§13 Eigenwerte

(13.1) <u>Bsp</u> i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^N \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^N = \;?$ $\quad * \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$* \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ 6-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2^N \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Sei $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ die Basiswechselmatrix zum Basiswechsel $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Es ist $S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Damit folgt $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} S^{-1}$.
Daher $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^N = \left(S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} S^{-1}\right)^N = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^N S^{-1} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^N \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 3-2^{N+1} & 2-2^{N+1} \\ -3+3\cdot 2^N & -2+3\cdot 2^N \end{pmatrix}$.

(13.2) <u>Def</u> Ein Endomorphismus $f: V \to V$ eines endlich dimensionalen K-VR heißt $\boxed{\text{diagonalisierbar}}$ falls es eine Basis B von V gibt so dass $m_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

(13.3) <u>Bem</u> Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann ist $f_A : K^n \to K^n$ genau dann diagonalisierbar wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist. Wir sagen dann auch dass A diagonalisierbar ist.

(13.4) <u>Def</u> Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. $\lambda \in K$ heißt ein $\boxed{\text{Eigenwert}}$ von f, falls es $v \in V, v \neq 0$ gibt mit $f(v) = \lambda v$. In diesem Fall heißt v ein $\boxed{\text{Eigenvektor}}$ (oder genauer ein λ-Eigenvektor) von f.

(13.5) <u>Lemma</u> Sei $f: V \to V$ linear und B eine endliche Basis. Sei $v \in V$, $v \neq 0$, $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

i) v ist Eigenvektor zum Eigenwert λ von f.

ii) $K_B(v)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ von $m_B^B(f)$.

<u>Beweis</u>: Beides folgt da

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_B"'] & V \arrow[d, "K_B"] \\ K^n \arrow[r, "m_B^B(f)"] & V \end{tikzcd}$$

kommutiert. $\square$

(13.6) <u>Prop</u> Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $\dim_K V < \infty$. Dann sind äquivalent:

i) f ist diagonalisierbar.

ii) V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren.

<u>Beweis</u>: i) $\Rightarrow$ ii) Sei f diagonalisierbar. Dann gibt es eine Basis $B = b_1, \dots, b_n$ mit $m_B^B(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Dann gilt $f(b_i) = \lambda_i b_i$ für $i = 1, \dots, n$. Damit ist B eine Basis aus Eigenvektoren.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $B = b_1, \dots, b_n$ eine Basis aus Eigenvektoren. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $f(b_i) = \lambda_i b_i$ für $i = 1, \dots, n$. Damit ist $m_B^B(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und f diagonalisierbar. $\square$

(13.7) <u>Bsp</u> Betrachte $f: K^2 \to K^2$ mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$. Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f mit Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ so gilt $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$, also $\lambda \cdot y = 0$ und $\lambda x = y$. Wäre $\lambda \neq 0$, so folgt $y = 0, x = 0$, also $v = 0$ ↯. Also ist $\lambda = 0$. Dann folgt $y = 0$. Andererseits ist $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $x \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Also ist $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \neq 0 \right\}$ die Menge aller Eigenvektoren. Insbesondere gibt es keine Basis aus Eigenvektoren, f ist also nicht diagonalisierbar.

(13.8) <u>Bem</u> Für $B = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von K^2 und f wie in (13.6) gilt $m_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(13.9) <u>Bsp</u> i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $Av = \lambda v$. Dann gilt $\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$. Also $x_1 = \lambda x_2 = -\lambda^2 x_1$. Da $1 \neq -\lambda^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt $x_1 = 0$. Dann ist auch $x_2 = 0$. Insbesondere besitzt $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ keine Eigenwerte.

ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Dann sind $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A:

$A\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = -i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Insbesondere ist $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ diagonalisierbar.

(Es ist sprachlich unbequem zwischen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ zu unterscheiden. Oft werden i) & ii) wie folgt formuliert:

i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt über $\mathbb{R}$ keine Eigenwerte.

ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.)

(13.10) <u>Bem</u> Sei $f: V \to V$ linear und $\lambda \in K$. Dann ist $V_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ ein Unterraum von V:

i) $0 \in V_\lambda$ ii) $v, v' \in V_\lambda \Rightarrow f(v+v') = f(v) + f(v') = \lambda v + \lambda v' = \lambda(v+v') \Rightarrow v+v' \in V_\lambda$

iii) $v \in V_\lambda, \mu \in K \Rightarrow f(\mu v) = \mu f(v) = \mu \lambda v = \lambda(\mu v) \Rightarrow \mu v \in V_\lambda$.

Es gilt $V_\lambda = \{v \in V \mid v \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda\} \cup \{0\}$.

