§1.3 Allgemeingültige Formeln

Def: Eine L-Fml ϕ heißt allgemeingültig, wenn sie für alle Belegungen β in allen L-Strukturen gilt.
Schreibe dafür
$$\models \phi.$$

ϕ L-Aussage: ϕ allgemeingültig $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A} \models \phi$ f.a. L-Str. $\mathfrak{A}$.

Bem: $\phi(x_1,..,x_n)$ allgemeingültig
$\Leftrightarrow$ f.a. $\mathfrak{A}$, $a_1,..,a_n \in A$ ist $\mathfrak{A} \models \phi(a_1,..,a_n)$
$\Leftrightarrow$ f.a. $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A} \models \forall x_1..x_n\, \phi(x_1,..,x_n)$
$\Leftrightarrow$ $\underbrace{\forall x_1..x_n\, \phi(x_1,..,x_n)}_{\text{Aussage}}$ allgemeingültig

Beispiele:
- $\exists x\,(R(x) \wedge S(x)) \rightarrow (\exists x\, R(x) \wedge \exists y\, S(y))$
- $\exists x\; R(x,y) \rightarrow (\exists x\; R(x,y) \vee S(z))$

Lemma 1.7: Sei ϕ eine L-Fml und K eine Erweiterung von L. Dann ist ϕ als L-Fml allgemeingültig gdw. ϕ als K-Fml allgemeingültig ist.

Beweis: Nach Bem. gilt OE ϕ Aussage.
"$\Rightarrow$" Sei $\mathfrak{A} = (A, (z^{\mathfrak{A}})_{z\in K})$ eine K-Struktur,
sei $\mathfrak{A}\restriction_L = (A, (z^{\mathfrak{A}})_{z\in L}$ die Einschränkung von $\mathfrak{A}$ auf L.
Nun gilt $\mathfrak{A} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{A}\restriction_L \models \phi$.
"$\Leftarrow$" Sei $\mathfrak{A} = (A, (z^{\mathfrak{A}})_{z\in L})$ L-Struktur.
Expandiere $\mathfrak{A}$ zu einer K-Struktur $\mathfrak{B}$ (geht, da $A \neq \emptyset$)
Nun gilt wieder $\underbrace{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}\restriction_L} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi$. ☒

Tertium non datur   Modus ponens

Bem: Formeln wie $(\phi \vee \neg\phi)$ oder $(\phi \wedge (\phi \to \psi)) \to \psi$ sind allgemeingültig, weil sie in einer Struktur (unabh. vom Wahrheitswert der Teilformeln ϕ und ψ) immer wahr sind
⇝ Tautologien! Brauche Aussagenlogik für präzise Def.

§13 Aussagenlogik

Aussagenlogische Formeln bauen sich aus Aussagenvariablen $(p_0, p_1, p_2, \dots)$ und den Junktoren $\neg, \wedge$ auf.

Rekursive Def: jede aussagenlogische Fml g hat eine der folgenden Formen

(A1) $g = p_i$ für p_i Aussagenvar.

(A2) $g = \neg f$ für f aussagenlog. Fml

(A3) $g = (f_1 \wedge f_2)$ -"- f_1, f_2 -"-

Def: Eine aussagenlogische Belegung ist eine Abb. $\mu: \{p_0, p_1, p_2, \dots\} \to \{W, F\}$ ← Wahrheitswerte

Sei g aussagenlog. Fml, μ Belegung. Definiere

$$\mu(g) = \begin{cases} \mu(p_i) & \text{falls } g = p_i \\ \neg\mu(f) & \text{falls } g = \neg f \\ \mu(f_1) \wedge \mu(f_2) & \end{cases}$$

mit $\neg: \{W, F\} \to \{W, F\}$, $\neg(W) = F$, $\neg(F) = W$

$\wedge: \{W, F\}^2 \to \{W, F\}$ mit:

$\wedge$	W	F
W	W	F
F	F	F

$\neg$	
W	F
F	W

"Wahrheitstafeln"

Def: Eine aussagenlogische Fml f heißt allgemeingültig, wenn sie bei allen Belegungen den Wahrheitswert $\mu(f) = W$ bekommt.

