstr. ONBs für die reellen EW λ_i, und $\{v_1, w_1, \dots, v_m, w_m\}$

die Vereinigung der im Fall 2. konstr. ONBs für $E_{\mu_j}(F_{\mathbb{C}}) \oplus E_{\bar{\mu}_j}(F_{\mathbb{C}})$, so erhalten wir eine ONB von $V_{\mathbb{C}}$ mit Elementen in V, und damit eine ONB von V mit A_F^B wie im Satz, denn:
Da $F(u_i) = \lambda_i u_i$ folgt A_F^B hat in der i-ten Spalte λ_i als Diagonaleintrag, und sonst nur Nullen.
Da $F(v_j) = \alpha_j v_j - \beta_j w_j$ und $F(w_j) = \beta_j v_j + \alpha_j w_j$ erhalten wir (da v_j an $k+2j-1$ der Stelle in B steht, und w_j an $k+2j$-ter Stelle in B steht):
In der $k+2j-1$-ten Spalte:
α_j an Stelle $k+2j-1$, $-\beta_j$ an Stelle $k+2j$
In der $k+2j$-ten Spalte:
β_j an Stelle $k+2j-1$, α_j an Stelle $k+2j$
und sonst nur Nullen! ∎

7.14 Folgerung: Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ normal. Dann ex eine orthogonale Matrix $O \in O(n)$ mit

$$O^* A O = O^T A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \alpha_m & \beta_m \\ -\beta_m & \alpha_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Bew: Wende 7.13 an auf $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und setze $O = (u_1, \dots, u_k, v_1, w_1, \dots, v_m, w_m)$, wenn $B = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, w_m\}$ die in 7.13 konstruierte ONB von $\mathbb{R}^n$ ist. ∎

Wir wollen dieses Resultat nutzen, um insb. orthogonale Endom. bzw. Matrizen besser zu verstehen: Wir benötigen:

7.15 Lemma Sei $(V,\langle\,,\rangle)$ endl. dim. unitärer oder eukl. $\mathbb{K}$-VR und sei $F \in \operatorname{End}(V)$.

(1) Ist F selbstadj. (also $F = F^*$), so ist jeder Eigenwert von F reell.

(2) Ist F unitär oder orthogonal, so gilt für jeden EW λ von F: $|\lambda| = 1$.

Bew: (1) Sei λ EW von F mit $F = F^*$ und sei $0 \neq v$ EV zu λ. Nach 7.2 ist dann v auch EV zu F^* zum EW $\bar{\lambda}$. Damit folgt

$$\lambda v = F(v) \overset{F=F^*}{=} F^*(v) = \bar{\lambda} v, \text{ also } \lambda = \bar{\lambda}.$$

(2) Da F unitär bzw. orthog. gilt $\langle F(v), F(v)\rangle = \langle v, v\rangle$ für alle $v \in V$. Ist dann $0 \neq v \in V$ EV zum EW λ, so folgt $0 \neq \langle v, v\rangle = \langle F(v), F(v)\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = |\lambda|^2 \langle v, v\rangle$, also $|\lambda|^2 = 1$, und dann auch $|\lambda| = 1$. ∎

Wir kommen nun zu sehr wichtigen Folgerungen von Satz 7.13:

7.16 Folgerung: Sei $(V,\langle\,,\rangle)$ endl. dim eukl. $\mathbb{R}$-VR, und sei $F \in \operatorname{End}(V)$ selbstadj, also $F = F^*$. Dann ex. eine ONB $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V mit

$$A_F^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Insb. ist F reell diagonalisierbar!

Analog: Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A = A^T$, so ex. eine orthog. Matrix $O \in O(n)$ mit

$$O^T A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Insb. ist A reell diagonalisierbar.

Bew: Der Bew. folgt sofort aus 7.13, 7.14 und 7.15(1). ∎

7.17 Folgerung: Sei $(V,\langle,\rangle)$ endl. dim. eukl. $\mathbb{R}$-VR und sei $F \in O(V)$ ein orthog. Endom. Dann ex. eine ONB $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V mit

$$A_F^B = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\alpha_m & -\sin\alpha_m \\ \sin\alpha_m & \cos\alpha_m \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Analog: Ist $A \in O(n)$ eine orthog. $n \times n$ Matrix, so ex. eine orthog. Matrix $O \in O(n)$ mit $O^T A O = (*)$.