V_λ heißt der $\boxed{\text{Eigenraum}}$ von f zum Eigenwert λ.

(13.11) <u>Satz</u> Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Sind $v_1, \dots, v_r \in V$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von f, so ist $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig.

<u>Beweis</u>: Durch Induktion nach r.

Induktionsanfang: $r = 0$ ✓

Induktionsschritt: $r-1 \leadsto r$

Sei $\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i = 0$. Dann $0 = f\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i v_i$.

Da auch $\sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_1 v_i = 0$ folgt

$\sum_{i=2}^r \alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_1)}_{\neq 0} v_i = 0$. Nach Induktionsannahme sind $v_2, \dots, v_r$ linear unabhängig. Also $\alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$.

Damit muss auch $\alpha_1 = 0$ sein. □

(13.12) <u>Korollar</u> Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $\dim_K V = n$.

i) f besitzt höchstens n verschiedene Eigenwerte.

ii) besitzt f n verschiedene Eigenwerte so ist f diagonalisierbar.

<u>Beweis</u>: i) folgt aus (13.11). ii) folgt aus (13.11) und (13.5). □

(13.13) <u>Bem</u> Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $\lambda \in K$. Der Eigenraum V_λ ist der Kern von $(f - \lambda \cdot id) \in \mathrm{End}_K(V)$.

(13.14) <u>Def</u> Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $\dim_K V < \infty$. Dann heißt χ_f definiert durch $\chi_f(\lambda) := \det(\lambda \cdot id_V - f)$ das $\boxed{\text{charakteristische Polynom}}$ von f.

(13.15) <u>Bem</u> Wir können χ_f als eine Abbildung $\chi_f: K \to K$ auffassen. Diese Abbildung wird immer durch ein normiertes Polynom $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ mit $a_{n-1}, \dots, a_0 \in K$ beschrieben. Über beliebigen Körpern können verschiedene Polynome die gleiche Abbildung beschreiben. (Ist zum Beispiel K endlich, so gibt es nur endlich viele Abbildungen $K \to K$, aber trotzdem unendlich viele Polynome.) In der LA II werden wir χ_f als ein Polynom auffassen.

(13.16) <u>Satz</u> Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $\dim_K V < \infty$. Dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von f wenn λ eine Nullstelle von χ_f ist, also $\chi_f(\lambda) = 0$ ist.

<u>Beweis:</u> $\chi_f(\lambda) = 0 \iff \det(\lambda \mathrm{id}_V - f) = 0 \iff \lambda \mathrm{id}_V - f$ nicht invertierbar $\iff \mathrm{Kern}(\lambda \mathrm{id}_V - f) \neq 0 \iff V_\lambda \neq 0 \iff \lambda$ ist Eigenwert von f. $\square$

(13.17) <u>Bsp</u> i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4$.

Also $\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 3$ oder $\lambda = -1$.

Die Eigenwerte von A sind 3 und -1. Insbesondere ist A diagonalisierbar.

ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{R}$. $\chi_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 + 1$.

Über $\mathbb{R}$ besitzt χ_B keine Nullstellen und B keine Eigenwerte.

iii) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{C}$. Über $\mathbb{C}$ besitzt χ_B die Nullstellen $(1-i)$ und $(1+i)$. Insbesondere ist B über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

(13.18) <u>Satz</u> Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $\Lambda \subseteq K$ die Menge der Eigenwerte von f.

Sei $V_\Lambda := \sum_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$. Dann gilt $V_\Lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$.

<u>Beweis:</u> Sei $\sum_{i=1}^{r} v_i = 0$ mit $v_i \in V_{\lambda_i}$, $\lambda_i \in \Lambda$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.

Zu zeigen: $v_1 = \dots = v_r = 0$. Dies folgt aus (13.11). $\square$

(13.19) <u>Satz</u> Seien f, Λ, V_Λ wie in (13.18). Sei weiter $\dim_K V < \infty$.

Dann sind äquivalent:

i) f ist diagonalisierbar ii) $V = V_\Lambda$.

<u>Beweis:</u> "i) $\Rightarrow$ ii)". Nach (13.5) besitzt V eine Basis B aus Eigenvektoren. Sei $B_\lambda = B \cap V_\lambda$.

Dann $B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$, $B_\lambda \subseteq V_\lambda$. Also $B \subseteq \sum_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = V_\Lambda$. Also $V \subseteq V_\Lambda$.

Also $V = V_\Lambda$.

"ii) $\Rightarrow$ i)" Sei B_λ eine Basis von V_λ. Dann ist $B := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ eine Basis von $V_\Lambda = V$. Dies ist eine Basis von Eigenvektoren von f. Nach (13.5) ist f also diagonalisierbar. $\square$