Bsp: p, q Aussagenlog. Var.
$f = (p \vee \neg p)$ $\quad g = (p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q)$
sind allgemeingültig.

Bemerkung: verwende $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie üblich als Abkürzungen.

Gegenbsp: $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ nicht allgemeingültig

$$\underbrace{\underbrace{(F \rightarrow W)}_{W} \rightarrow \underbrace{(W \rightarrow F)}_{F}}_{F}$$

Wenn wir die Variablen p_i einer aussagenlog. Fml. $f(p_1, \ldots, p_n)$ durch L-Fml. ϕ_i ersetzen, erhalten wir L-Fml $f(\phi_1, \ldots, \phi_n)$

Def: Eine Tautologie entsteht aus einer allgemeingültigen logischen Fml. durch Ersetzen der Variablen durch L-Fml.

Bsp: $\phi \vee \neg \phi$ $\quad (\phi \wedge (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$

Lemma 1.8 Tautologien sind allgemeingültig

Bew: Sei $f(p_1, \ldots, p_n)$ aussagenlog. Fml., $\mathfrak{A}$ L-Struktur, $\phi_1, \ldots, \phi_n$ L-Fml., β Belegung. Definiere aussagenlog. Belegung
$$\mu_\beta(p_i) = W \iff \mathfrak{A} \models \phi_i[\beta] \quad \text{für } 1 \le i \le n.$$
Wir zeigen (per Ind. über den Aufbau von f):
$$\mathfrak{A} \models f(\phi_1, \ldots, \phi_n) \iff \mu_\beta(f) = W$$

· $f = p_i$ $\quad \mathfrak{A} \models \phi_i[\beta] \Leftrightarrow \mu_\beta(p_i) = W$ $\quad$ Nach Konstruktion von μ_β

· $f = \neg g$ $\quad \mathfrak{A} \models f(\phi_1, \dots, \phi_n)[\beta]$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg g(\phi_1, \dots, \phi_n)[\beta]$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models g(\phi_1, \dots, \phi_n)[\beta]$$

$$\overset{\text{I.V.}}{\Leftrightarrow} \mu_\beta(g) = F$$

$$\Leftrightarrow \mu_\beta(f) = W$$

· $f = g_1 \wedge g_2$ $\quad$ analog. ☑

Lemma 1.9 (Axiome der Gleichheit) Die folgenden L-Aussagen sind allgemeingültig:

(Reflexivität) $\quad \forall x \; x \doteq x$

(Symmetrie) $\quad \forall x, y \; x \doteq y \to y \doteq x$

(Transitivität) $\quad \forall x, y, z \; x \doteq y \wedge y \doteq z \to x \doteq z$

(Kongruenz I) $\quad \forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \; x_1 \doteq y_1 \wedge \dots \wedge x_n \doteq y_n$
$\quad \to f(x_1, \dots, x_n) \doteq f(y_1, \dots, y_n)$

für f n-stelliges Fkt.zeichen

(Kongruenz II) $\quad \forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \; x_1 \doteq y_1 \wedge \dots \wedge x_n \doteq y_n$
$\quad \to (Rx_1 \dots x_n \leftrightarrow Ry_1 \dots y_n)$

Bew: klar.

Lemma 1.10 (∃-Quantorenaxiome) Sei ϕ L-Fml., t L-Term, x frei für t in ϕ.

Dann ist $\phi \frac{t}{x} \to \exists x \, \phi$ allgemeingültig.