Bew: Nach 7.15(2) ist jeder reelle Eigenwert von F (bzw. A) 1 oder -1, und jeder komplexe EW μ erfüllt $|\mu| = 1$. Dann gilt $\mu = \cos\alpha - i\sin\alpha$ für ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, und der Satz folgt sofort aus 7.13 und 7.11. ■

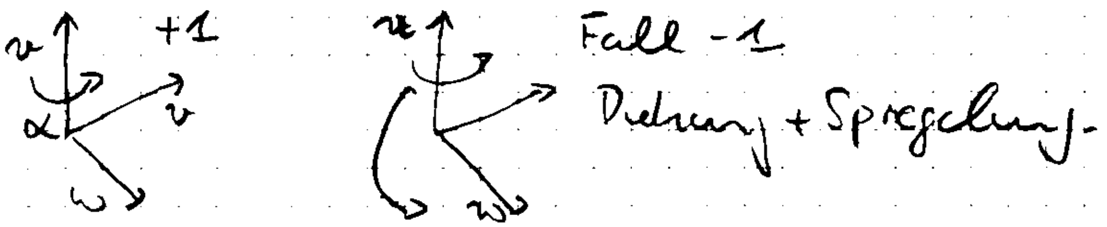
Wir sehen also, dass jede orthog. lin. Abb. sich aus Drehungen geeigneter Teilebenen und Spiegelungen an geeigneten Achsen zusammen setzt. (Beachte: Ein Paar $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ entspricht dabei einer Drehung mit Winkel π!)

7.18. Anwendung im Fall $n=3$:
Ist $A \in M(3\times 3, \mathbb{R})$ orthogonal, so ex. eine ONB $B = \{u, v, w\}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass die orthog. Abb.
$$F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ x \mapsto Ax$$
bzgl. B eine Darstellungsmatrix der Form
$$A_F^B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in [0, 2\pi) \text{ besitzt.}$$

Ist $\alpha = 0$, so ist $A_F^B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\alpha = \pi$, so ist $A_F^B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten so alle Fälle aus 7.17. Setzen wir dann $O = (u, v, w)$, so gilt

$$O^T A O = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Im Fall $+1$ ist F_A eine Drehung mit dem Winkel α um die durch u aufgespannte Drehachse. Im Fall -1 ist F_A die Drehung mit Winkel α um u-Achse, gefolgt von einer Spiegelung an der v,w-Ebene.



Es gilt $\det(A) = 1$ g.d.w. A ist eine Drehung, das heißt die Gruppe $SO(3)$ besteht genau aus den Drehungen des $\mathbb{R}^3$ durch geeignete Achsen durch den Nullpunkt.

Wir schließen den Abschnitt mit einer geeigneten Anwendung von Satz 7.3 und 7.13 für positiv definite Endomorphismen (bzw. Matrizen).

7.19 Satz Sei $(V, \langle , \rangle)$ endl. dim. unitärer oder eukl. $\mathbb{K}$-VR und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ selbstadj. (also $F = F^*$). Dann sind äquivalent:

(1) F ist positiv definit.

(2) Alle EW von F sind positiv.

Analoges gilt für eine selbstadj. Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$.

Bew: Da $F = F^*$ sind alle EW von F reell und es ex ONB $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V mit $A_F^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

(2) ⇒ (1): Es gelte $\lambda_i > 0 \; \forall \, 1 \le i \le n$. Ist dann $0 \ne v \in V$ bel., so ex. $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ und dann gilt mit $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$

$$\langle F(v), v \rangle = \langle A_F^B x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 > 0,$$

da mindestens ein $x_i \ne 0$. Also ist F pos. def.

(1) ⇒ (2): Sei F pos. def. Ann: $\exists$ EW λ von F mit $\lambda \le 0$. Ist dann $0 \ne v \in V$ EV zu λ, so gilt $\langle F(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\ge 0} \le 0$, und F ist nicht positiv definit! ∎