Prof. Dr. F. Jahnke
Dr. S. Hoffelner

Universität Münster
Sommersemester 2018

Logische Grundlagen
Übungsblatt 02

Aufgabe 1. Sei L eine Sprache und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei L-Strukturen. Ein *Homomorphismus* h von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist eine Abbildung $h : A \to B$ so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes n-stellige Relationssymbol $R \in L$, jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in L$ und jedes Konstantensymbol $c \in L$ gilt:

a) $(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ impliziert dass $(h(a_1), ..., h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$
b) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), ..., h(a_n))$
c) $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

Eine L-Formel φ heisst positiv existentiell wenn man sie induktiv aus atomaren Formeln mittels $\wedge$, $\vee$ und dem Existenzquantor $\exists$ bilden kann.
Sei h ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, sei φ eine positive existentielle L-Formel und β eine beliebige A-Belegung. Zeigen Sie dass $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ impliziert dass $\mathfrak{B} \models \varphi[h \circ \beta]$.

Aufgabe 2. Sind die folgenden Formeln allgemeingültig? Sind sie Tautologien?

a) $(\forall x Rxy \to (\exists z Pz \to Px)) \leftrightarrow ((\forall x Rxy \wedge \exists Pz) \to Px)$
b) $(\exists x \forall y Rxy \to \forall y \exists x Rxy)$
c) $(\forall z Rzfxz \to \exists x \forall z Rzx)$

Warum widerspricht das Ergebnis aus *c*) nicht dem $\exists$-Quantorenaxiom das Sie in der Vorlesung kennengelernt haben?

Aufgabe 3. Es sein $M := \{p_0, p_1, ...\}$ eine Menge von Aussagenvariablen. Wir schreiben $\varphi(p_0, p_1, ..., p_n)$ für eine aussagenlogische Formel die nur $p_0, ..., p_n$ enthält. Einen aussagenlogische Formel hat *konjunktive Normalform* (KNF), wenn gilt:

$$\varphi = (\varphi_{0,0} \vee ... \vee \varphi_{0,k_1}) \wedge ... \wedge (\varphi_{l,0} \vee ... \vee \varphi_{l,k_l})$$

für $\varphi_{r,s} \in \{p_i, \neg p_i \, : \, i \in \mathbb{N}\}$.

(Bitte wenden.)

Analog hat eine aussagenlogische Formel φ *disjunktive Normalform* (DNF), wenn gilt

$$\varphi = (\varphi_{0,0} \wedge ... \wedge \varphi_{0,k_1}) \vee ... \vee (\varphi_{l,0} \wedge ... \wedge \varphi_{k,k_l})$$

für $\varphi_{r,s} \in \{p_i, \neg p_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$. Zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ sind *logisch äquivalent*, kurz $\varphi \sim \psi$, wenn sie unter gleichen Belegungen wahr werden.

Zeigen Sie: Zu jeder aussagenlogischen Formel $\varphi(p_0, ..., p_n)$ existieren Formeln φ_{DNF} und φ_{KNF} in DNF bzw. KNF so dass gilt:

$$\varphi \sim \varphi_{DNF} \sim \varphi_{KNF}$$

Aufgabe 4. Wir sagen dass eine Menge von Junktoren ein vollständiges Junktorensystem ist wenn sich jede Funktion $F : [\mathbf{W}, \mathbf{F}]^n \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$ durch eine aussagenlogische Formel $f(p_1, ..., p_n)$ darstellen lässt, also dass

$$F(\mu(p_1), ..., \mu(p_n)) = \mu(f)$$

für alle Belegungen $\mu : \{p_1, ..., p_n\} \to \{\mathbf{W}, \mathbf{F}\}$.

Zeigen Sie, dass der *Sheffer'sche Strich*

$$(f|g) := \neg(f \wedge g)$$

ein vollständiges Junktorensystem bildet.

ACHTUNG: Abgabe bis Freitag, den 27.04.18, 12:00 Uhr in Briefkasten 161
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/franziska.jahnke/logik`