Bew: Sei $\mathfrak{A}$ L-Struktur, β Belegung.

$$\mathfrak{A} \models \phi \tfrac{t}{x} [\beta] \overset{1.6}{\Rightarrow} \mathfrak{A} \models \phi\left[\beta \tfrac{t^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}\right]$$

$$\Rightarrow \mathfrak{A} \models \exists x \, \phi[\beta].$$ ☑

Bsp: [notwendig "x frei für t"] Übungsblatt 2.

Lemma 1.11 (Modus Ponens) Wenn ϕ und $(\phi \to \psi)$ allgemeingültig sind, dann auch ψ.

Bew: Klar.

Lemma 1.12 ($\exists$-Einführung) Wenn x nicht frei in ψ vorkommt und $\phi \to \psi$ allgemeingültig ist, dann ist auch $\exists x\, \phi \to \psi$ allgemeingültig.

Bew: Sei $\mathfrak{A} \models \exists x\, \phi[\beta]$, dann ex. $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \phi[\beta\frac{a}{x}]$ ist $\phi \to \psi$ allg. gültig, dann folgt $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$
Nach 1.5 folgt $\mathfrak{A} \models \psi[\beta]$, da x nicht frei in ψ $\square$

§ 1.4 Der Gödelsche Vollständigkeitssatz.

Def (Hilbertkalkül): Sei L eine Sprache. Eine L-Fml. ist beweisbar, wenn sie

(1.) eine Tautologie ist
(2.) ein Gleichheitsaxiom ist
(3.) ein $\exists$-Quantorenaxiom ist
(4.) sich mit Hilfe des Modus Ponens aus zwei beweisbaren L-Formeln ergibt.
(5.) oder wenn sie sich mittels der Regel $\exists$-Einführung aus einer beweisbaren L-Fml. ergibt.

Schreibe dann $\vdash_L \phi$.

Erstes großes Ziel

Satz 1.13 Eine L-Fml ist genau dann allgemeingültig, wenn sie beweisbar ist:

$$\models \phi \iff \vdash_L \phi$$

$\leadsto$ $\vdash_L$ ist unabh. von der Sprache, schreibe später $\vdash$.

Beweis 1.13 "⇐" Wenn $\vdash_L \phi$ gilt, ist ϕ nach 1.8. - 1.12 allgemeingültig.
"⇒" braucht mehr Zutaten!

Lemma 1.14.
1. (Aussagenlogik) Wenn $\phi_1 \ldots \phi_n$ beweisbar sind und $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \to \psi$ eine Tautologie ist, ist auch ψ beweisbar.
2. Wenn x frei für t in ϕ ist (∀-Quantorenaxiome)
$$\vdash_L \forall x \phi \to \phi\frac{t}{x}$$
3. (∀-Einführung) Wenn x nicht frei in ϕ ist, dann folgt aus $\vdash_L \phi \to \psi$ ~~die~~ bereits $\vdash_L \phi \to \forall x \psi$.
Insbesondere folgt dann aus $\vdash_L \psi$ schon $\vdash_L \forall x \psi$.

Bsp: Die (allgemeingültige) Aussage $\exists x \forall y Rxy \to \forall y \exists x Rxy$ ist beweisbar:
(i) $\vdash_L \forall y Rxy \to Rxy$ (∀-Quantorenaxiom)
(ii) $\vdash_L Rxy \to \exists x Rxy$ (∃-Quantorenaxiom)
(iii) $\vdash_L \forall y Rxy \to \exists x Rxy$ (Aussagenlogik)
(iv) $\vdash_L \forall y Rxy \to \forall y \exists x Rxy$ (∀-Einführung)
(v) $\vdash_L \exists x \forall y Rxy \to \forall y \exists x Rxy$ (∃-Einführung)

Bew. von 1.4
1. $((\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \to \psi) \to (\phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots (\phi_n \to \psi) \ldots))$ ist eine Tautologie.
Modus Ponens $\vdash_L (\phi_1 \to (\phi_2 \to \ldots (\phi_n \to \psi)) \ldots)$
Wende MP n-fach an: $\vdash_L \psi$.

(nun: Vorlesung Stefan)