Abgabe Freitag, 13. Dezember 2013, bis 8.15 Uhr in die jeweiligen Kästen.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Eine *Hyperebene* im $\mathbb{R}^n$ ist ein $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum $H \subset \mathbb{R}^n$. Eine *affine Hyperebene* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form $x_0 + H = \{ x_0 + v \mid v \in H \}$, wobei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest ist und $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene ist. Zeigen Sie: Jede affine Hyperebene ist eine Nullmenge.

(Hinweis: Benutzen Sie Translationsinvarianz des Integrals, um das Problem auf den Fall einer Hyperebene zu reduzieren. Dann kann man die Hyperebene als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen schreiben. Es genügt dann zu zeigen, dass jede dieser Mengen eine Nullmenge ist.)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zeigen Sie: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ integrierbarer Funktionen g_k auf $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \int |g_k| dx < \infty$ konvergiert fast überall gegen eine integrierbare Funktion, und es gilt

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k \, dx.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir verwenden die Halbnorm $\|\_\|_1$ um für jedes $p \in [1, \infty)$ folgende Halbnorm zu definieren:

$$\|f\|_p := (\| \, |f|^p \, \|_1)^{1/p} \, ,$$

wobei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist. Zeigen Sie: Für beliebige $p, q \in [1, \infty)$ mit $p \neq q$ gibt es Funktionen $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_p < \infty$ und $\|f\|_q = \infty$, während $\|g\|_p = \infty$ und $\|g\|_q < \infty$.

Zusatzaufgabe **(4 Extrapunkte)**:

Ist dies auch mit stetigen Funktionen möglich?